

الفيزياء الكلاسيكية والحديثة

المجلد الأول

تأليف

كينيث و. فورد

جامعة مساتشوستس؛ بوسطن؛ الولايات المتحدة الأمريكية.

ترجمة

الدكتور همام غصيب و الدكتور عيسى شاهين

قسم الفيزياء - كلية العلوم؛ الجامعة الأردنية

راجع الكتاب وأشرف على إخراجه

الدكتور همام غصيب

منشورات مجمع اللغة العربية الأردني

١٤٠١ هـ - ١٩٨١ م

. صدرَ هذا الكتابُ في الأصل بالعنوان التالي :

Kenneth W. Ford

UNIVERSITY OF MASSACHUSETTS AT BOSTON

Volume 1

Classical and Modern Physics

A TEXTBOOK FOR STUDENTS OF SCIENCE AND ENGINEERING

John Wiley & Sons, Inc.

1972

Santa Barbara New York London Sydney Toronto

مَقْدَمَةُ الْمُؤَلِّفِ

هذا كتابٌ جامعيٌّ مُناسِبٌ لمقرّر تمهيدِي في الفيزياء يمتدُّ على ثلاثة فصولٍ دراسيةٍ لطلابِ العلومِ والهندسة . فيمكنُ استخدامُ الثُلُثينِ الأوّلينِ من الكتابِ تقريباً (الأجزاء ١ - ٥) كمتنٍ لمقرّر عامٍ دراسيٍّ واحدٍ في الفيزياء الكلاسيكية ؛ بينما يمكنُ استخدامُ الثُلثِ الأخيرِ (الجزآن ٦ و ٧) كمتنٍ لمقرّر فصلٍ واحدٍ في الفيزياء الحديثة . كذلك بحذفِ بنودٍ وبنودٍ فرعيةٍ معينة - أو حتى أبوابٍ بكاملها - فإنه يجبُ أيضاً أن يَبْقِيَ باحتياجاتِ مقرّر عامٍ واحدٍ بما فيه الفيزياء الحديثة . ونظراً لطولِ الكتابِ الهائلِ والأنواعِ المتعدّدةِ من المقرّراتِ التي قد يُستخدَمُ لأجلِها ، فإنه منشورٌ في ثلاثة مجلّداتٍ [فضلاً عن طبعةٍ أصليّةٍ تضمُّ المجلّدين ١ و ٢ معاً] . وأجزاءُ هذه المجلّداتِ هي كما يلي :

- ١ - مدخلٌ إلى الفيزياء
- ٢ - الرياضيات
- ٣ - الميكانيكا

المجلّدُ الأوّلُ

- ٤ - الديناميكا الحرارية
- ٥ - الكهرومغناطيسية

المجلّدُ الثّاني

- ٦ - النسبية
- ٧ - ميكانيكا الكمّ

المجلّدُ الثّالثُ

وتردُ الملاحقُ والفهارسُ الملائمةُ في نهايةِ كلّ مجلّد .

ولربّما كان في ذهنِ كلّ مؤلّفٍ ضَرْبٌ معيّنٌ من الطّلابِ يكتبُ لأجلِهِ . « فطالبي النّمودجي » قد درّسَ الفيزياءَ في المدرسةِ الثّانويّةِ ، وهو يتلقّى حسابَ التفاضلِ والتكاملِ بالتّزامنِ مع الفيزياءِ الجامعيّةِ . ثُمَّ إنه طالبٌ جادٌ لكنّه ليس بالضرورة

مَوْهوباً ؛ كما أَنَّهُ يَهْتَمُّ بِالْأَفْكَارِ علاوةً على المهاراتِ الفنيَّةِ المتخصَّصة ، ويستوعبُ على الوجهِ الأفضلِ عندما تُدَبِّلُ الاشتقاقاتُ الرِّياضيَّةُ بالتفسيراتِ الوصفيةِ والأمثلةِ الفيزيائيةِ . وبدلالةِ العبءِ الفكريِّ المُلقى على كاهلِ الطَّالِبِ ، فإنَّ هذا الكتابَ يمكنُ مقارنته مع الكتابِ الرَّائجِ لهالدي وَرَزْنَك * فهو أسهلُّ من مقررِ بيركلي في الفيزياء ** أو سلسلةِ مَعَهْدِ مَسَاتُوشِنس للتقنيةِ في الفيزياء التمهيدية § .

وَوَفَّقاً لتصوراتي في الأصل ، فقد كان القصدُ من وراءِ هذا الكتابِ أَنْ يَكُونَ « صيغةً تفاضليةً تكامليةً » لكتابي السابق ، « الفيزياء الأساسية » . † لكنْ ، بعد مُعَانَاةِ مراحلِ تطوريةٍ متعدِّدةٍ من الكتابةِ وإعادةِ الكتابةِ ، والحذفِ والإضافةِ ، فإنَّ الكتابَ بصورتهِ المنشورةِ الرَّاهنةِ لَيَتَمَيَّزُ عن سالفِهِ بأوجهِ شَتَّى فضلاً عن مستواه الرِّياضيِّ .

فبعضُ سِمَاتِ هذا الكتابِ الرَّئيسيةِ هي الآتية : (١) لقد حاولتُ أَنْ أَقَدِّمَ عَرَضاً مُوحَّداً للفيزياء الكلاسيكية والحديثة على السَّواءِ . فع أَنِّي اسْتَبَقَيْتُ التَّطَوُّراتِ النَّظَريَّةَ للنَّسْبَةِ وميكانيكا الكمِّ للجزأينِ الأخيرينِ من الكتابِ ، إلَّا أَنِّي أوردتُ أَفكاراً معيَّنةً (تحويلِ الكتلةِ إلى طاقة ، مثلاً ، والحدِّ الأقصى للسرعةِ في الطَّبيعةِ) في وقتٍ مبكَّرٍ ؛ كما أَنَّ أمثلةً حديثةً تُسْتَخْدَمُ غالباً للتدليلِ على قوانينِ كلاسِيكيةٍ . (٢) تمنحُ سلسلةٌ من الأبوابِ التمهيديةِ وقتاً كافياً لِانْضِاجِ نظرةِ الطَّالِبِ إلى الفيزياء وَهَيْمَتِهِ على الرِّياضيَّاتِ قبلِ الاقترابِ من تعقيداتِ الميكانيكا الكلاسيكيةِ . (٣) تُقدِّمُ أَفكارُ حسابِ التفاضلِ والتكاملِ (في البابِ الخامسِ) بصورةً أَكْمَلَ منها إلى حدِّ ما في معظمِ كتبِ الفيزياء الأخرى . (٤) لقد حاولتُ أَنْ أنتهَجَ مسلكاً إزاءَ علمِ الفيزياءِ يُبْنِي الطَّالِبَ على اتِّصالِ مع النَّظرةِ الشَّاملةِ إلى هذا الموضوعِ - اقتصادِ مفاهيمِهِ وبساطتها ، وأناقَةِ بِنْيَانِهِ الإجماليِّ - في نفسِ الوقتِ الذي يتضمَّنُ فِيهِ من المهاراتِ العمليَّةِ ويصقلُ مقدَّراتَهُ على حلِّ المسائلِ . (٥) للمساعدةِ على الدِّراسةِ والمراجعةِ ، قَسَمْتُ الكتابَ إلى عددٍ لا بأسَ به من البنودِ والبنودِ الفرعيةِ ؛ كما أَنَّ ملاحظاتٍ هامشيَّةً تسلِّطُ الأضواءَ على الأفكارِ الرَّئيسيةِ والمعادلاتِ الهامةِ ، وتُرَدُّ خلاصاتٌ للأفكارِ والتعاريفِ في ختامِ كُلِّ بابٍ . † (٦) لقد حاولتُ أَنْ أُبرزَ الإثارةَ الكامنةَ في الفيزياءِ بوصفِها فرعاً حيّاً متطوّراً من المعرفةِ ، يَنْبُضُ قُوَّةً على عدمِ اكتمالِهِ . كذلكِ أَضَفْتُ قَدراً محدوداً من الموادِ التَّاريخيةِ ، مُولِياً إياها بعضَ العنايةِ ؛ فأملُ أَنْ يَكُونَ جُلُّها تاريخاً حقيقياً وليس جملةً أساطيرِ .

وتهدفُ « ملاحظاتُ المؤلِّفِ على النَّصِّ » التي تبدأُ على صفحةِ (ج) إلى تزويدِ المدرِّسينِ بدليلٍ مُختَصَرٍ . ويمكنُ تشجيعُ الطَّالِبِ أيضاً على مطالعةِ هذه الملاحظاتِ . كذلكِ ، للمساعدةِ على حُسْنِ انتقاءِ الموادِ ، فإنَّ بعضَ البنودِ والبنودِ الفرعيةِ مُعلَّمةٌ بنجمةٍ (★) للإشارةِ إلى أنَّها اختياريةٌ . وقد يُعَلِّمُ بِنْدُ أو بِنْدُ فرعيٍّ هكذا إمَّا لكونِهِ أَصْعَبَ من المتوسِّطِ أو لِأَنَّهُ خارجُ عن نطاقِ التَّطَوُّرِ الرَّئيسيِّ لأحدِ الأبوابِ . وأيَّةُ إشارةٍ كهذه إلى الموادِ الاختياريةِ هي بالضرورةِ أمرٌ جَرَأَفُ نوعاً ؛ إذ أَنَّ معظمَ المدرِّسينِ لديهمُ أَفكارُهُم الخاصَّةُ - ولا ريبَ - عن أيِّ مادَّةٍ تُشْمَلُ وإيَّها تُحذفُ ؛ فالنَّجومُ تزوِّدُنا فقط بطائفةٍ أوَّلِيَّةٍ من الاقتراحاتِ .

David Halliday and Robert Resnick, *Physics* (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1966).

[وقد صدرتْ مؤخراً (١٩٧٨) طبعةٌ ثالثةٌ من هذا الكتابِ منقَّحةٌ ومزبَّدةٌ عليها .]

** *The Berkeley Physics Course* (New York: McGraw-Hill Book Co.) : وهو سلسلةٌ من خمسةِ مجلِّداتٍ لعدَّةِ مؤلِّفينِ .

§ *The M.I.T. Introductory Physics Series* (New York: W.W. Norton and Co.) : في سِتَّةِ مجلِّداتٍ .

† *Basic Physics* (New York: Xerox College Publishing, 1968).

‡ نلقتُ نظرَ القارئِ إلى أنَّ كُلَّ خلاصةٍ من هذه الخُلاصاتِ مطبوعةٌ في عمودينِ متوازيينِ ، بحيثُ (في كُلِّ صفحةٍ على حِدةٍ) يجبُ أَنْ يُقْرَأَ أوَّلَا العمودُ الأيمنُ برتِّه ، ومن ثَمَّ العمودُ الأيسرُ .

(المشرف)

وترد في ختام كل باب أسئلة وتمارين ومسائل . فالأسئلة ، باستثناءات معدودة ، ينبغي أن يُجاب عنها إنشائيًا . ويرمي العديد منها إلى استثارة التفكير وقد لا توجد له أجوبة صائبة معينة ؛ كما أن بعضها من الصعوبة بمكان . كذلك تهدف التمارين إلى توفير اختبارات مباشرة لفهم المادة في الباب بدون أي « لف أو دوران » . وتنطوي هذه على شغل حسابي بالإضافة إلى الجبر وبعض التفاضل والتكامل . وكثيراً ما قد يتطلب تمرين ما شرحاً مقتضباً فضلاً عن نتيجة مقدارية . أما المسائل فهي - على العموم - أكثر تحدياً : إذ قد تكون على صورة تمارين صعبة ؛ أو قد تضم معاً مواد من أكثر من بند واحد ؛ أو قد تبني على مواد موجودة في المتن لكنها تتعداها بعض الشيء . هذا ، وإن عدّ الأسئلة والتمارين والمسائل لكبير - أكبر بكثير من العدد الذي قد يُعَمَّن عادة في مقرر ما . ولقد وفّر هذا العدد الكبير كيمًا يفي باحتياجات وأذواق شتى المدرسين ، وكما يمكن الطالب من التمرس في المواد التي لم تدرّس ، وكما يُحوّل المدرّس - إن رغب - أن يختار أسئلة الامتحانات من الكتاب . ونظراً لطول الأبواب نوعاً وتعدد المواد الواردة في ختام كل باب ، فإننا نستخدم ملاحظات هامشية لتصنيف الأسئلة والتمارين والمسائل . فالأسئلة والتمارين معلّمة ببند معينة ؛ أما المسائل فموسومة بمواضيعها .

... لقد استُخدمت وحدات النظام الدولي SI (م ك ث) خلال الكتاب ؛ كما استُخدمت بعض الوحدات الخاصة - مثل السعرات الحرارية ، والوحدة الفلكية ، والإلكترون فولت ؛ كذلك تقتضي بعض التمارين والمسائل تحويلاً في الوحدات . بيد أنني لم أبذل أي جهد لجعل الطالب يُنمي أية إلفة روتينية مع أكثر من فئة واحدة من الوحدات . فلمساعدة الطالب في حالة مصادفته وحدات غاوسية (سرغث) في كتاب آخر أو في ورقة بحث ، فإن ملحق ه يحتوي على قائمة شاملة بمعادلات الكهرومغناطيسية بوحدات النظام الدولي والوحدات الغاوسية . وانحراف الهام الوحيد عن « الصفاء » في تناول الوحدات إنما يرد في البابين الثالث عشر والرابع عشر ، حيث يُستخدم السعرات الحرارية والكيلوسعرات على نفس النطاق كالجول ، وحيث يُعرّف عدد أفوغادرو بأنه عدد الجزيئات في مول (مل) واحد بدلاً من عددها في كيلومول (كرمول) واحد .

... إنني لأريد الطلاب أن يستمتعوا بهذا الكتاب وأن ينتفعوا به . وأحسب أنه سيخدم الغرض من ورائه على الوجه الأفضل إذا لم يدفع الطالب بسرعة قصوى خلال شطير كبير منه . فلربما زودتنا المعالجة الدقيقة لبعض المواد والحذف الحكيم لبعضها الآخر بتمهيد أفضل لشغل إضافي في الفيزياء والهندسة وعلوم أخرى مما قد تزودنا به رحلة خاطفة عبر كل بند .

كينيث و. فورد

(بعد ذلك يورد المؤلف - على صفحة مستقلة - لائحة بأسماء الذين عاونوه على تأليف وطباعة هذا الكتاب ، شاكرًا إياهم كما تقتضي الأمانة العلمية.)



ملاحظات المؤلف على النص

من بين أجزاء هذا الكتاب السبعة ، يزودنا الجزء الأول (مدخل إلى الفيزياء والرياضيات) بمادة تمهيدية وخلفية عامة . وثمة حرية اختيار كبيرة في الطريقة التي يمكن بها استخدام هذين الجزأين . أما الأجزاء الخمسة الباقية (الميكانيكا ، والديناميكا الحرارية ، والكهرومغناطيسية ، والنسبية ، وميكانيكا الكم) ، فهي مكرسة لنظريات كبرى معينة في الفيزياء . وأكمل معالجة رياضية هنا نجرها لنظريات الميكانيكا والكهرومغناطيسية والنسبية الخاصة ؛ بينما نتناول الديناميكا الحرارية وميكانيكا الكم باهتمام أكبر نوعاً بالظواهر الفيزيائية وأقل بالصياغة الرياضية . (ومع ذلك ، فلم أتخاش العناوين الأكثر تواضعاً ، مثل الحرارة والظواهر الذرية والنوية ، لأن هذه الأجزاء لتؤكد أيضاً وحدة وسلطان النظريات الفيزيائية ؛ كما أن الرياضيات لا تغوزها بأي حال من الأحوال .) وتقسيم الكتاب إلى أجزاء واختيار أبواب طويلة بعض الشيء تفضيلاً لأبواب أكثر عدداً لكن أقصر إنما يتوخيان نفس الغاية : أعني استبقاء البنيان الإجمالي للفيزياء في المائلة في الوقت الذي يكون فيه من اليسير كل اليسير للطلاب أن يرى هذا الموضوع وكأنه مجموعة مُحيرة من القطع المتناثرة غير المترابطة .

المجلد الأول

الجزء الأول : يزودنا الباب الأول بنظرة عامة موجزة إلى الفيزياء -علاقتها بالرياضيات والتقنية ، وتقسيمها إلى جانب نظري وآخر تجريبي ، وتطورها إبان القرون القليلة الماضية . وإني لأنصح بأن يسأل الطلاب أن يطالعوا هذا الباب الوجيز وأن يتدبروا بعض الأسئلة في نهايته حتى لو حظي بوقت تدريسي قصير .

وبالنسبة للطلاب الذين سبق لهم أن درسوا مقرراً في الفيزياء ، فإن جلّ فحوى الباب الثاني سيكون مراجعة وتعزيزاً لمادة درست من قبل . أما الطلاب الجدد في الفيزياء ، فسيرغبون - ولا ريب - في تركيز انتباه أكبر على هذا الباب ، الذي له عدة أهداف : أن يُقدّم وحدّات النظام الدولي SI ويُعرّف المعايير ، وأن يزودنا بتبصّرات نوعية عن مدلول عدد من المفاهيم الهامة ، كما وأن يوفّر إماعات مفيدة عن توافق الأبعاد الفيزيائية وحساب الوحدّات .

أما الباب الثالث فهو اختياري ويمكن حذفه بدون فقدّان الاستمرارية ، أو يمكن تعيينه للمطالعة « توحياً للمتعة » . لكن هناك بعض الأسباب الجديّة لوضع مسّح للجسبيات الأولى والطبيعة دون المجهريّة بالقرب من فاتحة كتاب عام في الفيزياء ؛ وهذه الأسباب مشروحة في البند ٣,١ . فالجسبيات تُستخدَم من وقت لآخر في أجزاء لاحقة من الكتاب لأغراض تدليلية ، مع أن هذه الاستعمالات لا تستلزم استيعاباً لكل مادة الباب الثالث .

وتُقدّمُ قوانينُ الحفظِ المطلقة السبعةُ المُعتبرةُ في البابِ الرابعِ موضوعاً هاماً كما تُكشِفُ النقابَ عن بعضِ العناصرِ المشتركةِ للفيزياءِ الكلاسيكيةِ والحديثةِ . وكما أنَّ المفاهيمَ موضعَ النقاشِ في البابِ الثاني تُشَدِّبُ وتُصَقِّلُ في أبوابٍ لاحقة ، فإنَّ معظمَ القوانينِ قيدَ البحثِ في هذا البابِ تُطوِّرُ بإسهابٍ أكثرَ فيما بعد . ومقدورُ المدرِّسِ الذي يُفَضِّلُ الانتقالَ بسرعةٍ إلى الميكانيكا وقوانينِ نيوتن أن يحدِّفَ هذا البابَ أو أن يُرجِّعَهُ حتَّى يصلَ إلى الأبوابِ الثامنِ والتاسعِ والعاشرِ ، حيثُ تعنُّ ثمانيةُ قوانينٍ حفظِ الزخمِ والزخمِ الزاوي والطاقة .

الجزءُ الثاني : إنَّ تعزيزَ جُلِّ (لكن ليس كُلِّ) التَطَوُّراتِ الرِّياضيَّةِ في الكتابِ في هذا الجزءِ المبكرِ إنما يُمَنِّحُ المدرِّسَ الكثيرَ من المرونة . فقد يتوقَّفُ ليعتبرَ موضوعاتٍ رياضيَّةً لذاتها ، أو قد يتخطى بعضَ بنودِ البابينِ الخامسِ والسادسِ على أن يعودَ إليها لاحقاً . ومع أنَّ هذا الجزءَ مَوْسُومٌ بالعنوانِ « الرِّياضيَّاتِ » ، فإنَّه ينطوي على الكثيرِ من الفيزياءِ . أنظر - على وجهِ الخصوص - الميكانيكا في البندين ٥,٧ و ٦,١٠ ومناقشةُ الشكِّ التجريبيِّ في البند ٥,١٢ . ومن الموضوعاتِ الرِّياضيَّةِ التي استُفِيدَتْ لأبوابٍ لاحقةٍ فكرةُ التفاضلِ الجزئيِّ (البابُ العاشرُ) ، والتكاملِ الخطيِّ (البابُ العاشرُ) ، والتكاملِ السطحيِّ (البابُ الخامس عشر [المجلد الثاني]) .

... في البابِ الخامسِ ، نظوُّرُ التفاضلِ والتكاملِ بصورةٍ أكملَ ممَّا في معظمِ كتبِ الفيزياءِ الأخرى . وليس بمقدورِ هذه البنودِ ، بالطبع ، أن تحلَّ محلَّ مقرَّرِ الرِّياضيَّاتِ ؛ بيدَ أنها تستطيعُ أن تُعينَ الطالبَ على اكتسابِ إدراكٍ حدسيٍّ أكبرَ لما يتعلَّمُهُ في الرِّياضيَّاتِ وعلى استشفافِ كيفيةِ تطبيقِهِ على أوضاعٍ فيزيائيَّةٍ . فالبنودُ ٥,٣ - ٥,١١ مكرَّسةٌ لشؤونٍ عمليَّةٍ أساسيَّةٍ . أمَّا البنودان ٥,١ و ٥,٢ فهما مُغايرانَ تماماً ؛ إذ أنَّهما مكرَّسانَ لماهيَّةِ الرِّياضيَّاتِ وعلاقتها بالعلومِ . كما يجبُ أن يكونَ البند ٥,١٢ فعلاً أكثرَ ما يمكنُ إذا استُخدِمَ جنباً إلى جنبٍ مع العملِ في المختبرِ ؛ فهو ليس جوهرياً للتطوُّراتِ الأخرى في هذا الكتابِ .

أما البابُ السادسُ فجُلُّه لا يختلفُ كثيراً عن ذلك الرَّهطِ من المقدماتِ التقليديَّةِ للمتجهاتِ : إذ يربطُ - في مسهله - جبرَ المتجهاتِ بالحسابِ الهندسيِّ الذي يتعلَّمُهُ الطالبُ حالياً في المدرسة ؛ بينما تُعالِجُ بنودُ اختياريَّةٍ تحويلَ المركَّباتِ والفرقِ بين المتجهاتِ القطبيَّةِ والمتجهاتِ المحوريَّةِ . كذلك نُؤيِّلُ - في هذا البابِ - بعضَ الاهتمامِ للتمييزِ بين كميَّةٍ فيزيائيَّةٍ متَّجهةٍ والمتَّجهِ الرِّياضيِّ ، ولتأكيدِ أنَّ الطَّبيعةَ الاتَّجَاهيَّةَ لكميَّةٍ فيزيائيَّةٍ ينبغي أن تُقرَّرَها التجربةُ .

الجزءُ الثالثُ : يمكنُ اعتبارُ الأبوابِ ٧ - ١٠ بمثابةِ سلَّمٍ تصاعديٍّ من الصَّعوبةِ والصَّقلِ المتزايدين . فالتطوُّرُ الشَّكليُّ للميكانيكا يُنَجِّزُ أساساً في هذه الأبوابِ الأربعة . بعدئذٍ يجبُ أن يردَّ البابُ الحادي عشرُ برِّداً وسلاماً للطالب . أمَّا البابُ الثاني عشرُ فهو تشكيلةٌ من الموضوعاتِ الإضافيَّةِ المُمَيِّزة ، التي بالإمكانِ شملُ أيِّ اثتلافٍ منها لتتوجَّعَ دراسةُ الميكانيكا .

... يردُّ قانونا نيوتن الأول والثاني في الباب السابع . فَفَضْلاً عن تطبيقاتٍ تقليديَّةٍ عديدة ، يتضمَّنُ هذا البابُ مناقشاتٍ عن أطرِ الإسنادِ ، والتمييزِ بين كتلتَي القُصُورِ والجاذبيَّةِ ، وأهميَّةِ قانونِ نيوتن الأول ، والبيانِ المنطقيِّ للميكانيكا - خصوصاً مسألة تشابكِ القوانينِ والتعاريفِ .

أما قانونُ نيوتن الثالثُ فهو مثبتٌ في بابٍ مستقلٍّ (البابُ الثامنُ) لتأكيدِ الحقيقةِ بأنَّه ضَرَبٌ مُغايرٌ تماماً من القوانينِ لقانوني نيوتن الأول والثاني ، ولإبرازِ صلتهِ الخاصَّةِ بمفهومِ الزخمِ . لقد كُرسَ البابُ السابعُ لميكانيكا الجُسيَّاتِ ؛ في حين أنَّ البابَ

الثامن مكرّس للأنظمة . وتربط مناقشة في البند ٨,٥ هذين البابين معاً كما تُبين الصّلات المتبادلة بين قوانين نيوتن الثلاثة . كذلك يتعلّق البند ٨,١٢ بمناقشة سابقة لحفظ الزّخم وَرَدَتْ في الباب الرابع .

وفي الباب التاسع ، يُعرّف الزّخم الزّاوي للجسيمات ثم يُعمّم للأنظمة . ولقد حاولتُ - خلال الأبواب المعيّنة - أن أورد وجهة نظر مترنة وموحّدة للزّخم الزّاوي للأجسام المتحرّكة عبّر المكان والأجسام الدّائرة حول محاور ثابتة . ولهذا الغاية ، تقدّم في البند ٩,٣ الزّخم الزّاوي المداري والزّخم الزّاوي المغزلي . كذلك ، تمهيداً للباب الحادي عشر ، تقدّم قانون المساحات (قانون كبلر الثاني) في البند ٩,٩ . أمّا اعتبار الطّاقة الدّورانية فترجّته إلى البند ١٠,٩ .

ولقد أثبتتُ - توجّهاً للتطوّر المنطقي - معالجة كاملة للشغل والطّاقة الحركية في البنود الأربعة الأولى من الباب العاشر ، مع أن الجزء الأخير من البند ١٠,٣ والبند ١٠,٤ برمتيهما أكثر صعوبة مما يتبع في البنود القليلة التالية . فيمكن حذف أو إرجاء هذه المادّة الاختيارية . والأمثلة الواردة في البند ١٠,٧ مكرّرة في البند ١٠,٨ بغية إضافة الرّسم الطّاقوي - ذلك العنصر الهام - إلى تحليلها . كذلك ينبغي ألاّ يُغفل البندول البسيط ، الذي نُعالجُه في موضعٍ متأخّر من هذا الباب (البند ١٠,١١) .

أمّا الباب الحادي عشر فهو مكرّس لموضوع الجاذبية دون سواه نظراً لأهميّة الجاذبيّة الأساسيّة في الطّبيعة ونظراً لأهميّتها التّاريخيّة في نشوء الميكانيكا والعلم الحديث . وكما سبق أن أشرنا ، فإنّ هذا الباب أقلُّ صعوبة من الأبواب التي تَرِدُ قبله مباشرة .

وأخيراً يمكن اعتبار الباب الثاني عشر برمتيه اختيارياً . فبمقدورنا انتقاء أيّة مجموعة من بين موضوعاته الخمسة شبيهة المستقلة عن بعضها البعض : الاحتكاك السّطحيّ ، واستاتيكا الأجسام الجاسئة ، والموائع ، وانجرار الهواء الاحتكاكيّ ، والتّصادمات الثّانئية الجسم .



مَقْدَمَةُ الطَّبْعَةِ الْعَرَبِيَّةِ

كَلَّفْنَا بِمَجْمَعِ اللُّغَةِ الْعَرَبِيَّةِ الْأُرْدُنِيِّ - ضَمَنَ حِمْلَتَهُ الرَّاهِنَةَ لِتَعْرِيبِ الْعُلُومِ - بِاخْتِيَارِ وَتَرْجُمَةِ كِتَابٍ فِي الْفِيزِيَاءِ عَلَى مَسْتَوَى السَّنَةِ الْجَامِعِيَّةِ الْأُولَى ، شَرْطُ أَنْ يَجْمَعَ الْكِتَابُ الْمُنَشُودُ غَزَارَةَ الْمَادَّةِ الْعِلْمِيَّةِ وَرِصَانَتَهَا مَعَ عُقْمِ الْقَاعِدَةِ الثَّقَافِيَّةِ وَعَرَضِهَا . فَوَجَدْنَا ضَالَّتَنَا فِي كِتَابٍ فُورِدَ هَذَا بِمَجْلَدَاتِهِ الثَّلَاثَةِ^١ ، لَمَّا أَلْفَيْنَاهُ فِيهِ مِنْ إِحَاطَةٍ وَشُمُولٍ وَعُمُقٍ قَلِمًا نَصَادِفُهُ فِي مِثْلِ هَذِهِ الْمَرَحَلَةِ الْمُبَكِّرَةِ مِنَ الدِّرَاسَةِ الْجَامِعِيَّةِ . فَالْمُؤَلَّفُ يُوَكِّدُ فِي كُلِّ مَنَاسِبَةٍ الْبُعْدَ التَّارِيخِيَّ الْفَلَسْفِيَّ لِمَوْضُوعِهِ ، مِمَّا سَيَجْذِبُ كِتَابَهُ - وَلَا رَيْبَ - إِلَى الْقَارِيِ الْمُثَقَّفِ عَمُومًا ، عِلَاوَةً عَلَى الطَّالِبِ الْجَادِّ وَالْمُتَخَصِّصِ الْمُتَمَكِّنِ . كَمَا أَنَّهُ - بِأَمَثَلَتِهِ الْمُنَوَّعَةِ وَأَسْئَلَتِهِ الْمُلَوَّنَةِ - يُلَبِّيْ حَاجَاتِ الطَّالِبِ الْمُتَوَسِّطِ وَالْمُتَفَوِّقِ عَلَى السَّوَاءِ ؛ بَلْ إِنَّهُ لَا يُغْفَلُ حَتَّى أَعْنَى الْعُقُولَ ، فَيَزِيدُهَا فِي بَعْضِ السَّطُورِ الْمُتَفَرِّقَةِ بِمَا هُوَ كَفِيلٌ بِتَحْدِيثِهَا وَاسْتِثَارَتِهَا عَلَى الْمَزِيدِ مِنْ شَحْذِ الْفِكْرِ وَشَحْنِ الذَّهْنِ .

وَقَدْ حَرَضْنَا عَلَى تَرْجُمَةِ الْكِتَابِ تَرْجُمَةً أَمِينَةً كَامِلَةً ، بِمَا فِيهِ ظِلَالُهُ الْمُتَفَاوِتُ وَإِمَاءُهُ الْمُتَبَايِنَةُ . فَأَوْرَدْنَا بِالْبَنْطِ الْأَسْوَدِ مَا كَانَ أَصْلًا بِالْبَنْطِ الْمَائِلِ ؛ وَأَبْقَيْنَا تَبَوُّبَ الْكِتَابِ وَتَرْتِيبَهُ عَلَى حَالِهَا بِقَدْرِ الْإِمْكَانِ ؛ كَمَا حَافِظُنَا عَلَى رُوحِ الْأُسْلُوبِ مَا وَسَعَنَا ذَلِكَ . لَكِنَّا لَمْ نَحْجِمْ بَيْنَ الْفَيْنَةِ وَالْأُخْرَى عَنْ إِضَافَةِ كَلِمَةٍ هُنَا وَثَانِيَةٍ هُنَاكَ كَلِمًا شَعَرْنَا بِالْحَاجَةِ إِلَى ذَلِكَ تَوْخِيًّا لِلْبَيَانِ وَالتَّيْسِينِ . كَذَلِكَ رَقَمْنَا الْأَشْكَالَ الْوَارِدَةَ فِي خَتَامِ كُلِّ بَابٍ ، بِخِلَافِ الْأَصْلِ الَّذِي تَرَكَهَا عَائِمَةً هَامَّةً بِدُونِ أَرْقَامٍ ، وَصَحَحْنَا حِفْظَ الْأَخْطَاءِ الْبَسِيطَةِ الْوَارِدَةِ أَصْلًا .

يَبْدُو أَنَّا أَحْسَنْنَا بِأَنْ عَمَلْنَا لَنْ يُؤَنِّيَ أَكْثَلُهُ لَوْ اكْتَفَيْنَا بِهَذَا فَقَطْ ، خَاصَّةً وَنَحْنُ عَلَى أَعْتَابِ حَرَكَةِ تَعْرِيبٍ شَامِلَةٍ سَيَكُونُ لِمَرَاكِهَا التَّمْهِيدِيَّةُ حَتْمًا الْبَدْءُ الطَّوِيلُ فِي نَجَاحِهَا كَكُلِّ . مِنْ هُنَا أَرَدْنَا أَنْ نَقْرَنَ تَرْجُمَتَنَا بِمَحَاوِلَاتِ تَنْظِيرِيَّةٍ شَتَّى وَبِتَحْقِيقَاتٍ مُتَنَوِّعَةٍ فِي كَلَامِ الْمَحَالِّينِ اللَّغَوِيِّ وَالْعِلْمِيِّ ، يَحْدُونَا عَلَى ذَلِكَ إِيمَانُنَا الْمَكِينُ بِلِغَتِنَا وَتَرَاتِنَا . وَفَلَسَفَتْنَا فِي هَذَا الصَّدَدِ تَقُومُ عَلَى مَحَاوِلَةِ إِرْسَاءِ أُسُسِ جَلِيَّةٍ وَاضِحَةٍ تَنَازُلُ عَنْ كُلِّ تَزَمَّتٍ وَتَحْجِيرٍ وَنَرَاكُمُ عَلَيْهَا أَوَّلًا بِأَوَّلٍ ، مُسْتَخْدِمِينَ فِي ذَلِكَ « نَصْلًا » مُنَظَقِيًّا حَادًّا لِبِتْرَ كُلِّ حَشْوٍ وَدُخِيلٍ أَوْ فَائِضٍ لَا لَزُومَ لَهُ . فَتَعْرِيبُ الْعُلُومِ لَا يَنْحَصِرُ فِي إِيجَادِ أَوْ ابْتِدَاعِ الْمُرَادِفَاتِ وَالْمُصْطَلَحَاتِ الْمُنَاسِبَةِ فَحَسْبُ ، بَلْ هُوَ - أَوَّلًا وَآخِرًا - حَرَكَةٌ تَجْدِيدٍ عَامِرَةٌ لِبَعْضِ سِمَاتِ اللُّغَةِ وَانْكِبَابٍ عَلَى أَصُولِهَا وَمِظَانِهَا وَاسْتِنْقَاطٍ عَمَالِقَةٍ تَرَاتِنًا وَأَسَاطِينَةٍ . وَكَلَّنَا بِحَاجَةِ إِلَى تَثْقِيفٍ مَكْتَفٍ فِي هَذَا الْمَضْمَارِ نَرْجُو أَلَّا يَكُونَ انْدِفَاعُنَا نَحْوَ هَذَا الْوَاجِبِ الْمُقَدَّسِ - الَّذِي تَمَادَيْنَا كَثِيرًا فِي إِهْمَالِهِ - بِمَجْرَدِ رَدِّ فِعْلٍ

١ المجلدان الثاني والثالث في طُور الإعداد وسيصدران تباعاً .

وارتكاس أمام الهجمات الضارية المتلاحقة لعالم ظالم جاحد ، وإنّا حركة أصيلة نابعة من أعماق أعماقنا ويرفدها نفس طويل وكفاح متواصل .

من هذا المنطلق ، فقد استخدمنا إطاراً عربياً شاملاً لرموز وحدّات النظام الدوليّ استقيناه بتصرّف طفيف من المشروع الذي نشره المجمع نفسه عام ١٩٧٩ (ملحق ٢ ب) . نأمل أن يجد فيه الفيزيائي العربي أداة سلسة مطوّعة من المرونة بحيث تستوعب ما يطرأ من تطوّرات وتعديلات ؛ كما نأمل أن يُفيد من الخطوط النظرية العريضة لهذا المشروع في تنمية جوانب أخرى من الموضوع . كذلك ذيلنا المتنّ بعدد من الحواشي والهوامش أكبر بكثير ممّا هو مألوف في مثل هذا العمل . وتردّ تلك في ثلاثة أصناف . الأول : علميّ بحث ، يفسر بعض ما استغلّق من أمور أو يعلّق على مدلول رموز علمية غير مألوفة ويربط المادّة بما يجري السّاعة من بحوث وفرضيات . والثاني : تراثي ، بمعنى أنّه يعود إلى الأصول والحدود محللاً شارحاً . أمّا الثالث : فهو لغويّ صرف ، يُلقّي الأضواء على أصل أحد المصطلحات أو يُحيي كلمة علمية جميلة من إرثنا العلميّ القديم أو الحديث . فكلّ هذه الهوامش يهدف إلى إذكاء جذوة الحماسة في نفس القارئ كي يستقصي هذه الأمور بصورة أوسع ويُسبّعها في المستقبل بحثاً وتنقيحاً .

من ناحية أخرى ، فقد عُنيّا عناية خاصّة بالترقيم والتشكيل إمعاناً في دقّة التعبير ؛ فنحن نؤمن بأنّ هذا من شأنه أن يُبرز أكثر تفاوت الظلال ورفاق الفكرة الواحدة في لغتنا . وهذا الخصوص ، لم نأل أيّ جهد في التحقق من صحّة أسماء الأعلام ؛ فكتبناها كما تُلَفّظ عالمياً ، مستخدمين الحرف ج للدلالة على الجيم المعطشة (الشامية) [مثلاً ، جول Joule] والحرف غ للدلالة على الجيم غير المعطشة (المضربة) [مثلاً ، غاوس Gauss] . كذلك أوردنا الأسماء القديمة كما كتبها أسلافنا (بطليموس بدلاً من بطليموس وأقليدس بدلاً من إقليدس) . وكان بودّنا استخدام الباء والفاء المنقوطين بثلاث نقاط للإشارة إلى p و v ، لولا أنّ حالت دون ذلك بعض العقبات الفنيّة .

إنّ كتابنا هذا يحوي أيضاً من المصطلحات العلميّة لخصّنها في قاموس جامع في نهاية الكتاب وكرّرناها في طوله وعرضه ، انطلاقاً من الحقيقة المعروفة بأنّ اللغة الإنجليزيّة تسوّد السّاعة جُلّ المحافل الدوليّة التي قد تسنح للطّالِب فرصة حضورها متى شبّ عن الطّوق . فنحن نرغب في التعريب دون حرّق الجسور مع التّيارات العالميّة ، ونريد إحياء تراثنا العظيم في نفس الوقت الذي نعبّ خلاله من الموارد المعاصرة أيّاً كانت . على هذا الأساس ، يمكن اعتبار المصطلحات الأجنبيّة - مضافاً إليها المعادلات ورموز الكمّيّات التي أبقيناها كما في الأصل - بمثابة حلقة وصل مع هذه التّيارات وتلك الموارد ، آملين ألا يطول الأمر قبل أن يتمّ الإجماع بين ذوي الشأن عندنا على استخدام نظام عربيّ شامل لرموز الكمّيّات الفيزيائيّة على غرار ما طبّقناه على رموز وحدّات النظام الدوليّ . ونودّ هنا أن نلفت نظر القارئ إلى أن كلّ معادلة أو تعبير أو صيغة أجنبيّة ينبغي أن تُقرأ من اليسار إلى اليمين - مثلاً : $A = B + C$ أو $x = 10$ م ... هذا ، وقد رجّعنا إلى الجَمّ الغفير من المصادر لاختيار أنسب المصطلحات ، حتّى إذا ما أعيّتنا الحيلة عن إيجاد ما نشد ابتدئناه . كذلك عمدنا إلى استعمال عددٍ لا بأس به من المفردات المنحوته . فبالإضافة إلى كلمة « سرّجّة » (= سرعة متّجهة) الواردة في مشروع المجمع المذكور أعلاه ، استخدمنا كلماتٍ من قبيل فَوْصَوْنِيّ (فوق صوتي) ؛ دَوْصَوْنِيّ (دون صوتي) ؛ بَيْنَجْمِيّ (بين نجمي) ؛ نِصْقَطْرِيّ (نصف قطري) ؛ وَنَوِيْحَرَارِيّ (نووي حراري) [قارن قاموس « المورد » لمثير البعلبكي] . إلّا أنّنا لم نغرق في هذا المسلك لعدم إلفته لكثير من القراء ، بالرغم من تأييدنا له وإيماننا بمجدواه .

وقصّارى القول إنّ المجلّد الذي نضعه الآن بين يديك هو أكبر حجماً وأثري مادّة من الأصل . ومع ذلك ، ففي نظرنا أنّ

طبعنا الأولى هذه لا تعدو أن تكون محض طبعة تجريبية نرجو أن يُشاركنا القارئ الكريم في نقدها الجاد وتقييمها الرصين .
وسنحاول في طبعة قادمة أن نضيف إلى الكتاب فهرساً أيجدياً شاملاً (حيث أننا نعتبر غيابه في الكتاب العربي عموماً من مثالبه
الكبرى) ؛ وقائمة وافية من المراجع الإضافية ؛ وبعض الأجوبة والحلول للمسائل والتأارين (مما أغفل المؤلف عن إثباته في
كتابه) .

بقي أن نوجه شكرنا العميق إلى المجمع - رئيساً وأعضاء وموظفين - لجعلهم هذا المشروع الضخم ممكناً في المقام الأول ،
ولنقاء ووضوح الرؤيا المقدسة التي استحوذت على تفكيرهم منذ تأسيس المجمع ؛ وإلى المطبعة الوطنية لمحاولتها جهدها الانصباع
لمتطلباتنا المتعددة ؛ وإلى كل قريب أو بعيد ساهم في تشجيعنا ومساندتنا إبان ليالي العمل الطويلة الطويلة .

المشرف
الدكتور همام غصيب



المحتويات

صفحة

أ

ج

د

□ مقدمة المؤلف

□ ملاحظات المؤلف على النص

□ مقدمة الطبعة العربية

الجزء الأول : مدخل إلى الفيزياء

٣

١ . ماهية الفيزياء

٤

١,١ هرمية المادة

٧

١,٢ نظريات الفيزياء العظمى

٨

١,٣ النظرية والتجربة في الفيزياء

٩

١,٤ علاقة الفيزياء بالرياضيات والتقنية

١٢

١,٥ نشوء الفيزياء

١٥

خلاصة الأفكار

١٥

أسئلة

١٧

تمارين

١٨

مسألة

١٩

٢ . مفاهيم ووحدات وأبعاد

١٩

٢,١ المفاهيم المقدارية

٢٢

٢,٢ الوحدات

٢٤

٢,٣ الأبعاد

٢٥

٢,٤ توافق الأبعاد وتوافق الوحدات

صفحة

٢٩	٢,٥ الطول
٣٠	٢,٦ الزمن
٣٤	٢,٧ السرعة
٣٧	٢,٨ الكتلة
٣٩	٢,٩ الطاقة
٤٢	٢,١٠ الشحنة
٤٣	٢,١١ الزخم الزاوي
٤٦	* ٢,١٢ الوحدات الطبيعية والفيزياء اللابعدية*
٤٧	خلاصة الأفكار والتعاريف
٤٨	أسئلة
٥١	تمارين
٥٥	مسائل

٣. الجسيمات الأولية

٥٩	٣,١ على مشارف العالم دون المجهرى
٥٩	٣,٢ الجسيمات الأولى
٦٠	٣,٣ البيون والميون
٦٧	٣,٤ الجسيمات الحديثة
٦٨	٣,٥ خواص الجسيمات
٧٢	* ٣,٦ الأدوات التجريبية
٧٧	٣,٧ أهمية الجسيمات
٨٥	خلاصة الأفكار
٨٧	أسئلة
٨٨	تمارين
٨٩	مسائل
٩١	

٤. قوانين الحفظ

٩٣	٤,١ قوانين الحفظ المطلقة
٩٣	٤,٢ حفظ الشحنة
٩٤	

* البنود والبنود الفرعية المعلمة بنجوم هي مواد اختيارية.

صفحة

٩٦	٤,٣ قوانين حفظ عدد أعضاء العائلة
١٠٠	٤,٤ حفظ الطاقة
١٠١	٤,٥ حفظ الزخم
١٠٣	٤,٦ حفظ الزخم الزاوي
١٠٥	★ ٤,٧ قوانين الحفظ ومبادئ التماثل (أو التناظر)
١٠٩	★ ٤,٨ انتظام المكان
١١٢	خلاصة الأفكار
١١٣	أسئلة
١١٥	تمارين
١١٦	مسائل

الجزء الثاني : الرياضيات

١٢١	٥. الرياضيات في العلوم
١٢١	★ ٥,١ نوعان من الحقيقة الرياضية
١٢٥	★ ٥,٢ الرياضيات والطبيعة
١٢٨	٥,٣ أنظمة الإحداثيات وأطر الإسناد
١٣٢	٥,٤ السرعة ، المشتقة
١٣٩	٥,٥ الزوايا والسرعة الزاوية
١٤٤	٥,٦ الدوال ، والجداول ، والرسوم البيانية
١٥٠	٥,٧ الكينماتيكا الأحادية البعد
١٥٧	٥,٨ التكامل غير المحدود
١٦٤	٥,٩ التكامل المحدود
١٧٥	٥,١٠ دالتا الجيب وجيب التمام
١٧٩	٥,١١ الدالتان الأسية واللوغاريتمية
١٨٤	★ ٥,١٢ الاحتمال ، والخطأ التجريبي ، والشك (اللاتحديد)
١٩٠	خلاصة الأفكار والتعاريف
١٩٢	أسئلة
١٩٥	تمارين
٢٠٣	مسائل

٦,١ الكميات القياسية والكميات العددية : الحساب الهندسي

٦,٢ المتجهات : الجمع والطرح

٦,٣ ضرب متجه في كمية عددية

٦,٤ متجه الموضع

٦,٥ المركبات

٦,٦ توافق المتجهات

٦,٧ حاصل الضرب القياسي

٦,٨ حاصل الضرب الاتجاهي

٦,٩ المتجهات المتغيرة مع الزمن ؛ مشتقة المتجه

٦,١٠ الحركة المنتظمة في دائرة

٦,١١ تفاضل وتكامل المتجهات

خلاصة الأفكار والتعاريف

أسئلة

تمارين

مسائل

الجزء الثالث : الميكانيكا

٧ . القوة والحركة : قانونا نيوتن الأول والثاني

٧,١ الحركة بدون قوة ؛ قانون نيوتن الأول

٧,٢ مفهوم القوة

٧,٣ قانون نيوتن الثاني ؛ كتلة القصور

٧,٤ تطبيقات قانون نيوتن الثاني

٧,٥ المذبذب (أو المذبذب) التوافقي

٧,٦ الحركة قرب الأرض

٧,٧ كتلة الجاذبية

٧,٨ الحركة في بُعْدَيْن

* ٧,٩ حركة الجسيمات المشحونة في المجالين الكهربائي والمغناطيسي

٧,١٠ أطر الإسناد

صفحة

٣١٧	خلاصة الأفكار والتعاريف
٣١٩	أسئلة
٣٢٣	تمارين
٣٢٩	مسائل

٨. الزخم وحركة الأنظمة : قانون نيوتن الثالث

٣٣٩	٨,١ الزخم وقانون نيوتن الثاني ؛ الدفع
٣٤٠	٨,٢ مركز الكتلة
٣٤٤	٨,٣ قانون نيوتن الثاني للأنظمة
٣٥٠	٨,٤ قانون نيوتن الثالث
٣٥٢	٨,٥ اختزال القوى الداخلية
٣٥٦	٨,٦ حركة الأنظمة في بُعد واحد
٣٦٠	٨,٧ حفظ الزخم
٣٦٤	٨,٨ حفظ الزخم في أنظمة غير معزولة
٣٦٨	٨,٩ حفظ الزخم ومركز الكتلة
٣٧٠	٨,١٠ دَسْر الصواريخ
٣٧٤	٨,١١ الأنظمة الثنائية الجسيم ؛ الكتلة المختزلة
٣٧٧	٨,١٢ أهمية حفظ الزخم
٣٨١	خلاصة الأفكار والتعاريف
٣٨٣	أسئلة
٣٨٤	تمارين
٣٨٧	مسائل
٣٩٢	

٩. الزخم الزاوي

٣٩٧	٩,١ مفهوم الزخم الزاوي
٣٩٧	٩,٢ الزخم الزاوي للأنظمة
٤٠٤	٩,٣ الزخم الزاوي المداري والزخم الزاوي الممغزلي
٤٠٧	٩,٤ عزوم القصور
٤١٠	٩,٥ العزم الدوراني وقانون تغير الزخم الزاوي
٤٢١	٩,٦ الدوران حول محور ثابت
٤٢٥	٩,٧ ★ الاستباق
٤٣٠	

٤٣٤	٩,٨ حفظ الزخم الزاوي
٤٣٨	٩,٩ قانون المساحات
٤٤٥	★ ٩,١٠ تكافؤ اتجاهات المكان
٤٤٧	خلاصة الأفكار والتعاريف
٤٤٨	أسئلة
٤٥٢	تمارين
٤٥٩	مسائل

١٠. الطاقة

٤٦٦	١٠,١ الشغل المبذول بواسطة قوة ثابتة
٤٧٠	١٠,٢ الشغل والطاقة الحركية للحركة الأحادية البعد
٤٧٤	١٠,٣ الشغل والطاقة الحركية للحركة العامة لجسيم
٤٨٠	★ ١٠,٤ الشغل والطاقة الحركية لنظام من الجسيمات
٤٨٦	١٠,٥ الشغل كوسيلة لانتقال الطاقة
٤٨٩	١٠,٦ حفظ الشغل
٤٩٢	١٠,٧ طاقة الوضع في بُعد واحد
٥٠١	١٠,٨ حفظ الطاقة الميكانيكية في بُعد واحد : الرسوم الطاقية
٥٠٩	١٠,٩ الطاقة الدورانية
٥١٣	★ ١٠,١٠ القوى المُحافظَة وطاقة الوضع بصورة عامة
٥٢١	١٠,١١ البندول البسيط
٥٢٢	١٠,١٢ تقسيم حفظ الطاقة
٥٢٣	خلاصة الأفكار والتعاريف
٥٢٥	أسئلة
٥٢٩	تمارين
٥٣٩	مسائل

١١. الجاذبية

٥٤٦	١١,١ قوانين القوة في الميكانيكا
٥٤٧	١١,٢ قانون الجذب الكوني
٥٥٢	١١,٣ جاذبية الأرض
٥٥٤	١١,٤ طاقة وضع الجاذبية : سرعة الإفلات

صفحة

٥٥٨	١١,٥ شكل الأرض
٥٦٣	١١,٦ قوانين كبلر
٥٦٩	* ١١,٧ استنتاج قانون قوة الجاذبية
٥٧٩	١١,٨ اكتشاف نبتون
٥٨٠	خلاصة الأفكار والتعاريف
٥٨١	أسئلة
٥٨٥	تمارين
٥٩١	مسائل
٦٠٠	١٢. تطبيقات أخرى للميكانيكا
٦٠٠	١٢,١ الاحتكاك السطحي
٦٠٣	١٢,٢ استاتيكا الأجسام الجاسئة
٦٠٩	١٢,٣ القوى في الموائع
٦١٨	١٢,٤ تدفق (جريان) المائع
٦٢٩	١٢,٥ الانجرار الاحتكاكي للهواء
٦٣٤	١٢,٦ التصادمات الثنائية الجسم
٦٤٣	خلاصة الأفكار والتعاريف
٦٤٤	أسئلة
٦٤٨	تمارين
٦٥٦	مسائل

١م - ٥٨م
ق ١ - ق ٣٣
ق ٣٥ - ق ٣٩

□ الملاحق
□ قاموس المصطلحات الواردة في هذا الكتاب
□ قاموس الأعلام



الجزء الأول

PART ONE

مدخل إلى الفيزياء

Introduction to Physics

١. ماهية الفيزياء

The Nature of Physics

إنَّ علمَ الفيزياءِ ، الذي سُمِّيَ يوماً بالفلسفة الطبيعية natural philosophy ، هو فرع العلوم الأكثر اهتماماً بقوانين الطبيعة الأساسية . وقد اتخذت قطاعات أخرى من العلوم وفروع متباينة من الهندسة حياةً زاهرةً لذاتها ؛ بيدَ أنَّ سائرَ هذه تبنى في النهاية على القوانين الأساسية التي تشكّل مادّة الفيزياء .

والفيزياءُ ، حسب أحد التعاريف القديمة ، هي دراسة المادّة والحركة . لكنّ هذه أو أيّة عبارة تعريفية يتيمه لا تستطيع أن تعكس على نحو كافٍ ذلك المزيج من الجهد الخلاق والمعرفة المتراكمة والأفكار الموحّدة والمعادلات الرياضية والأثر الفلسفي والتطبيق العملي الذي يكون الفيزياء . ولقد عمّم الفيزيائي الحديث فكرة المادّة لتشمل الطاقة الموزعة ضمن مجالات موجيّة wave fields والطاقة المؤقتة لجسيمات غير مستقرّة unstable particles . وكما سنؤكد مراراً في هذا الكتاب ، فهو معنيٌّ أيضاً بمظاهر الطبيعة الثابتة كعنايته بالحركة والتغير . وأياً كان الأمر ، فمن الصواب أن نقول إنَّ العالم المادّي وتفاعل جزء منه بآخر يقيان في لباب الفيزياء . واستيعاب أكبر قدر مستطاع من سلوك المادّة بأبسط مجموعة ممكنة من الأفكار والمعادلات هو هدف الفيزياء الرئيسي .

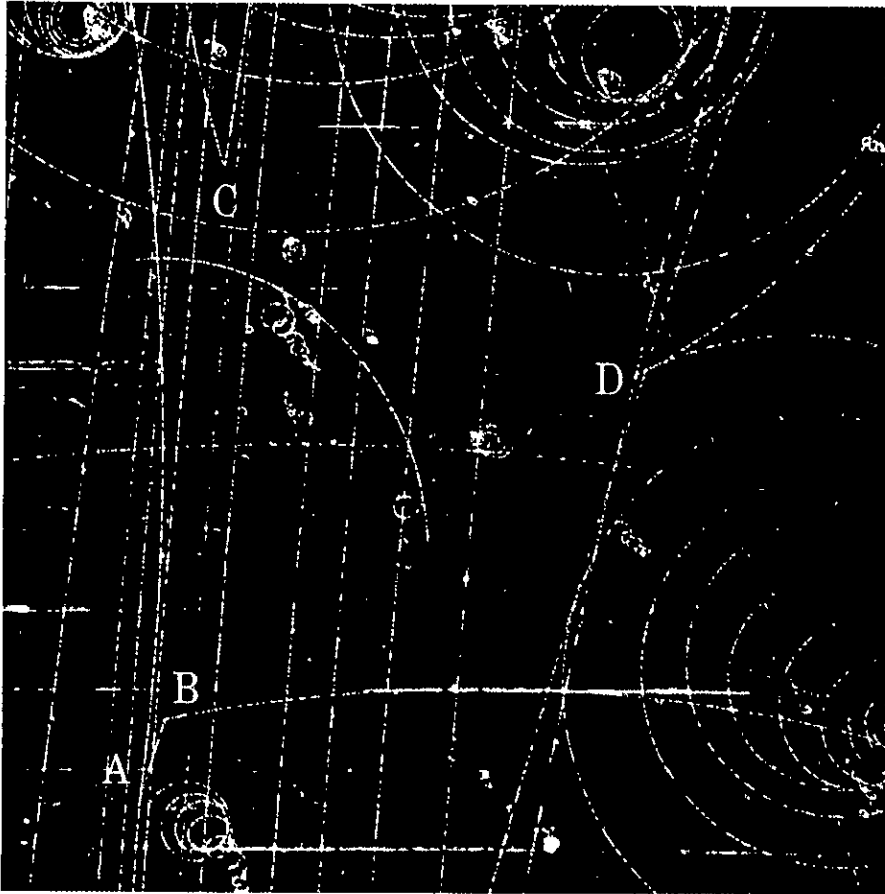
وعلى وجه العموم ، يواجه تلميذ الفيزياء المبتدئ مهمّةً أشقَّ من التلميذ المتقدّم . ففي معاينة الفيزياء لأوّل وهلة على مستوى الكلية ، ينبغي أن ترنو إلى أكثر من محض تعلّم الحقائق والقوانين والمعادلات وطرائق حلّ المسائل ؛ إذ يجب أن تسعى أيضاً لاستيعاب مجمل الفيزياء ، وتقدير عموميّتها ، وإدراك ترابط أجزائها المتبادل ، واستشفاف حدودها . وينبغي أن تتعلّم كيف تميز بين النظرية والتطبيق ، وبين القانون العامّ والحقيقة المحدّدة ، وبين الأفكار الفيزيائية والأدوات الرياضية . وقد صمّم هذا الكتابُ ليساعدك على درب مثل هذه التبصّرات العامّة ، في نفس الوقت الذي تكتسب فيه المقدرة لاستعمال الفيزياء لمآرب عمليّة . على أيّة حال ، فمن خلال جهدك الشخصي فقط يمكن لهُذين الهدفين المزدوجين أن يتحقّقا .

هدفا الدراسة المزدوجان :

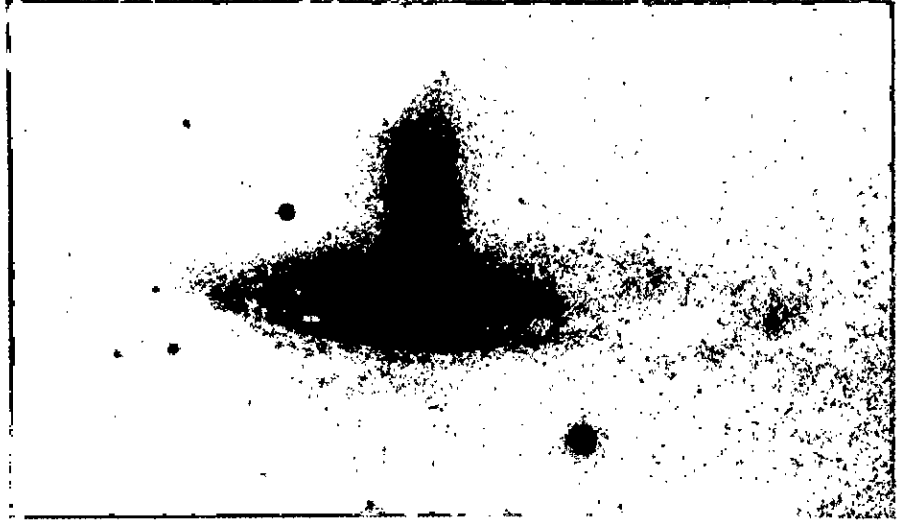
تبصّرات عامّة ومقدرة عمليّة

١,١ هرمية المادة (أو تسلسل المادة الهرمي) The Hierarchy of Matter

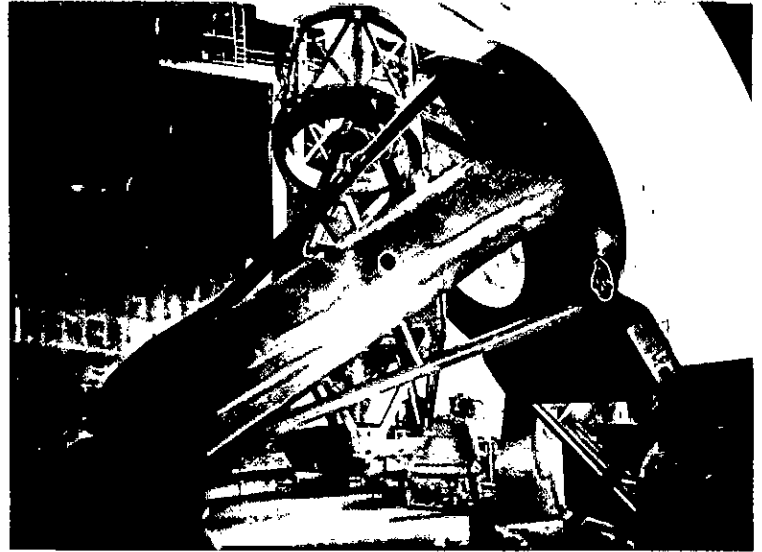
يمكن وصف شطر كبير من تاريخ العلوم كعملية جَسَّ صعوداً ونزولاً ، بمنأى عن دنيا الخبرة الحسية المباشرة للإنسان . فلقد تجاوزت طلائعُ الفيزياءِ عالمَ الحجمِ الانسانيّ ، الذي نوميّ إليه بالعالمِ الجاهريّ (أو الماكروسكوبيّ macroscopic) ، إلى العالمِ دونِ المجهريّ (الميكروسكوبيّ submicroscopic) (شكل ١,١) والعالمِ الكونيّ (الكوزمولوجيّ cosmological) (شكل ١,٢) . وبين هذينِ الحدّينِ القصّيينِ ينتظم ذلك الجزءُ من العالمِ الفيزيائيّ الذي ندركه ، ولو بصورةٍ مبتورة .



شكل ١,١ : على مشارف الصّغير جداً . مسارات tracks جُسيماتٍ أوليّةٍ في غرفة فقّاقٍ bubble chamber . في النقطة الموسومة A دُمُرجسيّانِ واستُحدثت ثلاثة أخرى في العنفِ دونِ المجهريّ لتصادمِ collision ممّنْ على 10^{-15} م في المكان 10^{-23} ث في الزّمان . وثلاثة تفاعلاتٍ أخرى للجسيماتِ حدثت في B و C و D . وقد ساعدت هذه الصّورة ، المأخوذة في ١٩٦٤ ، على توطيد وجود جُسيمٍ جديد يدعى Ω^- (أوميغا - ناقص omega-minus) ، وهو الذي خلّف الأثر من A إلى B . وغرفة الفقّاقِ التي سُجِّلَتْ بها هذه المسارات مبيّنة في شكل ٣,١٠ (ب) .
(مصدر الصّورة : مختبر بروكهافن الوطني Brookhaven National Laboratory)



شكل ١,٢ : على مشارف الكبير جداً .
 (أ) زوج من المجرات المتفاعلة . وتبدو المجرة الصغرى وكأنها « تمطر » نجوماً نحو مركز المجرة الكبرى اللولبية (الحلزونية) .
 والمعروف نَزْرُ يسير عن نوارىخ حياة المجرات أو أسباب تباين شكلها .
 (ب) مقراب (تلسكوب) هيل ذو المرأة التي يبلغ قطرها ٢٠٠ بوصة 200-in. Hale Telescope على جبل بالومار Mt. Palomar . وقد تطلّب الحصول على صورة المجرتين المتفاعلتين تعريضاً بهذا المقراب قدره نصف ساعة .



(ب)

[(أ) النقطَةُ الصَّوْرَةُ هالتون آرب Halton Arp من مرصد هيل Hale Observatories .
 (ب) المصدر : مرصد هيل .]

ومن الجُسَيْمَاتِ الْأَوَّلِيَّةِ دون الذَّرِيَّةِ subatomic elementary particles وحتى مجموعة
 العناقيد المجرّية galactic clusters التي تُدْعَى بِالكَوْنِ من قبيل التَّفَاوُلِ ، فَإِنَّ الْإِنْسَانَ الْيَوْمَ عَلَى

درابة بهرمة من الأشياء المرتبطة معاً ضمن بنات يتزايد حجمها باستمرار . وعلى نقص هذه الصورة ، فهي بانوراما † panorama مهية تمتد على عامل قياسي مقداره ١٠^{١١} . وأسماؤها بعض بنات العلوم وبعض أفنانها الخاصة المعنية بمستويات محددة من هذه الهرمية مدرجة في جدول ١،١ .

وحالما نتخطى الحجم الإنساني في أي من الاتجاهين ، فإن بنات العالم تغدو أكثر بساطة . فليس ثمة تنظيم للمكونات الأساسية في أي من العالمين الصغير جداً أو الكبير جداً يكاد يقارب التعقيد ودرجة التنظيم الموجودة في الكائنات الحية . وقد يناقش بأن تنظيمات أكبر وأعقد موجودة في الكون لا يستطيع فكر الانسان المحدود أن يفقهها ؛ إلا أن هذه مناظرة خارج مجال العلم . فحتى الآن ليس من دليل لوجود مثل هذه التنظيمات ؛ بل إن هنالك أدلة كثيرة ضدّها . وقد استعملت نظريات العالم دون المجهرى بنجاح لمعالجة بنية النجوم وإلى حد ما المجرات .

أقصى تعقيد يتحقق على مستوى الانسان

جدول ١،١ : بنات العالم

الشيء	حجمه °	فرع العلوم الخاص المقرون به
جسيم أولي	١٠ ^{-١٥} م أو أقل	فيزياء الجسيمات
نواة الذرة	١٠ ^{-١٤} م	الفيزياء النووية
ذرة	١٠ ^{-١٠} م	الفيزياء الذرية
جزي	١٠ ^{-٩} م	الكيمياء
جزي عملاق	١٠ ^{-٧} م	الكيمياء الحيوية
الجوامد		فيزياء الحالة الصلبة
السوائل		ديناميكا السوائل
الغازات		الديناميكا الهوائية
النباتات والحيوانات	١٠ ^{-٧} م إلى ١٠ ^{-٢} م	الأحياء
كوكب الأرض	١٠ ^{-٧} م	علم الأرضيات
نجم	١٠ ^{-٧} م إلى ١٠ ^{-١٢} م	الفيزياء الفلكية
مجرة	١٠ ^{-٢٠} م	علم الفلك
عنقود مجري (أو مجموعة مجرية)	١٠ ^{-٢٣} م	
الجزء المعروف من الكون	١٠ ^{-٢٦} م	علم الكونيات

• الأطوال في هذا الجدول مبينة بالأمتار ، ومختصرها المألوف م . والمتر الواحد يساوي ١٠٠ سنتيمتر (سرم) ، أو ٣٩،٣٧ بوصة ، أو ٣،٢٨١ قدم .

† أثرتنا استخدام هذه الكلمة المتدفقة تعبيراً على مرادفاتها من قبيل « منظر شامل عريض » . (المشرف)

١,٢ نظريات الفيزياء العظمى The Great Theories of Physics

كما هو مبين في جدول ١,١ ، فإن فروعاً خاصة من العلوم قد أضحت مقرونة بأحجام ومستويات محدّدة من ترتيب المادة في العالم . لكن على مستوى أعمق ، فإن العلم منظم حول أفكار تضم أجزاء عديدة من الطبيعة . فبنية الفيزياء ، على سبيل المثال ، مشيدة ليس حول أشياء أو حول التركيب الفيزيائي للعالم ، أو حتى حول ظواهر محدّدة في العالم ؛ بل هي بالأحرى مجموعة من النظريات العامة ، تصف كلّ منها سلسلة واسعة من الظواهر والأشياء . وكأحدى هذه النظريات العامة ، فإن الميكانيكا تعلّل حركة الأشياء على المدى المكتشف من الأحجام برمته تقريباً ، ابتداءً من دون المجهرى وحتى الكونى .

والقانون الفيزيائي هو إفادة عن الحقيقة ، تتناول عادة سلسلة محصورة من الظواهر . أما كلمة « نظرية » فتستخدم بصورة أكثر شمولاً لتعني أي شيء ابتداءً من فرضية لما يُعجَم عودها وحتى مجموعة أفكار موطّدة الأركان قادرة على تعليل قوانين عديدة . ونحن مَعِينُونَ عموماً في هذا الكتاب بالنظريات المعدودة التي تخطّت بحق طور الفرضية ، تلك النظريات القيمة بأن تُدعى بنظريات الفيزياء العظمى . فكلّ منها بنية من الأفكار والمعادلات التي امتُحِنَتْ بدقّة بالتجربة ... كلّ منها متميّز بعدده الصغير من المفاهيم الأساسية وعدده الكبير من التطبيقات . ونظريات الفيزياء العظمى هي :

- ١ — الميكانيكا Mechanics (وتُدعى أحياناً بالميكانيكا النيوتونية Newtonian ، نسبةً الى نيوتن ، أو الميكانيكا الكلاسيكية Classical) : وهي نظرية حركة الأشياء المادّية .
- ٢ — الديناميكا الحرارية Thermodynamics : وهي نظرية الحرارة ودرجة الحرارة وسلوك تنظيمات كبيرة من الجسيمات .
- ٣ — الكهرومغناطيسية Electromagnetism : وهي نظرية الكهرباء والمغناطيسية والاشعاع الكهرومغناطيسي electromagnetic radiation .
- ٤ — النسبية Relativity : وهي نظرية اللاتغيّر invariance في الطبيعة ونظرية الحركة بالسرعة العالية .
- ٥ — ميكانيكا الكم Quantum Mechanics : وهي نظرية السلوك الميكانيكي للعالم دون المجهرى .

وحتى هذه النظريات الخمس وثيقة العرى . ويمكن تفسير كلّ واحدة من الظواهر المفهومة التي لا تعدّ ولا تحصى في العالم الفيزيائي بدلالة واحدة أو أكثر من هذه النظريات المعدودة .

فسلوك الذرات الأحادية مثلاً محكوم بميكانيكا الكم والنسبية والكهرومغناطيسية . ووصف مجموعة من ذرات عديدة يتطلب أيضاً نظريتي الميكانيكا والديناميكا الحرارية .

وبصدد هذه النظريات الخمس ، يمكننا القول بشيء من الثقة إنه لن يُطاح قط بإحداها كلية . وإذا كان التاريخ مرشداً موثوقاً به ، يمكننا القول بثقة مماثلة إن أيّاً منها لن يبرهن بأنه صائب تماماً . فالميكانيكا معروفة الساعة بأنها « غير صحيحة » ؛ إذ « أطاحت » النسبية بها حين بينت أن قوانين نيوتن في الميكانيكا خاطئة لوصف الحركة بالسرعات فوق العالية . وفي وقت لاحق بينت ميكانيكا الكم أن الميكانيكا الكلاسيكية غير صحيحة لوصف الحركات الدخلية في الذرات . فكل من تطوري القرن العشرين هذين أثبت أن الميكانيكا خاطئة . فلم إذن ندرج الميكانيكا بإصرار كإحدى نظريات العلوم الفيزيائية العظمى ؟ ... لأنها ، على امتداد قطاع ما فني شاسعاً من الأحجام والسرعات ، هي من تناهي الدقة بحيث أنها لكل المآرب العملية صائبة كلياً . فهي أحسن وأبسط أداة لوصف الطبيعة في قطاع محدد . والأفضل أن نقول إن النسبية وميكانيكا الكم قد قلّمتا أطراف الميكانيكا ، مختزلتين إياها من قطاع لا متناه إلى متناه ، على أن نقول إن أيّاً من هاتين النظريتين قد أطاحت بالميكانيكا .

لسريان مفعول الميكانيكا حدود معروفة

ولا تظهر في قائمة النظريات العظمى فروع عديدة من العلوم الفيزيائية التي قد تعين على بال القاري . فآين مثلاً موضوع الكيمياء الفسيح ؟ وأين علوم الفلك والأرضيات (الجيولوجيا) والديناميكا الهوائية ؟ لقد حُذفت لكونها أقل أساسية حيث تستمد أودها من هذه النظريات . وهذا لا يعني أنها أقل إثارة أو أقل تعقيداً (حيث تكون في الواقع أكثر تعقيداً) ؛ بل يعني أنها أكثر نأياً عن قوانين الطبيعة الأساسية الأولية . وخلال هذا الكتاب سنكون معنيين في المكان الأول بالمفاهيم والقوانين والنظريات الأساسية للفيزياء .

وقاعدتنا النظرية أقل ضماناً على حدود الكبير جداً والصغير جداً . فحتى نصف الطبيعة على هذه التخوم ، قد تكون ضرورية نظريات عامة جديدة . فالفيزياء علم ناشط لا يني يتطور .

البحث عن نظريات جديدة مستمر

١,٣ النظرية والتجربة في الفيزياء Theory and Experiment in Physics

إن بعض ميادين العلوم ، مثل فروع معينة من الأحياء وعلم النفس psychology ، تجريبية صرفة . فالحقائق ما انفكت تُجمع والمعرفة تزداد ؛ بيد أنه لا توجد أية مجموعة من الأفكار والمفاهيم والعلاقات التي تدعى بمجمعتها نظرية حتى تربط الحقائق بكل مناسك ، أي حتى « تُفسر » الحقائق . أما في قطاعات أخرى من العلوم ، كالميكانيكا مثلاً ، فإن معادلات نظرية مختبرة جيداً قد طوّرت إلى درجة من الإنقان والإحكام تكاد تبدو معها هذه القطاعات وكأنها أجزاء من الرياضيات البحتة . غير أن كل مضمار في العلوم ، بغض النظر عن حالة تطوره

دور التجربة الاساسي

الرياضي ، يختلف بصورة أساسية عن الرياضيات البحتة وعن أي مجال آخر تقريباً من النشاط الانساني ؛ إذ أن العلم في جوهره تجريبي empirical . ولا تبقى حبة أبة فكرة في العلم لأنها مسيرة جالباً أو أنيقة رياضياً أو عامة إلى درجة رائعة ، رغم أن أفكاراً كثيرة في العلم هي كل هذه الأشياء . فالفكرة يجب أن تجتاز اختبار التجربة ، وليس محض تجربة واحدة . وحتى تصمد ، يجب أن تظل حية عقب الهجوم من جميع الأعداء بكل جهاز يستطيع العالم التجريبي أن يجنده .

قيمة النظرية

فالتجربة هي الفيصل الأخير في العلم ؛ إلا أن علماً تجريبياً صرفاً لسوف يكون باهتاً . ولقد سعى الإنسان ، في محاولته فهم الطبيعة ، وراء أكثر بكثير من مجرد الحقائق التجريبية . فالذي يزود تحدي العلم ومكافأته هو النظريات التي تربط الحقائق معاً . فالمنوال الجديد للنظر إلى الطبيعة والعلاقة غير المتوقعة بين الحقائق والمعادلة المفردة التي تحكم سلسلة شاسعة من الظواهر - هذه هي الأشياء التي تكسب العلم منزلته الرفيعة ونبله .

الإيمان بالبساطة

ومع أن دليل التجربة القاطع يستطيع أن يقوِّض نظرية ما ، فإن أي مقدار من التحقيق العملي لا يمكن أن « يبرهن » إحدى النظريات . فكل نظرية يجب أن تبقى مؤقتة لسببين : الأول ، أنه من المحتمل أن تكون نظرية ما قادرة على التنبؤ بعدد لا متناه من التنبؤات المختلفة ، لكن قدرات الإنسان المتناهية تحد من قدرته على اختبار التنبؤات . والثاني ، أنه ليس ثمة من نظرية نسيج وحدها . فالإمكانية ينبغي أن تبقى دائماً مفتوحة بأن نظرية ما ستخلفها أخرى ، لا لأن الدليل التجريبي يتطلب رفضها ، بل فقط لأنه يمكن إيجاد نظرية بديلة أكثر إرضاء للإنسان بصورة ما ، رغم أنها ليست أفضل أو أسوأ تجريبياً . إذ يمكن أن تكون مفاهيمها أبسط ، أو أن تملك إطاراً رياضياً أكثر اقتصاداً ، أو تبدو بصورة ما أعمق ، وبالتالي أكثر إرضاءً . فالحكم الانساني على النظرية هو كاهية التجربة ذاتها في تشكيل بنية العلم وتقدمه . وإيمان العالم بالبساطة قد يدفعه في الحقيقة إلى رفض نظرية معقدة وملتوية حتى لو لم يكن بمتناول اليد بديل أفضل ، فقط لإيمانه الراسخ بأنه لا مناص من وجود وصف أبسط للطبيعة .

وعبر القرون القليلة الماضية تطورت النظرية والتجربة جنباً إلى جنب بالإخصاب المتبادل . فبدون أفكار قد يكتشف التجريبي سلسلة لا نهاية لها من الحقائق العقيمة ؛ كما أن النظري الذي لا تكبح جماحه حدود التجربة قد ينتج سيلاً من الأفكار الوهمية التي لا تمت إلى الطبيعة بصلة .

١,٤ علاقة الفيزياء بالرياضيات والتقنية

The Relation of Physics to Mathematics and Technology

النظرية والتجربة هما وحدتا الفيزياء الجوهريتان المتلازمتان ؛ لكن هناك مرفقين إضافيين مساعدين تغذيها الفيزياء ويُغذيان الفيزياء - الرياضيات والتقنية . فالتقنية هي ثمرة العلم وتزود

تُثَرِّي الرياضياتُ والفيزياءُ بعضهما البعض

الأدوات الأساسية للبحث التجريبي المتقدم في العلوم . وبطريقة مشابهة نوعاً ، فلقد حُفِرَ قسْطُ وافر من الإكتشاف الرياضي من قِبَل الفيزياء ؛ كما أَنَّ الرياضيات ذاتها هي أداة للبحث النظري وأداة التعبير عن النتائج النظرية (شكل ١,٣) . والرياضيات ، أكثر بكثير من التقنية ، تملك لنفسها حياة مستقلة عن العلم . وإمكانية وجود الرياضيات كضرب من النظرية العلمية بمعزل تام عن الحقيقة العلمية قد لوحظت قبل أقل من مئتي عام . ومهما يكن من أمر ، فإن كثيراً من الرياضيات يمكن استعماله لوصف الطبيعة - بل الواقع أنها تزودنا بأكثر الأوصاف أناقة ؛ وجزء من إيمان العالم بالبساطة ما هو إلا إيمان بإمكانية التعبير عن قوانين الطبيعة في صيغة رياضية .

This is an equation to determine l in terms of the fundamental parameters. Setting

$$l_0 = \frac{\mu_0}{N} (1 - \epsilon_0) \quad (13)$$

$$l_1 = \frac{K \epsilon_0}{2\pi c^2 N} \quad (13')$$

$$l_2^2 = \frac{\phi_H - \chi - \epsilon}{4\pi e^2 N}, \quad = \frac{\chi_1 - \chi_2}{4\pi e^2 N} \quad (14)$$

Eg. (11) reduces to :

$$\frac{l^2}{a} + l - l_0 = \frac{1}{a} \left(\frac{l^2}{2K} - l_2^2 \right) \quad (15)$$

The right hand side will be negligible provided that a is as large that:

$$a \gg \frac{l_1}{2K} = \frac{\epsilon_0}{4\pi e^2 N} \quad \text{and} \quad l_0 \gg \frac{l_2^2}{a} \quad (16)$$

شكل ١,٣ : الرياضيات تخدم العلوم . ملاحظات جون باردن John Bardeen ، المدونة عام ١٩٤٦ ، حول نظرية أشباه الموصلات semiconductors . فقبل أن يتسنى لأشباه الموصلات القيام بالوظائف العملية العديدة الدائنة الآن لأجلها ، كان مطلوباً نظرية رياضية لسلوكها . ولإسهاماته في هذه النظرية ، تسلم باردن جائزة نوبل Nobel في ١٩٥٦ . (المصدر : بروفيسور باردن .)

والرياضيات والآلات التقنية تكون أيضاً جزءاً من القنطرة بين الفيزياء البحتة والفيزياء التطبيقية . ومع أن الحوافز لاستقصاء معرفة جديدة وتطبيق معرفة ، غدت مكتسبة ، لأغراض عملية هي مختلفة تماماً ، فإن كلا الجهدين يستخدم الرياضيات ، وأحياناً كثيرة رياضيات شبه متماثلة ، وكلبيها يستعمل أدوات ميكانيكية متشابهة . ومن خلال الاكتشافات في الرياضيات وتطوير الآلات ، فلقد أثرى العلم البحث والعلم التطبيقي بعضها البعض . وليس من النادر أيضاً أن تمتد مواهب الأفراد لتضم مجالات الفيزياء والرياضيات والهندسة .

تتري التقنية والفيزياء بعضها البعض

وبما أن نتائج العلم التقنية الثانوية أسهل استيعاباً من العلم الأساسي ذاته ؛ كذلك بما أن لهذه النتائج الثانوية تأثيراً مباشراً أكبر على حيواتنا (شكل ١،٤) ، فإن التقنية كثيراً ما تخلط بالعلم . فالعلم يتألف من اكتشاف حقائق الطبيعة وتوحيد هذه الحقائق بواسطة بنيات الأفكار والمعادلات التي تعرف بمجموعها بالنظريات . أما التقنية فتتكون من تطبيق حقائق الطبيعة المعروفة لأغراض عملية . واليوم تتطلب التقنية أحياناً تدريباً علمياً ومهارةً رياضية من طراز عالٍ . وفضلاً عن ذلك ، فإن بعض التقنية قد أثرت بالمقابل على العلم كأداة بحث (شكل ١،٥) . لهذه الأسباب ، فإن الحدود الفاصلة بين العلم والتقنية غير واضحة ؛ بيد أن حوافز استقصاء المعرفة وهدف التطبيق العملي المختلف عنها جوهرياً تبقى جلية .

يجب التمييز بين العلم والتقنية

وتقنيتنا الحديثة تمثل إحدى أبرز سمات العلم - سلطانه . فبالإضافة الى مثال القنابل النووية البين ، فإن كل طائرة وكل سيارة وكل أداة منزلية - بل تقريباً كل القسّمات الفيزيائية للمجتمع الصناعي الحديث - تشهد على سلطان العلم .

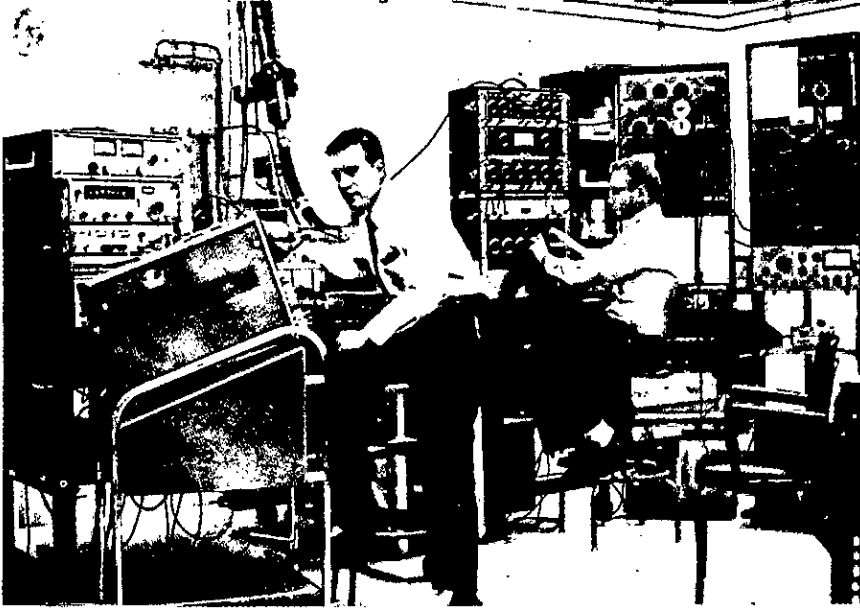
سلطان العلم



شكل ١،٤ : العلم يخدم التقنية . أدى البحث الأساسي في فيزياء الحالة الصلبة ، كالذي يمثله شكل ١،٣ ، إلى تطوير الترانزستور transistor ، الذي يجعل ممكناً المذياع (أو الراديو) radios الصغيرة السهلة الحمل portable وحشداً من الأدوات الإلكترونية الحديثة الأخرى .

• جمع مذبذبات .

(المشرف)



شكل ١,٥ : دَوْرَةُ العلم والتقنية . إن منتجات التقنية المَعْدَة ، المستخدمة كأدوات من قبل هذين الباحثين في أواخر السَّنَات ، أَمَسَتْ ممكناً بسبب البحث الصَّرف الخاصَّ بالعقد أو العقدتين السَّالِفَيْن لذلك . ونتاج عملها على ظاهرة قُرْط المَوْصَلِيَّة superconductivity قد تكون أسهمت بدورها في تقنية المستقبل .

(مصدر الصورة : باري ن . تيلور Barry N. Taylor ووليم هـ . باركر William H. Parker .)

وينبثق هذا السَّطْطَان أساساً عن الميزة المقدارية quantitative والتنبؤية predictive للعلم . وما كانت هذه السَّطْطَة والسَّيْطَرَة لتكون إحدى سِمَات العلم المهيمنة لو أنه اكتفى بتعليل ما لُوَحِظَ واختُبِرَ في الماضي . فالذي يُسَبَّغُ على العلم سلطانه لتغيير العالم من حولنا هو الحقيقة بأنه ، تزامناً مع تفسير ظاهرة معروفة سابقاً ، تأتي المقدرة على تنبؤ ظواهر جديدة . ولقد بزغت أحياناً اختراعات تقنية دونما فهم علمي حقيقي - والآلة البخارية مثال جيد على ذلك - لكنَّ التقنية كانت على الأغلب ابنة للعلم . والحقيقة أنه في حالات عديدة ما كان بالإمكان تصوّر الاختراع قبل خلق النظرية العلمية التي يرتكز عليها . فالمرء لا يستطيع إلاّ بشقِّ النَّفس أن يتخيل اختراع الصَّمام المفرَّغ vacuum tube المستخدم في المُكَبِّرَات amplifiers قبل اكتشاف الإلكترون electron ، أو تطوير القنبلة الذرية قبل نظرية النسبية واكتشاف النيوترون neutron .

١,٥ نشوء الفيزياء The Evolution of Physics

ترجع جذور الفيزياء ، وعلى الأخصَّ بعض سِمَات الميكانيكا وأدوات الحساب والهندسة ، إلى العصور القديمة . لكنَّ « الفلسفة الطبيعية » لم تُبْعَثْ حَيَّةً ، كقوَّة بارزة في تطوير

الحضارة ، إلا منذ القرن السابع عشر . ففي عام ١٦٠٠ نشر وليم غيلبرت William Gilbert عملاً هاماً عن المغناطيسية ° magnetism . وفي نفس العام ، في بوهيميا ° ، كان يوهانز كبلر Johannes Kepler « يغربل » المُعطيات data عن مدار المريخ orbit of Mars ؛ بينما كان غاليليو Galileo ، في إيطاليا ، يستقصي الحركة والجاذبية gravity ؛ كما كان سيمون ستيفن Simon Steven في الأراضي المنخفضة (هولندا) يدرس القوى . وفي الأقل من أربعمئة عام منذ ذلك الحين غيّر العلم كلياً ، بقيادة الفيزياء ، وجه الأرض وطبيعة الحياة الإنسانية .

وتبين المنحنيات في شكل ١,٦ بصورة تقريبية جداً التطور الزمني لنظريات الفيزياء العظمى . فالجزء المرتفع لمنحنى ما يدل على زمن الاكتشاف المؤدي إلى صياغة النظرية ؛ بينما تعين ذروة المنحنيات زمان أكثر مآثر النظرية أساسية . أما إبان الوقت المبين في الجزء المنحدر من المنحنى ، فقد حدثت تطورات وتفصيلات واختبارات إضافية للنظرية . وأحد الأشياء التي يرمي إلى تأكيدها هذا العرض البياني هو أنه لم تبرز إلى حيز الوجود أية نظرية كبرى كاملة التطور . وكون منحنى معين مبيناً الساعة أنه ذو قيمة صغيرة جداً لا يعني أن النظرية المعنية غير مهمة . فالميكانيكا ، على سبيل المثال ، أداة حيوية يستعملها الفيزيائي والمهندس يومياً ؛ لكنها نظرية شبه ساكنة ؛ ولم تعد مجالاً بارزاً في نشاط البحث العلمي . (ثمة استثناء لذلك ، هو مجال ديناميكا السوائل الذي ما زال مفعماً بالنشاط ، والذي يطبق الميكانيكا والديناميكا الحرارية على الموائع fluids) .

تنشأ النظريات تدريجياً

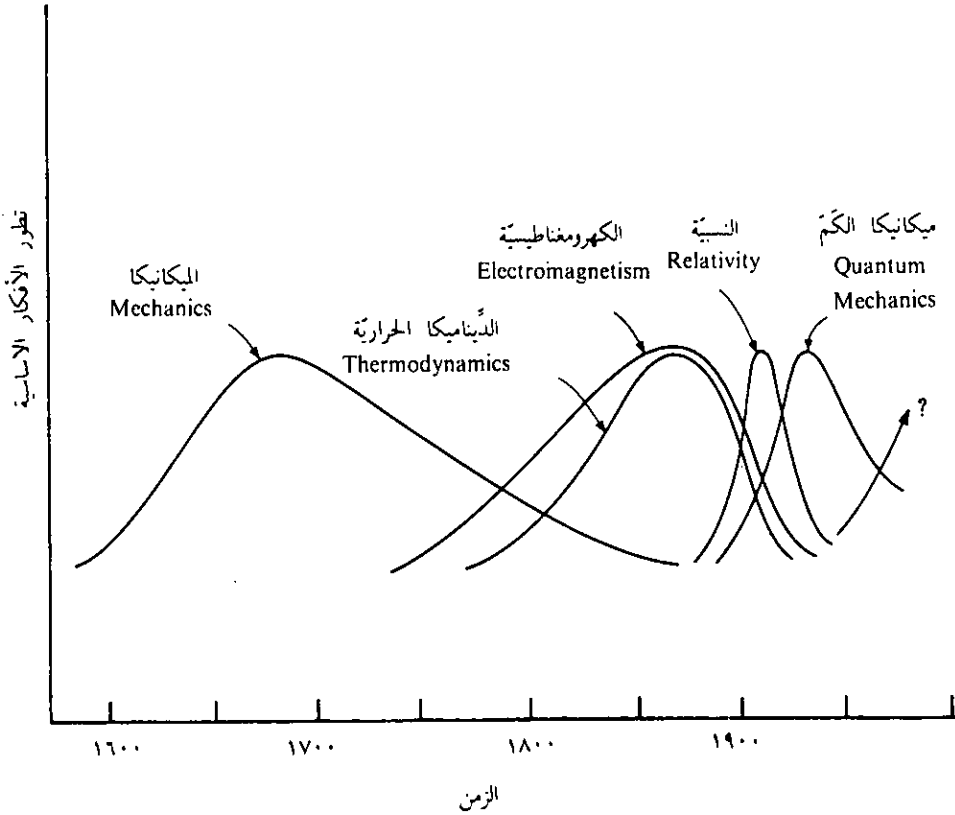
هيمنت الميكانيكا على العلم في القرنين السابع عشر والثامن عشر

وقد جاءت نقطة الذروة للميكانيكا في ١٦٨٧ مع نشر « مبادئ (أو أصول) » Principia † إسحق نيوتن Isaac Newton . ومع أن إسهام نيوتن الشخصي كان هائلاً - لا يُقارَن إلا بإسهام أينشتاين Einstein في هذا القرن - فإن إكتشافاته المعنية بالحركة والجاذبية لم تكن دون سوابق . فلقد زوّد كبلر وغاليليو وآخرون الأساس الذي عليه بنى . وفي أعقاب نيوتن هيمنت الميكانيكا على الفيزياء لقرن ونصف ، وأسهمت في الخصوبة الاستثنائية للتطور الرياضي في القرن الثامن عشر .

°° المغناطيسية ، De Magnete ، وهو متبرس ككتاب ورقي الغلاف paperback (نيويورك ، شركة دوفر للنشر المحدودة ، ١٩٥٨ : New York, Dover Publications Inc., 1958) .

°° كانت هذه الإقليم الرئيسي في مملكة بوهيميا التي حكمها آل هابسبورغ Hapsburg مابين عامي ١٥٢٦ و ١٩١٤ . وقد انضمت بعيد الحرب العالمية الأولى إلى مورافيا وسلوفاكيا لتشكّل تشيكوسلوفاكيا الحالية . (المشرف)

† عنوانه الكامل : « المبادئ (أو الأصول) الرياضية للفلسفة الطبيعية » Philosophiae Naturalis Principia Mathematica . (المشرف)



البنية الداخلية للجسيمات ؟

الدِّيناميكا الهندسية ؟
Geometrodynamics?

علم الكونيات ؟
Cosmology?

أشياء النجوم والنجوم النابضة ؟
Quasars and pulsars?

الخواص الرياضية للحوادث دون
النوية ؟ subnuclear

شكل ١٠٦ : عرض تخطيطي لتطور نظريات الفيزياء العظمى . (يشير المنحنى الموسوم بكلمة « النسبية » إلى نظرية النسبية الخاصة .) ولا أحد يعرف أي مجال بحث راهن قد يؤدي إلى نظرية عامة جديدة .

أما الدِّيناميكا الحرارية والكهرومغناطيسية فقد طُورت كلتاهما إلى صيغة شبيهة نهائية في القرن التاسع عشر . وكان من بين انتصارات الدِّيناميكا الحرارية القانون العام لحفظ الطاقة energy conservation وتوضيح الخواص الجزيئية bulk properties للمادة بدلالة الميكانيكا الجزيئية molecular mechanics . وتُوج توحيد ماكسويل Maxwell للكهرباء والمغناطيسية والضوء أكثر من قرن من الاكتشافات فيما كان يوماً ثلاثة مجالات منفصلة .

شبت الدِّيناميكا الحرارية
والكهرومغناطيسية في القرن التاسع
عشر

إن الميكانيكا والدِّيناميكا الحرارية والكهرومغناطيسية لتُكوّن معاً ما يُدعى بالفيزياء الكلاسيكية ؛ وهو إطار من الفهم والتطبيق الذي لاح لبعض العلماء في نهاية القرن التاسع عشر بأنه شبه كامل وشبه خالي من النقص . ولقد قلبت نظريتنا هذا القرن العُظميان ، النسبية وميكانيكا الكم ، نظرتنا للطبيعة وأزالت من الفكر العلمي أي رضى زائف من هذا القبيل بصدد كمال الفهم الفيزيائي . ورغم أن كلتا النسبية وميكانيكا الكم صرحا مثيرا للإعجاب ومُختبر جيداً ، فإن كليهما تملك بعض الحدود غير المصقولة ، وخاصة في نقاط التقائهما ، وكليهما مجال بحث معاصر ناشط . وجُلّ الفيزيائيين يعتقدون أن النظرية البازرة المقبلة ستنبثق عن دراسات الجُسيمات الأولية ، التي يشكل قطاعها أرضية اللقاء هذه للنسبية وميكانيكا الكم .

تنتمي النسبية وميكانيكا الكم إلى
هذا القرن

ومعظم البحث الحالي في الفيزياء يربط في إحدى فئات مُعضلات الجسيمات المعدودة few-body problems والمعضلات الفلكية ومعضلات الجسيمات المتعددة many-body (أي) قطاعات الصغير جداً والكبير جداً والمعقد جداً ، على التوالي) . وتُعنى الفيزياء الذرية والفيزياء النووية وفيزياء الجسيمات بسلوك وبنية الجسيمات المفردة والتفاعلات بين الجسيمات المعدودة . وبالمفارقة ، فإن دراسات الجوامد والموائع والبلازما plasmas وظواهر درجات الحرارة المنخفضة low-temperature phenomena ما هي إلا دراسات لأنظمة متعددة الجسيمات . وتشمل أبحاث الفلك كلا الصنفين : معدودة الجسيمات ومتعددة الجسيمات ، بالإضافة إلى معضلات كونية فريدة . والتأكيد في كل مجالات الفيزياء هو في الأغلب على المكونات دون المجهرية للأنظمة قيد الدراسة .

خُلَاصَةُ الْأَفْكَارِ

- الفيزياء هي هيئة متماسكة من المعرفة ومضمار ناشط للمسمى □ الرياضيات والتقنية تخدمان ، وتخدمان من قبل ، الفيزياء .
- الخُطواتُ الصَّغيرةُ اعتيادية أكثر من الطُّفُراتِ العملاقة ؛
- أجزاء الفيزياء المتماثلة تشملها خمسُ نظريات عامة . فجلُّ نظريات الفيزياء قد نشأت تدريجياً .
- هرمية المادّة المعروفة تمتدُّ من ١٠-١٥ م إلى ٢٦١٠ م □ يسبُرُ البحثُ المعاصر في الفيزياء تخوم الصَّغيرِ جداً والكبيرِ جداً □ تعزُّزُ التجربة والنظرية ، وجهها العلم المتوازنان ، بعضُها والمعقد جداً .
- البعض .

أَسْئَلَةٌ

- س ١،١ اذكر دليلاً بأن ثمة بنى أكبر بكثير من الإنسان هي أقلُّ تنظيمًا وأقلُّ تعقيداً منه . بند ١،١
- س ١،٢ أورد حُجَجاً مع أو ضدَّ الافتراض بأن حجم أكثر الآليات (أو ميكانيكيات) mechanisms الطبيعة تعقيداً سيكبر على الدوام مع الزمن .
- س ١،٣ لِمَ الذَّرةُ بهذا الصَّغر؟ (تلميح Hint : فكِّرْ لماذا يكون الإنسان بهذا الكبر ، حسب المقياس الذريِّ للحجم.)
- س ١،٤ على الأقلِّ ثلاث نظريات أساسية في الفيزياء تشكِّل أس علم الأرصاد الجوية meteorology . سمِّ انتئين منها ، وفسِّر بإيجاز لماذا كلُّ منها من الأهمية بمكان لفهم سلوك الجو atmosphere . بند ١،٢
- س ١،٥ اِعتَبِرْ أيَّ « قانون » تعرفه في فرع آخر من العلوم [كقانون النِّسبِ المتعدِّدة law of multiple proportions (في الكيمياء) ، أو قانون ميندل Mendel's law (في علم

الوراثة) [(١) أي نظرية تعلل القانون ؟ (٢) هل النظرية عامة أكثر من القانون أم أقل ؟ هل هي جذرية بالاعتقاد أكثر أم أقل ؟

س ١,٦ كثير من الظواهر ، علمية وغير علمية ، يتطلب « تفسيراً » . ما هي الخصائص الأساسية للتفسير العلمي ؟

س ١,٧ أي من العبارات التالية يشكل تفسيراً علمياً ؟ ولماذا ؟ (١) الحشيش أخضر لأنه يحوي الكلوروفيل chlorophyll . (٢) تدوير الأرض حول محورها لأن المخلوقات الحية بحاجة لتعاقب ليل ونهار . (٣) الاحتراق هو عملية تأكسد oxidation .

س ١,٨ في معظم المدارس العليا في الولايات المتحدة ، يكون تسلسل مقررات العلوم كالآتي : الأحياء ، فالكيمياء ، فالفيزياء . وفي بعض المدارس العليا يُقدّم التسلسل العكسي : الفيزياء ، فالكيمياء ، فالأحياء . أورد حجة موجزة لصالح كل تسلسل . أي حجة تراها أكثر إقناعاً ؟

س ١,٩ في تجربة ما « يُبحث » بالأحداث الطبيعية عن عمد . اشرح بظنك ماذا كانت ، على وجه الاحتمال ، أهمية التجربة في العلم ، بالمفارقة مع محض الملاحظة . في شؤونك اليومية ، هل تعلمت أبداً من خلال التجربة ؟ كيف ؟

بند ١,٣

س ١,١٠ أذكر عدة سمات لحياتك اليومية تعتمد فيها على بساطة الطبيعة ، أو على الأقل على نظاميتها وقابليتها لأن يُتنبأ بها .

س ١,١١ وسم أينشتاين النظرية العظمى بأنها تلك التي تمتلك « كمالاً داخلياً » والتي يُتحقق منها « بالإثبات الخارجي » . فسر معناه .

س ١,١٢ يعتبر الفيزيائي الطبيعة « بسيطة » ؛ لكنه لا يعني بهذا أنها بسيرة الفهم . وضح هذه النقطة بمثال . اشرح أية حقيقة أو قانون أو عمل بشري يقتضي فهمه جهداً فكرياً كبيراً ، بيد أنه يمتلك ، حالما يُدرك ، بساطة أخذة .

س ١,١٣ هل الطيران الفضائي البشري manned space flight إنجاز تقني في المقام الأول أم علمي ؟ فسر .

بند ١,٤

س ١,١٤ أورد حجة مع أو ضد الافتراض بأن بعض فروع الرياضيات لا تمت إلى الطبيعة بصلة .

س ١,١٥ أورد حجة مع أو ضد الافتراض بأن بعض الأحداث في الطبيعة ليس لها من أساس رياضي .

س ١,١٦ بناءً على ملاحظتك أو تجربتك الشخصية في مختبر فيزياء ، سمّ جهازاً تقنياً أو اثنين (عدا ما نوه به في متن الكتاب) أسهبا في البحث الفيزيائي .

س ١,١٧ هل نظن أنه من الملائم وسم البحث الأساسي في الفيزياء كمنشأ إبداعي ؟ لم أو لم لا ؟

بند ١,٥

س ١,١٨ هل ستؤول الفيزياء يوماً إلى نهاية ، حينما يَفْقَهُ الإنسان كلّ قوانين الطبيعة الأساسية أو كلّ ما يمكن إدراكه ؟ لم أو لم لا ؟

س ١,١٩ هل نعرف الساعة « مقداراً كافياً » من الفيزياء ؟ هل حان الأوان للإنسان كي يَنبَأ عن العلوم الأساسية ويسعى إثر التطبيق المُجدي لما يعرفه الآن ؟

تمارين

تمرين عددي

ت ١,١ قُمْ بِالْعَمَلِيَّاتِ الْحَسَابِيَّةِ التَّالِيَةِ :

$$(أ) \quad 10^{13} \times 10^{-12} ;$$

$$(ب) \quad (10^3 \times 3) / (10^6 \times 6) ;$$

$$(ج) \quad 21000 \times 3000000 \times 1000000 ;$$

$$(د) \quad 10^3 \times 10^7 + 10^3 \times 10^8 .$$

ت ١,٢ باستخدام الحقيقة أَنَّ الضَّوَّ يَقْطَعُ زَهَاءَ ١٠^{١٦} م / السنة ، احسب من جدول ١,١ الزَّمن اللازم للضَّوِّ لعبور :

$$(أ) \quad \text{مجرة ما} ;$$

$$(ب) \quad \text{عنقود مجرِّي (أو مجموعة مجرّية)} ;$$

$$(ج) \quad \text{الجزء المعروف من الكون} .$$

ت ١,٣ اذا تحرك الكترون سريع بسرعة ١٠^٨ م/ث ، احسب كم سيستغرق في اجتياز :

$$(أ) \quad \text{نواة ذريّة} ; (ب) \quad \text{ذرة} ; (ج) \quad \text{جزئي عملاق} .$$

ت ١,٤ لمساعدتك في تصوّر بعض المقادير في جدول ١,١ ، احسب الكميّات التالية على نحو تقريبي :

بند ١,١

(أ) الزَّمن اللازم لصفّ خطّ مكوّن من متر واحد من النّوى ° بمعدّل نواة واحدة في الثانية ؛

(ب) عدد النّوى الذي سيتطلّبه ملء حجم ذرة ما ؛

(ج) عدد مُضَاعَفَات قُطْر الأرض على امتداد نجم كبير .

ت ١,٥ اذا كَبُرَتْ ذَرَّةٌ مِنْ قُطْرٍ 10^{-10} م إِلَى قُطْرٍ ٢ م ، فكم سيغدو حجم نواتها ؟ اذا كَبُرَتْ هَكَذَا كُلَّ الذَّرَاتِ فِي امْرِئٍ مَا ، فهل يستطيع أَنْ يَنْطَبِقَ عَلَى الْحَيِّزِ بَيْنِ الْأَرْضِ وَالشَّمْسِ ؟

ت ١,٦ تَحَقَّقْ مِنْ أَنَّ الْأُرْدُنَّ ° يقع في وسط هرميّة المادّة ؛ أي أَنَّ بُعْدَهُ dimension يربو عن نصف قطر جسيم أوليّ ويقلّ عن نصف قطر الكون بنفس العامل .

ت ١,٧ ثَمَّةُ زَهَاءٍ ١٠^٩ جسيم أوليّ في نجم نموذجي typical star ، وزهَاءُ ١٠^{١١} نجم في المجرة ،

و ١٠^٣ مجرة في العنقود ، و ١٠^٩ عنقود في الجزء المعروف من الكون . (١) فكم جسيماً أوليّاً على وجه

التقريب يشكّل الجزء المعروف من الكون ؟ (٢) لو ضُغِطَت هذه المادّة كلّها بحيث يشغل كلّ جسيم

١٠^{-٤٥} م فقط (أي حجم بروتون proton تقريباً) ، فماذا سيكون نصف القطر التقريبي لهذا

الكون المكثف جداً ؟ أيّ بنية معروفة السّاعة يُصَاهِي هذا البعد ؟

° جمع نواة ؛ ويقال أيضاً نَوَيَات ونُوي . وفي القرآن الكريم : « إِنَّ اللَّهَ فَالِقُ الْحَبِّ وَالنَّوَى » .

(المشرف : عن المعجم الوسيط)

°° في النّصّ الأصليّ : ولاية كنساس Kansas الأمريكيّة .

(المشرف)

مَسْأَلَة

إيجاد معادلة لتلخيص المُعطيات

م ١,١ يلخّص أحدُ قوانين الطبيعة بصورة موجزة سلسلة متعاقبة من المشاهدات . أدرس المُعطيات الشهودية observational data التالية وحاول أن تجدَ « قانوناً منفرداً لطيران الصّاروخ » . أكتب القانون على صورة معادلة equation ؛ ثُمَّ تنبأ بارتفاع كلّ صاروخ بعدَ ٢٥ ث من الطّيران . اقترح قياساتٍ قد يتوقّع منها أن تنمَّ عن حدود سريان مفعول القانون . (حاشية : قد تحوي بعض المعطيات أخطاءً قياسيةً صغيرة .)

الزّمن منذ الانطلاق	ارتفاع الصاروخ أ فوق الأرض	ارتفاع الصاروخ ب فوق الأرض	ارتفاع الصاروخ ج فوق الأرض
٥ ث	١٢٤ قدما	٠,١ ميل	٩١ م
١٠ ث	٥٠٠ قدم	٠,٤ ميل	٣٦٥ م
١٥ ث	١١٢٧ قدما	٠,٩ ميل	٨٢٠ م
٢٠ ث	٢٠٠١ قدم	١,٦ ميل	١٤٥٥ م



٢. مفاهيم ووحدات وأبعاد

Concepts, Units, and Dimensions

النظرية الفيزيائية هي وصف رياضي للطبيعة ؛ لكنها أكثر بكثير من رياضيات مجردة . إذ أن مجموعة من المعادلات ليست نظرية فيزيائية بأكثر من كون يّان الميزانية لشركة ما رأساً لها الحقيقي . فمن الضروري أن تتوافر أيضاً طائفة من الأفكار والفرضيات مع إجماع علمي . ويتوجب على هذه أن تدعم المعادلات وتبها الحياة . وحتى بعد ذلك ، فإن المعادلات تُصاغ لتتوافق فقط مع النتائج التجريبية ؛ أما انسجامها مع الحقيقة الجذرية الأكثر عمقاً في الطبيعة ، فيقتضي افتراضات إضافية سنّها مُغري ، لكنها على وجه الاحتمال غير جوهرية للعلم .

مقومات نظرية. مُطوّرة

والنظرية العامة في الفيزياء مؤلفة من طائفة من المفاهيم ؛ ومن افتراضات عن التمثيل الرياضي لهذه المفاهيم ؛ وعلاقات رياضية ما بين المفاهيم ؛ وقواعد لربط البنية الرياضية بالقياسات الفعلية ؛ والأدلة المترابطة التي تؤيد الافتراضات والقواعد ؛ ومن أسلوب نظر للطبيعة تستفزّه الأفكار ونجاحها . كلّ هذه الأشياء ، إذا ما أُخذت معاً ، تكون أس إدراك الحقائق الماضية والتنبؤات بحقائق جديدة والنظرة للطبيعة التي تشكّل بتناغم نظرية كاملة للفيزياء . وبنفس الأهمية للنظرية يكون هيكلها العظمي من المعادلات ولحمها ودُمها من الأفكار ، والتأويل ، والصّور التي يمكن تخيلها .

ولمفاهيم الفيزياء أهمية خاصة لأنها الأواصر التي تربط الجوانب الرياضية والكلامية والتجريبية . وهذا الباب معنيّ ببعض المفاهيم الفيزيائية الهامة وأبعادها ووحداتها القياسية .

٢.١ المقادير Quantitative Concepts

في الاستعمال اليومي تشير عادة كلمة « مفهوم concept » إلى فكرة يتعدّر تصوّرها مباشرة ، إما لأنها تجريديّة abstract (كالشّجاعة) ، أو لأنها بمنأى عن متناول حسنا sense (كالذرة) . وفي العلم نستخدم أحياناً بالمعنى الأخير ؛ بيد أننا - على الأغلب -

كميات قياسية وكميات متجهة

سنعني بالمفهوم شيئاً أو كمية قابلة للقياس . ويمكن أن يُدعى هذا مفهوماً مقداريًا . وللمفهوم المقداري اسمٌ ويُعدُّ فيزيائيٍّ ووَحْدَةُ قياس (أو عِدَّةٌ وَحَدَاتٍ قياسٍ مُمكنةٌ) ؛ ويمكن أن يُعالَجَ رياضياً وأن يتحدَّدَ بقيمة عددية أو رياضية أخرى . وأبسط المفاهيم الفيزيائية هي كميات قياسية scalar quantities . وبعض المفاهيم الفيزيائية كميات متجهة vector quantities ، أو كميات رياضية أخرى أكثر تجريدًا ، يتطلب قياسها أكثر من رقم واحد . وحينما نقول إنَّ مفهومًا ما هو كمية قياسية أو متجهة ، فإننا نعني أنَّ المفهوم يمكن أن تتناوله في معادلات حسب القواعد التي تتحكم بالتجريد الرياضي للكمية القياسية أو المتجهة - أو بكلمة مقتضبة ، أنَّ الكمية الفيزيائية تنصرف كالكمية الرياضية . وستابع هذه الفكرة في الباب السادس .

ومن الكميات القياسية المألوفة الكتلة mass والطاقة energy ودرجة الحرارة temperature ؛ بينما تشمل الكميات المتجهة المألوفة القوة force والسرعة (السرعة المتجهة) velocity والتسارع acceleration . وسنصادف كميات أخرى من كلا الصنفين . وسوف لا نسمح الفرصة في سياق هذا الكتاب لدراسة كميات من مستوى تجريدي أعلى من المتجهات ؛ لكن من الجدير معرفته أنَّ مثل هذه الكميات (كالممتدات أو التَّزَوُّرات tensors مثلاً) قد وجدت لها مكانة في الفيزياء المتقدمة ، كما ساعدت في تبسيط وصفنا للطبيعة .

وبما أنَّ الفيزياء تركز في النهاية على التجربة ، فإنَّ بعض مفاهيمها على الأقل يمكن تعريفه فقط استناداً إلى القياس . وتسمى مثل هذه مفاهيم أولية primitive concepts .[†] وتُدرج عادة الكتلة والطول والزمن ضمن المفاهيم الأولية ؛ وتُعرف بدلالة معايير standards مختارة اعتباطاً arbitrarily .^{••} كما تُعرف أيضاً درجة الحرارة والتيار الكهربائي electric current استناداً إلى التجربة ؛ وعلى ذلك يمكن تسميتها بمفهومين أوليين . (إلا أنَّ تعريف التيار لا يستخدم أيَّ معيار جديد) . أمَّا المفهوم المعروف بدلالة مفاهيم أخرى فحسب ، فيُدعى مفهوماً مشتقاً derived concept . وجُلُّ المفاهيم مشتقة . وأيُّ المفاهيم أوليٌّ وأيّها مشتق إنَّ هي إلا مسألة اعتباطية تماماً ... مسألة صدفة تاريخية واختيار ملائم . وحتى عدد المفاهيم الأولية اعتباطي ؛ وكذلك أيضاً عدد المعايير .

مفاهيم أولية

مفاهيم مشتقة

ويعتمد القياس الفيزيائي في الوقت الراهن على أربعة معايير اعتباطية : تلك الخاصة

(المشرف)

• راجع ملحق ٢ ب .

† كما يُستعمل أيضاً التعبير مفاهيم أساسية basic concepts .

•• أنظر ملحق ١ . ولقالة خلفية background article ، أنظر آلن ف . آستين : «معايير القياس» :

Allen V. Astin, "Standards of Measurement" ، مجلة Scientific American ، حزيران ، ١٩٦٨ .

مرونة في عدد المعايير

بالطول والكتلة والزمن ودرجة الحرارة . ولعلّه من السهل أن نزيد أو ننقص هذا العدد . فمثلاً بمقدورنا أن نضيف معيار قوة . وفي هذه الحالة ، فإن قانون نيوتن الثاني ، الذي يربط القوة F والكتلة m والتسارع a ، سوف يتخذ الصورة

$$F = Kma, \quad (٢١)$$

حيث K ثابت تناسب constant of proportionality . لكن وجود مثل هذا القانون يجعل من غير الضروري أن نتبنى معياراً مستقلاً للقوة ؛ إذ نستطيع أن نضع $K = ١$ (كما نفعل فعلاً) ، وأن نعرف وحدة القوة بالمعادلة

$$F = ma. \quad (٢٢)$$

ولتقليل عدد المعايير الاعتبارية ، بمقدورنا أن نستغل الصلة التجريبية بين درجة الحرارة والطاقة ؛ إذ قد يجعل هذا بالإمكان قياس درجة الحرارة بوحدة الطاقة ، التي تتحدد بواسطة معايير الكتلة والطول والزمن .

ولا داعي للمتابعة بإسهاب عملية التمييز بين المفاهيم كأولية أو مشتقة بسبب اعتباريتها . وفي الحقيقة ، إذا ما توخينا الدقة في القول ، فإنه ليس ثمة صنفان من المفاهيم الفيزيائية بل ثلاثة : (١) تلك التي تعرف بواسطة المقارنة التجريبية مع معيار اعتباطي ؛ (٢) تلك التي تعرف بواسطة التجربة ، لكن بدون معيار جديد ؛ و (٣) تلك التي تعرف على نحو منطقي أو رياضي صرف . والتسارع مثال على النمط الأخير ؛ حيث يعرف بأنه معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن .^٥ وتدعى كل أصناف التعاريف هذه تعاريف « عمليّاتية »^{٥٥} operational . ويعرف مفهوم ما عمليّاتياً إذا ما أعطي إجراء لا كبس فيه لتحديد هويته وقياسه . ويمكن أن يتكوّن تعريف عمليّاتي من إجراء على صيغة معادلة (خذ مثلاً $F = ma$: قس m ثم a ، واضربها معاً لتحصل على F) ، أو يمكن أن يتكوّن من إجراءات تجريبية . فحتى يكون ذا مغزى في الفيزياء ، على كل مفهوم أن يرتبط بعملية القياس في نهاية المطاف . ولا يظهر في معادلات الفيزياء سوى كميات معروفة عمليّاتياً .

تعاريف عمليّاتية

المفاهيم هي لب الفيزياء

ولا نغدو الحقيقة إذا قلنا إنه ، حالما تدرك المفاهيم ، تغدو الفيزياء مفهومة . وفي دراستك للفيزياء ، لسوف تتكشف كمادة حسنة جداً أن تسأل نفسك في كل مرحلة : هل أعني المفاهيم

٥ . $a = dv/dt$ ؛ وهي مشتقة (رياضية) derivative .

٥٥ . نسبة إلى « عمليّات » .

التي أعملُ بها كافة؟ وإدراكُ كُنْهِ مفهومٍ ما يعني معرفة تعريفه وُبُعْدِهِ ووَحْدَتِهِ ومقاديره النمذجية في مواقف فيزيائية ، ومعرفة المعادلات التي يدخلها.[†]

٢.٢ الوَحَدَاتُ Units

إنَّها لَحَقِيقَةٌ مألوفةٌ أَنَّ جُلَّ الكَمِّيَّاتِ الفيزيائيةِ تَتَطَلَّبُ وَحْدَةً قِياس ، وَأَنَّ أَيْةَ كَمِّيَّةٍ مَعْيَنَةٍ يُمْكِنُ التَّعْبِيرُ عَنْهَا بِطَائِفَةٍ مُنَوَّعَةٍ مِنَ الْوَحَدَاتِ . فَنَحْنُ نَحْسِبُ الْمَسَافَةَ بالبوصات inches أو الأقدام feet أو الأمتار meters أو الأميال miles ، والزَّمنَ بالثواني seconds أو الدَّقَائِقَ minutes أو السَّاعَاتِ hours ، والنَّقْدَ بالسَّنَتَاتِ cents أو الدُّولَارَاتِ dollars أو البَاوَنْدَاتِ pounds أو الفرنكات francs ؛ وَهَكَذَا دَوَالِيكَ . وَإِنَّ فَتَةً مَعْيَارِيَّةً مِنَ الْوَحَدَاتِ هِيَ أَيْةُ فَتَةٍ مُتَوَافِقَةٍ ذَاتِيًّا وَذَاتِ وَحْدَةٍ وَاحِدَةٍ لِكُلِّ كَمِّيَّةٍ . وَهَنَالِكَ فَتَاتٌ مَعْيَارِيَّةٌ ثَلَاثٌ فِي الِاسْتِعْمَالِ الدَّارِجِ فِي الْعُلُومِ وَالْهَنْدَسَةِ :

١ — النَّظَامُ الدُّوَلِيُّ the international system أو SI* (الذي كَثِيرًا مَا يُدْعَى نِظَامَ م ك ر ث mks) ، وَيَعْتَمِدُ عَلَى الْمَتْرِ meter والكِيلُوغَرَامِ kilogram والثَّانِيَةِ second والكِلْفِنِ kelvin (وهي وَحْدَةٌ لِدَرَجَةِ الْحَرَارَةِ) ؛

ثلاث فئات من الوحدات
المعيارية

٢ — نِظَامُ سِرْغِ ث cgs (الْعَاوُسِيّ Gaussian) ، الَّذِي يُبْنَى عَلَى أَسَاسِ السَّتَمْتَرِ centimeter والغَرَامِ gram والثَّانِيَةِ والكِلْفِنِ ؛

٣ — النَّظَامُ الْبَرِيطَانِيّ the British system ، وَيُبْنَى عَلَى أَسَاسِ الْقَدَمِ foot والبَاوَنْدِ pound والثَّانِيَةِ وَدَرَجَةِ فَهْرَنْهَيْتِ Fahrenheit .

وظَاهِرِيًّا يَبْدُو نِظَامَا م ك ر ث وَسِرْغِ ث مُتَمَاثِلَيْنِ ؛ إِذْ أَنَّ كُلَّيْهِمَا نِظَامٌ مَتْرِيّ metric ، وَتَخْتَلِفُ وَحْدَاتُهُمَا لِلطُّوْلِ وَالْكَتْلَةِ فَقَطْ بِقُوَى عَشْرَةٍ . بَيِّنْ أَنَّ وَحْدَاتِيْهِمَا الْكَهْرَبَائِيَّةَ وَالْمَغْنَطِيسِيَّةَ تَخْتَلِفُ بِشَكْلِ جَوْهَرِيٍّ أَكْثَرُ ؛ كَمَا أَنَّ بَعْضَ مَعَادِلَاتِ الْكَهْرَبِ وَمَغْنَطِيسِيَّةٍ تَخْتَلِفُ أَيْضًا فِي هَذَيْنِ النِّظَامَيْنِ . وَلَقَدْ تَلَاشَى النَّظَامُ الْبَرِيطَانِيّ إِلَى حَدٍّ بَعِيدٍ مِنَ الْبَحْثِ الْفِيزِيَايِيِّ ، رَغْمَ أَنَّ بَعْضَ الْمُهَنْدِسِينَ مَا زَالُوا يَسْتَعْمِلُونَهُ . وَلَقَدْ حَدَثَتْ فِي كُلِّتَا الْفِيزِيَاءِ وَالْهَنْدَسَةِ نَزْعَةٌ تَدْرِيجِيَّةٌ نَحْوِ SI ، وَهُوَ النَّظَامُ الَّذِي سَنُوَكِّدُهُ فِي هَذَا الْكِتَابِ . ** وَمِيزَتُهُ الْكُبْرَى ، عَدَا عَنْ كَوْنِهِ نِظَامًا مَتْرِيًّا ، أَنَّهُ يَشْمَلُ وَحْدَاتِ الْكَهْرَبَاءِ الْعَمَلِيَّةِ ، أَوِ الْمَتْرِيَّةِ : الْفُولْتِ volt ، وَالْأَمْبِيرِ ampere ، وَالْأُومِ ohm ، وَالْوَاتِّ watt ، وَهَلَمْ

معادلات الكهرومغناطيسية تعتمد
على اختيار الوحدات

نختار هنا وحدات SI

† الرَّمُوزُ وَالْوَحَدَاتُ لِمَفَاهِيمٍ هَامَةٍ عَدِيدَةٍ مُجَدَّوَلَةٌ فِي مَلْحَقِ ٢ .

* مَخْتَصَرَةٌ عَنِ التَّعْبِيرِ الْفَرَنْسِيِّ *Système International* .

** تَبْنَى النَّظَامُ الدُّوَلِيُّ الْمُؤْتَمَرُ الْعَامُّ الْحَادِي عَشَرَ حَوْلَ الْأَوْزَانِ وَالْمَقَايِيسِ ، الَّذِي انْعَقَدَ فِي بَارِيسَ فِي ١٩٦٠ . وَلَقَدْ

اسْتَعْمَلْنَهُ بِانْتِظَامٍ دَائِرَةُ الْمَعَايِيرِ الْوَطَنِيَّةِ فِي الْوَلَايَاتِ الْمُتَّحِدَةِ The U.S. National Bureau of

standards مِنْذَ عَامِ ١٩٦٤ .

جزاً . ولكي نتحاشى البلبلة ، سوف لا نُشيرُ إلّا لَمَآماً إلى الأنظمة الأخرى . فالثوابت الفيزيائية في ملحق ٣ مبيّنة في المقام الأول بوحدة SI ، وعوامل التحويل conversion factors معطاة في ملحق ٤ ؛ بينما يُدرج في ملحق ٥ بعض معادلات الكهرومغناطيسية بنظام سرغ ث (الغاوسي) .

وفضلاً عن أربعة معاييرٍ اعتباطية (تلك الخاصة بالطول والكتلة والزمن ودرجة الحرارة) ، فإن وحدات SI الأساسية تشمل الأمبير كوحدة التيار الكهربائي ، والقنديلة candela كوحدة الشدة المنيرة luminous intensity . ويمكن أن يُعبّر عن وحدة أبة كمية فيزيائية بتركيب مؤلّف من ست وحدات أساسية : المتر (م) ، والكيلو غرام (كغ) ، والثانية (ث) ، والكيلفن (ك) ، والأمبير (أ) ، والقنديلة (قد) . (ونوه بالقنديلة هنا من أجل الاكتمال ليس غير ؛ فلنُستوفى لا نجد لها في الواقع أية ضرورة أخرى .)

ويُطلق على كثير من الوحدات المركبة أسماء جديدة . فمثلاً وحدتا SI للقوة والطاقة هما النيوتن (ن N) والجول (ج J) :

$$\begin{aligned} (٢,٣) \quad ١ \text{ ن} &= ١ \text{ كغ م} / \text{ث}^2 & 1 \text{ N} &= 1 \text{ kg m/sec}^2 \\ (٢,٤) \quad ١ \text{ ج} &= ١ \text{ كغ م}^2 / \text{ث}^2 = ١ \text{ ن م} & 1 \text{ J} &= 1 \text{ kg m}^2/\text{sec}^2 = 1 \text{ N m} \end{aligned}$$

وحدات SI للقوة والطاقة

وجُلّ الوحدات الكهربائية مسمّاة بأسماء فيزيائيي القرنين الثامن عشر والتاسع عشر . فوحدة الشحنة الكهربائية ، أ ث (A sec) ، تُدعى الكولوم (كل) (C) coulomb . وواحد ج / أ ث (J / A sec) يُدعى واحد فولت (ف V) ، وواحد ج / ث (J / sec) هو واحد واط (W) . ومن الأهمية بمكان أن نُذكر أن هذه الأسماء الجديدة كافة هي مخصّ اختزال لتراكيب مؤلّفة من وحدات معدودة ؛ ولا تتضمن توالد وحدات جديدة .

وعلاوة على الأنظمة المعيارية الواسعة الانتشار للوحدات ، فإن ثمة أنظمة خاصة لفروع خاصة من العلوم التي ستواصل ، ولا ريب ، ازدهارها . فسيستمرّ الفيزيائي النووي باعتبار شحنة البروتون وحدة ملائمة للشحنة ؛ وسيستمرّ فيزيائي الكم بإيثار نظام وحدات يساوي فيه ثابت بلانك Planck's constant الوحدة unity ؛ كما أن الفلكي سيستمرّ في تفضيل وحدة طول أكثر توافقاً مع مقياس الكون من السنتيمتر أو المتر . وستعرض لنا الفرصة لاستعمال بعض الوحدات الخاصة ، كالأنغستروم (Å) angstrom للطول ، والإلكترون فولت (eV) electron volt للطاقة .

٢,٣ الأبعاد Dimensions

الكمياتُ اللابعديةُ dimensionless في الفيزياء هي تلك التي لا تتطلب أية وحدة . وبعبارة أدق ، فإنَّ الكميةَ اللابعديةَ هي تلك التي لا تعتمد قيمتها العددية على اختيار الوحدات . وعلى نقيض ذلك ، فإنَّ الكميةَ البعديةَ dimensional هي تلك التي يمكن تغيير قيمتها العددية بتغيير فئةِ الوحدات . وقد تنجم الأعدادُ اللابعديةُ إما عن عملية العد (فمثلاً عددُ صفحاتِ هذا الكتاب هو عددٌ لابُعدي) ، أو عن أخذ النسبة لكميتين معبرٍ عنهما بنفس وحدةِ القياس .

الفكرة الهندسية للبعد

وتعود فكرةُ البعدِ واسمُهُ إلى التفكيرِ الممنوع في القِدَم حولِ الهندسة . فالطول مفهوم ذو بُعد واحد . وهو في الهندسة فكرة أساسية لا يمكن أن يُعبر عنها بدلالة أية أفكار أخرى . وعلى ذلك ، فإنَّ للطول بُعد الطول ، ولا شيء آخر يمكن أن يُقال في هذا الصدد . من جهة أخرى ، فالمساحة مفهومٌ ثنائي البعد : إذ أن لها البعد (طول)^٢ . وبالمثل ، فالحجم البعد (طول)^٣ . ومن الجلي أن فكرة البعد هذه للمفاهيم الهندسية متصلة بوحدة القياس للكميات الفيزيائية المناظرة لها . فلقد تُقاس المسافة بالمتر (م) ، والمساحة بالمتر المربع (م^٢) ، والحجم بالمتر المكعب (م^٣) ؛ أو المسافة بالقدم ، والمساحة بالقدم^٢ ، والحجم بالقدم^٣ . وأياً كانت وحدة الطول ، فإنَّ خلفَ الوحدة تقعُ فكرةُ البعدِ الأكثرُ تجريداً .

تعميم : بُعد كمية فيزيائية

ونحن نقوم هنا بانتقالٍ دقيق ، لكن هام ، من الفكرة الهندسية الصرفة لبُعديّة المكان dimensionality of space إلى فكرة البعد لكمية فيزيائية قابلة للقياس ، مثل الحجم . ومن ثم ، فهي خطوة تالية سهلة أن نعمم فكرة البعد إلى كميات غير هندسية . ففي الكينماتيكا kinematics (أي علم الحركة المجردة) ، يوجد مفهوم الزمان بالإضافة إلى مفهوم المكان . فما بُعد الزمن ؟ ... ليس له من بُعد بالمصطلح الهندسي . لكنه من الثابت الفائدة فيزيائياً أن نعرف بُعداً للزمن — بُعداً جديداً مستقلاً ، لا يمكن التعبير عنه بدلالة بُعد الطول . عندئذ يمكن أن تُنسب للكميات الكينماتيّة kinematic ، كالسرعة والتسارع ، أبعادٌ هي اثتلافات محدّدة من الأبعاد الأساسية الجديدة : الطول والزمن . فبُعد السرعة هو الطول / الزمن ، وبُعد التسارع هو الطول / (الزمن)^٢ . وكذلك ثالث ، فإن معدل التمدد لِمُنْتَطادِ balloon له بُعد (الطول)^٣ / الزمن ، أو الحجم لكل وحدة زمن .

وتبني بُعدٍ أساسي واحد ، الطول ، يَصْلُحُ كأساس لوصف أبعاد جميع الكميات الهندسية ؛ كما أن إضافة بُعد ثانٍ ، الزمن ، يزودنا بأساس لتخصيص بُعدٍ ما لكل كمية كينماتيّة . وحتى نتعدى ذلك ونصِف بُعدية سائر المفاهيم الفيزيائية في الميكانيكا ، فإن بُعداً مستقلاً ثالثاً يكون ضرورياً . ومن الطريف أن ثلاثة أبعادٍ أساسية تكفي . (ينبغي ألا تُخلط هذه بأبعاد

ثلاثة أبعادٍ أساسية تكفي

المكان الثلاثة التي هي كلها أبعاداً طولية .) وَتُخْتَارُ الكتلة عادةً كالبُعد المستقل الثالث . فلا يمكن أن يُعبّرَ عن بُعدها بأيّ اثنالافٍ من أبعاد الزمان والمكان ؛ لكنّ حالما يتم اختيارها ، فإنّ بُعد كل مفهوم ميكانيكي آخر يمكن أن يُعبّر عنه كائتلاف ما من هذه الثلاثة - الطول والكتلة والزمن .

وقد يُفترض أنّه إزاء استخدام مفاهيم فيزيائية أكثر فأكثر في حقول جديدة في الفيزياء ، فإنّ أبعاداً أساسية أكثر فأكثر يجب أن تُوضع موضع الاستعمال . ولحسن الحظّ لم يكن هذا ضرورياً . فلقد واكبت العلاقات بين المفاهيم بكلّ يسرٍ عملية إدخال المفاهيم الجديدة . وبفضل تبصّرات جديدة زوّدتها النسبية وميكانيكا الكمّ ، فإنّه بوسعنا حتّى أن نُختزل عدد الأبعاد الأساسية إلى دون الثلاثة . فكون النظام الدوليّ يستخدم ستة أبعاد فيزيائية متعلّق بالملاءمة العملية ، لا الحاجة الملحة .

٢,٤ توافق الأبعاد وتوافق الوحدات Dimensional Consistency and Units Consistency

أبسط معادلة يستطيع المرء أن يتخيّلها تأخذ الصورة

$$A = B.$$

وحتّى تكون هذه معادلة فيزيائية وليست محض تعبير رياضيّ ، فإنّها تعني أنّ كمية فيزيائية ، يُرمز إليها بالحرف A ، مساوية لكمية فيزيائية أخرى ، مرموز إليها بالحرف B . وعلى وجه التخصيص ، إذا كانت للحرف A قيمة عددية معينة ، فإن B لها نفس القيمة العددية . وحتّى تكون ذات مدلول فيزيائيّ بشكل عامّ ، فإنّ المعادلة يجب أن تكون صحيحة ، بصرف النظر عن فئمة الوحدات التي تُبنيت لعملية القياس . عندئذٍ ، إذا غيّرت الوحدات ، فإنّ A و B يتغيّران بنفس العامل وتبقى المعادلة سارية المفعول . وإنّها لعادة شائعة ، وهي التي سنتبعها في هذا الكتاب بقدر الإمكان ، أن نكتب معادلات الفيزياء بطريقة لا تعتمد معها صحتها على اختيار خاصّ للوحدات . فقانون نيوتن مثلاً ، الذي يُكتب $F = ma$ ، صحيح للوحدات م ك م ك ث و سرغ ث والبريطانية . لذا فإننا نعتبره متوافق الأبعاد . ومع ذلك ، فقد يكون بالإمكان أن نستنبط فئة وحدات يكون فيها غير صحيح - قارن المعادلتين ٢,١ و ٢,٢ ؛ إذ من الجائز أن يُخصّر التوافق البُعدي ضمن صنفٍ من الفئات المعيارية المُعترف بها للوحدات .

توافق الأبعاد : تكون معادلة ما
صحيحة لفئات متباينة من
الوحدات المعيارية

وكثير من معادلات الكهرومغناطيسية استثنائي من حيث أنّ صيغته مختلفة للوحدات م ك م ك ث (SI) وسرغ ث (الغاوسية) . ويُلَفِتُ ملحوظة الانتباه إلى بعض هذه الفروق . فليست هذه المعادلات متوافقة الأبعاد ؛ وهكذا فمن الأهمية يمكن أن نطابق الوحدات على المعادلات . وعلى أية حال ، فإنّها لَتَمْلِكُ توافقاً في الوحدات . فمع الفئة المناسبة من الوحدات ، فإن الجانب الأيسر من كلّ معادلة له نفس الوحدة كالجانب الأيمن .

توافق الوحدات : وحدة الجانب
الأيسر تساوي وحدة الجانب الأيمن

■ مثال ١: تُوصَفُ الحركةُ المنتظمةُ uniform motion في خطٍّ مستقيمٍ بواسطة المعادلة

$$s = vt, \quad (٢,٥)$$

أي أنَّ المسافة s تساوي السرعة v ضرب الزمن t . ويُعرض التوافقُ البُعديُّ لهذه المعادلة عن طريق كتابة «معادلةٍ» أخرى:

$$[\text{طول}] = \left[\frac{\text{طول}}{\text{زمن}} \right] \times [\text{زمن}].$$

«معادلةٌ» بُعديَّة

وُستعملَ الأقواسُ المربعةُ [] للإشارة إلى أنَّ أبعادَ المعادلة فقط هي قيد الاهتمام. وبطبيعة الحال، فإنَّ توافق الأبعاد وحده لا يبرهن أنَّ معادلةً ما صحيحةٌ. لكنَّ عدمَ توافق الأبعاد يمكن أنَّ يُثبتَ أنَّها غيرُ صحيحةٍ إذا ما اشتُقَّت من معادلاتٍ متوافقةٍ الأبعاد. ومراجعةُ كلِّ خطوةٍ لاشتقاقٍ ما، فيما يتعلَّق بتوافق الأبعاد، هي طريقةٌ مُجدبةٌ للبحث عن الأخطاء. ■

■ مثال ٢: بما أنَّ كثافةَ الماءِ هي 1 gm/cm^3 ، فإنَّ كتلةَ كميةٍ من الماء

بالغرامات تكون مساويةً لحجم الماءِ بالسِّتَمترات المكعبة (سم^٣). فإذا ما جعلنا M ترمزُ إلى الكتلةِ و V ترمزُ إلى الحجم، حصلنا على

$$M = V.$$

وهذه معادلةٌ صحيحةٌ لكنَّها غيرُ متوافقةٍ الأبعاد. وهي صحيحةٌ فقط ما دامت وحدةُ الطول هي السِّتَمتر ووحدةُ الكتلة الغرام. ففي وحدات SI، يجب أن تُعاوَدَ التعبير عن نفس المعادلة كما يلي:

$$M = 10^3 V.$$

ومرةً أخرى، فإنَّ هذه معادلةٌ صحيحةٌ فقط لاختيارٍ خاصٍّ من الوحدات. ومن الواضح أنَّ معادلةً متوافقةً الأبعاد يمكن أن تُحلَّ محلَّ هاتين المعادلتين هي

$$M = \rho V, \quad (٢,٦)$$

حيث ρ (الحرف الإغريقي رُو rho) هي كثافة الماءِ أو الكتلة لكلِّ وحدةٍ حجْم. ويوضَّح توافقُ الأبعاد بواسطة المعادلةِ البُعديَّة:

$$[\text{كتلة}] = \left[\frac{\text{كتلة}}{(\text{طول})^3} \right] \times [(\text{طول})^3].$$

وفي هذا المثال، تتَّسِمُ المعادلةُ المتوافقةُ الأبعاد بأَكْبَرِ قدرٍ من المرونة. فهي تأخذ بعين الاعتبار

ليس تغييرَ الوحدات فَحَسْبُ ، بل أيضاً تغييرَ كثافةِ الماء ؛ ... حتى أنها تفسح المجالَ لتغيير المادّة .

□ حسابُ الوحداتِ Units Arithmetic

في مسائل الفيزياء من الممكن ، والمرغوب فيه على الدوام تقريباً ، أنْ تُنفذَ ضرباً من « حسابِ الوحدات » ، جنباً إلى جنب مع الحساب العددي . والفكرة لا بد وأن تكون مألوفاً الساعة لدى معظم القراء . وتصلحُ بضعة أمثلة لتوضيح ذلك .

■ مثال ٣ : تؤثر على جسم كتلته ٢ كـرغ محصلةُ قوّة مقدارها ٥ نيوتن . فما تسارعه ؟

المعادلة هي

$$a = \frac{F}{m}$$

وعملية حساب الجانب الأيمن تعطي

$$a = 2.5 \text{ N/kg} \quad ٢,٥ \text{ ن / كـرغ}$$

وبما أن ١ ن = ١ كـرغ م / ث^٢ ، ١ N = 1 kg m/sec² ، يجوز كتابة ذلك

$$a = 2.5 \frac{\text{kg m/sec}^2}{\text{kg}} = 2.5 \text{ m/sec}^2$$

■ ففي حسابِ الوحدات تُختزل وحدات الكتلة .

■ مثال ٤ : اعتبر مسألة بسيطة عن حركة ثابتة السرعة بوحدة مختلطة تتحرك سيارة بسرعة ٤٥ قدم / ث ft/sec لمدة ٣٠ دقيقة (٥ min) . فكم كيلومتراً تجتاز ؟

لأجل استعمال المعادلة

$$s = vt,$$

بمقدور المرء أن يُحوّل أولاً v من ٤٥ قدم / ث إلى ٤٩,٤ كـم / س km/hr ، و t من ٣٠ د إلى ٥,٥ س ، ثم أن يضرب ليحصل على ٢٤٧,٧ كـم $s = 24.7 \text{ km}$. ويمكننا غالباً استخدام طريقة بديلة ملائمة عوض الأرقام المُعطاة في المعادلة ، ثم أضف عوامل التحويل حسب الحاجة ، لتجعل حسابِ الوحدات يعمل على نحو صحيح . فتبدو عملية الحساب كما يلي :

حساب الوحدات مع عوامل
تحويل

$$s = \frac{45 \frac{\text{ft}}{\text{sec}} \times 30 \text{ min} \times 60 \frac{\text{sec}}{\text{min}} \times 0.305 \frac{\text{m}}{\text{ft}}}{10^3 \frac{\text{m}}{\text{km}}}$$

أو

$$s = 24.7 \text{ km.}$$

ويمكن إدماج عوامل التحويل كما يحلو لنا ، لأن كلاً منها مساوٍ لواحدٍ صحيح . ■

■ مثال ٥ : إذا تحرك جسيم ذو شحنة q بسرعة v عمودياً على خطوط مجال مغناطيسيٍّ مقداره B ، فإنه يتأثر بقوة مغناطيسية تتحدد بالعلاقة

$$F_m = qvB. \quad (٢,٧)$$

هل تتضمن هذه المعادلة توافقاً في الوحدات ... علماً بأن وحدات SI على الجانب الأيمن هي كولوم ، م / ث ، وتسلا tesla (نس T) ؟ ... إذن فنحن نسأل : هل حاصل ضرب الوحدات

$$\text{كل} \times \frac{\text{C}}{\text{ث}} \times \text{تس} \times \frac{\text{m}}{\text{sec}} \times \text{T}$$

مساوٍ لوحدة SI للقوة ، النيوتن ؟

يبين الرجوع إلى ملحق ٢ التكافؤ مع الوحدات الأساسية :

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A sec} \quad 1 \text{ كل} = 1 \text{ أ ث}$$

$$1 \text{ T} = 1 \text{ kg/A sec}^2 \quad 1 \text{ تس} = 1 \text{ كـ غ / أ ث}^2$$

وعلى ذلك ، فإن حاصل ضرب الوحدات هو

$$\begin{aligned} \text{C} \times \frac{\text{m}}{\text{sec}} \times \text{T} &= \text{A sec} \times \frac{\text{m}}{\text{sec}} \times \frac{\text{kg}}{\text{A sec}^2} \\ &= \text{kg m/sec}^2 = \text{N}. \end{aligned}$$

« معادلة » وحدات

وهذه النتيجة تؤكد صحة توافق الوحدات للمعادلة ٢,٧ لوحدة SI ، بيد أنها لا تتجفنا بأي دليل فيما يتعلق بتوافق أشمل للأبعاد . والحقيقة أن معادلة القوة المغناطيسية هذه لا تصح في نظام سرغ ث (الغأوسي) . ■

ليس بالإمكان أَنْ نضعَ تعاريفَ دقيقةَ لكلِّ أو حتى لجلِّ المفاهيمِ الهامةِ في الفيزياءِ في آنٍ واحدٍ، ومن ثَمَّ أَنْ نشيدَ على هذه نظرياتِ الفيزياءِ - نهجٍ قد يبدو مغريباً من وجهةِ نظرٍ منطقيّةٍ. وإنَّ الحالَ كذلكَ، لأنَّه بكلِّ بساطةٍ لا يمكنُ فَصْمُ مفاهيمِ الفيزياءِ عن قوانينها. فالتيارُ الكهربائيُّ يمكنُ أَنْ يُعرَّفَ بدقّةٍ مقداريةٍ فقط بالاقتران مع قانونِ القوّةِ المغناطيسيّةِ. وكتلةُ القُصورِ inertial mass يمكنُ تعريفُها فقط بدلالةِ قياساتٍ ميكانيكيّةٍ معيّنة يتوقّف نجاحها على قوانينِ نيوتن للحركة. والطاقة، أكثرُ مفهومٍ كلّيّ الوجود^٥ ubiquitous في الفيزياءِ عدا الزّمان والمكان، يمكنُ تعريفُها بصيغها المتعدّدة فقط بمساعدة بعض المعرفة لكلِّ نظريّةٍ كبرى في الفيزياءِ. وعلى الرّغم من هذه القيود، فمن المهمّ أَنْ نكتسبَ في وقت مبكرٍ من دراستنا للفيزياءِ ما قد يدعوه الفيزيائيُّ «إحساساً» بالمفاهيمِ الهامةِ، لكي نكونَ قادرين على التفكيرِ بشكلٍ هادفٍ حول العالم الطّبيعيّ. وفي هذا البند والبُند القليلة التالية، سنعرّف ونشرح بضعة مفاهيمٍ أساسيّةٍ في الفيزياءِ بطريقةٍ تمهيديةٍ. وستخضع معظم التعاريف فيما بعد لاصقلٍ وتهذيبٍ؛ إلّا أنَّ «مدلول» المفاهيم سوف لا يعنّيه أيّ تعديل.

لا يمكنُ فَصْمُ تعاريفِ وقوانينِ الفيزياءِ

على الأرجح أنَّ مفهومَ المسافة، أو «الانفصال المكانيّ» spatial separation، من البدائيّة كآبةٍ فكريّةٍ في العلم ما خلا عمليّة العدّ counting^{٥٥}. وتُبنى الهندسة، أوّلُ فرعٍ من الرّياضيّات يَرْتَمي إلى مستوى رفيعٍ، على أساس فكرة الطّول ليس غيّر - أو عبارة أدقّ، على فكرة العلاقات المكانية. ويرتكز تعريف الطّول على مَقَاسٍ شيءٍ معياريّ. وقد يكون هذا الشيءُ المعياريّ للأغراض اليومية عصا يارديّة yardstick[†] أو عصا مترية. ولقد عُرِفَ المتر في الأصل كجزء واحد من عشرة ملايين من المسافة بين القطب pole وخط الاستواء equator. وهذا يجعل من السّهل أَنْ نتذكّر محيط الأرض الذي يساوي إلى حدٍّ قريب جداً 4×10^7 م أو ٤٠٠٠٠ كم. ولسنوات عديدة، كان المعيار العلميّ للطّول قضيبٌ معدنيّ محفوظٌ في قُبُو درجة حرارته قَيَد الضّبط بالقرب من باريس، وطوله - بالتّعريف - متر واحد. أمّا الآن، «فالشيءُ» المعياريّ هو موجة ضوئيّة، موجة خاصّة لضوء أحمر - برتقالي ينبعث من ذرّات النظير كريببتون isotope krypton 86 (شكل ٢,١). فالمتّر الواحد هو - بالتّعريف - ١٦٥٠ ٧٦٣,٧٣ - ٨٦

معيار الطّول

٥ أيّ أنّه متغلغلٌ في أفنانها قاطبة؛ فهو موجود في كلّ مكان في جميع الأوقات. (المشرّف)

٥٥ بدائيّاً أم لا، فلقد أثبت الطّول أنّه مفهومٌ مُخادعٌ دقيق، كما ستبيّن أبواب لاحقة عن النسبيّة. وحسب نصّرتنا الحديث، فإنّ طول شيءٍ ما يعتمد على فيما إذا كان متحرّكاً أم لا نسبةً لِمَنْ يقومُ بعملية القياس. ولا داعي لأنّ تشغلنا السّاعة هذه الحقيقة.

† هي عصا مُدرّجة للقياس طولها باردة واحدة one yard. (المشرّف)

جدول ٢،١ : وحدات الطول

الاسم	الرمز الدولي	الرمز العربي	المقدار	ملحوظات
فيرمي	fm	فر	10^{-15} م	femtometer مثل فيمتومتر
أنغستروم	Å	أ	10^{-10} م	micron مثل مايكرون
مايكرومتر	μm	مي م	10^{-6} م	
سنتيمتر	cm	سم	10^{-2} م	
كيلومتر	km	كرم	10^3 م	
وحدة فلكية	A.U.	مرفه	1.496×10^{11} م	متوسط نصف قطر مدار الأرض
سنة ضوئية	light-year	—	9.461×10^{15} م	المسافة التي يقطعها الضوء في سنة واحدة
فرسخ	parsec	فخ	3.084×10^{16} م	المسافة التي تقابل فيها وحدة فلكية واحدة ثانية واحدة من الزاوية

« راجع ملحق ٢ ب »

(المشرف)

1,650,763.73 أطوال موجية wavelengths من هذا الضوء . (اختيرت هذه القيمة التي تبدو غريبة لكي يُحتفظ بطول المتر الجديد أقرب ما يمكن إلى طول المعيار السابق .)

وكما هو مبين في جدول ١،١ ، فإن المقاسات المعروفة للأنظمة الفيزيائية تمتد على مدى 10^{41} . وبسبب هذا المدى الهائل ، فإن عدداً من وحدات الطول الخاصة قد غدا يُستعمل في قطاعات متباينة من الطبيعة . وبعض هذه معرف في جدول ٢،١ ؛ بينما يبين جدول ٢،٢ مقادير نموذجية للأطوال وبضع كميات هامة أخرى في دُنَى الجاهري ودون المجهرى والفلكي .

٢،٦ الزمن Time

إن فكرة الزمن هي في جوهرها فكرة تكرارٍ دوريّ periodic repetition . وكَوْن الزمن مفهوماً « يمكن تحيُّله » ، وجزءاً مَبْنِئاً built-in part من نظرة كلِّ امرئٍ للعالم ، إنها ينبثق عن حقيقتين : أن الإنسان له ذاكرة ، وأنه معرض على الدوام لمنبهاتٍ تتكرر بانتظام . فنحن نشعر بتعاقب الفصول ، وبالتمط المطرد لليل والنار ، وبسَعْبِنَا أو نَصْبِنَا المُتَوَاتِر . والسَّاعَةُ لا تعدو أن تكون أكثر من أيِّ جهازٍ يُحصي عدد المرات التي تتكرر فيها حركة متواترة . وساعة بُندول pendulum clock عتيقة الطراز إن هي إلا مثالٌ واضحٌ على ذلك . بل إن الأرض ذاتها ساعة ، بسبب دورانها اليومي ورحلتها السنوية حول الشمس . وقد عُرِفَت في الأصل ثانية واحدة من

تعريف الساعة

الزمن بأنها $1/86,400 \times 10^8$ من اليوم. وفي وقت لاحق ، ولأنه يمكن حساب حركة الأرض المدارية orbital بدقة أكبر من حركتها المِعْزَلِيَّة spin motion ، عُرِفَت الثَّانِي الفلكيَّة (أو الزَّيْجِيَّة) ephemeris second ككسِرٍ معيَّن من مدَّة دَوْران الأرض حول الشَّمْس (لعام ١٩٠٠). والسَّاعَة



شكل ٢,١ : مصباح كريبتون ٨٦ في حَمَامَه من سائل النيتروجين liquid nitrogen. وَيُحَفِّظُ بالمصباح تحت درجة حرارة -210°C ، وذلك لأجل تحسُّن إمكانية إعادة الإنتاج reproducibility للطَّوْل الموجي المعياري standard wavelength .
(المصدر: الدَّائِرَةُ الوَطَنِيَّة للمعايير [في الولايات المتَّحدة الامريكِيَّة] .)

المعياريَّة الآن هي ذرَّة سيزيوم cesium (شكل ٢,٢) . ولقد اختيرت القيمة $9,192,631,770 \text{ sec}^{-1}$ (أو هر Hz°) للدَّلالة على تردِّد frequency مُعيَّن ينبعث من السيزيوم وَيُمْتَصُّ بواسطته ؛ وهذا هو التعريف الرَّاهن للثَّانية . وهو معيار ملائمٌ أَكْثَر من المعايير الفلكيَّة الآنفه للعمل المَحْضِرِي وقياسات الفترات القصيرة .

مِغْيَار الزَّمن

كيف نستطيع أنْ نَجْزِمَ بأنْ فترات الزَّمن بَيْن الدَّوْرَات المتعاقبة للحركة المتواترة لساعةٍ ما هي متماثلة ؟... لا نستطيعُ ذلك . فلا يمكنُ أنْ يُبْنَى انتظامٌ uniformity مِغْيَاسِ الزَّمن إلَّا على أساس التَّوافُق الذَّاتِي self-consistency (بمعنى أنَّ السَّاعات ذات التَّصامِمِ المختلفة تستمرُّ بالانسجام فيما بينها) ، والاتَّفَاق مع نوااميس الطَّبيعَة البسيطة (بأنَّ الحركة الدَّوْريَّة هي منتظمة نظريًّا) . فالزَّمن ، شأنُ أيِّ مفهومٍ آخر ، لا يمكنُ أنْ يرتقي إلى مرتبةٍ مستقلةٍ عن القوانين التي يُسْتَخْدَمُ ضمنها .

• كلمةٌ إغريقيَّةٌ قديمةٌ بمعنى زيج أو تقويم فلكي .

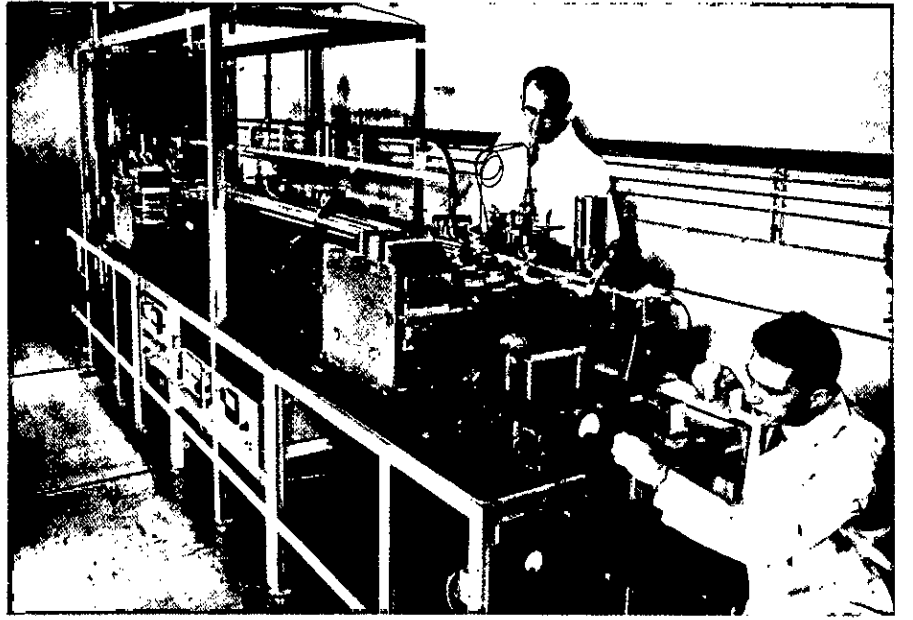
(المشرِّف)

• وَخِدَّة SI للتردِّد ، الهرتز (هر Hz) ، هي ذبذبة vibration لكلِّ ثانية ؛ وكثيراً ما تُكْتَبُ بِسَاطَةِ s^{-1} .

جدول ٢,٢ : مقادير نموذجية لكميات فيزيائية

الكمية الفيزيائية	الوحدة الشائعة في العالم الجاهري	مقياس العالم دون المجهرى	مقياس العالم الفلكي
الطول	متر (حوالي ٣٩ بوصة 39 in)	مقاس ذرة $\approx 10^{-10}$ م مقاس جسيم $\approx 10^{-15}$ م	مسافة الأرض - الشمس $= 1.5 \times 10^{11}$ م • نصف قطر الكون ، $\approx 10^{26}$ م
السرعة	متر/ثانية (امرو بمشي)	سرعة الضوء = 3×10^8 م/ث	السرعة المدارية للأرض = 3×10^4 م/ث سرعة الضوء = 3×10^8 م/ث
الزمن	ثانية (تأرجع swing بندول)	وحدة الزمن الطبيعية لجسيم حوالي 10^{-23} ث عمر نموذجي لجسيم • طول العمر زهاء 10^{-11} ث	دورة period الأرض = 3.6×10^7 ث • عُمر الكون ، $\approx$ 3.6×10^{17} ث
الكتلة	كيلوغرام (كتلة ١ لتر من الماء)	كتلة الإلكترون = 9.1×10^{-31} كغ كتلة ذرة ثقيلة $\approx$ 1.6×10^{-27} كغ	كتلة الأرض $= 6 \times 10^{24}$ كغ كتلة الشمس $= 2 \times 10^{30}$ كغ كتلة الكون المرئي $\approx$ 10^{50} كغ
الطاقة	جول (يفقد بفقير) كيلو ستر أو ستر غذائي (٤١٨٤ ج)	الطاقة الحركية لجزيئ من الهواء حوالي 6×10^{-21} ج للبروتون في أكبر مُتارع حوالي 8×10^{-8} ج	الطاقة الحركية للأرض في مدارها $\approx 2.7 \times 10^{33}$ ج نتاج الطاقة الشمسية في ١ ث $= 3.9 \times 10^{26}$ ج
الشحنة	كولوم (يضيء مصباحاً لمدة ١ ث)	شحنة البروتون = 1.6×10^{-19} كل	المادة الواسعة النطاق متعادلة (محايدة أو غير مشحونة) كهربائياً neutral
الزخم الزواوي	كغ م ^٢ /ث (كرة خشبية* تنزل [تدور بسرعة] spinning)	غزل spin الفوتون $\approx h = \text{photon}$ 10^{-34} كغ م ^٢ /ث	غزل الأرض = 7×10^{33} كغ م ^٢ /ث غزل المجرة $\approx 10^{49}$ كغ م ^٢ /ث

• ن الأصل bowling ball ، وهي الكرة الخشبية المستعملة في لعبة البولينج ، (المشرب)



شكل ٢,٢ : يوجد في قلب هذه الساعة الذرية atomic clock شعاع beam من ذرات سيزيوم ١٣٣ . وفي المقطع الأوسط midsection من الأنبوبة ، تتأثر الذرات بمجال كهرومغناطيسي متذبذب oscillating . وإذا كان التذبذب ذا تردد frequency معين ، فإن الذرات تنظم بمكشاف detector بشكل هدف target في نهاية الأنبوبة . أما إذا انحراف التردد عن قيمته الصحيحة ، فإن الذرات تخطي مركز الهدف ، ونصحح التردد تلقائياً إشارة التغذية المرتدة feedback signal . وبمثل هذه الساعة ، فإنه يحافظ على معيار زمني بدقة تراوح جزءاً واحداً في ١٢١٠ (أي ١ ث في ٣٠٠٠٠ سنة) .

(المصدر : الدائرة الوطنية للمعايير)

وعند تصدينا لمقاييس الزمن في حقول الطبيعة القصية ، من الضروري أن نتخلص أولاً من الانطباعات المسبقة عما يؤلف زمناً قصيراً أو زمناً طويلاً . فعلى صعيد الجسيمات ، فإن وحدة الزمن الطبيعية هي الوقت اللازم للضوء لأن يقطع قطر جسيم أولي ، أي حوالي

مقاييس الزمن الطبيعية

جدول ٢,٣ : بعض فترات الزمن القصيرة

الاسم		الرمز الدولي	الرمز العربي	الفترة
بيكو ثانية	picosecond	psec	بر ث	١٠-١٢ ث
نانو ثانية	nanosecond	nsec	نر ث	١٠-٩ ث
مايكرو ثانية	microsecond	μ sec	مي ث	١٠-٦ ث
ملي ثانية	millisecond	msec	مر ث	١٠-٣ ث

١٠-٢٣ ث . وبدلالة هذه الوحدة ، فإن جزءاً واحداً من المليون من الثانية لهُوَ زمنٌ طويلٌ جداً ؛ فمعظم الجُسُيَّات تولد وتعيش وتقضي في أقلّ من ١٠-٦ ث . ويبيّن جدُول ٢,٣ الأسماء المنسوبة لبعض فترات الزمن القصيرة . والبادئات prefixes التي تظهر في هذا الجدُول هي جزء من طائفة معيارية كثيراً ما تُستعمل كمختصرات لقوى عشرة . ونسوق قائمةً أكمل لمثل هذه البادئات في ملحق ٢ ب . أمّا نشوء الأرض والكون فهو مميّز بمقياس زمنيّ مدرّج ببلاتين billions السنين (جرسة Gyr) . وفي « الفرن النووي حراريّ » (أي النووي حراريّ) « thermonuclear furnace عند مركز الشمس ، يكون للبروتون متوسطُ عُمرٍ mean lifetime قدره ١٤ جرسة (٤,٤ × ١٧ ث) قبل أن يشارك في تفاعل نووي حراريّ thermonuclear reaction .

وبما أنّ أصغر شيءٍ سُبر تجريبياً يُناهزُ مَقاسُهُ ١٠-١٥ م ، فمن اللائق أن نقولَ إن أقصر فترة زمنية بُحِثَ هي ٣ × ١٠-٢٤ ث تقريباً (مع أن قياسات الزمن المباشرة لا تزالُ جدّاً بعيدة عن بلوغ فترة بهذا القِصر) . أمّا أطولُ زمنٍ معروفٍ فهو « عُمر الكون » ؛ أي الفترة الظاهرية لتمدد الكون ، التي هي أيضاً بضعة أضعاف عُمر الأرض . ويعادل هذا ٣ × ١٧ ث (١٠ جرسة سنة) . ونسبة هذين هي ١٠-٤١ - نفس العدد الهائل كالنسبة بين أكبر وأصغر مسافة . وليست هذه بصدفة . فإن تخوم الكون القُصوى تتحرّك بمنأى عنّا بسرعةٍ تقارب سرعة الضوء ؛ كما أنّ الجُسُيَّات المستعملة لسبر أغوار العالم دون المجهرِي تتحرّك بِسرعاتٍ تُناهزُ سرعة الضوء . ففي كلا التّخمين الكوني ودون المجهرِي ، تكون سرعة الضوء الرّباط الطّبيعيّ بين قياسات المسافة والزمن .

تربط سرعة الضوء
الزّمان والمكان

٢,٧ السرعة Speed

إذا تحرك جسمٌ ما مسافةً Δs في زمنٍ Δt ، فإن معدل السرعة $\bar{v}$ إبان هذه الفترة يُعرّف بالمعادلة

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} . \quad (٢,٨)$$

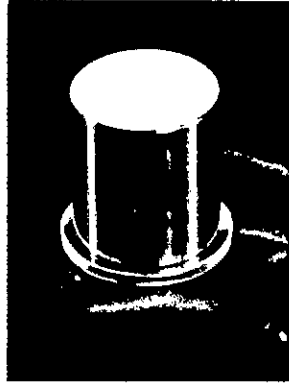
وفي النهاية limit التي يقترب فيها Δt (ومعه Δs) من الصّفر ، تُؤوّل هذه النسبة إلى مشتقة

٢,٨ ومقايها (الشرف) .
٠ يُستعمل عادة الرمز Δ [وهو الحرف الإغريقي « دلتا »] ليعبّد معنى « تغيّر » . [فلا يصحّ إذن أن نخترل Δ في بسط المعادلة]

derivative تُعرَّفُ السَّرعَةُ اللَّحظِيَّةُ (instantaneous) v † :

$$v \cong \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (٢,٩)$$

تعريف السَّرعَة ؛
وهي مفهوم مشتق



شكل ٢,٣ : أسطوانة البلاتين والإيريديوم platinum-iridium
هذه هي الكيلوغرام المعياري في الولايات المتحدة. وقد قُورِنت بالمعيار الدولي حوالي عام ١٨٨٥ ومرة ثانية في ١٩٤٨. وهي تُعرَّفُ معياراً للكتلة بدقة تراوح جزءاً واحداً في 10^{10} .
(المصدر: الدائرة الوطنية للمعايير.)

وهكذا فإنَّ السَّرعَة مفهوم مشتقٌ معرفٌ رياضياً بدلالة الطَّول والزَّمن . وفي معاينةٍ شاملةٍ للرؤية للطبيعة تستثير السَّرعَة الانتباهَ لأنَّ لها حداً أعلى (هو سرعة الضَّوء) . ومع أنَّ سرعة الضَّوء ، سض = 3×10^8 م/ث $10^8 \times 3$ م/ث $c = 3 \times 10^8$ م/ث قد تبدو عالية بشكل لا يُصدَّق ، فإنَّ الإنسان ليس بمنأى عن هذا الحدِّ الأعلى إلى تلك الدَّرجة ، كما هو من التَّخوم دون المجهرية والكونية للزَّمان والمكان . فالتَّائرة النَّفاثة jet plane تطير بسرعة 10^{-10} سض 10^{-6} ، والأرض في مدارها تتحرَّك بسرعة 10^{-10} سض 10^{-4} ، كما أنَّ رائد فضاء astronaut يقصِّر عن بلوغ سرعة الضَّوء بعامل قدره ٤٠٠٠٠ ، إذ أنَّه يحتاج إلى ساعة ونصف للدَّوران مرَّة واحدة حول الأرض ؛ بينما يستطيع البروتون (لو أنَّه دُفِعَ لأنَّ يتحرَّك في مسار مُنحَنٍ) أن يتمَّ هذه الرَّحلة في ٠,١٣ ث. †

† سَيُطَوَّرُ مدلولُ هذا التعريف في البَنْدَيْن ٥,٤ و ٥,٧ .

• الرَّمز lim هنا هو مُختَصَرُ كلمة limit ، ومعناها نهاية . والسَّهم يجلِّ مكان كلمة « تنوِّل إلى » . كما أنَّ الكِتَبَة

دلَّا (أو التَّغْيِير في) s هي تلك التي نسعى لاجتاد نهايتها .

دلَّا (أو التَّغْيِير في) 1

(المشرف)

• تمثِّل هذه القيمة سرعة الضَّوء في الفراغ vacuum . أمَّا في الوسط المادِّي material medium ، فإنَّها تكون أقلَّ من ذلك نوعاً . فعلى سبيل المثال ، تكون سرعة الضَّوء في الماء $10^8 \times 2,25$ م/ث ؛ أي ثلاثة أرباع قيمتها في الفراغ .

(المشرف)

† في عام ١٩٦٩ استطاع الرَّجل العاديُّ ولأوَّل مرَّة أن يلاحظ مباشرة سرعة الضَّوء المتناهية . فبالإصغاء إلى المحادثات التي جرت بين المراقبين controllers على الأرض ورواد الفضاء على القمر ، كان بوسعهم أن يلاحظ التأخير البالغ ٢,٥ ث الذي اقتضته الإشارات اللاسلكية radio signals لبلوغ القمر ثم الإياب .

وفي تنفيذ حركتها الذبذبية التي لا تهدأ ولا تستكين في الجوامد والسوائل والغازات على الأرض ، تتحرك الذرات والجزيئات بسرعات تتراوح من ٢١٠ إلى ١٠^٤ م / ث ، ممتدة بذلك على نفس مدى سرعة الصوت في مواد متباينة . كما أن سرعات تناهز سرعة الضوء تكون اعتيادية للجسيمات الأولية التي تبرزها في الصغر . بل إن فوتون الضوء photon of light هو ذاته جسيم أولي ويتحرك بالضبط بسرعة الطبيعة القصوى . ولأنه بدون كتلة ، فهو يحرز الحد الذي تستطيع جل الجسيمات الأخرى أن تلامسه فحسب . وثمة أدلة وافرة على أنه لا يتحرك أي جسيم مادي أو إشعاع آخر أسرع منه . †

وفي قصص الخيال العلمي science fiction ، كثيراً ما ينتقل رواد الفضاء إلى « نزهة قوعادية superdrive »* ويجوبون المجرة بأعلى من سرعة الضوء . فهل هنالك أي احتمال بأن يتحقق ذلك يوماً ما ؟ ... إنه لغير محتمل إلى أبعد الحدود . غير أن الاحتمال لقائم لوجود ضرب جديد من الجسيمات التي تتحرك دائماً أسرع من الضوء . فلمثل هذه المادة تكون سرعة الضوء حداً أدنى وليس حداً أعلى . وحتى لو اكتشفت جسيمات من هذا القبيل** (حيث أنه ليس من دليل لوجودها حالياً) ، فإن نظرية النسبية تنبأ بأن سرعة الضوء تبقى حاجزاً لا يُخترق من أعلى وأسفل على حد سواء . ومن السهل أن نرى لماذا لا يمكن للمادة المعروفة أن تُسارع be accelerated فوق سرعة الضوء . فكلما كان الجسيم أقل كتلة ، كان أسهل أن يُسارع . فقطارات الشحن freight trains تتحرك بثقل ، والسيارات بسرعة أكبر ،

سرعة الضوء كسرعة الطبيعة
القصوى

† هذا صحيح في الفراغ ، وليس في الوسط المادي . ومن الطريف أن نذكر في هذا المقام ، أنه إذا انطلقت جسيمات مشحونة خلال وسط شفاف للضوء optically transparent medium بسرعات تفوق سرعة الضوء في ذلك الوسط ، فإن هذه الجسيمات تحل محل الإلكترونات في بعض ذرات الوسط الموجودة على امتداد مسارها . وتنبأ هذه الإلكترونات المراحة إشعاعاً كهرومغناطيسياً قوياً يُعرف بإشعاع تشيرنكوف Cherenkov radiation ، نسبة إلى الفيزيائي السوفيتي بافل أ. تشيرنكوف (١٩٠٤ -) ، الذي اكتشفه عام ١٩٣٤ . وتستخدم ظاهرة تشيرنكوف هذه بكثرة في فيزياء الطاقات العليا high-energy physics للكشف عن وجود جسيمات مشحونة وقياس سرعاتها . (المشرف)

• قوعادية = فوق عادية - على غرار قوطيبي (أو قوطيبي supernatural) وقوسوي (أي فوق السوي supernormal) وما إليها . أنظر مادة super وما يليها في « المورد » ، تأليف منير البعلبكي ، الطبعة التاسعة (دار العلم للملايين ، بيروت ، ١٩٧٥) ، ص ٩٢٩ - ٩٣١ . (المشرف)

•• تُعرف هذه الجسيمات الافتراضية hypothetical بالجسيمات القوسوية (أو الفوققوسوية

superluminal) ، أو بالتكيونات tachyons . [و tachyons بادئة معناها سريع أو مُسارع (المشرف) .]

أنظر : جيرالد فاينبرغ ، « جسيمات تنطلق أسرع من الضوء » Gerald Feinberg, "Particles That Go

"Faster than Light" ، مجلة Scientific American ، شباط ، ١٩٧٠ . [ولقائمة وجيزة من المصادر الأخرى ، أنظر :

ل . م . فلدمان L.M. Feldman ، المجلة الأمريكية للفيزياء American Journal of Physics ، مجلد

٤٢ (١٩٧٤) ، ص ٧٩ (المشرف) .]

والبروتونات في السايكلوترون cyclotron أسرع وأسرع . أما الفوتون العديم الكتلة فهو لا يتطلب البتة أي وقت للتسارع ؛ إذ أنه يثب من توه إلى سرعة الضوء حالما يُخلق . ولو كان بمقدور أي جسيم مادي أن يتحرك أسرع من الضوء ، لكان لازماً على الضوء نفسه ، المكون من الفوتونات العديمة الكتلة ، أن يتحرك أسرع .

٢,٨ الكتلة Mass

معيَار الكتلة

يبقى المعيار الدولي للكتلة معياراً جاهزياً ؛ وهو أسطوانة من البلاتين والإيريديوم مخزونة في مستودع في سيفر Sèvres بفرنسا ، وتُعرف بأن لها كتلة ١ كـرغ . وثمة معايير ثانوية متيسرة في سائر أرجاء المعمورة (أنظر شكل ٢,٣) . وقبل المعايرة الحالية ، كان الكيلوغرام يُعرف بأنه كتلة ١ لتر (أي 10^{-3} سم^٣ أو 10^{-3} م^٣) من الماء في ٤ ش 4°C ، وهي درجة الحرارة التي تتخذ فيها كثافة الماء حداً الأعلى . ومن الطريف أن نلاحظ أن أرضنا هي عامل فاصل في المعايير الثلاثة جميعها للطول والزمن والكتلة . فلقد قُسم ربع محيط الأرض إلى ١٠ ملايين متر ، واليوم إلى $60 \times 24 \times 60$ ثانية ؛ كما عرّف بدوره هذا المعيار الأرضي للطول حجم الماء المُستعمل كمعيار للكتلة .

صفتان من الكتلة

وثمة طريقتان مُتميزتان تماماً لقياس الكتلة ؛ أي لمقارنة كتلة مجهولة مع معيار ما . فأولاً ، يمكن تحديد الوزن النسبي relative weight للكتلتين المعروفة والمجهولة ، ربما بمساعدة ميزان balance . وثانياً ، يمكن تحديد التسارع النسبي للمعروفة والمجهولة حينما تتأثر كلتاهما بنفس محصلة القوة . وهاتان الطريقتان تقيسان ما يُدعى بكتلة الجاذبية gravitational mass وكتلة القصور . وبما أن تجارب في غاية الدقة بينت أن كتلتي الجاذبية والقصور متساويتان ، فإنه يجوز اعتبارهما كميتين أساسيتين سواء بسواء .

كتلة القصور

وكي تدبر مدلول كتلة القصور ، نحيل رائدي فضاء يعومان بحرية داخل قمرة cabin سفينتهما الفضائية spaceship في حالة انعدام الوزن weightless condition (شكل ٢,٤) . فإذا شبكا الأيدي ثم ضغطا وأطلقا سراحهما ، فإنهما سيعومان بعيداً عن بعضهما البعض - بطريقة معينة : إذ سيبتعد الرجل الأضخم حجماً ببطء أكبر من الرجل الأصغر ؛ ونحن نعزو ذلك إلى كتلته الأكبر ، وبخاصة كتلة قصوره الأكبر . فكتلة القصور هي مقياس المقاومة لتغيير ما في الحركة . وإذا قذف رائد فضاء منفرد وعائم في وسط القمر كرة قاعدة baseball ، فإنه سيرتد وينجرف إلى الوراء بتوذة ؛ بينما ستتحرك الكرة بسرعة في الاتجاه المضاد . وإذا انطلقت الكرة أسرع من رائد الفضاء بخمسمئة مرة ، فما ذلك إلا لأن كتلتها هي فقط جزء واحد من خمسمئة من كتلة رائد الفضاء ؛ فمقاومتها للشروع بالحركة ، إذن ، هي أقل بخمسمئة مرة .

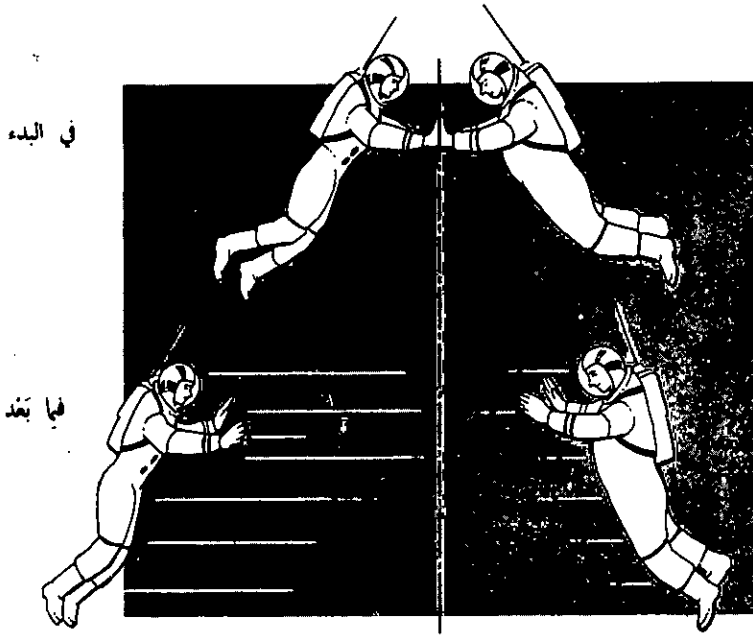
تعريف الارتداد للكتلة

وخاصية الكتلة هذه تجعل من الممكن أن نسن ما يُدعى بتعريف الارتداد

recoil definition لكتلة القُصور . فلا يحتاج رائد فضاءٍ إلّا لأنْ يقذفَ كيلوغراماً معيارياً بدلاً من كرة لكي يقيسَ كتلته ذاتها . وإذا ما انطلق بسرعة تساوي جزءاً من تسعين من سرعة الكيلوغرام ، فإنْ كتلته تكون ٩٠ كـغ . والمعادلة هي :

$$\frac{m}{m_{std}} = \frac{v_{std}}{v} \quad (٢,١٠)$$

وهذا التعريف له إغراءٌ منطقيٌّ لأنْ لا القوى ولا التسارعات ، بل السّرجهات فقط ، بحاجة لأنْ تُقاس . غيرَ أنّه عمليٌّ على الصّعيد دون المِجهريّ فحسب ؛ وهناك ينبغي أنْ يُعدّلَ إلى حدٍّ ما لكي يأخذَ بعين الاعتبار تصحيحاتٍ تقتضيها نظريّة النسبيّة . والقانون الفيزيائي الذي يُعزّز أهميّة تعريف الارتداد هو قانون حفظ الزّخم momentum conservation .



شكل ٢,٤ : طريقة لتعريف الكتلة تساوي نسبة كتلتي رائدي الفضاء مَعكُوس inverse نسبة سرعتي ارتدادهما إذا ما ارتدّا بعيداً عن بعضها البعض ابتداءً من حالة السكون .
في البدء : يهَم رائدُ فضاءٍ تحيل وآخر بدين بالارتداد بعيداً عن بعضها البعض .
وفيما بعد : يتحرّكان بعيداً ، حيث يكون رائد الفضاء التحيل أسرع من الرائد البدين .

وفي العالم الجاهري يكون التحديد الدقيق لكتلة الجاذبيّة أسهل من التحديد الدقيق لكتلة القُصور . وعلى ذلك ، فإنّ الموازين هي أدوات قياس الكتلة في سائر المختبرات . وفي هذا الكتاب ، فإننا نادراً ما سنحتاج لأنْ نُميّز بين كتلتي القُصور والجاذبيّة ..
والإلكترون ، أخفّ جسيم ذي كتلة غير متلاشية ، له كتلة تبلغ ٩,١ × ١٠^{-٣١} كـغ . أمّا البروتون فهو أثقل ١٨٣٦ مرّة ؛ إذ أنّ كتلته تساوي ١,٦٧ × ١٠^{-٢٧} كـغ . وتحوي قطرة

كتلة الجاذبيّة

كتلة الجسيمات

• الأحرف std ترمز إلى كلمة standard (= معيار) .

(المشرف)

مفردة من الماء نفس العدد من البروتونات كعدد النجوم في الكون . وكتلة الأرض هي 6×10^{24} كـرغ ؛ بينما تبلغ كتلة الشمس 2×10^{30} كـرغ . ومن الممكن أن نقدر على وجه التقريب كتلة الكون المرئي : ذلك أن هنالك زهاء 10^{23} نجم تبث ضوءاً ، والضرب بمتوسط كتلة نجم ، أي 10^{32} كـرغ ، يُعطي 10^{55} كـرغ للكتلة الكلية التي نملك عن وجودها بينة ما . (ثمة بعض تخمين بأنه من الجائز أن يشمل الكون أيضاً مقداراً كبيراً من الكتلة اللامرئية .) وهنالك حوالي 10^{82} بروتون في 10^{55} كـرغ من الكتلة . وقد تحدت خيال بعض الفيزيائيين الحقيقتان بأن هذا الرقم الهائل ، 10^{82} ، هو مربع رقم كبير آخر ، 10^{41} (الذي يقيس نسبة كبر الكون إلى كبر جسيم أولي) ، وبأن 10^{41} هو أيضاً ليس بعيداً عن نسبة القوة الكهربائية إلى قوة الجاذبية بين الإلكترونات . ولكن حتى الآن لم تثبت هذه الصدفة العددية أنها أكثر من منحصر صدفة .

كتلة الكون المرئي

وإن كلمة تحذيرية حول النظام البريطاني للوحدات هي في محلها . ففي إحدى صيغ ذلك النظام ، يكون الباوند (lb) pound وحدة قوة ، وليس كتلة . غير أنه من الشائع تماماً في المعاملات اليومية أن يستعمل الباوند كوحدة كتلة . فنحن نقول إن هنالك ٤٥٤ غ في ١ باوند أو ١٠٢ باوند في ١ كـرغ . ولكي نتحاشى الخطأ ، من الأفضل أن نقوم بكل الحسابات التي تشمل القوة أو الكتلة ضمن النظام المترى .

٢,٩ الطاقة Energy

أبرز حقيقة نجد ملاحظتها عن الطاقة هي تنوعها . فمثل الممثل الحاذق الذي يستطيع أن يتقمص أزياء متعددة ، تعن الطاقة هيئات متنوعة وتستطيع أن تنتقل من دور إلى آخر . ونظراً لتعدد الهيئات هذا ، فإن الطاقة تظهر تقريباً في كل دور من وصف الطبيعة وتوفر أواصر حيوية بين قطاعات الطبيعة المختلفة .

الطاقة الحركية

وإحدى صور الطاقة هي طاقة الحركة ، أو الطاقة الحركية kinetic energy ، التي تشكل مقياساً لمقدار القوة اللازمة لدفع جسم ما إلى الحركة أو لإعادته إلى حالة السكون خلال مسافة معينة . ومعادلة الطاقة الحركية K لسرعات أصغر بكثير من سرعة الضوء c هي

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (v \ll c) \quad (2,11)$$

أي نصف الكتلة m لجسم ما مضروب بمربع سرعته v . أما المعادلة المعدلة للكمية K ، التي يسري مفعولها قُرب سرعة الضوء ، فإنها ترد في الباب الحادي والعشرين .

أهمية الطاقة الخاصة في تنوعها
وجنبتها

وتنبثق أهمية الطاقة الكبرى إلى حد ما عن تنوع مظاهرها ، وإلى حد آخر عن حقيقة كونها محفوظة : بمعنى أن مقدار الطاقة الكلي يبقى دائماً واحداً ؛ حيث أن فقدان صنف واحد من الطاقة يعوّضه كسب صنف آخر . تتبع مثلاً تدفق الطاقة من الشمس إلى الأرض فالإنسان . فحينما تتحد البروتونات في الشمس لتكوّن نوى الهيليوم helium تنطلق طاقة نووية . ومن

الجائز أن تتحول هذه الطاقة - باديء ذي بدء - إلى طاقة حركية للنوى . ومن ثم يُحملُ بعض الطاقة بعيداً عن الشمس بواسطة الفوتونات ، تلك الجسيمات التي هي حُرْمُ bundles من طاقة كهرومغناطيسية . وربما يتحول محتوى الفوتونات من الطاقة ، بواسطة عملية التخليق (التمثيل) الضوئي photosynthesis المعقدة والتي لما نُذكرُ كنهها تماماً ، إلى طاقة كيميائية chemical energy مخزونة في النباتات . ويكتسب الإنسان ، إما بأكل النباتات أو بأكل الحيوانات التي قد تغذت على النباتات ، هذه الطاقة الشمسية ، التي تسمى بعد ذلك في المتناول لتزفد دماغه وعضلاته بالقوة ولتحفظه دافئاً .

وقد لوحظَ كونُ الكتلة إحدى أشكال الطاقة - أول ما لوحظَ - في مستهل هذا القرن ؛ إذ يمكن اعتبار طاقة الكتلة « طاقة كينونة energy of being » ، حيث تمتلك المادة طاقة فقط بفضل وجودها عينه . فالجسيم المادي ليس أكثر من حزمة من الطاقة شديدة التركيز والتمركز . ويكون مقدار الطاقة المركزة لجسيم عديم الحركة متناسباً مع كتلته . أما إذا كان الجسيم متحركاً ، فإنه يملك أيضاً طاقة إضافية ، هي طاقته الحركية ؛ بينما يملك جسيم عديم الكتلة ، مثل الفوتون ، طاقة حركية فحسب ، وليس طاقة كينونة (أو كتلة) .

وتزود معادلة أينشتين التي هي أشهر من أن تُعرف ،

$$E = mc^2, \quad (2,12)$$

العلاقة بين الكتلة m للجسيم ما وطاقته الذاتية intrinsic energy ، أو طاقة الكينونة ، E . والمطلوب الهام الذي تنبئ عنه معادلة أينشتين هو أن الطاقة الذاتية تتناسب مع الكتلة . فمربع سرعة الضوء ثابت تناسب ؛ وهو يؤدي وظيفة التحويل من الوحدة التي تبين فيها الكتلة إلى الوحدة التي تبين فيها الطاقة . وعددياً ،

$$c^2 = 9 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{sec}^2 = 9 \times 10^{16} \text{ J/kg}. \quad (2,13)$$

وفي عالم الجسيمات الأولية دون المجهرية ، تلعب الطاقة الحركية وطاقة الكتلة - دون سيواهما - أدواراً هامة . وسنعتبر في أبواب لاحقة صوراً أخرى للطاقة تلزم لوصف النوى والذرات وأنظمة أعقد .

ونظراً لتباين أشكالها الكبير في المقام الأول ، فإن الطاقة تقاس بواسطة تشكيلة كبيرة من الوحدات . ولقد سبق أن عُرِّفَتْ وَحْدَةُ SI للطاقة ، الجول ، بأنها ١ كـرغ م^٢/ث^٢ . أما وَحْدَةُ نظام سرغ ث الأصغر بكثير ، الإِـرْغ erg ، فتساوي ١ غ سرغ م^٢/ث^٢ . ويبين جدول ٢،٤ صلة الإِـرْغ ، وبضع وحدات شائعة أخرى للطاقة ، بالجول . ويستعمل السعْر (الحراري) calorie بالدرجة الأولى لقياس الطاقة الحرارية heat energy : فهو الطاقة اللازمة لرفع درجة حرارة ١ غ من الماء بمقدار ١ ش . أما السعْر الغِـذائِي food calorie أو

طاقة الكتلة

c² كعامل تحويل

وحدات الطاقة الخاصة

الكيلوسعر kilocalorie ، الذي يكبر السعر بألف مرة ، فيستعمله الصيادلة والكيميائيون عادة ، وهو المؤلف أيضاً لدى مراقبي الأوزان . ويلزم كل يوم ألف كيلوسعر أو أكثر لجعل الآلة البشرية تعمل بفعالية . وثمة وحدة أخرى لقياس الحرارة هي الوحدة الحرارية البريطانية British thermal unit (Btu) ، التي تُعرّف بأنها الطاقة اللازمة لرفع درجة حرارة ١ باوند من الماء بمقدار ١ درجة فهرنهايت . وتفضل شركات الكهرباء الكيلوواط ساعة kilowatt hour كوحدة طاقة . وبما أن الواط (و) هو وحدة SI للقدرة ، ويساوي ١ ج / ث ، فإن الكيلوواط ساعة تعادل ١٠٠٠ ج / ث $\times 3600 = 3.6 \times 10^6$ ج .

جدول ٢،٤ : بعض وحدات الطاقة

عدد الجولات joules في الوحدة الواحدة	اسم الوحدة	إبرغ
10^{-7} ج	erg	إبرغ
١٨٤،٤ ج	calorie	سعر (حراري)
١٨٤،٤ ج	food calorie or kilocalorie	سعر غذائي أو كيلوسعر
١٠٥٤ ج	British thermal unit (Btu)	الوحدة الحرارية البريطانية
3.6×10^6 ج	kilowatt hour	كيلوواط ساعة
1.602×10^{-19} ج	electron volt (eV)	إلكترون فولت (ءف)
1.602×10^{-13} ج	million electron volt (MeV)	مليون (أو ميغا) إلكترون فولت (معءف)
10^9 ج	ton	طن
10^{15} ج	megaton	ميغاطن

وأكثر وحدة للطاقة شائعة الاستعمال في الفيزياء الذرية والنوية وفيزياء الجسيمات هي الإلكترون فولت (ءف) أو مضاعفاته : كءف ف keV ومعءف ف MeV وجرءف ف GeV . وواحد إلكترون فولت هو الطاقة التي يكتسبها الإلكترون (أو أي جسيم آخر يحمل نفس الشحنة) حين يسارع خلال فرق جهد كهربائي يبلغ واحد فولت . وتتضمن التفاعلات الكيميائية النموذجية حوالي ١ ءف لكل ذرة ؛ بينما تقاس الطاقات النووية بدلالة معءف ف . وينتج أكبر مُسارع في الوقت الحاضر (في بتسافيا بولاية إلينوي الأمريكية Batavia, Illinois) بروتونات طاقتها ٥٠٠ جرءف . وثمة وحدة جديدة خاصة بالعصر النووي هي الطن ton (أو كيلوطن أو ميغاطن) ،

ه وفي بعض الأحيان تُدعى هذه الوحدة أيضاً السعر الكبير ، أو ببساطة Calorie (مكتوبة بالحرف الكبير لتمييزها عن السعر العادي calorie بالحرف الصغير) ، لكن تُفضل كلمة kilocalorie.

التي تُستعملُ لقياس طاقة الانفجارات النووية . وواحد طنّ هو الطاقة المكافئة لانفجار طنّ واحد من مادة تي إن تي TNT †.

٢,١٠ الشحنة Charge

أفضلُ وصفٍ للشحنة الكهربائية هو أنها مثل العطر الفرنسي . فهي ذلك الشيء المعين الذي ترتديه الجسيمات والذي يجعلها جذابة - وعلى وجه التحديد ، جذابة للصنف المضاد من الجسيمات . والجسيمات التي لا تملكها تسمى متعادلة neutral ؛ وهذه ليس لها أي تأثير (على الأقل أي تأثير كهربائي) على جسيمات أخرى . وتستطيع الشحنة أن تؤدي إلى تزاوج بين الجسيمات ، كما هو الحال بين البروتون والإلكترون في ذرة الهيدروجين hydrogen . أمّا الجسيمات الأكثر طاقة فلا تقيدها معاً القوة الكهربائية ، وإنما تكتفي بجعلها تنحرف قليلاً عن المسار المستقيم .

وهذا المدخل الطريف لدراسة الشحنة يرمي إلى تأكيد الحقيقة بأننا - على المستوى الأعمق - لا نفقه الشحنة بحقٍ وحقيق . فثلاً ، لماذا لا تملكها بعض الجسيمات دون الأخرى ؟ ولماذا تتأني على شكل وحدات كمّ quantum units من قياس محدد ؟ ... الذي نعرفه فعلاً هو أنه يجوز أن تكون الشحنة موجبة positive أو سالبة negative ؛ وأنها مقرّ الظواهر الكهربائية والمغناطيسية ؛ كما أنها كمية قياسية يبقى مقدارها الكلي ثابتاً تماماً أثناء عمليات التغيير .

إشارة الشحنة صدف تاريخية

وأي شحنة تُدعى موجبة وأيّها سالبة إن هي إلا مسألة اعتباطية تماماً أفضت إليها الصدف التاريخية . فالتعريف الذي أدى إلى اعتبار الإلكترونات سالبة والبروتونات موجبة ينشئ على وجه الاحتمال عن تخمين تكهن به بنجامين فرانكلين Benjamin Franklin حوالي منتصف القرن الثامن عشر ؛ حيث بنى اختياره لهذه التسمية على أساس الافتراض الخاطي بأن الكهرباء الموجبة هي التي تتدفق أسهل ما يمكن من جسم لآخر . أمّا الساعة فنحن نعرف أن الإلكترونات السالبة هي المتحركة وهي التي تخلق تدفق التيار الكهربائي في الفلزّات metals .

وتُعرف وحدة SI للشحنة ، الكولوم (كل) ، بدلالة وحدة SI للتيار الكهربائي ، الأمبير (أ) ، كما يلي :

تعريف الكولوم

$$١ \text{ كل} = ١ \text{ أ} \cdot \text{ث} \quad ١ \text{ C} = ١ \text{ A sec} \quad (٢,١٤)$$

† أي مادة trinitrotoluene .

(المشرف)

ه يخامر الشك كثيراً من الفيزيائيين المعاصرين حول صحة هذه العبارة ؛ إذ أنهم يؤمنون بوجود جسيمات (لم تقطع التجربة بوجودها بعد) تُدعى كواركات quarks وتساوي شحنتها الكهربائية كسوراً . راجع بند ٢,٤ من هذا الكتاب .

(المشرف)

تعريف الأمبير

أي أن تياراً مقداره ١ أ ، متدفقاً لمدة ١ ث ، يوصل محصلة شحنة مؤلفة من ١ كل . ويعرف الأمبير بواسطة تجربة عن القوة المغناطيسية مؤداها أنه إذا جعل تياران متساويان في سلكين متوازيين يتعدان عن بعضهما البعض ١ م - إذا جعل السلكين يؤثران على بعضهما البعض بقوة تبلغ 2×10^{-7} نيوتن لكل طول متر واحد من السلك ، فإن التيار في كل سلك يكون ، بالتعريف ، ١ أ . وتوجد تعلقة تاريخية لهذا الرقم الخاص 2×10^{-7} ؛ لكن بما أن التعريف اعتباطي ، لا داعي لأن يعيننا هذا . وتعرف الشحنة بدلالة التيار ، لا العكس بالعكس ، لسبب عملي ؛ إذ أن القوى بين التيارات يمكن أن تقاس بدقة أكثر وسهولة أكبر من القوى بين أجسام مشحونة ساكنة . ولا يوجد في الاستعمال الدارج إلا وحدة أخرى للشحنة هي وحدة الكهرباء الساكنة electrostatic unit ، أو esu (التي تدعى أحياناً الكولوم الساكن statcoulomb) . وتعرف هذه الوحدة ، التي تدمج في نظام سرغ ث ، بحيث تؤثر شحنتان متساويتان ، مقدار كل منهما واحد esu وموضعتان على بُعد ١ سم عن بعضهما ، بقوة تعادل ١ داین على بعضهما البعض . والوحدة esu هي ٣ بلايين مرة أصغر من الكولوم :

$$1 \text{ C} = 3.00 \times 10^9 \text{ esu.}$$

ومقدار وحدة الكم للشحنة ، التي يرمز إليها عادة بالحرف e ، هو

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} = 4.803 \times 10^{-10} \text{ esu.} \quad (2,15)$$

وحدة الكم للشحنة

٢,١١ الزخم الزاوي Angular Momentum

الدوران شائع في سائر أرجاء الطبيعة

الحركة الدورانية هي - فيما يبدو - خصيصة لجُلّ البُنيات في الكون ، من النيوتريونات (جمع نيوترينو) neutrinos إلى المجرات . فأرضنا تدور حول محورها مرة واحدة في اليوم ، كما تدور حول الشمس مرة في السنة الواحدة . والشمس نفسها تدور حول محورها مرة واحدة في ٢٥ يوماً . وتسافر - كخلافها من النجوم في مجرتنا - مرة حول المجرة في ٢٣٠ مليون سنة . وليس معروفاً فيما إذا كانت بُنيات أكبر ، مثل عنقيد المجرات ، تملك حركة دورانية عموماً ؛ بيد أن الدهشة لا بد وأن تعترينا لو لم يكن الحال كذلك .

وإذا ما هبطنا على سُلّم القياس ، فإننا نرى أن الجزيئات تدور ، مثلها مثل الإلكترونات داخل الذرات . وقد اكتشفت - أول ما اكتشفت - الحقيقة الهامة أن الإلكترون يغزل أيضاً كالخُذروف top حول محوره الذاتي في عام ١٩٢٥ . ونحن نعلم الآن أن جسيمات عديدة لها خاصية الغزل الذاتي هذه .

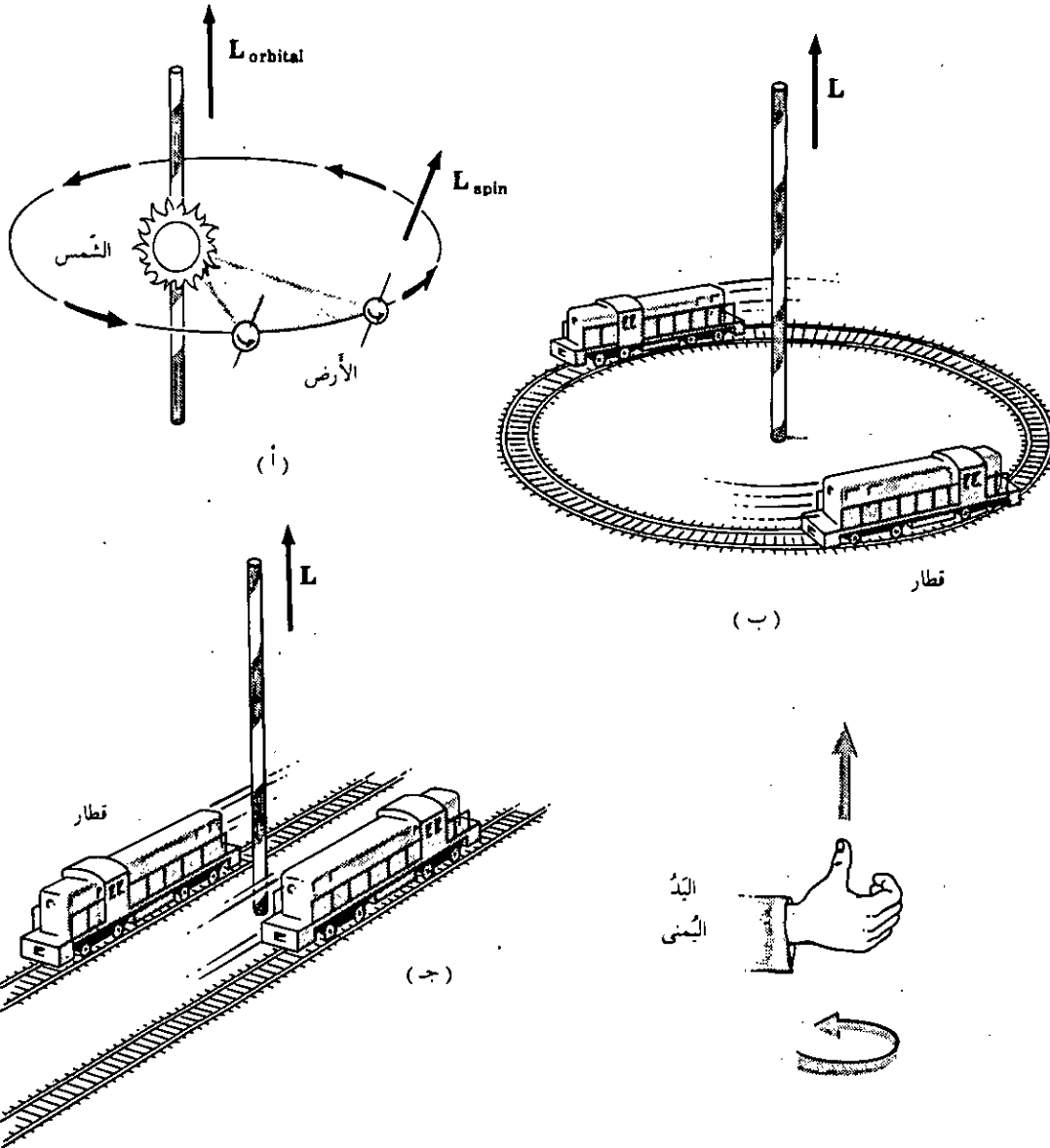
وبالتعريف ، يملك جسيم متحرك ، بسرعة v في دائرة نصف قطرها r حول نقطة ثابتة ، زخماً زاوياً مساوياً لحاصل ضرب كتلته وسرعته ونصف قطر مداره :

$$L = mvr , \quad (2,16)$$

تعريف الزخم الزاوي للحالة الخاصة

بالحركة الدائرية

(حيث L هو الرمز المُستعمل عادة للزخم الزاوي) . ويظهر تعريف أشمل للزخم الزاوي في الباب التاسع . ووحدّة SI للزخم الزاوي هي كـ $\text{كـ} \cdot \text{م}^2 / \text{ث}$. وهذا الائتلاف لم يُخصَّص له



شكل ٢،٥ : أمثلة على حركة ذات زخم زاوي . (أ) تملك الأرض زخماً زاوياً مغزلياً حول محورها بالإضافة إلى زخم زاوي مداري حول محور مشار إليه أعلاه بالعمود الضخم . † (ب) للقطارات المسافرة على مسار دائري زخم زاوي حول محور عمودي . (ج) حتى على مسارات مستقيمة ، يُقرن زخم زاوي بحركة نسبية مماثلة للقطارات وإذا ما دلت الأصابع المنحنية لليد اليمنى على اتجاه الحركة ، فإن الإبهام thumb الأيمن يبين حينئذ اتجاه الزخم الزاوي .

† في الأصل barber pole (أو barber's pole) ؛ وترجمتها الحرفية : « عمود (أو سارية) الحلاق » . وهو عمود يستطيع الدوران حول محوره ، ومقلم بخطوط من الأحمر والأبيض (يضاف إليها أحياناً اللون الأزرق) . ويُستعمل في الولايات المتحدة كعلامة على دكان الحلاق .

(المشرف)

إسم مستقل لذاته . والزخم الزاوي هو في الحقيقة كمية متجهة* ، حيث يعين اتجاهه على امتداد محور الدوران وفقاً لقاعدة اليد اليمنى (شكل ٢,٥) . وهو يعرف بالنسبة إلى نقطة إسناد reference point محددة .

وبتعبير وصفيّ qualitative ، يمكن اعتبار الزخم الزاوي مقياساً « لشدة intensity » الحركة الدورانية ؛ إذ أنه كمية تجعلها أكبر كتلة أكبر أو سرعة أكبر أو مسافة أكبر من نقطة الإسناد . ولقد تكشف ، من خلال تحليل الحركة ، أنه من الملائم أن نميز بين ضربين من الزخم الزاوي : زخم زاوي مداري وغزل . وينشأ الزخم الزاوي المداري عن حركة مركز الكتلة center of mass الجسم ما حول نقطة إسناد معينة . أما الغزل فهو الزخم الزاوي المقترن بدوران الجسم ذاته ، أو بدوران أي نظام ، حول مركز كتلته عينه . † وتملك الأرض كلا الصنفين من الزخم الزاوي . ومقدور جُلّ الجسيمات الأولية أن تملك كلا الصنفين أيضاً .

وكما أن الإلكترون يحمل وحدة الطبيعة الصغرى للشحنة الكهربائية †† ، فهو يحمل أيضاً وحدة الغزل غير القابلة للقسمة indivisible والتي يُشار إليها ، لأسباب تاريخية ، بالرمز $\frac{1}{2}h$. ففي مطلع هذا القرن ، اكتشف ماكس بلانك Max Planck وجود ثابت في الطبيعة يربط تردد الفوتونات بطاقتها (وسنبحث هذه العلاقة في الباب الثالث والعشرين) . ونحن ندعوه الآن ثابت بلانك ونكتبه h . وبعد ذلك باثنتي عشرة سنة اكتشف نيلز بور Niels Bohr أن لهذا الثابت علاقة أيضاً بدوران الإلكترونات حول النواة في الذرة . فبدورانها داخل الذرة ، تحصل الإلكترونات على زخم زاوي مساوٍ دائماً للقيمة $h/2\pi$ ، أولضعف $h/2\pi$ ، أو ثلاثة أضعاف $h/2\pi$ ، وهكذا دواليك ؛ لكنه لا يساوي أبداً أية قيمة واقعة ما بين تلك . ولأننا نصيق ذرعاً بكتابة العامل الإضافي 2π حينما وجد ، فإن الرمز $\hbar$ (ويُلَفَّظ "h bar") قد درج في الاستعمال الشائع بدلاً من $h/2\pi$. وأخيراً ، حين اكتشف صموئيل غودسميت Samuel Goudsmit وجورج أولنبك George Uhlenbeck في عام ١٩٢٥ أن الإلكترون يغزل ، وجداً أن زخمه الزاوي المغزلي ليس $\hbar$ ، التي كانت تُظنُّ الوحدة غير القابلة للقسمة ، بل $\frac{1}{2}\hbar$ فقط . ولقد اتخذت الكمية $\hbar$ وحدة للغزل والزخم الزاوي في العالم دون المجهرى ، مع

* بعبارة أدق ، هو كمية متجهة محورية axial . وبالمفارقة ، فإن القوة والسرعة والتسارع هي كميات متجهة قطبية polar . وسنفسر الفرق بينهما في الباب السادس .

† نود أن نلفت نظر القارئ هنا إلى أن الغزل مفهوم كميٌّ صرف ، ولا يمكن استيعابه على الوجه الأكمل إلا ضمن الإطار الرياضي التجريدي لنظرية الكم . فكلمة « دوران » ونظيراتها مستعملة هنا فقط من باب المجاز . (المشرف)

†† راجع تعليقنا على ذلك في البند السابق .

(المشرف)

أَنَّ أَصْغَرَ وَحْدَةٍ غَيْرَ قَابِلَةٍ لِلْقِسْمَةِ هِيَ نِصْفُ هَذِهِ الْكَيْمَةِ لَيْسَ غَيْرُ . فَالزَّخْمُ الزَّائِي الْمَدَارِي هُوَ دَائِمًا مُضَاعَفٌ صَحِيحٌ (غَيْرُ كَسْرِي) integral للمقدار h ؛ فِي حِينِ أَنَّ الْغَزْلَ مُضَاعَفٌ صَحِيحٌ لِلْمَقْدَارِ $\frac{1}{2}h$.

وَرِغْمَ أَنَّ تَكْمِيَةَ الْغَزْلِ spin quantization لَا تَزَالُ — مِنْ حَيْثُ الْمَبْدَأُ — سَارِيَةً الْمَفْعُولُ فِي الْعَالَمِ الْجَاهِرِيِّ ، فَهِيَ لَيْسَتْ بِذَاتِ بَالٍ هُنَا نَظَرًا لِمَقْدَارِ h الْمُتَنَاهِي الصَّغَرُ بِالنَّسْبَةِ إِلَى الزَّخْمِ الزَّائِي الْعَادِي :

$$h = 1.055 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{sec} \quad \text{كـ} \frac{\text{كـ} \text{م}^2}{\text{ث}} \quad 1.055 \times 10^{-34}$$

فَإِنَّ مَتَفَرِّجًا فِي دَوْرَةِ تَنَسُّ (كُرَةِ الْمَضْرِبِ) tennis tournament قَدْ يَمْلِكُ — إِذَا مَا أَدَارَ رَأْسَهُ — زَخَمًا زَائِيًا يُعَادِلُ $10^{33}h$. وَغْنِي عَنِ الْقَوْلِ إِنَّ التَّمْيِيزَ تَجْرِييًّا بَيْنَ 10^{33} و $(1 + 10^{33})$ هُوَ غَيْرُ وَارِدٍ إِطْلَاقًا . فَلَمْ تَتَسَنَّ لِلْإِنْسَانِ سَانِحَةٌ اكْتِشَافِ نَظَرِيَةِ الْكَمِّ لِلزَّخْمِ الزَّائِي إِلَّا حِينَمَا أَضْحَى بِمَقْدُورِهِ أَنَّ يَدْرُسَ بِالتَّفْصِيلِ بُنْيَةَ نِظَامِ بِصَغَرِ الذَّرَّةِ .

★ ٢,١٢ الْوَحْدَاتُ الطَّبِيعِيَّةُ وَالْفِيزِيَاءُ الْأَبْعَدِيَّةُ * Natural Units and Dimensionless Physics

لَقَدْ عُرِفَتْ وَحْدَاتُ الْقِيَاسِ الَّتِي يَسْتَعْمَلُهَا الْمَرْءُ عَادَةً ، حَتَّى فِي الْعَمَلِ الْعِلْمِيِّ ، اعْتِبَاطًا ؛ وَاخْتِيرَتْ لِمَلَاءَمَتِهَا لَيْسَ غَيْرُ . فَهِيَ لَا تَمُتُ بِصِلَةٍ إِلَى « وَحْدَاتٍ طَّبِيعِيَّةٍ » مُحَدَّدَةٍ ؛ كَمَا أَنَّهَا لَيْسَتْ عَلَى وَثَامٍ خَاصٍّ مَعَ بُنْيَةِ الْعَالَمِ الْأَسَاسِيَّةِ . وَإِنَّمَا كَانَ الْأَمْرُ ، فَلَقَدْ عَلِمْنَا فِي هَذَا الْقَرْنِ بِوُجُودِ وَحْدَتَيْنِ طَّبِيعِيَّتَيْنِ هُمَا سُرْعَةُ الضَّوِّ c وَثَابِتُ بِلَانِكِ h . فَلَا هَذِهِ وَلَا تِلْكَ كِتْلَةٌ أَوْ طَوَّلٌ أَوْ زَمَنٌ بِشَكْلِ مُبَاشَرٍ ؛ لَكِنَّهُمَا اثْنَانِ بَسِيطَانِ مِنْ هَذِهِ الْوَحْدَاتِ الثَّلَاثِ . وَإِذَا مَا انْضَمَّتْ إِلَيْهَا وَحْدَةٌ طَّبِيعِيَّةٌ ثَالِثَةٌ ، فَإِنَّهَا سَوْفَ تُؤَلَّفُ أَسَاسًا لِلْقِيَاسِ بِنَفْسِ اكْتِهَالِ نِظَامِ الْكِيلُوغَرَامِ وَالْمِترِ وَالثَّانِيَةِ ، إِلَّا أَنَّهُ أَكْثَرُ إِرْضَاءٍ مِنْهُ بِكَثِيرٍ . (قَدْ يَقْتَرِحُ الْقَارِيُّ الْمُتَعَمِّقُ شِحْنَةَ الْإِلِكْتَرُونِ كِمَرَشِّحٍ بَيْنَ الْوَحْدَةِ الطَّبِيعِيَّةِ الثَّالِثَةِ ، لَكِنَّهَا لِلْأَسَفِ لَا تَصْلُحُ ، لِأَنَّهَا لَيْسَتْ مُسْتَقَلَّةٌ عَنْ c وَ h — تَمَامًا كَمَا أَنَّ السَّرْعَةَ غَيْرَ مُسْتَقَلَّةٍ عَنِ الزَّمَنِ وَالْمَسَافَةِ .) وَكَثِيرٌ مِنَ الْفِيزِيَائِيِّينَ يَعْتَقِدُونَ أَنَّ إِدْرَاكَ أَعَمَقَ لِلطَّبِيعَةِ دُونَ الْمِجْهَرِيَّةِ يَتَرَقَّبُ اكْتِشَافَ وَحْدَةٍ طَّبِيعِيَّةٍ أُخْرَى ، رُبَّمَا طَوَّلٌ أَسَاسِيٌّ .

c و h :
وَحْدَتَانِ طَّبِيعِيَّتَانِ

هَلْ ثَمَّةُ وَحْدَةٍ طَّبِيعِيَّةٍ ثَالِثَةٍ ؟

وَتَنْبَغِي الْمُلَاحَظَةُ أَنَّ كُلَّ قِيَاسٍ هُوَ — فِي الْحَقِيقَةِ — تَعْبِيرٌ عَنِ نِسْبَةٍ مَا . فَإِذَا قُلْتَ إِنَّكَ تَرِنُ ١٥١ باوندًا ، فَإِنَّكَ تَقُولُ فِي الْوَاقِعِ إِنَّ وَزْنَكَ ١٥١ مَرَّةً أَكْبَرَ مِنْ وَزْنِ جِسْمٍ مَعْيَارِيٍّ (بِأَيْنِ pint مِنَ الْمَاءِ مِثْلًا) نَخْتَارُهُ اعْتِبَاطًا لِأَنَّهُ يَكُونُ وَاحِدًا بِاَوْنَدٍ . كَمَا أَنَّ دَرْسًا يَسْتَفْرُقُ ٥٠ دَقِيقَةً هُوَ ٥٠ مَرَّةً أَطْوَلُ مِنْ وَحْدَةِ الزَّمَنِ الْمُعَرَّفَةِ اعْتِبَاطًا : الدَّقِيقَةُ . وَحِينَمَا نَسْتَعْمِلُ الْوَحْدَاتِ الطَّبِيعِيَّةَ ، فَإِنَّمَا نَأْخُذُ النَّسْبَةَ اسْتِنَادًا إِلَى وَحْدَةٍ ذَاتِ مَدْلُولٍ فِيزِيَائِيٍّ هَامٌّ بَدَلًا مِنْ وَحْدَةٍ

٥ يَجُوزُ اعْتِبَارُ الْبُنُودِ ، أَوِ الْبُنُودِ الْفَرَعِيَّةِ ، الْمُعَلَّمَةِ بِنَجْمَةٍ مَادَّةٍ اخْتِيَارِيَّةٍ ، وَذَلِكَ حَسْبِ إِبْرَاهِيمِ الْمُدْرَسِ . وَلَقَدْ نَوَقَشْتُ الْمَادَّةَ الْمُعَلَّمَةَ بِنَجْمَةٍ فِي مَقْدَمَةِ الْمُؤَلَّفِ .

اعتباطية . فعلى سبيل المثال ، حسب المقياس الطبيعي ، تكون سرعة طائرة نفاثة قيمتها $10^{-6}c$ منخفضة جداً ؛ بينما تكون سرعة جسيم قدرها $0.99c$ ، عالية جداً . كذلك يكون زخم زاوي مكون من $10,000h$ كبيراً ؛ في حين أن زخماً زاوياً مقداره $\frac{1}{2}h$ يكون صغيراً .

وثمة نقطة غريبة لكن جديرة بالملاحظة هنا ، ألا وهي أنه حالما نتبنى سرعة الضوء كوحدة سرعة ، فإنه لا يغدو معقولاً أن نسأل بآية سرعة ينتقل الضوء ؛ إذ أن الإجابة الوحيدة على ذلك ستكون : يتحرك الضوء بالسرعة التي يتحرك بها ! وبما أن كل قياس هو - في الحقيقة - عملية مقارنة ، فإنه يتوجب دائماً أن يوجد معيار واحد على الأقل لا يمكن أن يُقارَن بأي شيء عداه . وهذا يؤدي إلى فكرة « الفيزياء اللابعدية » . فنتى اتفقنا على معيار للسرعة ، فإننا نستطيع القول إن طائرة نفاثة تسافر بسرعة $10^{-6}c$ ؛ أي جزء واحد من المليون من سرعة الضوء . و $10^{-6}c$ هو رقم مجرد لا داعي لأن نلحقه بآية وحدة ؛ إذ أنه نسبة سرعة الطائرة إلى سرعة الضوء . وحتى نجعل بالإمكان فيزياء لابلعدية فإننا بحاجة إلى وحدة طبيعية مستقلة أخرى ؛ وهذه لم تثبت بعد .

ويجب أن نضيف أن فيزياء لابلعدية ليست بهذا العمق كما قد يبدو لأول وهلة ؛ كما أنها سوف لا تكون بالضرورة سدره المنتهى لعملية الجس التنازلي للإنسان . وينبع افتقارها إلى العمق عن الحقيقة بأنها هي أيضاً سوف تركز على اتفاق اعتباطي حول الوحدات بين ذوي الشأن . ومهما يكن من أمر ، فإن الأمل المعقود في أن ينقاد كل العلماء على نحو طبيعي وفريد إلى الاتفاق على وجود فئة معقولة واحدة من الوحدات الطبيعية ... بالمفارقة مع الوضع الراهن ، حيث الحقيقة التي نتفق عليها جميعاً هي أنه ليس هنالك البتة أي امتياز خاص للمتر والكيلوغرام والثانية .

الأمل من أجل
فيزياء لابلعدية

خلاصة الأفكار والتعاريف

- يُبنى النظام الدولي للوحدات SI على أساس ست وحدات أساسية هي : المتر والكيلوغرام والثانية والأمبير والكلفن والقنديلة . وهذه معرفة في ملحق ١ .
- كثير من وحدات SI المشتقة لها أسماء خاصة . ونسوق قائمة بهذه في ملحق ٢ .
- تمدنا الكتلة والطول والزمن بطائفة كافية من الأبعاد لسائر القياسات الفيزيائية .
- يزودنا « حساب الوحدات » بطريقة ملائمة للتحقق من
- عدم وجود أخطاء في المعادلات المشتقة ، ويُسهل استعمال عوامل التحويل .
- تتشابه تعاريف المفاهيم وقوانين الفيزياء بشكل يستحيل معه فصلها عن بعضها البعض .
- لقد استكشف الإنسان فترات طويلة وزمنية تمتد على عامل قياسي يراوح 10^{41} .
- سرعة الضوء هي سرعة قصوى لكل المادة المعروفة وسرعة دنيا للجسيمات افتراضية تدعى تكبونات .

□ تعريف الارتداد لكتلة القصور تحدده المعادلة ٢,١٠ . إسناد معينة ، للحالة الخاصة بالحركة الدائرية حول نقطة

□ لقد وُجدَ بالتجربة أن كتلة الجاذبية ، التي تُقاسُ الإسناد ، هو

$$L = mvr. \quad (٢,١٦)$$

بالوزن ، مساوية لكتلة القصور .

□ تُعرّف الطاقة الحركية ، للسرعات الصغيرة بالمقارنة مع □ شحنة الإلكترون ، e ، هي وحدة الكم للشحنة ، وغزل

سرعة الضوء ، بواسطة المعادلة

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (٢,١١)$$

□ تُعرّف طاقة الكتلة ، أو الطاقة الذاتية ، بواسطة □ سرعة الضوء c وثابت بلانك h هما «وحدتان طبيعيتان» يمكن

أن يحلّا محلّ الوحدات الأساسية الاعتبارية من قبيل المتر أو

$$E = mc^2. \quad (٢,١٢)$$

□ الزخم الزاوي هو كمية متجهة . ومقداره ، نسبة إلى نقطة الكيلوغرام . ويأمل الفيزيائيون بإيجاد وحدة طبيعية ثالثة .

أُسْئَلَة

بند ٢,١

س ٢,١ (١) أعط تعريفاً عملياً لأي مفهوم صادفته في مضمار آخر من العلوم ، مثل الكيمياء أو الأحياء .

(٢) حاول أن تعطي تعريفاً عملياً موجزاً للعلم ذاته .

س ٢,٢ أيها من التالية مفاهيمٌ مقدارية : (أ) زمن ؛ (ب) جِمال ؛ (ج) درجة حرارة ؛ (د) تقدم ؛

(هـ) بحجرة ؛ (و) طاقة ذرية ؛ (ز) لانظام (قوضى) disorder ؟

س ٢,٣ العبارة المقدارية ليست مجرد علاقة عددية ؛ بل هي أية عبارة يمكن التحقق من صحتها بالتجربة ،

ربما مع بعض الشك التجريبي experimental uncertainty . فأَيُّها من التالية عبارات

مقدارية ؟ (١) $F = ma$. (٢) فوكنر Faulkner روائي أعظم من همنغواي Hemingway .

(٣) ينتقل الصوت بسرعة تناهز ٣٣٠ م / ث في الهواء . (٤) بإمكان الكلاب أن تسمع ترددات

أعلى مما يستطيعه البشر . (٥) كان فلاسفة القرن الثامن عشر أكثر فعالية منه بالثمة من فلاسفة القرن

التاسع عشر .

س ٢,٤ يمكن تعريف الدفع thrust لمحرك نفّاث jet engine عملياً . اقترح إجراءً تجريبياً

لقياسه .

بند ٢,٢

س ٢,٥ (١) اقترح وحدات للسرعة والتسارع يمكن إعادة انتاجها بسهولة كما يمكن أن تصلح كمعايير عالمية .

(٢) لِمَ سيكون مثل نظام السرعة والتسارع هذا أقلّ ملائمة للعمل المتناهي الدقة من نظام الطول

والزمن الزاهن ؟

• ولیم فوکنر (١٨٩٧-١٩٦٢) وُلِدَتْ همنغواي (١٨٩٩-١٩٦١) أدبيان أمريكيان مرموقان ، ملّا الدنيا وشغلا الناس .

وقد اشتهرا بالدرجة الأولى في الرواية والقصة القصيرة ، كما نالا جائزة نوبل في الآداب (الأول في ١٩٥٩ ، والثاني في

١٩٥٤) .

(المشرف)

- س ٢,٦ بُعد القوة في المسافة هو نفس بُعد الطاقة . فهل يعني هذا أن القوة في المسافة هي الطاقة بعينها ؟
بند ٢,٣ قسّر .
- س ٢,٧ عبّر عن مساحة دائرة A بدلالة نصف قطرها r بواسطة $A = Kr^2$ ، حيث K عدد لأبعدى .
بند ٢,٤ (١) هل يعتمد التوافق البعدي لهذه المعادلة على قيمة K ؟ (٢) وهل تعتمد صحتها على قيمة K ؟
علّل كلنا الإجابتين .
- س ٢,٨ اقترح إجراءً عملياً لاستعمال معيار طول لتحديد وحدة الزمن .
بند ٢,٥
- س ٢,٩ اقترح إجراءً عملياً لاستعمال معيار زمن لتحديد وحدة الطول .
بند ٢,٦
- س ٢,١٠ حينما شغل مُدَبِّدُ مِيزَر شعاع النشادر ammonia-beam maser oscillator^١ لأول مرة ، أعلن أنه أدق ساعة صُنِعَتْ طرّاً . وقد كشف بواسطته عن عَدَمِ الانتظام في معدل دوران الأرض حول محورها . فكيف يمكن اختبار دقة ساعة فيما لو كانت أدق ساعة في العالم ؟
- س ٢,١١ برأيك ، كيف كان يمكن (هذا إن كان ممكناً على الإطلاق) أن يُعرَفَ الزمن لو لم توجد البتّة ظواهر متواترة بانتظام ؟ دافع عن أيٍّ من هذين الموقفين : (أ) سوف يكون الزمن خيولاً من أيّ مدلول ، وسوف يستحيل تصميم أية ساعة . (ب) سوف يبقى بالإمكان تعريف الزمن وتصميم ساعة .
- س ٢,١٢ ثمة فروق في غاية الأهمية بين « سرعة حاجز الصوت sound barrier » و « سرعة حاجز الضوء » . ناقش اثنين أو ثلاثة من هذه الفروق .
بند ٢,٧

١. الليزر والميزر هما جهازان يَتَّانِ إشعاعاً قوياً ذا طول موجي في غاية الدقّة ، يقع في المنطقة المايكروموجيّة microwave region من الطيف الكهرومغناطيسي electromagnetic spectrum (في حالة الميزر) وفي المنطقة المرئيّة visible region من هذا الطيف (في حالة الليزر) . وكلٌّ من الإسمين ميزر وليزر مركّب من أوائل حروف كلمات الجملة التي تدلّ على عمله . فكلمة « ميزر » مكوّنة من :

Microwave (or Molecular) Amplification by Stimulated Emission of Radiation (MASER)

(التكبير المايكروموجي - أو الجزيئي - بانبعث منشط للإشعاع) ؛ وكلمة « ليزر » مكوّنة من :

Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation (LASER)

(تكبير الضوء بانبعث منشط للّور) .

وقد استعملنا كلمة « اللّور » بدلاً من « الإشعاع » في العبارة الأخيرة حتّى تُكوّن أوائل حروف كلماتها الخمسين الكلمة العربية « تَضَامُن » التي تشير بوضوح إلى عمل الليزر . [وهذا في الأصل اقتراح قدّمه الدكتور محمود أحمد الشربيني ، الأستاذ بجامعة الإسكندرية ، في مقالة وجيزة نشرها في مجلّة « العلم » المصرية ، العدد ٢١ ، تشرين أول ١٩٧٧ ، ص ١٤-١٦] . ومع أنّ الميزر سبق اختراعه لليزر ، إلّا أنّ الأخير قد برّز في تباين الاستعمالات وفوائدها ، لاسيّما في الصناعة والطب . ولزید من المعلومات المبسطة في هذا المضمار ، راجع مقالة أ . ل . شُولو A. L. Schawlow ، أحد رواد هذا الموضوع ، في الموسوعة البريطانية Encyclopaedia Britannica ، الطبعة الأخيرة (الخامسة عشرة) ، المجلد العاشر ، ص ٦٨٦-٦٨٩ .

(المشرف)

س ٢,١٣ (١) اقترح طريقة لقياس المسافة للقمر لا تقتضي استخدام ساعة دقيقة . (٢) اقترح طريقة تقتضي ساعة دقيقة . هل يلزم قياس دقيق للسرعة في أي من الطريقتين ؟
 فرع اختياري : باستعمال مصدر خارجي ، اكتب تقريراً عن طريقة تحديد المدى بواسطة الليزر laser ranging technique ، التي تستطيع أن تحدّد بدقة متناهية المسافة إلى القمر (أو بعبارة أدق ، إلى بقعة واحدة على القمر) بصورة لا يتعدى الشك فيها بضع بوصات .

بند ٢,٨

س ٢,١٤ تُعرّف الكتلة أحياناً بأنها « كمية المادة » . فهل هذا تعريف عمليّاتي ؟ وهل هو تعريف مُرضٍ علمياً ؟

س ٢,١٥ علّل بتعابير بسيطة لماذا يكون طول امري « فقط » حوالي 10^{10} مرة أكبر من قطر ذرة ؛ بينما تكون كتلته زهاء 10^{28} مرة أكبر من كتلة ذرة نموذجية .

س ٢,١٦ كتلتا القصور والجاذبية متساويتان . ويمكن أن تُعَيّن الكتلة بوزن جسم ؛ لكن في المدار ، يحتفظ جسم عديم الوزن بكتلته . فسّر التقيضة (المفارقة) الظاهرة apparent paradox .

س ٢,١٧ باستعمال تعريف عمليّاتي لكتلة الجاذبية ، علّل لماذا يكون لجسم نفس كتلة الجاذبية على سطح القمر كما على سطح الأرض .

س ٢,١٨ إذا أُعطيت ثلاثة أجسام مرقمة ١ و ٢ و ٣ وكيلوغراماً معيارياً ، اشرح أي تجارب افتراضية يمكنك القيام بها لاختبار التوافق الذاتيّ لتعريف الارتداد للكتلة .

بند ٢,٩

س ٢,١٩ يسافر التكيون الافتراضي دائماً بسرعة أكبر من سرعة الضوء ، ويكتسب سرعة حيناً يفقد طاقة . ناقش تصادم تكيون مع جسيم عاديّ في حالة سكون .

س ٢,٢٠ قدّم بياناً عن تحويلات الطاقة المتباينة التي تؤول إلى زيادة في الطاقة الحركية لسيارة حين يُضغَط على دواسة البترين accelerator .

بند ٢,١٠

س ٢,٢١ فسّر كيف يستطيع سلك أن يوصل تياراً رغم بقائه متعادلاً كهربائياً .

س ٢,٢٢ اقترح سبباً لماذا نتكّن من قياس القوة بين تيارين بدقة أكبر من القوة بين شحنتين ساكنتين .

بند ٢,١١

س ٢,٢٣ (١) أيها أكبر : الزخم الزاوي للقمر نسبةً إلى الأرض أم الزخم الزاوي للقمر نسبةً إلى الشمس ؟
 (٢) أيها أكثر ثباتاً على وجه التقريب ؟ أورد أسباباً لكلتا الإجابتين .

س ٢,٢٤ الزخم الزاوي والشحنة هما مثالان على متغيرات مُكمّاة * quantized variables . فما هي بعض المتغيرات غير المكمّاة (حسب معلوماتنا الحالية) ؟

بند ٢,١٢

س ٢,٢٥ إذا قُست مسافة بمسطرة ruler أو فترةً زمنيةً بساعةٍ توقيت stop watch ، فسّر بأيّ معنى .

٥ أي يُعبّر عنها بلغة ميكانيكا الكم .

(الشرف)

نقوم بتحديد نسبة مسافتين أو زمنين .

س ٢٦، الأرض مكان خاص ذو أهمية قصوى للإنسان . فلم يُعارض الفيزيائيون ، إذن ، في أن يعزوا مغزى جوهرياً إلى وحدات مبنية على أساس خواص الأرض ؟

س ٢٧، هل من المحتمل أن تكون الدقة المتزايدة أبداً في القياس دزباً لاكتشاف أساسي جديد في العلم ؟ أم هل البحث عن الرقم العشري decimal التالي لكمية ما إن هو إلا تمرين تعليمي عقيم pedantic خارج عن التيار السائد للتقدم العلمي ؟ دافع عن أي من وجهتي النظر هاتين .

تمارين

ت ٢،١ تروّذنا الأسئلة التالية بمراجعة إضافية لحساب الأسيات exponential arithmetic : (١) سرعة الضوء هي 3×10^8 م / ث . فكم يستغرق الضوء كي يجتاز ذرة يساوي قطرها 10^{-10} م ؟ (٢) إذا استغرق الضوء ، في وقت معين من السنة ، ١٠ د لكي يصل الأرض من المريخ ، فكم يكون بُعد المريخ في ذلك الوقت (أ) بالأمتار ؟ (ب) بالأميال ؟ (٣) عبر عن سرعة الضوء بالقدم / ث ، ميل / ث ، ميل / س ، وم / مي ث .

ت ٢،٢ عبر عن (أ) ١٠٠ كرم / س بالميل / س ؛ (ب) ١٠٠ م بالياردات ؛ (ج) ٨٨٠ ياردة بالأمتار ؛ و (د) ٦١٠ إرغ بالجولات .

ت ٢،٣ عبر ثانية عن كل من الكميات التالية بوحدة SI : (أ) ١٨٦٠٠٠ ميل / ث ؛ (ب) ١ ياردة ؛ و (ج) ٣٢ قدم / ث .

ت ٢،٤ كثافة الماء هي ٨،٣٥ باوند / غالون 8.35 lb / gallon أو ١ غ / سم^٣ . ومن عوامل التحويل المفيدة للكتلة ٤٥٤ غ / باوند و ٢،٢٠٥ باوند / كغ . (١) فما كثافة الماء بالوحدات كغ / م^٣ ؟ (٢) وما عامل التحويل للحجم الذي يربط الغالونات و م^٣ ؟

ت ٢،٥ أذكر ست وحدات مختلفة تستخدمها عادة (إما في الحياة اليومية أو في مقررات أخرى من الدراسة) هي ليست وحدات SI . أوجد العوامل التي تحول أي اثنين من هذه إلى وحدات SI المناظرة لها .

ت ٢،٦ عبر عن بُعد الطاقة لكل وحدة زمن بدلالة الكتلة والطول والزمن . ما وحدة SI لهذه الكمية ؟
ت ٢،٧ تبين الطول والسرعة كالبُعدين الأساسيين للكينماتيكا . عندئذٍ ماذا يكون بُعدا (أ) الزمن و (ب) التسارع ؟

ت ٢،٨ تبين الزمن والتسارع كالبُعدين الأساسيين للكينماتيكا . عندئذٍ ماذا يكون بُعدا (أ) الطول و (ب) السرعة ؟

ت ٢،٩ افترض أن القوة والكتلة والزمن قد اتُخذت أبعاداً أساسية . عبر عن الطول على صورة ائتلاف من هذه الأبعاد الثلاثة .

ت ٢,١٠ جسمان ، كتلتاهما m_1 و m_2 وتفصلهما مسافة r ، يؤثران على بعضهما البعض بقوة جاذبية تتحدد بالعلاقة

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} .$$

فا وَحْدَةُ SI لثابت الجاذبية G ؟

ت ٢,١١ في القرن التاسع عشر قام الفيزيائي الإنجليزي جورج ستوكس George Stokes بدراسة حركة الكريات البطيئة خلال السوائل . وقد تمكن من الإثبات نظرياً أنَّ « قُوَّة الانجرار drag force » للسائل على الكرة تُحدَّد بالتعبير الرياضي

$$F_D = 6\pi\eta r v ,$$

حيث F_D قُوَّة الانجرار ، v سرعة الكرة ، و r نصف قطر الكرة . ويُسمَّى الثابت η [الحرف الإغريقي « إيتا »] لزوجَّة viscosity السائل . فما بُعد η ؟ وما وَحْدَةُ قياسها بالنظام الدولي SI ؟

ت ٢,١٢ إحسب وَدُونَ ، من أجل أي استعمال ممكن فيما بعد ، عوامل التحويل التالية : (أ) عدد الوحدات الفلكية ، أو وحدة A.U. ، في سنة ضوئية واحدة (حيث وحدة متوسَّط المسافة من الأرض إلى الشمس) ؛ و (ب) عدد الأقدام / ث في ١ ميل / س .

ت ٢,١٣ بالاستعانة بملحق ٢ ، تحقق من توافق الوحدات في المعادلة التالية : $W = qEd$ ؛ أي الشغل $(W) =$ الشحنة $(q) \times$ المجال الكهربائي $(E) \times$ المسافة (d) .

ت ٢,١٤ إذا تحرك جسم في خطٍّ مستقيم ، فإنَّ محصَّلة القُوَّة المؤثرة عليه مضروبة في سرعته تعادل الطاقة التي يكتسبها لكل وَحْدَةٍ زمن . بيِّن أنَّ هذه عبارة متوافقة الأبعاد ؛ ثم اشتق من هذا القانون المعادلة ٢,٤ ، التي تربط وَحَدَات SI للطاقة والقُوَّة والمسافة .

ت ٢,١٥ تكلف شريحة من اللحم أربعة دولارات \$4.00 لكل كيلوغرام .
(١) أكتب معادلة غير متوافقة الأبعاد لتعبّر عن سعرها بدلالة كتلتها .
(٢) استبدل هذه المعادلة بأخرى أعمّ ومتوافقة الأبعاد .

ت ٢,١٦ تتضمن المعادلات أدناه المسافة (s) والزمن (t) والسرعة (v) والكتلة (m) والطاقة (E) .
أيها متوافق الأبعاد ؟

ه يحذر التنويه هنا بأنَّ هذا « الثابت » يعتمد اعتماداً كبيراً على درجة الحرارة . وعلى ذلك ، فمن المستحسن أن تُعيَّن درجة الحرارة كلّما ذكرت لزوجَّة السائل .

(الشرف)

$$(أ) \quad t = s/v \quad (هـ) \quad s = \frac{1}{2}vt$$

$$(ب) \quad v^2 = E^2/m^2 \quad (و) \quad E = ms^2/t^2$$

$$(جـ) \quad s = \frac{1}{2}vt^2 \quad (ز) \quad t = v/s$$

$$(د) \quad E = mvst \quad (ح) \quad E^2 = m^2v^4$$

ت ٢,١٧ تتضمن المعادلات أدناه القوة (F) والكتلة (m) والطول (l) والزمن (t) والطاقة (E). أيها متوافق الأبعاد؟

$$(أ) \quad E = F + l \quad (د) \quad Ft = El$$

$$(ب) \quad E = Fl \quad (هـ) \quad E = F^2l^2/m$$

$$(جـ) \quad F = ml/t^2$$

ت ٢,١٨ هل المقدار ١٥٠٠ متر (الذي يُدعى أحياناً «مَيْلاً مترياً» metric mile) أكبر أم أقل من ميل واحد؟ ما الزمن اللازم للمتنسابق الميلي^{٥٥}، الذي يجتاز مسافة الميل بأربع دقائق four-minute miler، كي يقطع ١٥٠٠ متر؟
 فرع اختياري: إبحث عن السجلات العالمية الرائنة لسباق ١٥٠٠ متر وسباق الميل. قارن نسبة هذين الزمنين مع نسبة المسافتين.

ت ٢,١٩ أيها أطول: محاضرة الخمسين دقيقة أم محاضرة المايكروقرن microcentury؟

ت ٢,٢٠ ما سرعة رائد فضاء بالميل / س إذا كان يسافر بمعدل ٢٤٥٠٠ قدم / ث؟ (استخدم عوامل تحويل مناسبة، ونفذ حساب الوحدات والحساب العددي معاً.)

ت ٢,٢١ أقصى سرعة بلغها رائد فضاء حتى الآن تعادل حوالي ٧ ميل / ث. (١) عبّر عن هذه السرعة بالوحدة م / ث. (٢) إذا أُحرزت مثل هذه السرعة في الهواء، فماذا سيكون عدد ماخ Mach number لها (أي نسبة السرعة إلى سرعة الصوت)؟

ت ٢,٢٢ إذا تحركنا بسرعة رائد فضاء في المدار (٥ ميل / ث)، فكم سيستغرق بلوغ أقرب نجم منا [بعُد الشمس]، وهو ألفا قنطوري (أو نجم الظلمان) Alpha Centauri^{٥٥}، الذي يبعد عنا نحو ٤ سنين ضوئية؟ عبّر عن إجابتك بالسنين [الأرضية].

٥ أي الشخص (أو الجواد) الذي يشترك في سباق مسافته ميل واحد. (المشرف)

٥٥ هو في الواقع نظام مكون من ثلاثة نجوم، يبعد عنا أقربها (ويُدعى القنطوري الأدنى Proxima Centauri) مسافة ٤,٣ سنة ضوئية، أي ٤٢ مليون مليون (تريليون trillion) كم م؛ في حين أن متوسط بُعْد الشمس هو ٨ دقائق ضوئية أو ١٤٩ مليون كم. وكما يبدو من الأرض، فإن هذا النظام أكثر النجوم تالفاً (بعد الشغرى الجمانية Sirius وسهيل Canopus). وهو يقع في كوكبة قنطورس Centaurus Constellation، التي سُميت باسم القنطور. وهذا كائن خرافي نصفه رجل والنصف الآخر فرس، وقد ورد ذكره في الأساطير الإغريقية.

(المشرف)

بند ٢,٨

ت ٢,٢٣ (١) كم إلكترونًا يلزم لتكوين كتلة ١ كـغ ؟ (٢) قَدَّرْ على نحو تقريبي عدد الإلكترونات في الأرض . إذا ما تذكرت أنه مقابل كل إلكترون في الأرض هناك بروتون واحد ونيوترون واحد تقريباً .

ت ٢,٢٤ في القارة الأوروبية (باستثناء الجزر البريطانية) continental Europe ، يساوي « الباوند » الواحد نصف كيلوغرام . (١) فما علاقة هذا بالباوند الإنجليزي والأمريكي ؟ (٢) أي صفقة شرائية أفضل : باوند ألماني واحد من القهوة بسعر دولار واحد \$ 1.00 أم باوند أمريكي واحد من القهوة بسعر ٠,٨٠ دولار \$ 0.80 ؟

بند ٢,٩

ت ٢,٢٥ (١) إْحْسِبْ بالجول الطاقة الحركية للإلكترون ينطلق بسرعة 3×10^7 م / ث (وهذه سرعة كافية لكي يطوف حول الأرض في ١ ث) . (٢) بأي سرعة سوف يتعين عليك أن تسير كيما تحوز نفس الطاقة الحركية ؟ وكم سوف يستغرق عبور ١ م بهذه السرعة ؟

ت ٢,٢٦ تطير طائرة نفاثة فَوْضَوَيْتَة supersonic jet ° بسرعة ٦٠٠ م / ث (أي حوالي ماخ ١,٨ Mach 1.8) . فما نسبة طاقة كتلتها الذائبة إلى طاقتها الحركية ؟ أعطِ إجابتك أولاً بصورة جبرية ، ثم بصورة عددية .

بند ٢,١٠

ت ٢,٢٧ (١) كم إلكترونًا يلزم لتجميع (١-) كولوم من الشحنة الكهربائية ؟ (٢) إذا مرَّ ٣٠ كل C 30 من الشحنة خلال مِضْهِر (١٥ أ) 15-amp fuse ° ° في $\frac{1}{4}$ ث ، فهل « سَيَحْتَرِقُ » المِضْهِر ؟

ت ٢,٢٨ (١) إْحْسِبْ نسبة الشحنة إلى الكتلة للبروتون بالوحدات كل / كـغ و esu / غ . (٢) ما الشحنة الموجبة الكلية التي تحملها كل البروتونات في ١ غ من الهيدروجين ؟ (أهمل كتلة الإلكترونات بالمقارنة مع كتلة البروتونات .) (٣) إذا كانت عينة sample مؤلفة من ١ غ من الهيدروجين تحمل شحنة موجبة كلية تساوي ١ esu ، فما عدد ذرات الهيدروجين (مَبْنِيًا ككسر من العدد الكلي) التي فقدت إلكترونات ؟

بند ٢,١١

ت ٢,٢٩ بمسك رجل بطفل كتلته ١٥ كـغ من يديه ويدور ملوحاً به في الهواء . قَدَّرْ الزخم الزاوي للطفل بالنسبة إلى مركز الرجل . اشرح أساس اختبارك للأرقام الداخلة في هذا التقدير .

ت ٢,٣٠ تتغير الطاقة الحركية لأقمار satellites متساوية الكتلة وتدور في مدارات دائرية عكسياً مع بُعْدِهَا عن مركز الأرض (أي $1/r \sim K$) . أوجد الاعتماد على المسافة النصف قطرية

° فَوْضَوَيْتَة = فَوْق صَوْتِيَة ، أي أسرع من الصوت . [راجع تعليقنا على البادئة super في بند ٢,٧ . (المشرف)

° ° المِضْهِر (أو المُنْصَهَر) الكهربائي هو سلك صغير بشكل أداة أمان في الدائرة الكهربائية electric circuit ، إذ أنه يذوب (أو يحترق) باللفة الدارجة) فيقطع التيار كلما زادت قوته على حد السلامة (= ١٥ أ في هذا التمرين) . (المشرف)

(أ) أو النصفقطريّة radial لكلّ من : (أ) سرعتها ، (ب) زخمها الزاوي ، و (ج) دَوْرَة دَوْرَانِهَا .

ت ٢,٣١ في نظام وَحَدَاتٍ تساوي فيه سرعة الضّوء ١ ، يمكن أن يُقاس كلا الزّمن والمسافة بالثّواني . عبّر عن كلّ من المسافات التّالية بالثّواني : (أ) طولك ؛ (ب) ١ ميل ؛ و (ج) سنة ضوئيّة .

مسائل

م ٢,١ اعتبر فئة وَحَدَاتٍ تؤثر فيها كتلتا الوَحْدَة المتساويتان ، واللّتان تفصلهما مسافة ١ م ، على بعضها البعض بقوة جاذبيّة تعادل ١ ن ، حيث يكتب قانون قوّة الجاذبيّة على الصّورة

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2} .$$

(١) هل هذه معادلة متوافقة الأبعاد ؟ (٢) إذا كانت وَحْدَة الكتلة في هذا النّظام تُدعى « الثّقْل » heft ، فما عامل التّحويل الذي يربط الثّقْل بالكيلوغرام ؟
 فرع اختياري : احسب ثابت التّناسب K في المعادلة ٢,١ بنظام الوَحَدَات : متر - ثقل - ثانية - نيوتن .

م ٢,٢ تُحدّد خواصّ الدّفق المانع مارّاً بعائق obstacle - تحديدًا جزئيًا - بواسطة عدد رينولدز Reynolds' number :

$$R = \frac{av\rho}{\eta} ,$$

حيث a البُعْد الطّوليّ linear dimension للجسم ، v سرعة المائع ، ρ كثافة المائع ، و η لزوجته . ويمكن الحصول على البُعْد الفيزيائيّ للزّوجة η من المعادلة المعطاة في تمرين ٢,١١ .
 (١) بيّن أنّ R لأبعديّ . (٢) أثبت أنّه لا يمكن تركيب كميّة لأبعديّة من أيّة ثلاثة من الكمّيّات الأربع a ، v ، ρ ، و η . (٣) بيّن أنّ R هو الائتلاف اللأبعديّ الوحيد الذي يمكن الحصول عليه من a ، v ، ρ ، و η (ما عدا R المرفوع لقوّة أو R المضروب بعدد) .

م ٢,٣ إذا ألقيت كرة أو حجر بسرعة ابتدائيّة v وبزاوية تصنع قرابة ٤٥° مع الاتّجاه الأفقيّ ، تحدّد مدّاتها - على وجه التّقريب - بواسطة

$$R = K_1 \frac{v^2}{g} ,$$

حيث g تسارع الجاذبيّة و K_1 ثابت لأبعديّ . (١) تحقّق من أنّ هذه المعادلة متوافقة الأبعاد .
 (٢) أوجد معادلةً مماثلةً لزمن الطّيْران تشمل ثابتاً لأبعدياً آخر ، K_2 . (٣) قُمْ بتجارب بسيطة في الهواء الطّلق بُعْثَة إيجاد القيم العدديّة التّقريبية للثابتين K_1 و K_2 ؛ وصِف الطّرق التي تستخدمها .

م ٢,٤ قد تعتمد دَوْرَة بندول (رَقَاص) pendulum على طول البندول (l) ، وكتلته (m) ، وتسارع الجاذبيّة (g) . (١) أوجد اثتلافاً لهذه المتغيّرات له بُعْدُ الزّمن . (٢) أثبت أنّه الائتلاف الوحيد من هذا القبيل . (٣) قُمْ بقياس تقريبيّ لدورة البندول ، وقارن هذا الزّمن المقاس مع الزّمن المحسوب

من اثتلافك للمتغيرات . علّل الحقيقة أنّ الزمن ليسا متماثلين . هل يعني هذا أنّ اثتلافك للمتغيرات لا يحمل مدلولاً فيزيائياً ؟

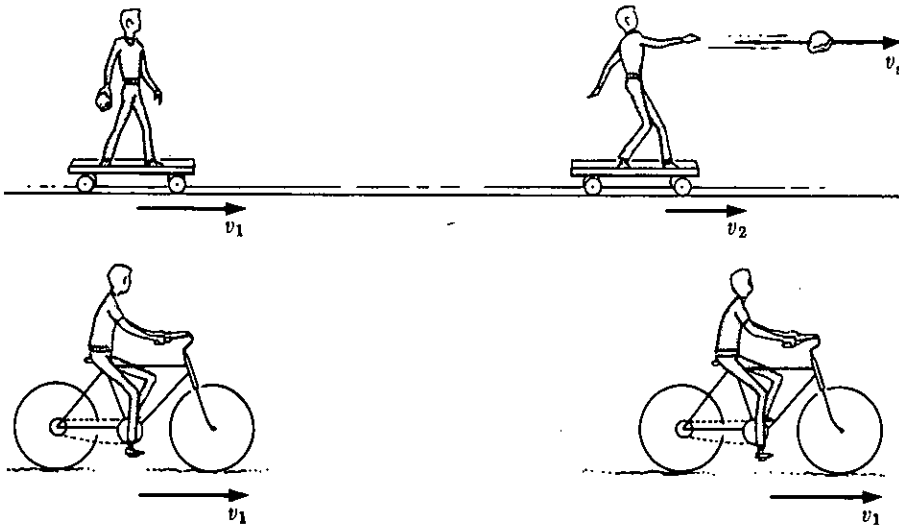
فرع اختياري : تابع قياساتك ليّنادل (جمع بندول) من كتل وأطوال مختلفة . كيف تُعرّز النتائج الإضافية إجابتك لسؤال الفرع ٣ من هذه المسألة ؟

م ٢,٥ لقد وُجدَ بالتجربة أنّ أيّ قمر أرضي ذي ارتفاع منخفض له دورة تناهز ٩٠ د ، بغضّ النظر عن كتلته . (١) أكتب قائمة بالمتغيرات التي من المعقول أنّ تعتمد عليها دورة القمر ، وبيّن أنّ اثتلافات الوحيدة من هذه المتغيرات التي لها بُعد الزمن هي بالفعل مستقلة عن الكتلة . (٢) اشرح لماذا لا يستطيع تحليل الأبعاد وحده أن يكشف النقاب عما إذا كانت دورة القمر تزداد أو تناقص كلما ازدادت مسافته من الأرض . (معلومات مُساعدة : يمكن كتابة القوة المؤثرة F على قمر كتلته m كالآتي : $F = mgR^2/r^2$ ، حيث g تسارع الجاذبية على سطح الأرض ، R نصف قطر الأرض ، و r مسافة القمر من مركز الأرض .)

تعريف الارتداد للكتلة

م ٢,٦ رجل منطلق على حافلة مسطحة صغيرة بسرعة $v_1 = ٢,٠$ م / ث ، يقذف حجراً وزنه ٢ باوند إلى الأمام بسرعة $v_2 = ١٨$ م / ث بالنسبة إلى سطح الأرض (أنظر شكل ٢,٦ أدناه) ؛ فيبطئ هذا الفعل الحافلة المسطحة إلى سرعة $v_2 = ١,٩$ م / ث . فكم كانت الكتلة الكلية الأصلية للنظام (الحافلة مع الرجل مع الحجر) ؟ (تلميح : إعتبر الحادثة من وجهة نظر راكب دراجة cyclist يَعدُّ السَّيرَ بسرعة ثابتة مقدارها v_1 .)

م ٢,٧ رواد فضاء على متن سفينة فضائية منجرفة على غير هدى في الفضاء السحيق يودّون قياس كتلة مركبتهم ، بما فيها ركبائها . ويملكون على متن السفينة بضعة أجسام كتلتها معلومة ويمكن التخلّص منها بسهولة disposable ، بالإضافة إلى وحدة رادار (كاشوف) radar يمكنهم من قياس سرعتهم



شكل ٢,٦ : مسألة ٢,٦ .

نسبةً إلى أيّ جسم قريب ؛ إلا أنهم لا يملكون أية وسيلة لقياس سرعتهم المطلقة absolute speed ولقياس التّأرجح . صِفْ بدقّة إجراءً عمليّاً يستطيعون بموجبه القيام بقياس الكتلة المرغوب فيها .

م ٢,٨ مواطن معيّن يتقيّد بالقانون في كلّ شيء إلا من حيث أنّه يسوق سيارته على الدّوام بسرعة ١٠ ميل / س فوق أيّة سرعة قصوى يُجيزها القانون . وعلى ذلك ، فإنّه يمكن كتابة الطّاقة الحركيّة لسيارته على الصّورة

$$K = K_L + \Delta K,$$

حيث K_L هي الطّاقة الحركيّة التي كان من الممكن أن تكون للسيارة لو أنّه ساقها بالسرعة القصوى .
(١) أوجدْ صيغة formula جبريّة للكميّة ΔK بدلالة السرعة القصوى v_L والسرعة الزائدة Δv .
(٢) أرسم رسماً بيانيّاً تخطيطيّاً للكميّة ΔK ضدّ v_L ، حيث Δv ثابتة .
فزع اختياريّ : هل تنطوي مزاولة السّوافة بسرعة ١٠ ميل / س فوق السرعة القصوى على أخطار أعظم للسرّعات المنخفضة أم العالية ؟ لماذا ؟

م ٢,٩ (١) باستعمال ثابت بلانك h ، وسرعة الضّوء c ، وكتلة البروتون m_p فحسب ، كَوْنْ كمّيّاتٍ بالأبعاد التّالية : (أ) طول ؛ (ب) زمن ؛ و (ج) طاقة . (٢) إحسب هذه الكمّيّات الثلاث بالوحدات (أ) فرّ ؛ (ب) ث ؛ و (ج) ء ف .

م ٢,١٠ يَكُونُ بُعْدُ ثابت بلانك h ، بدلالة الكتلة والطّول والزّمن ، ml^2/t (أي [كتلة] × [طول]^٢ / [زمن]) ؛ بينما يكون بُعْدُ سرعة الضّوء c : l/t . (١) اعتبّر نظام قياس مبنياً على أساس h و c ووحدّة كتلة m_0 . بيّنْ أنّ أيّة وحدّة يمكن التعبير عنها كائناً من وحدات الكتلة والطّول والزّمن بمقدورنا أن نُعبّر عنها أيضاً كائناً من الوحدات h و c و m_0 . (٢) أعدْ هذا البرهان لنظام يرتكز على h و c ووحدّة طول l_0 . (٣) هل ستكون وحدّة زمن t_0 ملائمة كوحدة طبيعيّة نالئة كما تنضمّ للوحدتين h و c كأساس للقياس ؟



٣. الجسيمات الأولية

Elementary Particles

في العقود الأخيرة ، أفضت عملية الجس التنازلي downward probing ، التي جرت في الفيزياء طيلة القرون القليلة الماضية ، إلى دنيا الجسيمات الأولية . والحقيقة أنه لا يوجد عالم يسلم بأن سائر الجسيمات التي نعرفها الآن هي أولية حقاً ؛ بيد أنها تُدعى جسيمات أولية لعدم وجود كلمة أفضل ، وعلى الأخص لعدم توفر معرفة أعمق عن طبقة أساسية أدنى lower substratum من المادة . والجهد المبذول لإدراك كنه هذه الجسيمات — أي لربطها معاً بطريقة أو بأخرى من خلال مفاهيم أعمق وأبسط — يُشغلُ انتباه العديد من العلماء في طول العالم وعرضه .

٣،١ على مشارف العالم دون المجهرى The Submicroscopic Frontier

لماذا نقوم بفحص الجسيمات الأولية في مثل هذه المرحلة المبكرة من معايشتنا لعلم الفيزياء ؟ ... أحد الأسباب هو أننا نود رؤية الفيزياء في المعمعة على أحد تخوم البحث العلمي . وهذا يمدنا حالياً بنقطة إسناد في الوقت الذي نطور فيه نظريات الفيزياء الكبرى ، وفقاً للترتيب التاريخي على وجه التقريب ، في الأجزاء اللاحقة من هذا الكتاب . وهناك أيضاً الحقيقة الظاهرية التناقض paradoxical fact حول الجسيمات : أن كثيراً من خواصها بسيط ويمكن أن يدركه حتى أولئك الذين لا يتمتعون بأية خلفية علمية على الإطلاق ، رغم أن اكتشافها قد ارتكز على سائر التطورات الآتية في الفيزياء . وبطبيعة الحال ، فإن بعض خواص الجسيمات ، لاسيما الطريقة التي تتفاعل بها مع بعضها البعض ، يقتضي فهمها خلفية فيزيائية شاملة نوعاً . وسنفرد لِسِمَاتِ الجسيمات هذه مواضع مناسبة في أبواب لاحقة .

للجسيمات خواص بسيطة عديدة ، بالرغم من غرابتها والتحدّي الذي تشكّله

الجسيمات هي العناصر البنّويّة structural للمادة برمتها

ولا ريب في أن تفكير العالم الحديث ، سواء أكان أحياناً أم كيميائياً أم فيزيائياً أم فلكياً ، موجه نحو العالم المجهرى ؛ إذ أنه يتصور الكون المترامي الأطراف وكأنه مركّب من وحدات أصغر فأصغر ، نزولاً حتى الجسيمات الأولية ، ويوماً ما ، ربّما قريباً ، حتى وحدة

أعمق . كما أنه يتصور الأحداث والظواهر وكأنها تنجم عن نواميس تُحرز أبسط صيغة لها في نهاية المطاف في دنيا الصَّغير جداً . فإذا كانت الفيزياء الأرسططاليسية [°] Aristotelian علم الأسباب النهائية (أو الغائية) [°] ، فإن الفيزياء الحديثة إن هي إلا علم الأسباب المجهرية . « فالتفسير » في العلوم الفيزيائية هو على الأغلب وصف شيء أكبر بدلالة شيء أصغر . وباعتبارنا الجسيمات الأولية في البدء ، فإننا نحن نفحص قاعدة الفيزياء ومشارفها العليا على حد سواء .

توضّح الجسيمات قوانين عديدة
بصورة مفيدة

والجسيمات الأولية أجسام مفيدة لتوضيح سمات عدّة للفيزياء . فبساطتها بمحد ذاتها تعني أنها أحسن تأهيلاً للتدليل على مبادئ العلم الأساسية من الأجسام العسيرة المأخذ والأعقد التي نصادفها في حياتنا اليومية . وسنرى في الباب الرابع كيف تجلو الجسيمات الأولية قوانين الحفظ البالغة الأهمية ؛ كما وأنا ، خلال ما تبقى من هذا الكتاب ، سنجد هذه الجسيمات ملائمة لجلاء بعض القسّمات لكل من نظريات الفيزياء العظمى .

ونحن نعرف الساعة الشيء الكثير عن هذه الجسيمات ، وإن لم يكن كافياً تماماً ؛ إذ أنها لا تنضوي تحت لواء نظرية متكاملة . فاعتبارنا هذه الجسيمات في البدء سيؤكد الطبيعة الاستقصائية والمؤقّعة للعلم ، على نحو لم يكن بمقدور العلم في القرنين الثامن عشر والتاسع عشر أن يفلح فيه إلى نفس الدرجة . فمع الجسيمات ، فإن المعلوم والمجهول كيندوان مشيرين على حد سواء .

وبالنسبة للعالم ، تزود الجسيمات الأولية التحدّي الأعظم في الفيزياء الحديثة . أمّا بالنسبة للطالب ، فهي تمدّه بتبصر عام عن نظرة العالم إلى الكون . ويحسن بنا أن نتذكّر أنّ أكثر النقاط الفة لتأثير العلوم الفيزيائية على الإنسان — مثل شبكة اتصالات الأقمار الصناعية satellite communications ، وموادّ التنظيف detergents ، والقنابل ، والأدوات المنزلية — إنما تكون مجرد خطّ جانبي متفرّع عن التيار الرئيسي للتقدّم العلمي . فتحوم العلم الحقيقية تقبع أبعد بكثير عن حياتنا اليومية ؛ وأحد هذه التخوم هو التخّم دون المجهرى الذي تعمّره الجسيمات .

٣،٢ الجسيمات الأولى The Early Particles

يتكوّن الإنسان والأجسام المألوفة في هذا العالم من ذرات وجزيئات . وفي بواكير هذا

° نسبة إلى العالم والينطيق (العالم بالمنطق) والفيلسوف الإغريقي العظيم أرسطو طاليس Aristotle (٣٨٤-٣٢٢ ق. م.) . وهو أشهر من أن يُعرف .

(المشرف)

°° أنظر سؤال ٣،٤ في ختام هذا الباب .

(المشرف)

نشأة : الجسيمات اليوم والذرات
عام ١٩٠٠

القرن ، كان معلوماً أنَّ الذرات موجودة ؛ لكن . مثلها مثل الجسيمات الأولية اليوم ، فإنَّ بنية الذرة وعلاقة ذرة بأخرى كانت ألغازاً . ولقد كان معلوماً أنَّ الذرة هي أصغر وحدة لعنصر مثل الهيدروجين أو الأكسجين أو الصوديوم أو البورانيوم ؛ وأنَّ هنالك ثمانين صنفاً مختلفاً أو هكذا من الذرات (بينما نعرف اليوم ما يزيدُ على المئة) ؛ وأنَّ الذرات قاطبةً لها نفس الحجم تقريباً ، وهو من الصَّغر بحيث أنَّ مئة مليون ذرة مصفوفة جنباً إلى جنب قد تُكوِّن خطأ لا يزيد طوله على بوصة واحدة . كذلك كان معلوماً أنَّ مجموعاتٍ مؤلفةً من أصنافٍ مختلفةٍ من الذرات تستطيع أنَّ تلحمَ معاً لتكوِّنَ نباتٍ بالغة الصَّغر تدعى جزيئات ، وهذه تُؤلَّفُ بدورها اللَّبناتِ البنائية الأساسية للتشكيلة الهائلة والرائعة من المواد التي نصادفها في الكون .

□ الإلكترون The Electron

في العُقد الأول من القرن العشرين ، توالى الاكتشافات بغزارة ، مفضيةً بذلك إلى خطوة عملاقة ، هبوطاً نحو دُنيا الجسيمات دون الذرية . وكان الإلكترون ، أول الجسيمات المعروفة ، قد اكتشفه ج . ج . ثومسون J.J. Thomson في إنجلترا عام ١٨٩٧ ؛ إذ بيَّن أنَّ « أشعة المهبط cathode rays » ، الناجمة عن فُلطِيَّة voltage عالية (أيَّ جَهْد كهربائي مرتفع) في أنبوب مفرَّغ evacuated ، يمكن أن تنحرف كهربائياً ومغناطيسياً على حدٍّ سواء . وكان أبسط تأويل لهذه الأشعة أنَّها حزمة أشعة مؤلفة من جسيمات متناهية عالية السرعة وتحمل شحنة كهربائية سالبة (أي نفس إشارة الشحنة على مُنْطاد مطاطيٍّ مُكهرب) . وكون كتلة كلٍّ من هذه الجسيمات أصغر بكثيرٍ من كتلة ذرة مفردة إنَّها قد تأكَّد من سهولة انحرافها . كذلك كون حجم كلٍّ منها أصغر كثيراً من حجم الذرة إنَّها قد أفصحت عنه قُدرة هذه الجسيمات على التغلغل في الغازات . وقد أدرك ثومسون ، كما لم يدرك أولئك الذين درسوا أشعة المهبط من قبله ، أنَّه كان يتعامل مع أجسام دون ذرية بحق وحقيق ، مع أنَّه كان لا يزال بعيداً عن عزل جسيم مستقل بذاته .

اكتشف الإلكترون بدراسة أشعة المهبط

وما إنَّ حُدِدتْ هوية الإلكترون ، حتَّى أمسى موضعُ اشتباه قويٍّ لأنَّ يكون جُسيماً تحويه الذرة . وكأحد مكونات الذرات المشتركة ، فقد كان بمثابة حلقة الوصل المحددة الأولى بين الذرات المختلفة . كما صيغت حلقة وصلٍ هامة أخرى عام ١٩٠٢ ، حين اقترح إرنست رذرفورد Rutherford Ernest وفريدريك سودي Frederick Soddy أنَّ ذرة مشعة radioactive (أيَّ قادرة على بثِّ إشعاعٍ قويٍّ تلقائياً) تستطيع أن تُحوَّلَ transmute نفسها إلى نوعٍ مختلف كلياً من الذرات . وقد أوحى هذا التحويلُ بقوةً بأنَّ الذرات ، بدلاً من أن تكون وحداتٍ مستقلةً وغير قابلة للقسمة ، فإنَّها يجب أن تكون نباتاتٍ مشيدةً من بضع لبناتٍ بنائيةٍ مشتركةٍ أكثر أوليةً .

حلقات وصل بين الذرات

□ النواة الذرية The Atomic Nucleus

جسيمات ألفا

وَبُعِيدَ ذَلِكَ ، اسْتُعْمِلَتْ جُسَيْمَاتُ الْآلِفَا alpha particles المنبعثة من ذرات مشعة بسرعة عالية ، كأول قذائف projectiles لِقَصْفِ الذَّراتِ . (إِلَّا أَنَّ هَذِهِ «الرَّصَاصَاتِ» الذَّرية ، الَّتِي تَزُودُنَا بِهَا الطَّبِيعَةُ بِجَانًا ، لَا تَمْلِكُ طَاقَةً كَافِيَةً لِلْأَغْرَاضِ الْحَدِيثَةِ ؛ لِذَا فَقَدْ اسْتُبْدِلَتْ مِنْذُ ذَلِكَ الْحَيْنِ بِجُسَيْمَاتِ ذَاتِ طَاقَةٍ أَكْبَرَ أُنتِجَتْهَا الْمُسَارِعَاتُ النَّوَوِيَّةُ .) وَإِحْدَى نَتَائِجِ عَمَلِيَّاتِ الْقَصْفِ الْأُولَى لِلذَّراتِ كَانَتْ الْحَقِيقَةُ الْمَذْهَلَةُ أَنَّ دَاخِلَ هَذِهِ الذَّراتِ إِنِّ هُوَ إِلَّا فَرَاغٌ عَلَى الْأَغْلَبِ . وَمَا إِنِّ حُلَّ عَامِ ١٩١١ ، حَتَّى كَانَ الْعَالِمُ التَّجْرِبِيُّ إِرْنِسْتُ رِذَرْفُورد قد اكتشف أَنَّ الذَّرةَ تَحْتَوِي عَلَى لُبِّابٍ ثَقِيلٍ مَشْحُونٍ بِشِحنةٍ مُوجِبَةٍ - النَّوَاةِ - وَأَصْغَرَ مِنَ الذَّرةِ كَكُلِّ بَعِشْرَةِ آلَافٍ مَرَّةً عَلَى الْأَقَلِّ ، وَأَنَّ مَا تَبَقِيَ مِنَ الْفَرَاغِ يَشْغَلُهُ بِضْعَةُ الْإِلِكْتُرُونَاتِ خَفِيفَةِ الْوِزْنِ وَسَالِبَةِ الشَّحْنَةِ . وَبَعْدَ ذَلِكَ بِعَآمِينَ ، اُنْتَحَفْنَا الْعَالِمُ النَّظَرِيُّ نِيلْزُ بِسُور Niels Bohr بوصفٍ رِيَاضِيٍّ نَاجِعٍ لِحَرَكَةِ الْإِلِكْتُرُونَاتِ فِي الذَّرةِ . وَبِالرَّغْمِ مِنْ تَعْدِيلَاتٍ لَاحِقَةٍ فِي التَّفَاصِيلِ ° ، فَإِنَّ أَرْكَانَ هَذَا الْوَصْفِ مَا بَرَحَتْ تَشْكُلُ حَتَّى الْوَقْتِ الْحَاضِرِ صُورَتَنَا عَنِ الْبُنْيَةِ الذَّريةِ . فَالْإِلِكْتُرُونَاتِ تَدُورُ حَوْلَ النَّوَاةِ فِي مَدَارَاتٍ مُكَمَّاةٍ . وَحِجْمُ الذَّرةِ يُحَدَّدُ بِوَاسِطَةِ نِصْفِ قَطْرِ الْمَدَارَاتِ الْخَارِجَةِ .

ذرة رذرفورد - بور

□ البروتون والنيوترون The Proton and the Neutron

لَقَدْ أُطْلِقَ عَلَى نَوَاةِ أَحْفَ ذَرَّةِ ، الْهَيْدُرُوجِينِ ، اسْمُ الْبَرُوتُونِ ؛ وَمِنْ ثَمَّ انضَمَّتْ إِلَى الْإِلِكْتُرُونِ لَتَزِيدَ قَائِمَةً الْجُسَيْمَاتِ الْأُولِيَّةِ إِلَى اثْنَيْنِ . أَمَّا النَّوَى الْأَثْقَلُ فَلَقَدْ اعْتُقِدَ أَنَّهَا مَكُونَةٌ مِنْ عِدَدٍ مِنَ الْبَرُوتُونَاتِ وَالْإِلِكْتُرُونَاتِ الْمُرَاصَّةِ مَعًا بِإِحْكَامٍ ° . وَلَمْ تَكُنْ تَفَاصِيلُ هَذِهِ الصُّورَةِ لِلْبُنْيَةِ النَّوَوِيَّةِ وَاضِحَةً أَبَدًا ؛ بَلْ لَقَدْ ضُرِبَ عَنْهَا صَفْحًا - فِي الْحَقِيقَةِ - عَامَ ١٩٣٢ . وَمَهْمَا يَكُنْ مِنَ أَمْرِ ، فَقَدْ كَانَتْ فِكْرَةً جَذَابَةً إِلَى أَبْعَدِ الْحُدُودِ أَنَّ يَكُونُ هُنَالِكَ جُسَيْمَانِ أُسَاسِيَانِ فَقَطْ - الْإِلِكْتُرُونِ السَّالِبِ الشَّحْنَةِ وَالْبَرُوتُونِ الْمُوْجِبِ الشَّحْنَةِ - تَتَكَوَّنُ مِنْهَا مَادَّةُ الْكُونِ بِرُمَّتِهَا . وَكَانَتْ السَّمَةُ الْمَحْبِرَّةُ الْوَحِيدَةُ (وَهَذِهِ أُحْجِيَّةٌ لَمْ يَتِمَّ حُلُّهَا بَعْدَ) أَنَّهُ لِمَاذَا كَانَ لَزَامًا عَلَى الْبَرُوتُونِ أَنَّ

النظرة القديمة : نوعي النوى
بروتونات والإلكترونات

° أنظر المجلد الثالث من هذا الكتاب .

(المشرف)

° ° هَذِهِ تَرْجُمَةٌ لِلتَّعْبِيرِ packed closely (أَوْ closely packed) . وَثَمَّةُ كَلِمَةٍ عَرَبِيَّةٍ فِي غَايَةِ الدَّقَّةِ تَنَاسَبَ هَذَا الْمَقَامِ ، أَلَا وَهِيَ كَلِمَةُ «مَحْشُوكَةٌ» ، مِنْ «الْحَشْكِ أَوْ الْحُشُوكِ» ، مُصْدَرٌ «حَشَكٌ» بِمَعْنَى احْتِشَدَ وَتَجَمَّعَ . وَقَدْ عَثَرْنَا عَلَيْهَا مُسْتَعْمَلَةً بِهَذَا الْمَدْلُولِ فِي مَقَالَةٍ عَنِ الْبَرُوتُونِ فِي مَجَلَّةِ الْمُقْتَطَفِ ، الْخِزْرُ الْخَامِسُ مِنَ الْمَجْلَدِ الثَّانِي ، ١ أَيْار (مَآيُو) ١٩٣٢ ، ص ٥٠٣ . وَهِيَ مَقَالَةٌ غَيْرُ مَوْقَعَةٍ ، وَلَعَلَّهَا لِلدَّكْتُورِ فُؤَادِ صَرْوَفِ الَّذِي كَانَ يَحْرَرُهَا يَوْمَئِذٍ .

(المشرف)

يكون أثقل من الإلكترون إلى تلك الدرجة . على أية حال ، ما كان لوضع الجسيمين البسيط المريح هذا ليستمر .

فلقد حدثت بضعة أشياء في أوائل الثلاثينات مما بدأ هذا التزايد المقلق في عدد الجسيمات الأولية المعروفة ، والذي ما فتئ مستمراً حتى الوقت الراهن : إذ اكتُشف جسيم جديد ، النيوترون ، ووُجد أن له نفس كتلة البروتون تقريباً لكنه لا يحمل أية شحنة كهربائية . وقد احتُفي باكتشاف النيوترون أبداً احتفاءً ، لأنه كان بالضبط الجسيم اللازم كيما ينضم للبروتون لتكوين النوى الذرية . وكانت الصورة التي تُبَيَّن على الفور للنواة ، والتي ما زالت مقبولة ، مكوَّنة من البروتونات والنيوترونات المقيَّدة معاً بإحكام بواسطة قوَّة شديدة جديدة ، تُدعى ببساطة القوَّة النوويَّة nuclear force . فعلى سبيل المثال ، توجد لنظير اليورانيوم - ٢٣٥ ^{235}U ، أشهر نظير لليورانيوم ، نواة مؤلفة من ٩٢ بروتوناً و ١٤٣ نيوترونًا . أمَّا نواة الهيليوم الأبسط بكثير (وهي نفس جسيم ألفا) ، فهي تحوي نيوترونين وبروتونين .

النظرة الجديدة : تحوي النوى
بروتونات ونيوترونات

□ البوزيترون The Positron

وفي نفس الوقت تقريباً ، أفصح جسيم رابع عن وجوده بواسطة المسار الذي خلفه في غرفة غيمَّة cloud chamber ، عُرضت لإشعاع كونيَّ cosmic radiation في باسادينا Pasadena بولاية كاليفورنيا California الأمريكية . وقد وُجد أن هذا الجسيم الجديد ، البوزيترون ، خفيف كالإلكترون لكنه يحمل شحنة موجبة لا سالبة . وبعض مسارات البوزيترون مبينة في شكل ٣,١ . ومثله مثل النيوترون ، فلقد أهلك البوزيترون في وقت موَّاتٍ ؛ إذ أنه قبل ذلك بسنوات معدودة ، عام ١٩٢٨ ، كان بول ديراك Paul Dirac قد صاغ نظرية جديدة عن الإلكترون نجحت ألياً نجاح في تحليل التفاصيل الدقيقة للبنية الذرية . لكن بدا وكأنَّ خلافاً كان موجوداً في نظرية ديراك ، حيث أنها تنبأت بوجود جسيم شقيق للإلكترون ، مثله في كلِّ النواحي ما خلا إشارة شحنته الكهربائية . وهكذا ، فإنَّ شقْباً slot خاصاً كان جاهزاً في بنية الفيزياء النظرية بانتظار البوزيترون ، حين اكتشفه كارل أندرسون Carl Anderson عام ١٩٣٢ . (هذا ، وقد تنبأت نظرية ديراك أيضاً بوجود شقيق سالب الشحنة للبروتون ، يُدعى ضديَّد البروتون antiproton ؛ إلا أن سنواتٍ عديدةً كان عليها أن تنصرم قبل أن تتمَّ رؤيته : إذ أن إقامة بيفاترون (مسارع إلكترونات تأثيري) Bevatron ذي طاقة تبلغ ستة بلايين إلكترون فولت في بيركلي Berkeley ، كاليفورنيا ، جعل بالإمكان إنتاج ضديَّدات البروتونات ، التي شوهِدَت هناك - أولَ ما شوهِدَت - عام ١٩٥٥ .)

البوزيترون هو
ضديَّدُ إلكترون

• لأسباب تاريخية ، تُدعى نواة الهيليوم «جسيم ألفا» مع أننا نعرف الآن أنها مركَّبة من جسيمات أخرى .

كان تقدّم النظرية الفيزيائية في أواخر العشرينات مسؤولاً عن «إعادة إكتشاف» جسيم قديم : الفوتون . في عام ١٩٠٥ ، أي نفس السنة التي نشر فيها بحثه الهام عن النسبية ، كان أينشتاين قد اقترح أن الإشعاع الكهرومغناطيسي «دقيق» corpuscular ، إذ أن طاقته تُقلّ بحُزْم packets أو كمّات " quanta . ومع أن حُزْم الطاقة هذه ، التي تدعى الآن فوتونات ، تتصرّف في بعض النواحي مثل الجسيمات ، فهي مختلفة كلّ الاختلاف عن الجسيمات المادية العادية ؛ حيث أنها تحمل طاقة لكنّها بدون كتلة . كما أنها لا يمكن أن تُسارع أو تُباطأ ؛ بل تنطلق دائماً بنفس السرعة اللامتغيرة (والهائلة) . كذلك بمقدورها أن تتوالّد وأن تقضي (أي أن تنبعث وأن تُمتص) ؛ بينما تبقى الجسيمات العادية موجودة إلى الأبد — أو هكذا كان مسلماً به آنذاك . وعلى نقيض الجسيمات المادية ، فلم يكن بالإمكان عزّل الفوتون في نقطة معينة ما عدا لحظة ولادته أو موته ؛ وبخلاف ذلك فهو ينتشر في طول المكان وعرضه . . . لكلّ هذه الأسباب ، فإنّ الفوتون لم يُقرن بالإلكترون والبروتون كجسيم أولي بحق وحقيق .

جسيم بدون كتلة

بيد أن نظرية ميكانيكا الكم ، التي اكتشفت عام ١٩٢٥ وطوّرت على امتداد العقْد التالي ، غيّرت هذه النظرة للفوتون ؛ إذ بيّنت أن الفارق ، من وجهة نظر جوهريّة ، بين فوتون وجسيم ماديّ لم يكن من الكبر كما كان يُظنّ . فقد صادف أن الجسيم له كتلة ؛ بينما لم يكن للفوتون ذلك . وكان بالإمكان إدراك سائر الفوارق الأخرى على أنها ناجمة بكلّ بساطة عن هذا الاختلاف الوحيد . وعلى الأخصّ ، فقد أوحّت نظرية الكمّ بأنّه لا بُدّ وأن يكون بالإمكان خلق الجسيمات المادية ومحقّقها . فبعد كلّ شيء ، إذن ، ظهر الفوتون بأنّه ليس مميّزاً إلى تلك الدرجة ؛ وهكذا انضمّ إلى قائمة الجسيمات الأولية .

□ إضمحلال بيتا والنيوترينو Beta Decay and the Neutrino

بعيد ذلك ، بيّنت نظرية طوّرها إنريكو فيرمي Enrico Fermi أن الإنسان في واقع الأمر كان يشهد خلق الجسيمات المادية منذ مدّة ما . فنذ عهد الدراسات الأولى لظاهرة النشاط الإشعاعيّ radioactivity في مستهلّ هذا القرن ، كان العلماء يعلمون بأنّ بعض الذرّات المشعّة تُطلقُ إلكترونات ذات سرعة عالية ، دُعيت ، في هذا التجلّي الخاصّ ، جسيمات بيتا .

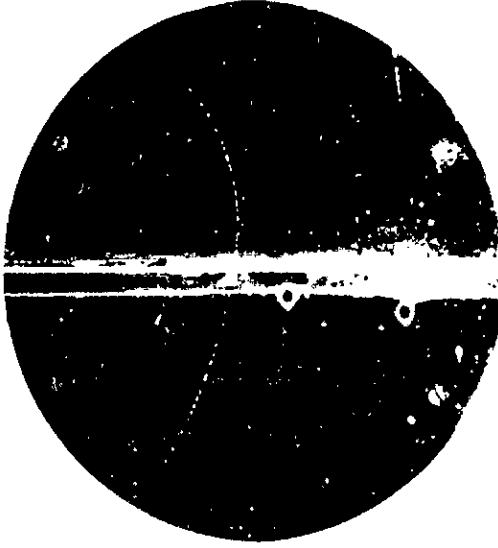
جسيمات بيتا هي إلكترونات

• نسبة إلى دقيقة (وجمعها دقائق) ؛ أي أصغر جسيم .

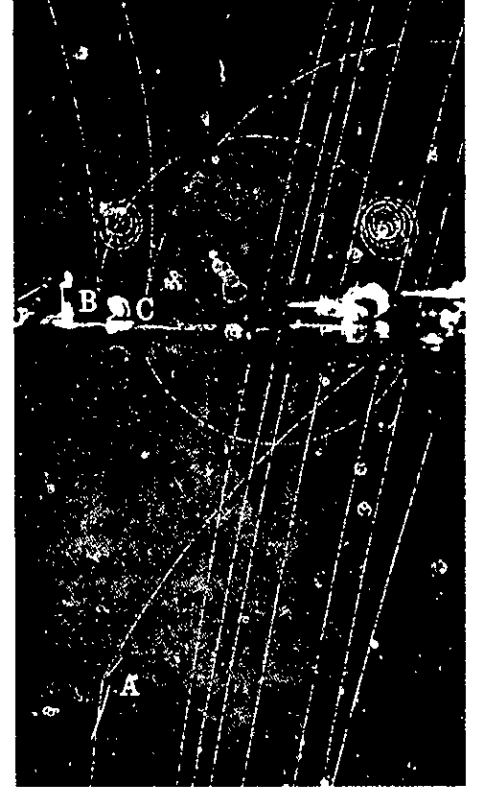
(المشرف)

•• جمع كمّ أو كمّة quantum .

(المشرف)



(أ)



(ب)

(أ) صورة كارل أندريسون الفوتوغرافية التي استُخدمت لتحديد هوية البوزيترون لأول مرة عام ١٩٣٢. فبعد دخوله غرفة الغيمة في أسفل الصورة ، ينحرف البوزيترون بواسطة قوة مغناطيسية ليسلك مساراً منحنياً. وبعد تباطؤه في اللوح المعدني المركزي ، يتحرف بقوة أكبر. هذا ، وإن مسار الإلكترون كان سينحني في الاتجاه المضاد.

(ب) تبين صورة غرفة الفقاعات هذه الأخذت عهداً مسارات بوزيترونات وإلكترونات معاً (فضلاً عن جسيمات أخرى). فإن فوتونات ذات طاقة عالية (أي أشعة غاما gamma rays) ، منبعثة من النقطة A ، تخلق أزواج إلكترون - بوزيترون عند النقطتين B و C. أما البوزيترونات فتسلك مساراً قوسياً إلى أعلى نحو اليسار ، بينما تنحني مسارات الإلكترونات بعيداً نحو اليمين.

[(أ) المصدر : كارل د. أندريسون ، معهد كاليفورنيا للتقنية California Institute of Technology]

شكل ٣،١ : مسارات بوزيترونات .

(ب) مختبر لورنس للإشعاع Lawrence Radiation Laboratory ، جامعة كاليفورنيا ، بيركلي .

وقد عُرِفَ التَّحْوِيلُ الإشعاعيُّ radioactive transformation الذي أُصدرَ هذه الإلكترونات باضمحلال بيتا ؛ غيرَ أنَّ فحواه الثوريَّ لم يُشَبَّهْ به لسنين عديدة . فَبِمَا أَنَّهُ كَانَ مَعْرُوفاً أَنَّ الذَّرَاتِ تُحْوِي إلكترونات ، لَمْ يَبْدُ عَجِيباً أَنَّ تُطْلَقَ الذَّرَاتُ إلكتروناتٍ في بعض الأحيان .

وحتى بَعْدَ اكتشاف النُّوَّة الذرية عام ١٩١١ ، حين أَضْحَى جَلِيّاً أَنَّ إلكترونات بيتا يجب أَنْ تُنبَثَقَ عن النُّوَّة ، فَإِنَّ مَعْرَى اضمحلال بيتا لَمْ يُقَدَّرْ حقَّ التقدير . فبِكُلِّ بساطة ، افترض وجودُ الإلكترونات داخل النُّوَّة بالإضافة إلى الفراغ المحيط بالنُّوَّة . إلا أَنَّهُ عندما أَدَّى أَخيراً اكتشافُ النيوترون عام ١٩٣٢ ، مضافاً إليه صعوباتُ نظرية متباينة ، إلى إقصاء الإلكترونات عن نطاق النُّوَّة ، أَصْبَحَ اضمحلال بيتا مُحْجِراً . لكنَّ فيرمي اقترح عام ١٩٣٤ أَنَّهُ في لحظة التَّحْوِيلِ الإشعاعيِّ ، فَإِنَّ إلكتروناتاً يَبْزَغُ للوجود بغتةً في النُّوَّة ويرحل بسرعة ، لينبثقَ كَجُسيمِ

المادة يمكن خلقها

بيتا ، أي ، بكلمة مُقْتَضَبَة ، فإن اضمحلال بيتا ، الذي غدا معروفاً منذ سنين عديدة ، يُمَثَّلُ خَلْقَ جُسَيْمَاتٍ مَادِيَّةٍ . وبالطَّبع ، كان اقترَاحُ فيرمي أكثر من مجرد افتراضٍ كلامي . فبصياغته بلغةٍ رياضيَّةٍ ضمن إطار نظريَّة الكم ، فإنه أعطى تفسيراً مقبولاً لاضمحلال بيتا . كذلك تنبأ - فيما تنبأ به - بإمكانية إفضاء تحويل بيتا ، في حالة بعض الذرات ، إلى بوزيترونات بدلاً من الإلكترونات ؛ وقد تمَّ التَّحَقُّقُ من ذلك للتو بواسطة موادَّ مشعَّة منتجة صناعياً . وبتعديل بسيط فقط ، لا تزال نظريَّة فيرمي تعطي تفسيراً كافياً لكلِّ ظواهر اضمحلال بيتا .

وكما يحدث غالباً مع النظريات الناجحة في العلوم الفيزيائية ، فإن ثمة ربحاً غير مُتَوَقَّعٍ ؛ إذ تقوم النظرية بما يُنتَظَرُ منها ، ومن ثمَّ أكثر بقليل . فقد فسَّرت نظرية ديراك للإلكترون على نحو رائع تفاصيل البنية الذرية ، ومن ثمَّ تنبأت أيضاً ، دون أيِّ إنذار مُسَبِّقٍ ، بوجود البوزيترون . وعلى نفس الشاكلة ، فقد علَّلت نظرية فيرمي اضمحلال بيتا ، و«كعلاوة» تنبأت بوجود جسيم جديد عجيب ، النيوتريينو . (علماً بأنَّ أولَّ تنبؤ بوجود النيوتريينو كان قد صدر - في الواقع - عن فولفغانغ باولي Wolfgang Pauli قبل عمل فيرمي ببضع سنين . وبعبارة أدق ، فقد قدَّم فيرمي إطاراً رياضياً محدداً لِيُؤَيِّدَ اقترَاح باولي التأملي .) فموجب نظرية فيرمي ، فإنَّ جسيماً لا يحمل شحنة كهربائية وذات كتلة ضئيلة أو معدومة (يُعْتَقَدُ الساعة أنه ، مثل الفوتون ، معدوم الكتلة تماماً) يُخْلَقُ أيضاً في لحظة اضمحلال بيتا ويربح النواة مع الإلكترون . وهذا الجسيم ، أكثر الجسيمات مراوغة ، لا يُخْلَفُ أيُّ أثر في غرفة فقاقيع ، ويعبر أَمْبالاً من المادَّة الصَّلْدَة كما لو لم يوجَد هناك شيء . ومع ذلك ، فلقد اقتضتِ النظرية أن يكون هذا عضواً جديداً في عائلة الجسيمات الأوليّة ، وبقيناً أن الفيزيائيين كانوا سيقلقون أيّما قلق لو لم يتمَّ الكشفُ أخيراً عن النيوتريينو . وسنسرِد في الباب السَّابع والعشرين قصَّة مشاهدته عام ١٩٥٦ واكتشاف صَنْفٍ ثانٍ من النيوتريينو في ١٩٦٢ .

النيوتريينو : جسيم آخر
بدون كتلة

فِيحُلُولٍ منتصفِ الثلاثينات ، إذن ، كان البروتون قد انضمَّ إليه الفوتون والنيوترون

« حَوْلَ آخرِ التجارب والآراء بهذا الصدد ، أنظر :

١ - ج . د . جاكسون : « الدِّينَامِيكا الكهربائيَّة الكلاسيكيَّة » ، الطَّبعة الثانية (وائلي ، نيويورك ، ١٩٧٥) :

J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, second edition (Wiley, New York, 1975).

بُند 1.2 ، ص ٩-٥ (بالإضافة إلى المصدرين المُتَبَيَّنَين في ص ٢٥) .

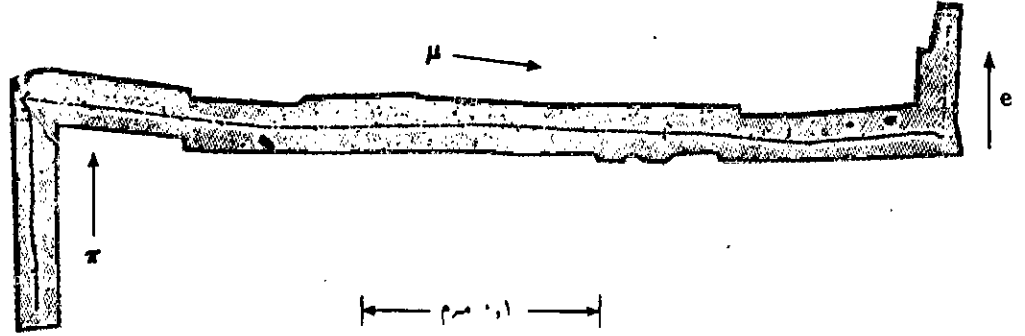
٢ - أ . س . غولدهابر وم . م . نيٲو : « كتلة الفوتون » :

A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, "The Mass of the Photon" ,

مَجَلَّة Scientific American ، مجلَّد ٢٣٤ (عدد ٥) ص ٨٦ (أيار ١٩٧٦) .

(المشرف)

والبوزيترون (أو مُضَدُّ الإلِكْترون antielectron) ؛ كما أنَّ النيوترينو ، رغم عدم مشاهدته مباشرة ، كان ضرورةً نظريَّةً وقد أُضيف بثقةٍ كبرى إلى قائمة الجسيمات . أضف إلى ذلك أنَّه كان هناك كلُّ مدعاةٍ للاعتقاد بوجود مُضَدَّات البروتونات و مُضَدَّات النيوترونات . كذلك كان قد افترض وجود الغرافيتون graviton ، وهو جسيم يُظنُّ أنه ينقلُ قوَّةَ الجاذبيَّة ؛ بيد أنَّ الأمل كان ضئيلاً آنذاك (كما هو الآن) لمشاهدته .



شكل ٣،٢ : مثال ميكرو على اضمحلال البيون إلى ميون . فبعد أن يسكن في مُستحلب فوتوغرافي photographic emulsion ، يضمحل البيون إلى ميون ونيوترينو غير مرئي . وعندما يبطي الميون ، فإنه يخلف أثراً ذا سُمك متزايد . وبعد إيقافه ، فإن الميون أيضاً يضمحل ، كما يدلُّ على ذلك أثر الإلكترون عالي السرعة على اليمين . (عن كتاب : س . ف . باول ، ب . هـ . فاولر ، ود . هـ . بيركنز : « دراسة الجسيمات الأولية بواسطة الطَّريقة الفوتوغرافية » [نيويورك : مطبعة بيرغامون المحدودة ، ١٩٥٩] ، ص ٢٤٥)

C.F. Powell, P.H. Fowler, and D.H. Perkins, *The Study of Elementary Particles by the Photographic Method* [New York : Pergamon Press, Inc., 1959] .)

٣،٣ البيون والميون The Pion and the Muon

قبل أن يقطع جُلُّ العلماء في سائر أرجاء المعمورة أبحاثهم الأساسيّة ليكرسوا مواهبهم لتقنيَّة الحرب ، تمَّ التنبؤ بوجود جسيمٍ إضافيٍّ كما اكتُشِفَ آخر . ففي قطعة المعية من العمل النظريِّ في اليابان عام ١٩٣٥ ، تنبأ هيديكي يوكاوا Hideki Yukawa بوجود الجسيم الذي ندعوه الآن بـاي ميزون pi meson أو بيون pion . ولأجل ذلك ، مُنِحَ جائزة نوبل — بعد أن تأكَّدت صحَّة تنبؤهِ . وقد بدأ يوكاوا نهجاً من التفكير والاستدلال حول ماهية القوى ، أضحى أحد الخطوات الجوهرية في عمليَّة الانتقال من طريقتنا « المألوفة » في تفحص الكون إلى النمط الجديد في تفحص العالم دون المجهرية .

فبعد اكتشاف ميكانيكا الكمّ بسنين معدودة ، وقُبِّلَ عمل يوكاوا ، طُوِّرت نظريَّة كمّ للقوى الكهربائيَّة والمغناطيسيَّة . وهذه النظريَّة ، التي كانت مسؤولةً عن النظرة الجديدة للفوتون كجسيمٍ أوليٍّ ، عَزَّت إلى الفوتون دَوَّرَ ناقلٍ للقوَّة . فالبروتون والإلكترون ، مثلاً ، اللذان يجذبان بعضهما البعض كهربائياً ، يتبادلان exchange فوتونات باستمرار ، إذ أنَّ كلَّ جسيمٍ مشحونٍ كهربائياً يَبْتَ ويمتصُّ فوتونات على الدوام ، والتبادل المتواصل هذا هو الذي يُنتجُ القوَّة . وقد

فكرة قوَّة تبادلية

تشابه : الفوتون في القوة الكهربائية
والبيون في القوة النووية

فَكَرُّ يوكاوا مَلِيًّا بِالْقُوَّةِ النوَوِيَّةِ الجَدِيدَةِ الجَبَّارَةِ الَّتِي تُؤَثِّرُ بَيْنَ النيوترونات والبروتونات لَتَقِيدَهَا مَعًا فِي النَّوَى ؛ ثُمَّ تَسْأَلُ : مَاذَا لَوْ أَنَّ هَذِهِ الْقُوَّةَ تَنْشَأُ أَيْضًا عَنْ تَبَادُلٍ بَيْنَ الجُسيمَاتِ النوَوِيَّةِ ؟ وَقَدْ بَرَهَنَ أَنَّ الشَّيْءَ الْمُتَبَادِّلَ لَا يُمْكِنُ أَنْ يَكُونَ فُوتُونًا أَوْ أَيَّ جُسيمٍ مَعْرُوفٍ آخَرَ . (وَسَنُفَسِّرُ فِي الْبَابِ الْخَامِسِ وَالْعَشْرِينَ مَنَظِقَ يوكاوا الَّذِي يَسْتَنْدُ إِلَى أَفْكَارٍ أُسَاسِيَّةٍ فِي نَظَرِيَةِ الْكَمِّ .) كَمَا أَنَّ الْجُسيمَ الْجَدِيدَ يَنْبَغِي أَنْ يَكُونَ ٢٠٠ إِلَى ٣٠٠ مَرَّةً أَثْقَلَ مِنَ الْإِلِكْتْرُونِ (لَكِنْ ٦ إِلَى ٩ مَرَّاتٍ أَخْفَ مِنْ الْبُرُوتُونِ) . وَقَدْ اخْتَمَ يوكاوا بَحْثَهُ عَلَى نَحْوِ مِثَالٍ نَوْعًا : « وَبِمَا أَنَّ مِثْلَ هَذَا الْكَمِّ ذِي الْكُتْلَةِ الْكَبِيرَةِ وَالشَّحْنَةِ الْمَوْجِبَةِ أَوْ السَّالِبَةِ لَمْ يُكْتَشَفْ قَطُّ بِالتَّجَرِبَةِ ، فَإِنَّ النِّظَرِيَّةَ أَعْلَاهُ تَبْدُو وَكَانَهَا عَلَى نَهْجِ خَاطِئِي . عَلَى أَيْتِهَ حَالٌ ، نَسْتَطِيعُ أَنْ نُبَيِّنَ أَنَّهُ ، فِي التَّحْوِيلِ النَّوَوِيِّ الْعَادِيِّ ، لَا يُمْكِنُ أَنْ يَنْبَعثَ مِثْلَ هَذَا الْكَمِّ فِي الْفَرَاغِ الْخَارِجِيِّ . » وَالْحَقِيقَةُ أَنَّ تَبَصُّرَهُ أَثْبَتَ أَنَّهُ كَامِلٌ دُونَ أَيْتِهَ شَائِبَةٌ ؛ إِذْ تَمَّ اكْتِشَافُ جُسيمٍ يوكاوا فِي آخِرِ الْأَمْرِ (عَامَ ١٩٤٧) ؛ وَنَحْنُ نَعْرِفُ السَّاعَةَ بِتَبَادُلِ الْجُسيمَاتِ كَالْيَتَةِ رَئِيسِيَّةٍ مِنْ آليَّاتِ التَّفَاعُلِ بَيْنَ سَائِرِ الْجُسيمَاتِ .

وَبَعْدَ عَمَلِ يوكاوا مُبَاشَرَةً ، عَامَ ١٩٣٦ ، اكْتِشِفَ فِعْلًا جُسيمٌ جَدِيدٌ مِنْ خِلَالِ دَرَسَاتِ الْإِشْعَاعِ الْكُونِيَّ بِاسْتِعْمَالِ غُرْفَةِ الْغَيْمَةِ . وَهَذَا الْجُسيمُ ، الَّذِي دُعِيَ فِي الْأَصْلِ بِالْمِيزُونِ meson (نَظَرًا لِكُتْلَتِهِ الْمُتَوَسِّطَةِ intermediate) ، هُوَ الَّذِي يُعْرَفُ الْآنَ بِالْمِيو مِيزُونِ mu meson أَوْ المِيونِ muon . وَقَدْ ظَهَرَ — بَادِيٍّ ذِي بَدْءٍ — كَمَرَشَحٍ جَيِّدٍ لِأَنَّ يَكُونَ جُسيمَ يوكاوا لِلتَّبَادُلِ النَّوَوِيِّ ؛ حَيْثُ أَنَّ كُتْلَتَهُ الَّتِي تُنَاهِزُ ٢٠٠ مَرَّةً كُتْلَةَ الْإِلِكْتْرُونِ بَدَتْ مُلَائِمَةً . غَيْرَ أَنَّ هَذَا التَّأْوِيلَ لَمْ يَصْمُدْ ؛ إِذْ أَنَّ الدَّرَسَاتِ الَّتِي جَرَتْ طَوَالَ الْعَقْدِ التَّالِيِ بَيَّنَّتْ تَدْرِجِيًّا أَنَّ تَفَاعُلَ الْمِيونِ مَعَ النيوترونات والبروتونات أضعفُ ممَّا يَنْبَغِي حَتَّى يَكُونَ مُنْسَجِمًا مَعَ دَوْرِهِ الْمُفْتَرَضِ كَنَاقِلٍ لِلْقُوَّةِ النوَوِيَّةِ . كَذَلِكَ بَيَّنَّتِ الْقَرَائِنُ الْمُتَرَاكِمَةُ مِنْ دَرَسَاتِ الْأَشْعَةِ الْكُونِيَّةِ أَنَّ مِيزُونَاتِ هَذِهِ الْأَشْعَةِ مُؤَلَّفَةٌ مِنْ صَنَفَيْنِ عَلَى الْأَقْلَى . وَانْجَلَى الْأَمْرُ عَامَ ١٩٤٧ بِاكتِشَافِ الْبِيونِ مِنْ قِبَلِ سِيسِلِ ف . بَاوَلِ Cecil F. Powell وَزَمَلَائِهِ فِي بَرِيسْتُولِ Bristol بِانْجَلْتَرَا . وَبَيَّنَّ شَكْلَ ٣،٢ مِثَالًا مُبَكِّرًا عَلَى مَسَارِ بِيونٍ فِي مَسْتَحْلَبٍ فُوتُوغْرَافِيٍّ . وَنَتَاجُ اضْمِحْلَالِهِ ، الْمِيونُ ، يَخْضَعُ بِدَوْرِهِ لِلِاضْمِحْلَالِ إِلَى بُوْزِيتْرُونٍ وَنِيوْتْرِينَاتٍ غَيْرِ مَرْتَبَةٍ . وَفِي الْعَامِ التَّالِيِ ، اكْتِشِفَتْ بِيونَاتُ اصْطِنَاعِيَّةٍ ضَمِنَ مُنْتَجَاتِ التَّصَادِمَاتِ النوَوِيَّةِ nuclear collisions فِي مُسَارِعٍ فِي بِيرْكَلِي بُولَابِيَّةِ كَالِيفُورْنِيَا . وَهَذِهِ تُدْرَسُ الْيَوْمَ رُوتِينِيًّا بِأَعْدَادٍ هَائِلَةٍ . فَلَا مَشَاحَّةَ فِي أَنَّ الْبِيونَ جُسيمٌ تَبَادُلِيٌّ يَسَاهِمُ فِي الْقُوَى النوَوِيَّةِ . أَمَّا دَوْرُ الْمِيونِ فَيَبْقَى غَيْرَ وَاضِحٍ * .

لا يتفاعل الميون بقوة

٣،٤ الجُسيمَاتِ الْحَدِيثَةُ The Modern Particles

مَا بَيَّنَّ عَامِيَّ ١٩٤٧ وَ ١٩٥٤ ، اتَّسَعَتْ بِمُجْمُوعَةِ الْجُسيمَاتِ الْمَعْرُوفَةِ بِسُرْعَةٍ مَعَ اكْتِشَافِ

* الْحَقِيقَةُ أَنَّ الْمِيونَ هُوَ أَكْثَرُ الْجُسيمَاتِ طَرًّا مَذْعَاةً لِلْحَيَاةِ . وَسَنُفَسِّرُ مِزَلَّتَهُ الْفَرِيدَةَ فِي بُدِّ ٢٧،٢ .

جسيمات « غريبة » :
K ، A ، Σ ، Ξ

أربع فصائل إضافية ، يُعرف أعضاؤها جاعياً بالجسيمات « الغريبة » strange . وتشكّل الكيونات kaons (أو جسيمات K) أخفّ فصيلة من الفصائل الجديدة ؛ إذ يساوي كل كيون نصف ثقل البروتون تقريباً ، بينما يكون كل عضو من أعضاء الفصائل الأخرى ، أي جسيمات لامدا (Λ) وسيفما (Σ) و كساي (Ξ) و xi ، أثقل نوعاً من البروتون . وقد شوهدت كل هذه الجسيمات لأول مرة في الإشعاع الكوني . وتعدّ الآن دراسات عن خواصها في مواقع مسارعات الطاقة العالية في الولايات المتحدة وأوروبا الغربية والاتحاد السوفيتي . وصورة أحد هذه المسارعات ، في ستانفورد Stanford بكاليفورنيا ، مبينة في شكل ٣،٣ . وقد اتّخفتنا المسارعات ، منذ عام ١٩٥٤ ، بميدان الاكتشاف الرئيسي لجميع الجسيمات الجديدة .

مصدران للجسيمات ذات الطاقة العالية

وقبل إنشاء هذه المسارعات ، كان على الفيزيائيين أن يعتمدوا كلياً على الإشعاع الكوني كمصدر للجسيمات ؛ إذ تُقصف الأرض باستمرار بجسيمات من الفضاء الخارجي ، وهذه كافية لتزويد الفيزيائي بجسيمات للدراسة ؛ إلا أنها غير كافية لأن تكون مصدر خطر صحي على سكان المعمورة ، لأنهم يحتمون بالغلاف الجوي atmosphere الذي يُشكّل دثاراً واقياً . ومعظم هذه الجسيمات بروتونات ، وبعضها ذو طاقة هائلة . وحين ترتطم البروتونات بالهواء ، فإن تصادمات نووية تحدث ، مفضية إلى وابل shower من الجسيمات المتباينة ، التي تتضمن الميونات والبيونات والجسيمات الغريبة القصيرة العمر ، فضلاً عن الفوتونات والإلكترونات والبوزيترونات . ومع أن المسارعات تمدنا الآن بأشعة من الجسيمات أغزر بكثير من تلك المتيسرة في الإشعاع الكوني ، فإن الإشعاع الطبيعي ما فتى ذا شأن عظيم لسببين . الأول ، أن جسيمات الأشعة الكونية التي تصطدم بالغلاف الجوي تلعب دور السعاة الذين ينقلون المعلومات مباشرة من أجزاء أخرى من مجرتنا ، وربما خارج مجرتنا أيضاً . والثاني ، أن لبعض جسيمات الأشعة الكونية طاقة أضخم بكثير من جسيمات أي مسارع يعمل حالياً أو قيد التخطيط (أنظر شكل ٣،٤) .

توفر المسارعات « الشدة » العظمى

بينما توفر الأشعة الكونية الطاقة القصوى

والحاجة لآلات أكبر من ملعب كرة القدم لدراسة أصغر الأشياء في الطبيعة هي نقبضة تتعلق بمخلقي وصل غير عاديتين اكتشفتا في هذا القرن : الصلة بين الكتلة والطاقة ، والصلة بين الموجات والجسيمات . وسنبحث هاتين الصلتين الدقيقتين ، اللتين غيرتا نظرة الإنسان للعالم المجهرى إلى تلك الدرجة الكبيرة ، في أبواب لاحقة .

صفائين من النيوتريو

جسيم غريب آخر : n

ولم تأت كل الجسيمات المكتشفة حديثاً كمفاجآت . فلقد حُدّدت هوية نيوتريو الإلكترون عام ١٩٥٦ نتيجة لتقصّص صمم بحرص (وسنصف التجربة المعينة في الباب السابع والعشرين) . وبعد ذلك بسنوات قلائل (١٩٦٢) ، أسفر أيضاً نيوتريو الميون عن نفسه استجابة لتجربة صممت خصيصاً لإيجاده . كذلك أثمر تنبؤ نظري آخر عام ١٩٦٤ ، على صورة اكتشاف جسيم أوميغا omega ، وهو جسيم أثقل من تلك التي عُرِفَتْ سابقاً . إلا أن المفاجآت تجاوزت هذا الحدّ بكثير . ففي غضون الستينات ، اكتشفت عشرات من الجسيمات



(أ)

شكل ٣,٣ : مسار ستانفورد الخطّي

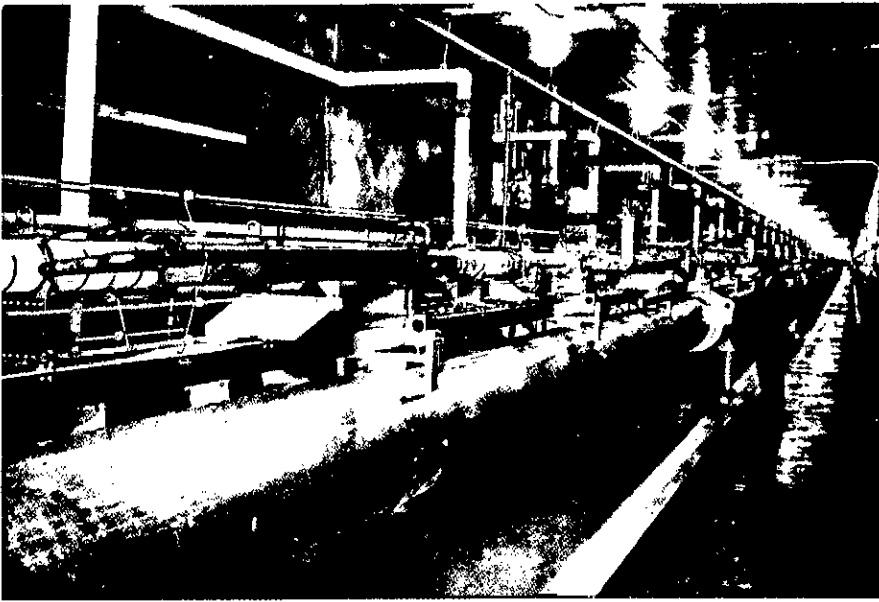
Stanford Linear Accelerator

(أ) منظر جويّ للمسارع الذي يبلغ طوله ميلين ؛ ويظهر فناء التحويل switchyard في مقدمة الصورة ؛ حيث تنحرف الجسيمات ذات الطاقة العالية إلى أبنية للأبحاث التجريبية إما على اليسار أو على اليمين.

(ب) منظر داخليّ للمسارع يزود الأنبوب الكبير في الأسفل دعماً وتوجيهاً ؛ بينما تنطلق الإلكترونات بسرعة خلال أنبوب الشعاع الأصغر قطراً والمنصوب فوق عارضة معدنية girder .

[(أ) المصدر : رولاند كوينترو Roland Quintero .

(ب) مركز مسار ستانفورد الخطّي .]

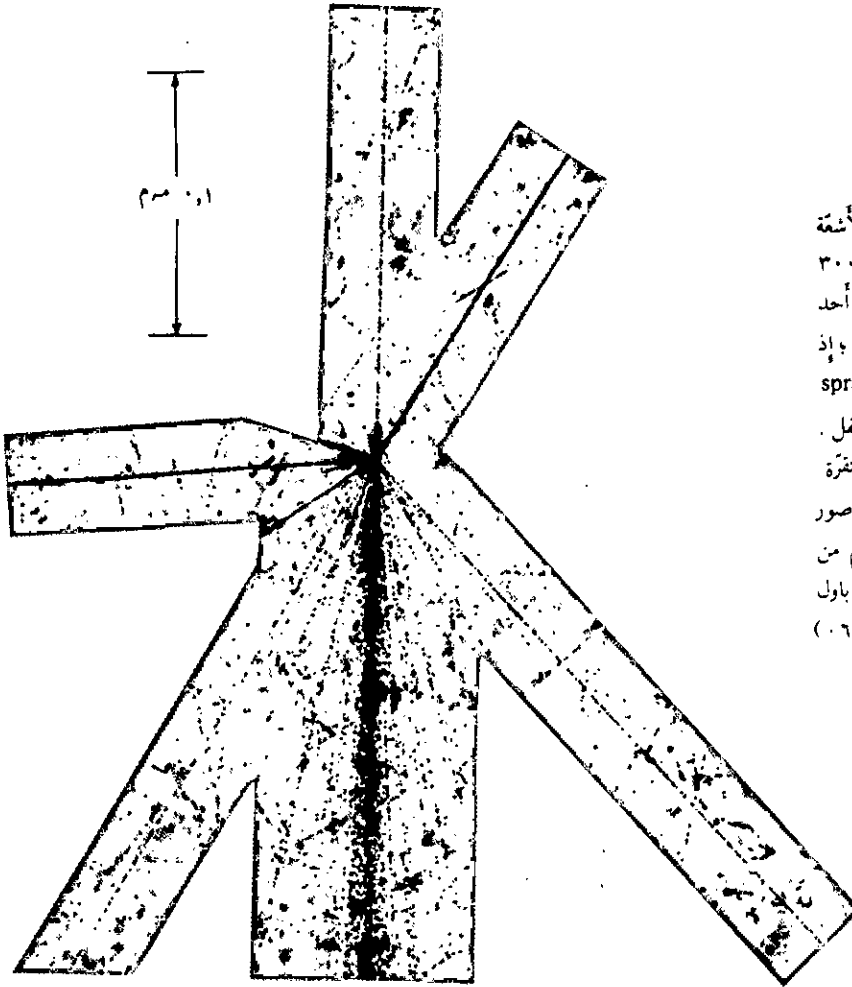


(ب)

• يستخدم هذا التعبير هنا من قبيل المجاز والاستمارة ؛ إذ أنه في الأصل فناء التحويل في محطة للسكة الحديدية .
(المشرف)

الجديدة المفرطة في قصر العمر ، حيث تبرز هذه الجسيمات للوجود وتنتشر ثانية بسرعة فائقة - في 10^{-20} ث أو أقل - إلى حد أنها لا تستطيع عبور ذرة ، ناهيك عن التحرك عبر مسافة كافية كي تُخلف أثراً أو «تقدح زناد» عداد trigger a counter . لذا ، ينبغي أن يُكشف عنها بوسائل أقل مباشرة ، من خلال مُنتجات اضمحلالها السريع . لكن ، على سرعة زوال هذه الجسيمات ، لا يمكن أن يتطرق أي شك حول حقيقتها . فهي بنات أولية وثيقة الوشائج مع الجسيمات ، التي حدث أن أسبغت عليها الأعمار الأطول شيئاً من الجلال والوقار . ومع ذلك ، لكي نتحاشى التعقيد ، فلنستوف لا نذكر الا التزّر اليسير نسبياً عن الرنينات resonances ، وهو الاسم الذي أُطلق على هذه الجسيمات المُكتشفة حديثاً .

جسيمات جديدة مفرطة في قصر العمر تُدعى رنينات



شكل ٣,٤ : حادثة ذات طاقة عالية جداً من حوادث الأشعة الكونية . فقد أحدث جسيم ألفا ذو طاقة تعادل 3,000 GeV (3×10^{12} eV) ، وهو أحد مكونات الإشعاع الكوني ، المسار العمودي في أعلى الشكل ، إذ ارتطم بنواة في المستحلب الفوتوغرافي ، مسبباً رذاذاً spray مؤلفاً من بضعة عشرات الجسيمات ، قُدِرَ جلّها إلى الأسفل . كما أحدث العديد من المسارات يوانات وجسيمات غير مستقرة أخرى خُلِقَت في لحظة التصادم . وهذا الشكل مركّب من صور عديدة منفصلة التقطت من خلال مجهر . ومقياس الرسم من أعلى إلى أسفل يبلغ بضعة أعشار المليمتر . (عن كتاب باول وفاولر وبريكنز المذكور في شكل ٣,٢ أعلاه ، ص ٦٢٧)

٣,٥ خواص الجسيمات The Properties of the Particles

يُعدُّ جَدُولُ ٣,١ الأسماء والخصائص المميِّزة الرئيسيَّة للجسيمات المعروفة كافَّةً ، باستثناء الرِّينات وجسيم واحدٍ مجهول ، هو الغرافيتون (الذي يمكن التنبؤ بخواصه) . فإذا ما أغفلنا الغرافيتون ، فإنَّ الجدول يبيِّن ٣٥ جسيماً مميّزاً ، مقسمةً إلى ١٣ صنفاً . وهناك جسيماتٌ معيَّنة وثيقةُ العرى مُكتَلَّةٌ lumped معاً . فالإلكترون وَضِدِيْدُهُ ، مثلاً ، هما من نفس الصَّنَف . كما أنَّ النيوترون والبروتون ، بالإضافة إلى نَقِيضِيْهِما ، ضِدِيْدِ البروتون وَضِدِيْدِ النيوترون ، مُوحَّدَةٌ أيضاً تحت عنوانٍ واحدٍ ، هو النيوكليون nucleon (الذي سُمِّيَ كذلك لأنَّ البروتونات والنيوترونات هي مكوِّنات النوى nuclei) . وَيَرِدُ بِيْن يوكاوا في أنواعٍ ثلاثة : موجب ، وسالب ، ومتعادِل .

□ الكتلة ، والغزل ، والشحنة Mass, Spin, and Charge

أبسطُ خواص الجسيمات هي الخواص الميكانيكيَّة : الكتلة ، والغزل ، والخاصيَّة الكهربائيَّة — الشحنة . وفي الجدول المذكور ، تُقاس الكتلة بِوَحْدَةِ طاقة ، مغ ء ف MeV ؛ كما يُقاسُ الغزل بِوَحَدَاتِ $\hbar$ (ثابت بلانك مقسوم على 2π) ؛ بينما تُقاسُ الشحنة بِوَحَدَاتِ شحنة البروتون ، e . فهذه الوَحَدَات ، تتفاوتُ قِيَمُ الغزل من صفر إلى $\frac{3}{4}$ بخطوات يساوي كلُّ منها $\frac{1}{4}$ ؛ في حين أنَّ قِيَمَ الشحنة تأخذ فقط القيمَ الصحيحَّة (غَيْرَ الكسريَّة) $1 +$ ، $1 -$ ، وصفرًا . لكنَّ هذه القيود ليست مُطلَقَةً . فَإِنَّهُ لَمَعْرُوفٌ أَنَّ لِبعض الرِّينات قِيَمًا أَكْبَرَ للغزل ؛ كما أنَّ بعضها له شِخَنَاتٌ مُضاعِفَةٌ multiple . كذلك ، فإنَّ الكتلة مُتَغَيِّرٌ مُكَمِّيٌّ (حيث لا يوجد إلا طائفةٌ مختارةٌ من قِيَمِ الكتلة) ؛ بَيِّدَ أَنَّهُ من الواضح أنَّها لا تَتَّبِعُ قواعدَ بنفس بساطة قواعدِ الكمِّ للغزل والشحنة . فالنيوترينات والفوتون والغرافيتون عديمة الكتلة ؛ بينما تَتَزَايِدُ كتلة جسيماتٍ أُخرى إلى أكثر من ٣٠٠٠ ضعف كتلة الإلكترون . ونحن لا نعي حاليًا قواعدَ تَكَمِّيَّةِ الكتلة إلا جزئيًا وعلى نَحْوِ مُبْهَمٍ . فمعضلةُ كَتْلِ الجسيمات هي بنفس الأهميَّة كأيَّة معضلة أُخرى في الفيزياء .

خواص مُكَمَّاة

□ مَجْمُوعَاتُ الجسيمات Particle Groups

يُكْشِفُ جَدُولُ ٣,١ عن تَجْمُعَاتٍ متباينة من الجسيمات . ففي المكان الأوَّل ، هنالك تَزَاوُجُ الجسيم وَضِدِيْدِ الجسيم particle-antiparticle pairing ؛ إذ أدَّتْ نظريَّةُ ديراك عن الإلكترون (١٩٢٨ - ١٩٣٠) إلى التنبؤ بأنَّه يتعيَّن أن يُرافِقَ الجسيم في الطَّبيعَةِ

• نَظَرًا لتكافؤ الكتلة والطاقة ، المعبر عنه بالعلاقة $E = mc^2$ ، فإنَّها لَعَادَةً شائعةٌ أَنْ يُعَبَّرَ عن كَتْلِ الجسيمات بِوَحَدَاتِ طاقة .

ضدّيات الجسيمات

جسيم شقيق مائل له بالكتلة لكن مضاد له بالشحنة الكهربائية و ببعض الخواص الذاتية الأخرى. ويدعى عادةً هذا الجسيم الشقيق ضدّيد جسيم (مع أنّه بذاته جسيم سليم تماماً) ؛ ويبدو أنّ معظم الجسيمات في الطبيعة لها ضدّيات مميزة. (أما ضدّيد ضدّيد الجسيم ، فهو الجسيم الأصلي.) من هذا المنطلق ، فإنّ الفوتون والغرافيتون واليون المتعادل وجسيم إيتا هي استثنائية ؛ حيث أنّ لكل منها ، يكون الجسيم وضدّيده متماثلين. أمّا لسائر الجسيمات الأخرى ، فإنّ الجسيم وضدّيده يختلفان. ف ضدّيد النيوترون ، مثلاً ، ممّيز عن النيوترون ، مع أنّ كليهما متعادل. بل إنّ البروتون وضدّيده يميّزان بسهولة أكبر ، لأنّ أولهما موجب الشحنة ، بينما الآخر سالب الشحنة. هذا ، ويستعمل خط أفقي فوق رمز الجسيم ليشير إلى ضدّيده.

وتعليل لغز وجود ضدّيات الجسيمات خارج عن مجال هذا الكتاب . فلم يَسعَ ديراك كي يتنبأ بوجود هذه « الكينونات entities » ؛ حيث أنّه لم يكن من دليل لوجودها حتى عام ١٩٣٢ ؛ بل سعى كما يصوغ نظرية منسجمة مع ميكانيكا الكم والنسبية معاً. ومن إدماجه الناجح لهاتين النظريتين ، انقاد - لعظيم دهشته - إلى فكرة ضدّيات الجسيمات. * وقد افترض - في بادئ الأمر - أنّ البروتونات قد تكون ضدّيات إلكترونات ؛ إلاّ أنّه - مع إطلالة عام ١٩٣١ - غدا واضحاً من الناحية النظرية أنّ الجسيم وضدّيده يجب أن يكون لهما كتلة متماثلة. وبعد ذلك بقليل ، زوّد اكتشاف البوزيترون إثباتاً لصحة هذه الأفكار. وتوجد الآن قرائن وافرة على العديد من ضدّيات الجسيمات الأخرى. فشكل ٣,٥ ، مثلاً ، إنّ هو إلّا صورة فوتوغرافية طريقة تبين مسار ضدّيد لامدا وضدّيدي بروتونين.

مثال أخذ على قوة النظرية

متعدّدات الشحنة

وثمة تجمع جسيمات آخر يُشار إليه بمتعدّدات الشحنة charge multiplets . فعلى سبيل المثال ، تُكوّن جسيمات سِيغا الثلاثة ثُلثاني شحنة charge triplet ، تكون لأعضائه شِحنات مختلفة لكن نفس الكتلي تقريباً ، بينما تكون خواصه الأخرى إمّا متماثلة أو شبيهة إلى حدّ كبير. فمن الطبيعي ، والمشرّحاً ، أن نعتبر هذه الجسيمات الثلاثة مظاهر مختلفة لنفس الجسيم. كذلك ، تُكوّن البيونات ثلاثياً آخر ، مختلفاً كهربائياً لكن متماثلاً من نواحٍ أخرى ؛ بينما يكون البروتون والنيوترون زوج شِحنات charge doublet ؛ إذ بيّنت التجارب الدقيقة للغاية أنّ لهما خواصاً متماثلة فيما يتعلّق بالتفاعل النووي القوي ، بالرغم من اختلافهما الكهربائي. غير أنّه لا يوجد شركاء ذوو شِحنات مختلفة لكل الجسيمات ؛ ف جسيماً لامدا وأوميغا هما مثالان على أحاديّات الشحنة charge singlets .

بمجموعات العائلات

وهناك تجمع أوسع يقسم الجسيمات إلى عائلات : الباريونات baryons (أي

• للنيوترون وضدّيده خواص مغناطيسية متضادة ؛ كما أنّها يتفاعلان بطريقة مختلفة جداً مع البروتونات.

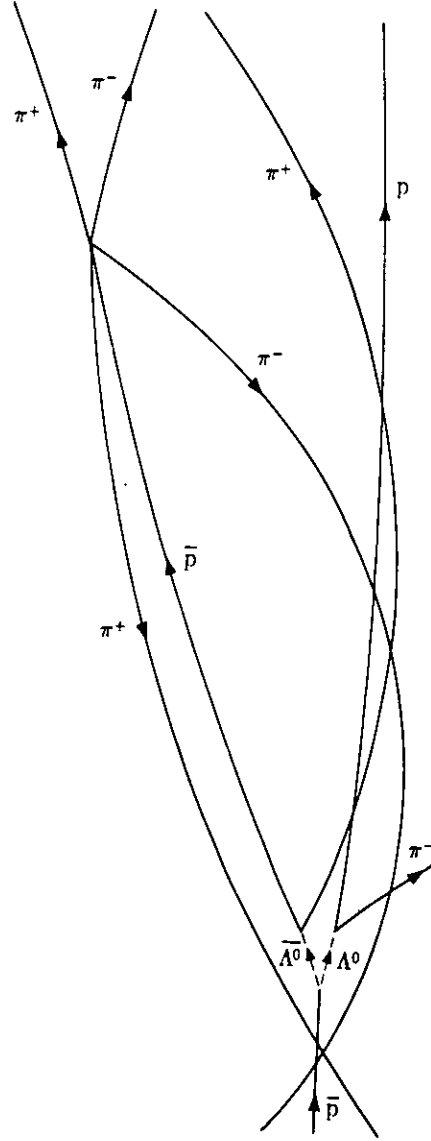
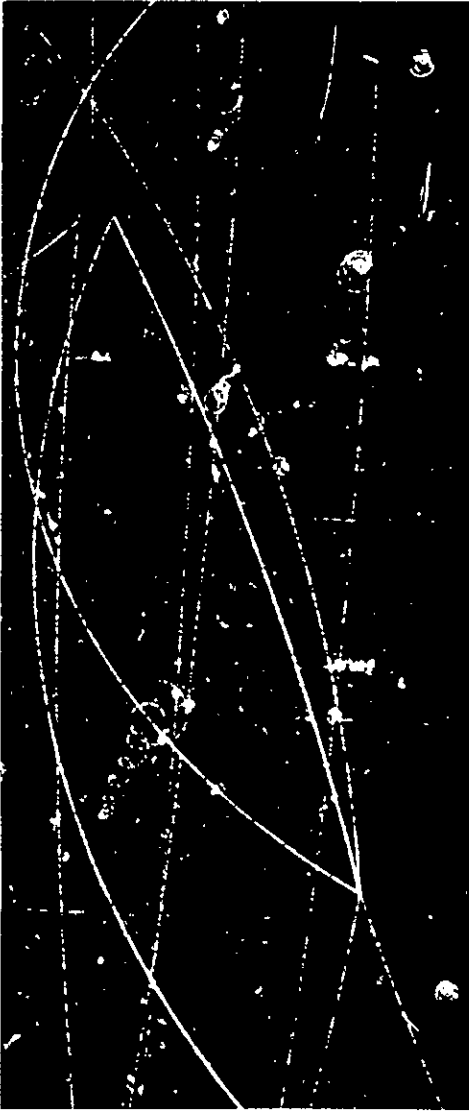
• وهذه النتيجة المدهشة للاستدلال النظري جعلت ديراك يشارك أينشتاين في التنبؤ القائل إنّ أعماق تبصّرات المستقبل قد تنجم ، ليس عن الجهود لتنظيم وفهم التجارب ، بل بالأحرى عن الجهود الرياضيّة البحتة لتبسيط وتعميم بنية النظرية.

جدول ٣,١ : بعض الجسيمات الأولية الأكثر أهمية.

اسم العائلة	اسم الجسيم	الوزن	الكتلة (مغ، ف)	العمر (الوحدة $\hbar$)	الشحنة الكهربائية (الوحدة e)	ضدتيه الجسيم	عدد الجسيمات الميئة	متوسط العمر (ث)	طريقة الاضمحلال النموذجية
عائلة الكواركات	فوتون γ (أشعة غاما)	صفر	صفر	١	صفر	نفس الجسيم	١	لا متناه	لا متناه
	غرافيتون	صفر	صفر	٢	صفر	نفس الجسيم	١	لا متناه	لا متناه
	نيوترينو الإلكتروني ν_e	صفر	صفر	$\frac{1}{2}$	صفر	$\bar{\nu}_e$	٢	لا متناه	لا متناه
عائلة اللبتونات	إلكترون e^-	٠,٥١١	٠,٥١١	$\frac{1}{2}$	-١	e^+ (بوزيترون)	٢	لا متناه	لا متناه
	نيوترينو الميون ν_μ	صفر (٩)	صفر	$\frac{1}{2}$	صفر	$\bar{\nu}_\mu$	٢	لا متناه	لا متناه
	ميون μ^-	١٠٥,٦٠	١٠٥,٦٠	$\frac{1}{2}$	-١	μ^+	٢	$2,٠ \times 10^{-13}$	$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$
ميزونات	بيون π^+	١٣٩,٥٨	١٣٩,٥٨	صفر	+١	π^- مثل الجسيمات ذاتها	٣	$2,٦ \times 10^{-8}$	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
	π^-	١٣٩,٥٨	١٣٩,٥٨	صفر	-١	π^+	٣	$2,٦ \times 10^{-8}$	$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$
	π^0	١٣٤,٩٧	١٣٤,٩٧	صفر	صفر	π^0	٣	$8,٠ \times 10^{-17}$	$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$
	كايون K^+	٤٩٣,٨	٤٩٣,٨	صفر	+١	$\bar{K}^+$ (سالب)	٣	$1,٢ \times 10^{-10}$	$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$

$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$	$10^{-10} \times 10^8$	٤	$\bar{K}^0$	صفر	صفر	٤٩٧,٨	K^0	١٦٨
$K^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$	$10^{-10} \times 0,2$							
$\eta \rightarrow \gamma + \gamma$	$10^{-10} \times 2$	١	نفس البتيم	صفر	صفر	٥٤٩	η	١٦٨
$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	لا يتابع ٩٣٠	٤	$\bar{p}$ (سالب) $\bar{n}$	١+	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	٩٣٨ ٢٦ ٩٣٩,٥٥	P (بروتون) n (نوترون)	نوكليون
$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$	$10^{-10} \times 1,5$	٢	$\bar{\Lambda}^0$	صفر	$\frac{1}{2}$	١١١٥,٦	Λ^0	لا مدى
$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$	$10^{-10} \times 3,80$		$\bar{\Sigma}^+$ (سالب)	١+	$\frac{1}{2}$	١١٨٩,٤	Σ^+	سيفى
$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$	$10^{-10} \times 1,5$	٦	$\bar{\Sigma}^-$ (موجب)	١-	$\frac{1}{2}$	١١٩٧,٤	Σ^-	باريونات
$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$	حوالي 10^{-10}		$\bar{\Sigma}^0$	صفر	$\frac{1}{2}$	١١٩٢,٥	Σ^0	
$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$	$10^{-10} \times 1,7$		$\bar{\Xi}^-$ (موجب)	١-	$\frac{1}{2}$	١٣٢١,٣	Ξ^-	إجمالي
$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$	$10^{-10} \times 1,0$	٤	$\bar{\Xi}^0$	صفر	$\frac{1}{2}$	١٣١٥	Ξ^0	
$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$	$10^{-10} \times 1,3$	٢	$\bar{\Omega}^-$ (موجب)	١-	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	١٦٧٣	Ω^-	أوبىما
		(المجموع) ٣٦						

٥. يشمل هذا الجدول كل الجسيمات المعروفة التي لا تفصل بواسطة التفاعلات القوية.
٦. البرون K^0 له متوسط عمر مختلفان ؛ أما سائر الجسيمات الأخرى فلها متوسط عمر واحد.



شكل ٣,٥ : جسيمات وضديبات
جسيمات ... ضد بروتون ،
كان قد دخل غرفة الفقاقيع في
أسفل الصورة ، يتلاشى في تصادم
مع بروتون في الغرفة ، مُقْضِيَاً بذلك
- في حادثة نادرة - إلى زوج
لامدا - ضد بروتون لامدا . ولا يخلف
هذان الجسيمان المتعادلان أي أثر ؛
غير أنها يضمحلان إلى جسيمات
مشحونة تخلف أثراً . وأحد منتجات
اضمحلال ضد بروتون اللامدا يكون
ضد بروتون آخر ، يُنتِجُ مُحْفَةً ،
في الجزء الأيسر من أعلى الصورة ،
رذاذاً من البيونات . وبما أن الغرفة
موجودة في مجال مغناطيسي ، فإن
الجسيمات الموجبة تنحرف في اتجاه
واحد ، بينما تنحرف الجسيمات
السالبة في الاتجاه الآخر .
(المصدر : مختبر لورنس للإشعاع ،
جامعة كاليفورنيا ، بيركلي .)

الجسيمات الثقيلة) ، والميزونات mesons (الجسيمات المتوسطة) ، وعائلي الإلكترون والميون
الأصغر . ففي جدول ٣,١ ، لاحظ أن للميزونات غزلاً يساوي صفراً (مع أنه معروف أن
لميزونات أخرى ، مصنفة ضمن الرنينات ، غزلاً يساوي عدداً صحيحاً) ، بينما يكون لأعضاء
العائلات الأخرى غزلاً يعادل نصف عدد صحيح (وترّي) odd (من قبيل $\frac{1}{2}$ ،
 $\frac{3}{2}$ ، ...) . على كل حال ، فالأهم من أي من الكتلة أو الغزْل هي قوانين الحفظ التي تميز بين
هذه العائلات . فكلما يتلاشى أحد الباريونات ، يظهر مكانه باريون آخر . وتنطبق قوانين مشابهة
على عائلة الميون وعائلة الإلكترون ، لكن ليس على الميزونات التي يمكن أن تُخلق وتُفقد بأعداد

تمثل الجسيمات ذات الغزْل $\frac{1}{2}$ ،
 $\frac{3}{2}$ ، ... لقوانين حفظ العدد

أما الجسيمات ذات الغزْل صفر ،
١ ، ٢ ، ... فعددها ليس محفوظاً

اعتباطية ، على غرار الفوتونات . وسنعتبر في الباب الرابع مدلولات قوانين حفظ عدد الأعضاء لهذه العائلات الثلاث .

□ الاستقرار وعدم الاستقرار Stability and Instability

ما تبقى من معلومات في جدول ٣,١ معني باضمحلال الجسيمات (شكل ٣,٦) ؛ إذ أن المصير النموذجي لجسيم هو أن يضمحل تلقائياً إلى جسيمين آخرين أو أكثر بعد متوسط عمر يقارب 10^{-11} ث . أما أعمار الرنينات ، فهي أقل من ذلك بكثير . إلا أن بضعة جسيمات في جدول ٣,١ تعيش أكثر ، مثل الميون ، الذي يبلغ متوسط عمره 2×10^{-6} ث (٢ مي ث) ، والنيوترون ، الذي يطول عمره إلى درجة استثنائية ، حيث يناهز ١٠٠٠ ث .

عدم الاستقرار طبيعي

الاستقرار نادر

استقرار النيوترون

فلاستقرار في دنيا الجسيمات شيء نادر ، مع أنه - على ندرته - ضروري لوجود عالم مادي ؛ إذ ، على الرغم من استقرارها ، فإن الجسيمات العديمة الكتلة ليست لبنات ملائمة لتكوين المادة لأنها تتحرك دائماً بسرعة الضوء ، ولا يمكن إيقافها إلا بتدميرها . وهذا يبق فقط الإلكترون والبروتون اللذين يستقر كلاهما نتيجة لقوانين الحفظ (أنظر الباب الرابع) . أضف إلى ذلك أن النيوترون - بضرية حظ حسن - يمكن أن يستقر حين تنضم إليه البروتونات ؛ حيث أن القوة النووية التي تقيد هذه الجسيمات معاً في النوى هي قوية لدرجة كافية لتخفيض طاقة النيوترون ومنع اضمحلاله . أما كيف تتأتى هذه النتيجة ، التي تعتمد على تكافؤ المادة والطاقة ، فسوف نبينه في الباب الخامس والعشرين . فلو لا هذا الأثر الباعث على الاستقرار ، لاحتوى الكون على الهيدروجين فقط ؛ إذ أن وجود كل مادة أخرى في العالم يعتمد على كون القوى النووية قوية إلى حد يكفي لاستقرار النيوترون المستقر عادة ، وجعله بذلك في المتناول كلبنة بناء كونية .

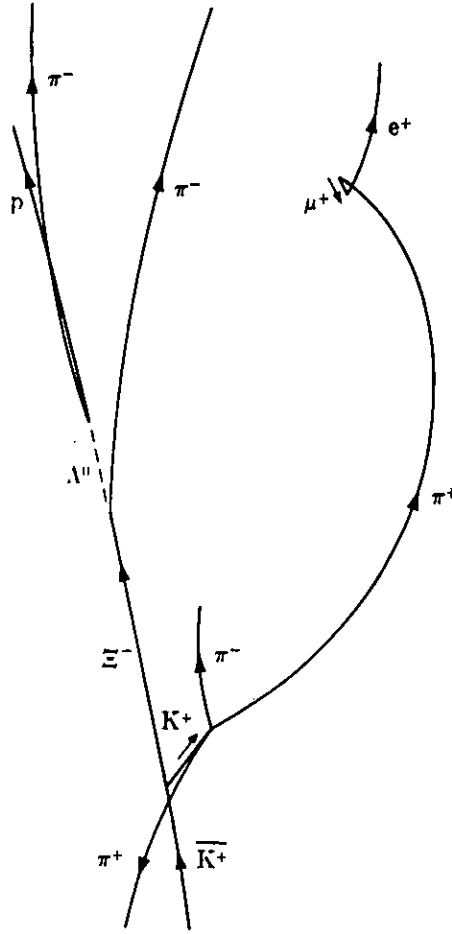
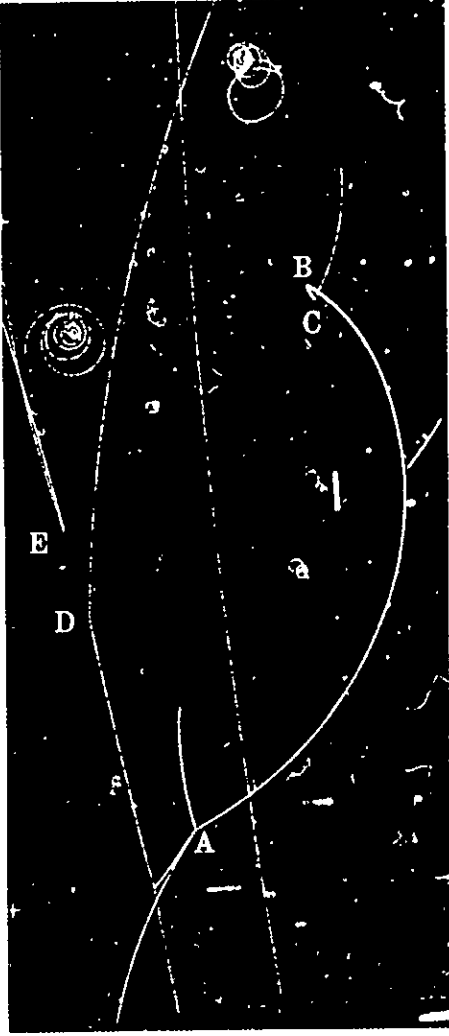
ولا تستفيد المعلومات في جدول ٣,١ الخواص الهامة للجسيمات . إلا أنها كافية لتحديد هويتها وتصنيفها ؛ كما أنها كل ما سنحتاج إليه عند استعمال الجسيمات في أمثلة توضيحية .

★ ٣,٦ الأدوات التجريبية Experimental Tools

استمد العلم الحديث بدايته من دراسة الأجسام التي تراها العين البشرية - الشمس ، الكواكب السيارة في السماء الليلية ، كرات خشبية تتدحرج أسفل سطوح مائلة . أما العلم المعاصر ، فإن أبرز خصائصه أنه يتعامل مع ميادين الطبيعة خارج مدى الإدراك الحسي للإنسان - داخل النجوم ، بنية الجزيئات ؛ تفاعلات الجسيمات الأولية . وهكذا ، فإن صورة الإنسان عن الطبيعة يجب أن تركز الآن على القرائن غير المباشرة التي تزودنا بها أدوات من تصميمه الشخصي ، بدلاً من القرائن المباشرة المتعلقة بحواسه .

والواقع أن كوننا لا نستطيع أن نلاحظ مباشرة أجزاء الطبيعة التي ندرسها الساعة هو من

يقع ميدان العلم الحديث خارج نطاق الإدراك الحسي المباشر



شكل ٣,٦ : اضمحلال جسيمات
لاستقرة . . . تبين هذه الصورة
غير العادية المأخوذة بغرفة الفقاعات
اضمحلال خمسة جسيمات أولية
مختلفة . فعند النقطة A ، يضمحل
كيون موجب إلى ثلاثة بيونات .
وعند B ، يضمحل أحد هذه
البيونات إلى ميون ونيوتريو غير
مرئي . وعند C ، يضمحل الميون
إلى بوزيترون (مع نيوتريو وضدبد
نيوتريو) . أما عند النقطة D ،
فيضمحل جسيم أكساي إلى جسيم
لامدا وبيون . وأخيراً ، يضمحل
جسيم لامدا المتعادل واللامرئي إلى
بروتون وبيون عند النقطة E .
(المصدر : مختبر لورنس للإشعاع ،
جامعة كاليفورنيا ، بيركلي .)

سمات العلم المعاصر الأقل ثورية بكثير مما قد يبدو لأول وهلة ، إذ أن الثورة الحقيقية للعلم قد
هاجت وماجت في القرنين السادس عشر والسابع عشر ، حين أضاف الإنسان إلى ذاتية
subjectivity الإدراك الحسي موضوعية objectivity القياسات المقدارية الجاهدة
painstaking . وما اعتمادنا الزاهن على أدوات وآلات ، يكشف تعقيداً ودقته غير
العاديين عن ظواهر خارج مدى الإدراك الحسي للإنسان ، إلا الثمرة الطبيعية التطورية
للاتصال من الملاحظة الوصفية إلى القياس المقداري . . . لقد كانت
هنالك ثورة في فيزياء القرن العشرين ، إلا أنها ثورة في نظرنا للطبيعة
ووجهة نظرنا في صيغة النواميس الطبيعية ، وليست — في الحقيقة — ثورة في كيفية دراستنا
للطبيعة . فالمفاجأة والتبصر الكبيران اللذان منحهما العلم في هذا القرن إنما مردُّهما الحقيقة القائلة
إن نواميس الطبيعة ، التي تحكم الحقول الرياضية بمنأى عن مدى الإدراك الحسي للإنسان ،
تتعارض مع الإدراك المألوف common sense . فالطبيعة في أسس أساسها تتصرف على نحو

إن استعمال أدوات تقنية مساعدة
على الملاحظة هو قديم

أما الأفكار التي أميط اللثام عنها فهي
جديدة

مختلف تماماً عنها في العالم الجاهري. ومع أن استقراء extrapolation طرائق الملاحظة والمراقبة إلى ميادين جديدة كان ناجحاً، إلا أن استقراء أفكار متوافقة مع المدارك الحسية للإنسان لم يفلح. ... هذه، إذن، هي الثورة الحقيقية للتقدم العلمي الحديث؛ وسوف تكون موضوعاً مهميناً في الجزأين السادس والسابع من هذا الكتاب.

ومدارك الإنسان الحسية محدودة المجال. والأهم من ذلك بالنسبة للعالم، أنها محدودة الدقة إلى درجة كبيرة. وليس ضرورياً البتة أن نبرح العالم الجاهري حتى نتعدى مدى الإدراك الحسي للإنسان. فالقصاب الذي يزن شريحة لحم على ميزان إنها يستعين بأداة تقنية كي يزيد مدى حواسه ودقتها. وكوئنا لا نستطيع أن «نرى» ذرة هو - في صميمه - معضلة ليست بأكثر جدية من عدم استطاعتنا وزن شريحة لحم باليد. ففي أي من هاتين الحالتين، ينبغي أن نضيف إلى الإدراك الحسي الإنساني أدوات ميكانيكية، نجعلنا نحكم على شيء في الكون خارج أنفسنا، حكماً مبنياً على أساس معلومات زودتنا بها هذه الأدوات. وحتى شريط القياس measuring tape البسيط لرَبْة منزل إن هو إلا أداة تقنية مُساعِدة على الملاحظة. وإبان تاريخ العلم الحديث برمته، اتكل الإنسان إلى درجة كبيرة على آلات وأدوات ومعدات كان هدفها الوحيد أن تزيد مدى مداركه الحسية ودقتها. ففي القرن السادس عشر، احتاج تيخو دي براهي Tycho de Brahe إلى ما قد ندعوه الآن مِنْقَلَّةً protractor عملاقة لقياس زوايا ميل angles of inclination النجوم والكواكب السيارة في السماء. وفي وقت لاحق، احتاج غاليليو - أثناء دراسته للحركة - إلى طريقة فنية دقيقة لقياس الفترات الزمنية، كما ابتدع طريقة مُحَسَّنة لاستعمال الساعة المائية water clock. ومع كل خطوة للأمام في الإدراك الأساسي، تعلم الإنسان كيف يبني معدات تجريبية على أساس معرفته الجديدة؛ كما أنه، مع كل أداة جديدة، استطاع أن يسر أغوار ميادين جديدة أو أن يقيس ميادين قديمة بدقة أكبر، واضعاً بذلك حجر الأساس التجريبي لوعي أعمق فأعمق. وفي دراسة الجسيمات الأولية والسعي وراء استشفاف مخطط الطبيعة على الصعيد دون الذري، يستعمل الإنسان المعاصر تشكيلة رائعة من الأدوات التقنية المُساعِدة على الملاحظة والمراقبة. وهذه الأدوات - أحدث الأدوات عهداً وأكثرها تعقيداً في تاريخ طويل من الأواصر الميكانيكية بين الإنسان والطبيعة - تتركز على كل نظرية أساسية آتفة عن الطبيعة.

□ المُسَارِعَاتُ Accelerators

إن الأدوات المُستخدمة في البحث العلمي في حقل الجسيمات الأولية هي - في الأساس - صنفان: تلك التي تُستعمل لخلق جسيمات، وتلك المُستعملة للكشف عن جسيمات. فخلق الجسيمات المادية يقتضي طاقة، ويتعين على تلك الطاقة أن تكون مركزة إلى حد كبير ضمن أبعاد ليست بأكثر من أبعاد نواة ذرية. وهذا يعني أن الطاقة نفسها ينبغي أن ينقلها جسيم. وبالتالي التأثير المتكرر للقوى الكهربائية، يعمل المُسَارِعُ على رفع طاقة الجسيمات

تغذية مرتدة موجبة:

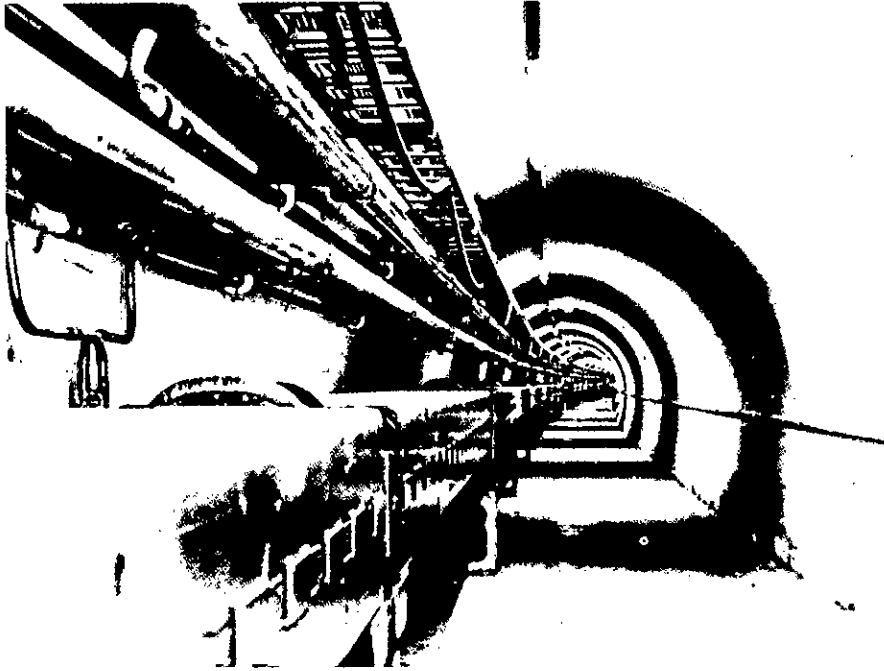
تزداد المعرفة الجديدة أدوات

جديدة لتعين على البحث عن

معرفة جديدة



(أ)



(ب)

شكل ٣,٧ : المُسارع الوطني
National Accelerator في بنافيا ،
النيوي . (أ) منظر جوي يبين الحلقة
ring الرئيسية للمُسارع ، أما الحلقة
الصغرى للمُسارع المُعزّز booster
accelerator فتقع في الصدر الأيمن
للصورة . (ب) تُحيطُ صناديق
مغناطيسية بأنبوب الشعاع على امتداد
القسم الأعظم من محيطه البالغ ٤ أميال .
(المصدر : مختبر المسارع الوطني .)

المشحونة . وهذه الجسيمات ذات الطاقة العالية ، المركزة في أشعة دقيقة ، تصدم نوى ذرية موجودة في هدف ما ، وهناك تحدث تفاعلات أو تخلق جسيمات أخرى تنطلق بدورها لتتفاعل في هدف آخر أو في مكشاف .

وقد سُميت المسارعات الأولى ساينكلوترونات cyclotrons ، ومُسرعات كوكروفت ووالتون Cockroft-Walton ، ومُسرعات فان دي غراف Van de Graaff . وسنشرح مبدأ عمل الساينكلوترون في الباب السادس عشر . ولا تزال مثل هذه المسارعات قيد الاستعمال ؛ غير أنها لا تُحرزُ الطاقات الكبيرة التي تحقّقها الآلات الأحدث عهداً ، التي تُدعى مسارعات خطية linear وسينكروترونات synchrotrons . وحتى الآن لم يفلح أحد في مُسارعة

جسيمات متعادلة أو جسيمات لامستقرة - الأولى ، لأن الشحنة هي بمثابة « المِقْنَص handle » المناسب الوحيد لدفع جسيم ، والثانية ، لأن حتى أطول الجسيمات اللامستقرة والمشحونة عُمرًا - الميون - لا يعيش أكثر من جزأين من المليون من الثانية . من هنا ، فقد اقتضت القذائف في المسارعات على الإلكترونات والبروتونات والنوى الذرية .

إن تسارع البروتونات إلى ٥٠٠ جـ.ف 500 GeV ، في المسارع الوطني في بتافيا ، إلينوي (شكل ٣٧) ، لهو إنجاز يرتكز على نظريات الميكانيكا والكهرومغناطيسية ، والنسبية الأحدث عهداً ، وعلى حشدٍ من التطورات الهندسية والتقنية التي أُنتجت في هذا القرن . وتدخل الكهرومغناطيسية بطرق جوهرية متعددة . فقَصَفُ ذرات الهيدروجين بالإلكترونات منخفضة الطاقة يُجَرِّدُ الذرات من إلكتروناتها المدارية ، مخَلِّفاً البروتونَ المركزيَّ وحده . وفي المسارع الخطي ، تُجَذِّبُ القوى الكهربائية البروتونات المحررة عبر أنبوبٍ مستقيم ، إلى أن « تُحقَنَ injected » بطاقةٍ معتدلة (٢٠٠ مـ.ف 200 MeV) داخل الأنبوب الرفيع المفرغ الحلقي الشكل* ، الذي ينتمي إلى السنكروترون المُعَسَّر booster ، والذي يساوي محيطه periphery حوالي ٤٧٠ م . وهنا ، فإن مجالاً مغناطيسياً ضعيفاً يجعل البروتونات تنحرف ، بحيث تتبع المسحني الذي يشكِّله أنبوب الشعاع دون الارتطام بجداره . كذلك تتلقى البروتونات ، بين الآونة والأخرى ، نبضات impulses من القوة الكهربائية لتُسارعها إلى الأمام . وفي نفس الوقت ، تزداد تدريجياً قوة المجال المغناطيسي ، لأنه عندما تكتسب البروتونات طاقة ، فإن مجالاً مغناطيسياً أقوى يلزم لكي يُحْنِي مساراتها ويُبْقِيها على ما هي عليه . وبعد ١/٥ ث ، تُوجَّه البروتونات - كونها اكتسبت طاقة مقدارها ٨ جـ.ف - نحو أنبوب حلقة المسارع الرئيسية - الذي يبلغ مقطعه العرضي ٥ سم × ١٢ سم وطوله ٦,٣ كم - حيث تستمر عمليات الانحراف المغناطيسي والتسارع الكهربائي . وبعد ذلك بعشر ثوانٍ ، تكون قد قطعت خلالها زهاء ٥٠٠٠٠٠ رحلة حول الحلقة ، تصدم البروتونات هدفاً وتستطيع الدَّوْرَة cycle أن تبدأ ثانية . وعند بلوغها ٥٠٠ جـ.ف ، فإن البروتونات تنطلق بسرعة تعادل ٩٩,٩٩٩٨ بالمئة من سرعة الضوء . وبما أن النسبية هي تلك النظرية التي تصف حركة الأجسام العالية السرعة ، فإنه من الواضح أن تسارع البروتونات بنجاح إلى مثل هذه السرعة الهائلة ، في الوقت الذي نقوم فيه بتوجيهها داخل أنبوب يبلغ قطره ٥ سم وعلى امتداد مسافة تساوي ٣ ملايين كم ، لا بد وأن يكون مستحيلاً دون فهم النسبية .

* في الأصل doughnut-shaped ؛ وكلمة doughnut تعني كعكة صغيرة مقلبة بالذهن المركز ، تكون عادةً حلقة الشكل .

□ المكاشيف (جَمْعُ مِكْشَافٍ) Detectors

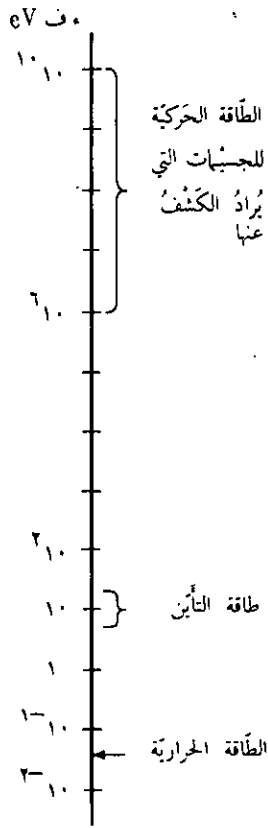
كَشَفَ ج. ج. ثُمَّنَسُون عن الإلكترونات بِأَن لَاحَظَ وَهَجاً فُلُورِيّاً fluorescent glow في الموضع الذي ارتطم فيه شُعاعُ الإلكترونات بالجدار الزجاجي لأنبوبة الأشعة المهبطية cathode-ray tube التي كان يستعملها . وفي نفس الوقت تقريباً (حوالي عام ١٩٠٠) ، كَشَفَ إِرْنِسْت رُذِرْفُورْد عن جسيمات ألفا بِأَن لَاحَظَ أَنَّهَا كَهَرَبَتْ electrified الهواءَ أَثناءَ عبورها فيه ، جاعلةً بذلك جِسْماً مُكَهَرَباً (كَشَافاً كَهَرَبائياً electroscope) يَفْقَدُ شِحَّتَهُ للهواءِ بصورةَ أَسْرَع . كذلك ، في وقت مبكر جداً من هذا القرن ، اِكْتَشَفَتْ طَرُقٌ للكشف عن جسيمات مُفَرَّدَةٍ ، بدلاً من الأثر التراكمي cumulative لجسيمات عديدة . فقد لَاحَظَ رُذِرْفُورْد — من خِلالِ مِجْهَر — الوَمَضَاتِ flashes البالغة الصغر للضوء على شاشة من كبريتيد الخارصين zinc-sulphide screen ، عند النقاط التي اصطدمت فيها جسيمات ألفا . وفي عام ١٩٠٨ ، اِخْتَرَعَ مُسَاعِدُهُ ، هَانز غَايْغِر Hans Geiger ، صورةً بدائيةً لما ندعوه اليوم عَدَّادَ غَايْغِر Geiger counter . . . في داخل هذا العداد ، يوجد سلك مركزي ذو جهدي كهربائي عالٍ يكاد يُسَبِّبُ قَدَحَ شرارة spark إلى — أو مِنْ — جدران أنبوبة العداد . لكن تَكَهَرَّبَ الغاز داخل الأنبوبة الذي يُسَبِّبُهُ مَرُورُ جِسْمٍ مشحون مُفَرَّدٍ ذي طاقة عالية خلال العداد لهو كافٍ لِأَن يَقْدَحَ زَنْدَ الشرارة وَيُسْجَلَ وجودَ الجسيم . وقد اِخْتُرَعَتْ عَدَّادَاتُ أُخْرَى منذ ذلك الحين . والمكاشيفُ الرَّائِجَةُ بِشَكْلِ خاص — مِمَّا قَدْ اِخْتُرِعَ لَاحِقاً — تُنْبِئُ المَجالَ للعالمِ التَجْرِبِيِّ لا لِأَن يَكْشِفَ عن عبور جسيم مفرد بواسطة بُنْصَةٍ مفردة من الطاقة أو الضوء فحسب ، بل أيضاً لِأَن يَرى حَقاً (أو يُصَوِّرَ فوتوغرافياً) مسارَ الجسيم عندما يَمُرُّ خِلالَ المِكْشَافِ . وتشمل مثل هذه المكاشيف غرفة الغيمة ، وغرفة الشرارة spark chamber ، وغرفة الفقاقيع . وتظهر صورة مأخوذة بغرفة الغيمة في شكل ٣,١ ؛ وصورتان بغرفة الفقاقيع في شكلَي ٣,٥ و ٣,٦ ؛ وصورة بغرفة الشرارة في شكل ٣,٩ .

كُشِفَ عن جسيمات مفردة منذ
بواكير هذا القرن

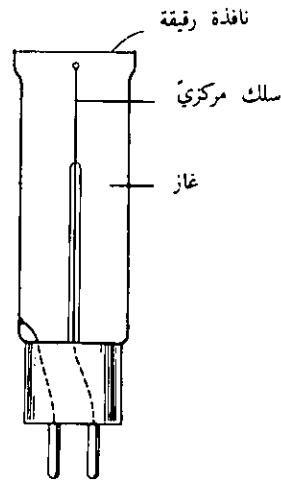
عداد غايغر

تبين غُرفُ الغِيمَةِ وَغُرفُ الشرارة
وَغُرفُ الفقاقيعِ مسارَ الجسيمات

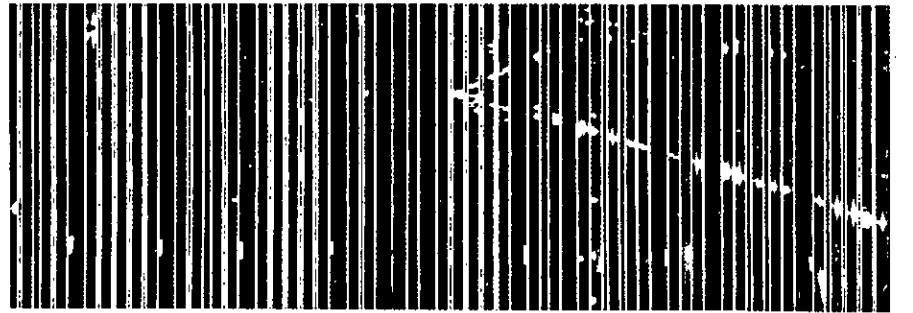
وكل طريقة من طرق الكشف عن الجسيمات — تقريباً — ترتكز على الحقيقة القائلة إنَّ الجسيم الذي يُرادُّ الكشف عنه ذو طاقة أكبر بكثير من متوسط الطاقة لذرات وجزيئات المادة التي يَمُرُّ خلالها الجسيم . فللذرات والجزيئات المكوَّنة للمادة العادية حركة عشوائية random لا تَهْدأُ ولا تستكين ؛ إذ تَتَحَرَّكُ خَبْطَ عَشْواء ، مثل قطع متَمَلِّمِلٍ قَلَقٍ من الماشية ، مصطدمة مع بعضها البعض المَرَّةَ تَلَوَّ المَرَّةَ ؛ بينما يحمل الجسيم الأكثر طاقةً على وَسْطِها مثل الذُّب ، منتزِعاً — حرفياً — بعض الذرات ومُخَلِّفاً وراءَهُ قِطَاعاً عريضاً من الدَّمَارِ . (الفرق هنا أَنَّ الذرات تُرْمَمُ الضَّرَرُ بِسرعة وتستأنف سلوكها العادي .) ولكي نجعلَ هذه المقارنة مقدارية ، فإننا نلاحظ أنَّ الذرات عند درجات الحرارة العادية تتجول بطاقة تقارب ٠,٠٤ ء ف 0.04 eV ؛ بينما قد يكون للجسيمات التي يُرادُّ الكشف عنها طاقات تعادل ملايين — بل بلايين — الإلكترون فولتات . أمَّا



الطاقة اللازمة لتجريد ذرة من إلكترون فهي ١٠ eV تقريباً ، أي بضع مئات من المرات أكبر من طاقة الحركة العشوائية للذرات . وعلى ذلك ، ففي عملية الاحتكاك بين ذرة وأخرى ، لا يتضمن الاصطدام طاقة كافية كي يُحرَّر الإلكترون ، فتبقى الذرات متعادلة . بيد أن جسيماً ذا طاقة عالية مُنطلقاً خلال المادة يستطيع أن ينتزع إلكترونات وإثر إلكترون ، أثناء اصطدامه مع ذرات مُتعاينة ، تاركاً وراءه أثراً من الإلكترونات الطليقة والذرات الموجبة الشحنة (الأيونات ions) . وهذه العملية ، التي تُدعى بالتأين ionization ، مسؤولة عن التأثيرات المؤدية للإشعاع العالي الطاقة في الخلايا الحية ؛ كما أنها تجعل من السهل — نسبياً — الكشف عن جسيم مشحون ذي طاقة عالية .



شكل ٣,٨ : الأجزاء الأساسية لعداد غايغر صغير يُستخدم في المختبرات : سلك مركزي جهّده مرتفع نسبة إلى جدار الأنبوبة ؛ غاز قليل الكثافة قادر على توصيل نبضة burst قصيرة من التيار ؛ نافذة رقيقة لكي تفسح المجال للجسيمات ذات الطاقة المنخفضة نسبياً لدخول الأنبوبة .



شكل ٣,٩ : صورة فوتوغرافية التُقطت بواسطة غرفة الشرارة . وهي تمثل نيوتريناً غير مرئي كان قد دخل الغرفة من اليسار ، ثم تفاعل مع نيوترون داخل نواة ذرية في أحد الألواح plates ، فانتج ميوناً وبروتوناً . ويُسجّل خط الشرار الأطول مسار الميون ؛ بينما ينتمي المسار الأقصر إلى البروتون .
[المصدر : المنظمة الأوروبية للأبحاث النووية (سيرن)]

[. European Organization for Nuclear Research (CERN)]

كيفية عمل عداد غايغر

وفي عداد غايغر (شكل ٣,٨) ، تبدأ الأيونات والإلكترونات المُتخلّفة وراء الجسيم

العالي الطاقة بالحركة بفعل المجال الكهربائي الذي يؤثر بين السلك المركزي والحدار الخارجي للعداد . ومن ثم ، فهي تكتسب طاقة كافية كي تحدث تأيئاً إضافياً بنفسها ، وبذلك ينمو التيار الكهربائي بسرعة مكوّناً ما يشبه الشلال الصغير cascade من الشحنات ؛ أي أن شرارة تقدح عبر الفرجة gap . وينطبق مبدأ مشابه على غرفة الشرارة الأحدث عهداً ؛ إذ يستبدل السلك والحدار في عداد غايغر بلوحين معدنيين متوازيين ، يشحنان أيضاً بحيث أن شرارة تكاد تقدح عبر الفرجة بينها . ثم تضاف ألواح عديدة أخرى موازية للزوج الأول . وتشحن هذه بالتعاقب بشحنات موجبة وسالبة كي تجعل بالإمكان قدح شرارة بين أي زوج من الألواح المتجاورة . وفي تطبيقات غرفة الشرارة في الأبحاث العلمية ، تشحن هذه الألواح فقط لمدة بضعة أجزاء من مليون جزء من الثانية ، وذلك مباشرة بعد عبور جسيم أو أكثر خلال الغرفة . ويستطيع جسيم ذو طاقة كافية أن ينفذ عبر كُديس stack الألواح المتوازية برُمته . وكلما يعبر الفرجة المفعمة بالغاز بين لوحين ، فإنه يترك أثراً من الأيونات التي تصلح كمفداح ممرّ لإطلاق الشرر localized trigger of sparking . فإذا ما نظرنا من الداخل (شكل ٣،٩) ، نرى سلسلة من الشرار التي تزودنا بسجل مرئي visual record للمسار الذي سلكه الجسيم .

تستعمل غرفة الشرارة أيضاً فُلمبة عالية

كذلك تكون عملية التأين حاسمة لعمل غرفة الغيمة وغرفة الفقاع . في غرفة الغيمة ، تكون الأيونات ، المتخلقة في أعقاب مرور الجسيمات المشحونة السريعة ، مراكز تكثيف centers of condensation للبُخار vapor^{٥٠} في الغرفة المليئة بالغاز . فتولّف قطرات سائلة liquid droplets بالغلة الصغر خطاً على امتداد مسار الجسيم ، وتُصوّر غوتوغرافياً قبل أن تسبح لها الفرصة للانحراف بعيداً . (كثيراً ما تتمركز أيضاً قطرات مائية عادية في الهواء حول أيونات تكونها أشعة كونية عشوائية أو ضوء فوّتفسجي [فوق بنفسجي] ultraviolet صادر عن الشمس .) أما آثار الجسيم التي نراها في غرفة فقاع ، فهي فقاع غازية في سائل ، لا قطرات سائلة في غاز ؛ إذ تعمل الأيونات ، في هذه الغرفة ، كمراكز غليان boiling . ولما كانت عملية التوقيت timing هنا أكثر حرجاً حتى منها في غرفة غيمة ، فإن الخطّ الدقيق المكوّن من السائل المغلي على امتداد أثر الجسيم يُصوّر فوتوغرافياً قبل أن ينتشر الغليان في طول السائل وعرضه . وينبغي أن نضيف أنه يجب إعداد غرفة الغيمة وغرفة الفقاع كليهما كي تكونا في حالة حرجية critical condition معينة قبل التقاط الصورة مباشرة . فيتوجب على البخار في غرفة

تكون الأيونات بمثابة مراكز تكثيف في غرفة الغيمة

كذلك تكون الأيونات بمثابة مراكز غليان في غرفة الفقاع

^{٥٠} في صنف آخر من غرفة الشرارة ، يُدعى غرفة السلك wire chamber ، تُحدّد موقع الشرر حاسبة إلكترونية computer بدلاً من آلة تصوير (كاميرا) camera . وتحتوي هذه الغرفة على مصفوفات من الأسلاك المشحونة . وحين تقدح شرارة بين أي زوج من الأسلاك ، تُرسل نبضة التيار الناتجة إشارة لحاسبة إلكترونية . ومن إشارات عديدة من هذا القبيل ، يُحدّد برنامج program حاسبة خاص مسارات الجسيمات المشحونة عبر الغرفة .

^{٥٥} غني عن القول ، إننا نستخدم — في كتابة مثل هذه الكلمات — العُرف الأمريكي ، وليس الإنجليزي .

الغيمة أن يكون مُشبعاً بإفراط supersaturated ، بحيث يكون على أهبة الاستعداد لِيَتَكَثَّفَ إلى سائل ، فيقوم بذلك يُسرَّ عند أيِّ مَرَكِّزٍ تكتثيفٍ مناسب ، مثل أبون . وعلى شاكِلَةٍ مُشابهة بَعْضُ الشَّيْءِ ، يتوجب على سائل غرفة الفقائيع أن يكون مُحَمَّيًّ بإفراط superheated ؛ أي أنه يجب أن يكون على أهبة الاستعداد ليغلي . ويتحقق قَرُطُ التَّشْعِيعِ بالتبريد المُبَاغِتِ لغرفة الغيمة ؛ بينما يتحقق قَرُطُ التَّسْخِينِ بإطلاق سراح الضَّغْطِ pressure على حين غِرَّةٍ في غرفة الفقائيع . ونفاران في شكل ٣،١٠ إحدى عُرفِ الفقائيع الأولى مع تركيب أحدث عهداً .

... لا تُحْدِثُ أَشْعَةً غاما ، عند مرورها خلال المادَّة ، إلا تَأَيُّناً ضعيفاً جداً . فبمقدورنا أنْ نَكْشِفَ عنها — والحالة هذه — بواسطة عَدَّادٍ غَائِيزٍ وبعض العدَّادات الأخرى ؛ لكنَّها لا تترك أيَّ مسار مرئيٍّ في غرفة فقائيع أو غرفة شرارة . كما أن مسارات جسيمات متعادلة أخرى تبقى لامرئيةً في هاتين الغرفتين ، مع أنه يمكن الاستدلال على وجودها بطريقةٍ غير مباشرة (مثل هذا الاستدلال ممكن في الصُّورَتَيْنِ المِيسَتَيْنِ في شكلي ٣،٥ و ٣،٦) . كذلك يستوجب الكشفُ عن النيوترون تفاعلَهُ أولاً مع نواة ؛ إذ يستطيع هذا التفاعل أن يُنتِجَ أَشْعَةً غاما أو بروتوناتٍ ثانوية ، ممَّا يُسَبِّبُ — في آخر الأمر — تَأَيُّناً قابلاً للكشف عنه . وليس هناك السَّاعَةُ سوى النيوتريـنو كَمُتَحَدٍّ جَدِيدٍ للفيزيائيين العاملين في مِضْمارِ الكَشْفِ عن الجسيمات .

٣،٧ أَهْمِيَّةُ الْجُسَيْمَاتِ The Significance of the Particles

نَظَرًا لِقِصْرِ العُمُرِ الاستثنائيِّ لمعظم الجسيمات ، فإنَّ المرءَ قد يغويه السَّوَالُ : لماذا تُعْتَبَرُ تلكم الجسيمات بهذه الأهمية . فمن الواضح أن البروتون مُهِمٌّ ؛ إذ أن المادَّةَ يحملُها — حِثَّةً animate ولاحيَّةً inanimate — تحوي بروتونات . لكنَّ أَيْنَ أَهْمِيَّةُ جِسْمٍ لأمدا ، الذي لا يُشكِّلُ جزءاً من أيِّ شيءٍ نعرفه ؟ ... قد يُخْلَقُ جُسَيْمٌ لأمدا في اصطدامٍ نوويٍّ عنيفٍ إلى درجةٍ كافية ، يُسَاعِدُ على تحقيقه مُسَارِعُ . فيجتاز بضعة ستمترات بأقلِّ من جزء واحد من البليون من الثانية ، ثم يضمحلُّ إلى نيوكليون وبيون . ويضمحلُّ البيون بدوره ، بعد زمن أطول بقليل ، إلى ميون ونيوترينو ؛ كما لا يلبث الميون أن يضمحلَّ إلى إلكترون ونيوترينو وَضْدَيْدِ نيوترينو . بمعنى آخر ، في زمنٍ إجماليٍّ يُقَارَبُ جزءاً واحداً من المليون من الثانية ، وَحِيزٌ لا يتعدَّى يحمله بضعة أقدام حول نقطة الاصطدام الابتدائي ، فقد وُلِدَتْ وَقَضَتْ سلسلةٌ متعاقبةٌ من الجسيمات العابرة transient ، دون أيِّ أثرٍ نهائيٍّ — خِلَافَ إِضَافَةِ بضعة نيوترينوات أخرى إلى الكَوْنِ .

... ثَمَّةُ سَبَابٍ يُسَلِّمُ لأجلها الفيزيائيون بأنَّ الجسيماتِ اللامستقرَّةَ القصيرة العُمُرِ هي بنفس الأهمية والطَّرَافَةِ كَحِفْنَةِ الجسيمات المستقرة التي تُولَّفُ عالَمَنَا . ففي المقام الأول ، قد يكون للجسيمات اللامستقرَّةَ تأثيرٌ حيويٌّ هامٌّ على خواصِّ الجسيمات المستقرَّة . وكأبرز مثالٍ على ذلك ، فإنَّ القُوَّةَ التي تجعل النوى متماسكة (وبالتالي تجعل بالإمكان وجود كلِّ الذَّراتِ الأثقلِ

تُهمُّ الجسيماتِ اللامستقرَّةَ بصورةٍ حاسمةٍ في القوى بين الجسيمات المستقرَّة

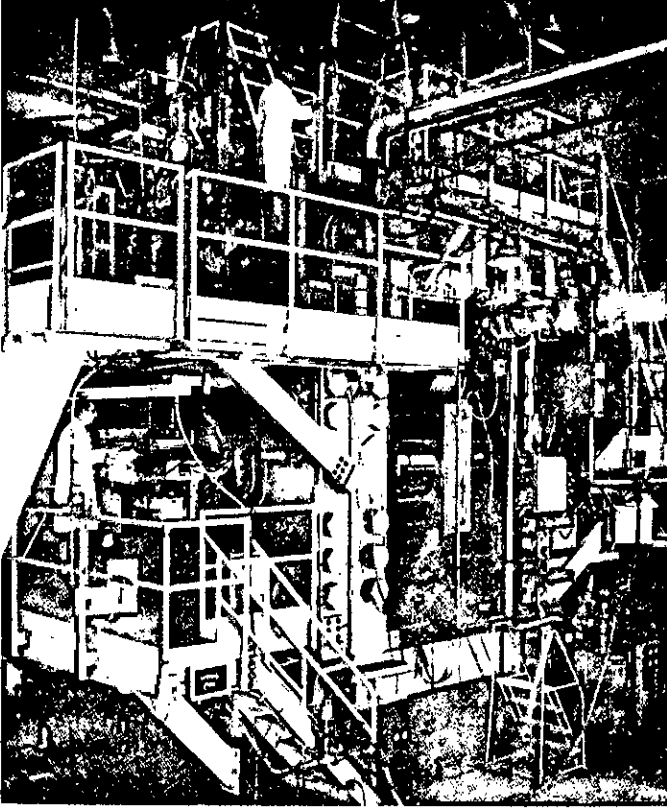
يبدو الاستقرار والاستقرار وكأنها
مسألة « مصادفة »

من الهيدروجين) إنها تنجم عن تبادل بيونات لامستقرة بين الجسيمات النووية. أما السبب الثاني، وربما الأعمق، فإنه يظهر أن المسألة - أي الجسيمات مستقر وأبداً لامستقر - ما هي إلا مَحْضُ « مصادفة ». فالميون والإلكترون، مثلاً، يبدوان وكأنهما شبيهة متماثلين في كل النقاط سوى أن الميون حَدَثَ أنه أثقلُ من الإلكترون. وعلى ذلك، فبمقدوره أن يُطْلَقَ سراح طاقة كتلته الزائدة، وأن يضمحلَّ تلقائياً إلى إلكترون (ونوترينات). كذلك يعيش الميون جُزْأَيْنِ من المليون من الثانية؛ في حين أن الإلكترون يعيش إلى الأبد، فيما يبدو. على أن هذا الاختلاف يسترعي انتباه الفيزيائي أقل من نقاط الشبه الكثيرة بين الميون والإلكترون. فمن غير المحتمل أبداً - على ما يبدو - أن نُذِرْكَ كُنْهَ الإلكترون « الحقيقي » دونما أن نعي أيضاً مدلول الميون الوثيق القربة.

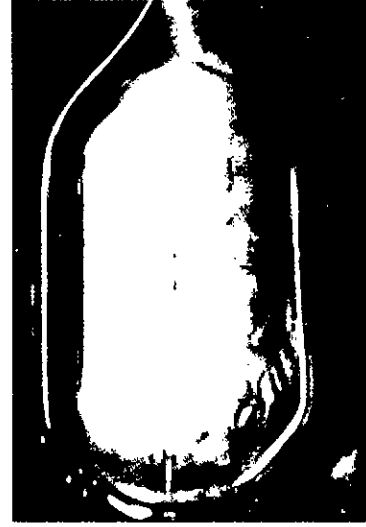
فالجسيمات الأولية كافة تبدو وكأنها تنتمي إلى عائلة كبيرة واحدة؛ إذ ليس أي منها بمستقل عن كل ما عداه من الجسيمات؛ كما أن السلوك « الطبيعي » للجسيم هو أن يضمحلَّ ويتحوَّلَ من تلقاء نفسه إلى جسيمات أخرى أخف... مع أنه، لأسباب لم نتمكن بعد من استجلائها، هنالك جسيمان « شاذان » - البروتون والإلكترون - اضمحلَّاهما مَحْظُور. فتُوجَدُ، بموجب هذه النظرة الأشمل للجسيمات، قواعد معينة للطبيعة، سيَرِدُ وصفها في الباب الرابع، تحوُّلُ دون اضمحلال هذين الجسيمين. ونظراً لهذه المصادفة، فإن تركيب العالم المادي يغدو ممكناً.

وبطبيعة الحال، بما أن ثمة كَوْنًا واحداً فقط ومجموعة واحدة من النواميس الطبيعية، فلا يعقل أن نقول إن ظروفًا خاصة في الكون توجد من قبيل الصدفة. يَبْدُو أن هذه النظرة لتعددية multiplicity الجسيمات إنها تستأنف العملية، التي بدأها كوبرنيكوس Copernicus، لجعل الإنسان يشعر بتواضع أعظم فأعظم عند مواجهته تصاميم الطبيعة. فإننا وعالمنا موجودون بنعمة قوانين حفظ معينة تبعث على استقرار جسيمات معدودات، وتسمح بتشيد بُنْيَانٍ منظم فوق الفوضى الطبيعية للعالم دون المجهرى.

هذه الفوضى الطبيعية العارمة تناظرها فوضى مماثلة في الجهود النظرية الرامية إلى صياغة نظرية كاملة متكاملة عن فيزياء الجسيمات الأولية؛ إذ أن النظريات في هذا المضمار تُخْلَقُ وتَقْوَضُ بلمحة البصر هذه الأيام، ويكاد يعجز عن اللحاق بتشعباتها ومناهاتها حتى المتخصصون. فلا سبيل إلى نقل الصورة بكل جوانبها في مثل هذا الكتاب. وننصح هنا القاري المهتم أن يتابع آخر تطورات هذا الموضوع في الدوريات العلمية المبسطة نوعاً من قبيل: *Physics Today* * *New Scientist* * *Science* * *Scientific American* (مجلة الجمعية الفيزيائية الأمريكية)، *Physics Bulletin* (مجلة الجمعية الفيزيائية البريطانية)، و *Science News*. (المشرف)



(أ)



(ب)

شكل ٣،١٠ : غُرْفَتَا فِقَاقِيع . (أ) نموذجٌ مُبَكَّر (١٩٥٣) لغُرْفَةِ الفِقَاقِيعِ اخْتَرَعَهُ دُونَالْدُ غِلْيزِر Donald Glaser . وهو أطول من بَوْصَةٍ وَاحِدَةٍ بِقَلِيلٍ وَأَقْلَبَ عَرْضاً مِنْ يَضَعُ بَوْصَةٍ . (ب) تَرْكِيبٌ حَدِيثٌ : غُرْفَةُ فِقَاقِيعِ سَائِلِ الْهَيْدْرُوجِينِ ، الَّتِي يَسَاوِي بُعْدُهَا ٨٠ بَوْصَةٍ ، فِي بْرُوكْهَيْفِن . [(أ) الْمَصْدَرُ : دُونَالْدُ غِلْيزِر ، جَامِعَةُ كَالِيفُورْنِيَا ، بِيرْكَلِي . (ب) مَخْتَبِرُ بْرُوكْهَيْفِنِ الْوَطَنِيِّ .]

خُلَاصَةُ الْأَفْكَارِ

□ إِنْ الْمَضَامَرَ دُونَ الْمَجْهَرِيِّ ، الَّذِي تَعْمُرُهُ الْجُسِيَّاتُ الْأَوَّلِيَّةُ ، هُوَ □ الْفُوتُونُ ، ذَلِكَ الْكَمُّ مِنَ الطَّاقَةِ الْإِشْعَاعِيَّةِ ، هُوَ جِسْمٌ أَوَّلِيٌّ - عَلَى الْأَرْجَحِ - أَعْمَقُ نَحْوَمِ الْفِيزِيَاءِ أَسَاساً . عَدِيمِ الْكُتْلَةِ .

□ تَسْتَطِيعُ الْجُسِيَّاتُ ، بِيَعُضِ الْخَوَاصِّ الْبَسِيطَةِ ، أَنْ تَجْلُو □ فِي اِضْمَحْلَالِ بَيْنَا ، تُخَلِّقُ الْإِلِكْتُرُونَاتِ (أَوْ بُوْزِيْتِرُونَاتِ) ، - بِصُورَةٍ مُجْدِيَّةٍ - الْعَدِيدَةِ مِنْ قَوَانِينِ الْفِيزِيَاءِ ؛ كَذَلِكَ بِالْإِضَافَةِ إِلَى ضُدِّيَّاتِ نِيُوتْرِينَاتِ (أَوْ نِيُوتْرِينَاتِ) .

نَضَعْنَا الْجُسِيَّاتُ ، بِيَعُضِ الْخَوَاصِّ الْغَامِضَةِ ، عَلَى اتِّصَالِ □ يُسَهِّمُ الْبَيُّونُ بِنَصِيبٍ فِي قُوَّةِ التَّبَادُلِ بَيْنِ النِّيُوكَلِيُونَاتِ . مَعَ الْمَجْهُولِ .

□ الْإِلِكْتُرُونُ ، أَوَّلُ جِسْمٍ دُونَ ذَرِيٍّ يَتِمُّ اكْتِشَافُهُ ، أَسْفَرَ عَنْ نَفْسِهِ فِي أَشْعَةِ الْمَهْبِطِ .

□ الْبُرُوتُونُ هُوَ أَبْسَطُ نَوَاقِ ذَرِيَّةٍ . □ لِبَعْضِ الْجُسِيَّاتِ « الْغَرِيبَةِ » أَعْمَارٌ طَوِيلَةٌ تُقَارِبُ ١٠^{-١١} ث .

□ لِعَظَمِ الْجُسِيَّاتِ الْمَكْتَشَفَةِ حَدِيثاً ، وَالْمَعْرُوفَةِ بِالرَّيْنِيَّاتِ ، أَعْمَارٌ قَصِيرَةٌ تَقِلُّ عَنْ ١٠^{-٢٠} ث . □ الْكُتْلَةُ وَالْغَزْلُ وَالشَّحْنَةُ هِيَ خَوَاصُّ مُكَمَّلَةٌ لِلْجُسِيَّاتِ . □ تُسَاعِدُ تَجْمُعَاتٌ عَائِلِيَّةٌ مُتَبَايِنَةٌ عَلَى تَوْحِيدِ دَرَاةِ الْجُسِيَّاتِ . □ الْبُوْزِيْتِرُونُ هُوَ ضُدِّيْدُ الْإِلِكْتُرُونِ .

□ المُسَارَعَاتُ والمَكَاشِفُ هي الأدوات الرَّئيسية للبحث □ تُوحِي الوشائجُ بين الجسيمات بأنَّ الجسيمات الموقَّعة هي بنفس العلمي في الجسيمات .

أسئلة

س ٣,١ من أي نواحٍ يكون جسيم أولي « أبسط » من كرة غولف golf ؟
 س ٣,٢ سم بضعه أجسام - تقع ضمن نطاق تجاربك الشخصية - يمكن « تفسيرها » بأن يوصف تركيبها بدلالة وحدات أصغر .
 س ٣,٣ يُعلَّلُ الفيزيائي بنية جسيم بدلالة أجزائه . أذكر طريقة أخرى يمكن بواسطتها « تعليل » هذه البنية ، ووضح هذه الطريقة الأخرى بمثال .
 س ٣,٤ ما هي « الأسباب النهائية » (التي تُدعى أحياناً بالغائية teleology) ؟ لم كانت الأسباب النهائية متوافقة مع نظرة أرسطو العضوية organic للطبيعة ، لكن غير متوافقة مع النظرة العلمية الحديثة للطبيعة ؟

بند ٣,١

س ٣,٥ أوجد وتفحص قائمة لأسماء الحائزين على جائزة نوبل في الفيزياء . كم جائزة نوبل مُنحت لاكتشافات تتعلق بالنخم دون المجهر في الفيزياء ؟ أي كسر يكون هذا من العدد الكلي للجوائز ؟
 س ٣,٦ جسيم ألفا هو نفس الشيء كنواة ذرة هيليوم-٤ (He) . فهل جسيم ألفا جسيم أولي ؟ وهل جسيم بيتا جسيم أولي ؟ فسر .

بند ٣,٢

س ٣,٧ أي سمة من تجارب رذرفورد عن جسيمات ألفا أوحَت بأن للذرة لباً صغيراً موجب الشحنة ، أي نواة ؟ (استشر كتاباً آخر ، إذا لزم الأمر ، أو انظر بند ٢٦,٢ وشكل ٢٦,٣ [في المجلد الثالث من هذا الكتاب] .)

س ٣,٨ كيف عرف أندرسون أن المسار المتروك في غرفة الغيمة التي استعملها [شكل ٣,١ (أ)] ، كان قد أحدثه بوزيترون منطلق من أسفل إلى أعلى ، وليس إلكترون منطلق من أعلى إلى أسفل ؟
 س ٣,٩ في بواكير عهد نظرية الكم ، كان ما ندعوه الآن فوتونات يُسمَّى « كمّات quanta » ، وكان يميز بينها وبين الجسيمات المادية أو « الدقائق corpuscles » . لماذا لم نعد نلتزم بمثل هذا التمييز ؟
 س ٣,١٠ هل تظن أن بالإمكان صنع « ذرة » من بروتون ونيوترون سالب ؟ من بروتون وبيون سالب ؟ من إلكترون موجب والكترن سالب ؟ من بروتون وبيوترون ؟

بند ٣,٣

س ٣,١١ عندما كان البيون لا يزال في طور الافتراض والتكهن ، كتب عنه يوكاوا قائلاً : « ... وأياً كان الأمر ، فإننا نستطيع أن نبين أنه ، في التحويل النووي العادي ، لا يمكن لمثل هذا الكمّ [أي البيون] أن ينبعث في الفراغ الخارجي . » و « التحويل النووي العادي » الذي نوه به هو التحويل الذي لا تفقد فيه النواة أكثر من بضعة مغ . ف من الطاقة . (١) استعمل اعتبارات طاقة (أي متعلقة بالطاقة) كي تُفسَّر مدلول عبارة يوكاوا . (٢) نحن نعلم الآن أنه يمكن أن نجعل نواة ما تبث بيوناً . فكيف يتأتى هذا ؟

س ٣,١٢ لماذا يكون تحقيق عملية يصطدم فيها بيون بآخر شبة مستحيل في المختبر ؟ هل تستطيع أن تفكر بطريقة قد يتعلم بواسطتها الفيزيائيون شيئاً عن تفاعل بيون بآخر ؟

س ٣,١٣ فسرّ بالضبط ماذا يعني قولك إنّ « كتلة الإلكترون هي ٠,٥١١ مغ ء ف ». هل هذه حقاً كتلة الإلكترون ؟

س ٣,١٤ الجزء الذي نَعْمُرُهُ من الكون — بل ربّما الكون برّمته — يحتوي على جسيمات أكثر بكثير من ضديّات جسيمات (مثلاً ، إلكترونات أكثر بكثير من بوزيترونات) . فكيف يمكن أن يكون الكون لو وُجِدَت الجسيمات وضديّاتها بأعدادٍ متساوية تقريباً ؟

س ٣,١٥ نَجَمَت بعض التطوّرات الماضية في الفيزياء — بالدرجة الأولى — عن القرائن التي زوّدتنا بها المعطيات التجريبية المتراكمة ، كما نجم بعضها الآخر — بدرجة أكبر — عن اعتبار فلسفي رياضيّ لنمط السلوك الذي « يتعيّن » على الطبيعة الالتزام به . لو كان ثمة من مكانٍ للمُراهنة على النهج الذي سنكتسب بواسطته تبصراً أعمق عن البنية الداخليّة للجسيمات الأولى ، فأياً من هاتين الإمكانيتين قد نختار ؟ لماذا ؟ (بالطبع ، ينبغي أن تكون إجابتك على هذا السؤال تخميناً مبنياً على أساس معلومات نزره . إلاّ أنّها ستكون ذات فائدة لمُدْرُسك لما ستنبئ عنه بصدد وجهة نظرك في العلم .)

س ٣,١٦ أذكر بضع طرقٍ تستعمل فيها أدوات تقنية مُساعِدة على الملاحظة كما تريد إمّا دقّة أو مجال مداريك الجسيّة .

س ٣,١٧ أعط أيّ مثال قد تعرفه على جهاز ارتكز اختراعه على العلوم الأساسيّة ، ومن ثمّ غدا هو نفسه أداة من أدوات العلوم الأساسيّة . (لا تُكرّر أمثلة وُرِدَت في متن الكتاب .)

س ٣,١٨ لماذا نحتاج إلى مُسارعاتٍ نوويّة عالية الطاقة للأبحاث العلميّة في مضمار الجسيمات الأولى ؟
س ٣,١٩ فسرّ لماذا يستطيع جسيم أوليّ أن يترك أثراً مرئياً أو أن يُسبّب وَفْضَةً scintillation تراها العين المجردة ، مع أنّ الجسيم ذاته يكون بمنأى عن حدود الرؤية حتّى تحت أحسنٍ مِجْهَر .
س ٣,٢٠ لقد ذُكِر في متن الكتاب أن طاقة التآين النموذجيّة تقارب ١٠ ء ف . غير أنّ جسيماً مشحوناً سريعاً يفقد ، عند مروره عبر المادّة ، حوالي ٣٠ ء ف لكلّ حادّة تآين . اقترح سبباً أو أكثر للفارق بين هذين الرقمين .

س ٣,٢١ علّق بفقره وجيزة على هذه العبارة : « ليس معقولاً أن نخال كلّ الجسيمات التي نعرفها أولىّة بحقٍ وحقيق » .

س ٣,٢٢ لقد ذُكِر في هذا الباب أنّ النيوترون — « بضربة حظّ حسن » — يغدو مستقراً داخل النواة ، وأنّ أيّ الجسيمات مستقر إن هي إلاّ مسألة « مصادفة » . مثل هذه التعابير ، التي تبدو لاعلميّة nonscientific ، تعكس وجهة نظر عامّة في الطبيعة تعمل بدأً بيد مع نظريّة علميّة حقيقيّة أو مع مستوى خاصّ من الإدراك العلميّ . أورد مثلاً آخر أو أكثر — من تجربتك الشخصيّة ، إن أردت — على مثل هذه المشاركة بين الفهم المقداريّ ووجهة نظر وصفيّة .

تمارين

ت ٣,١ (١) أيّ نواة تتكوّن ، عندما يخضع الكوبلت - ٦٠ (^{60}Co) ، الذي تحوي نواته ٢٧ بروتوناً و ٣٣ نيوترونًا ، لاضمحلال بيتا (حيث ينبعث إلكترون وضديّد نيوترينو) ؟ (٢) عندما يخضع اليورانيوم - ٢٣٨ (^{238}U) (٩٢ بروتوناً و ١٤٦ نيوترونًا) لاضمحلال ألفا ، أيّ نواة يترك وراءه ؟ (يظهر جدول دوريّ periodic table في الباب الرابع والعشرين .)

بند ٣,٣

ت ٣,٢ وفقاً لنظرية القوى التبادلية ، يساوي المدى التقريبي للقوة h/mc ، حيث m كتلة الجسيم المتبادل . (١) تحقق من أن للكمية h/mc (التي تعرف بطول موجة كومبتون المختزل reduced Compton wavelength) بُعد الطول . (٢) احسب h/mc للبيون . (٣) لماذا كان لازماً على البيون أن يكون أهم جسيم تبادلي للقوة النووية ؟ (تلميح : هل يتفاعل البيون بقوة مع النوى ؟ وهل يقوم بذلك الإلكترون ؟)

بند ٣,٤

ت ٣,٣ يُخلق جسيم رنبي داخل نواة ذرية . فإذا تحرك بسرعة تقارب سرعة الضوء أثناء حياته البالغة 10^{-10} ث تقريباً ، صف موقعه التقريبي لحظة اضمحلاله .

بند ٣,٥

ت ٣,٤ (١) جسيم مشحون يتحرك مسافة ١٠ مايكرومترات (مايكرونات) في مُستحلب فوتوغرافي ، تاركاً مساراً مميزاً بوضوح . فإذا انطلق الجسيم بسرعة تقارب سرعة الضوء $(3 \times 10^8 \text{ م / ث})$ ، فكيف يجب أن يعيش كي يتحرك مسافة ١٠ مايكرومترات ؟ قارن هذا الزمن مع متوسط أعمار الجسيمات المشحونة في جدول ٣,١ . (٢) إذا تحرك جسيم سيغما المتعادل بسرعة 10^7 م / ث ، فما المسافة التي سيقطعها في متوسط عمره ؟ هل هذه المسافة أكبر أم أقل من قطر ذرة مفردة ؟

ت ٣,٥ (١) أي الجسيمات في جدول ٣,١ يتحرك مسافة أقل من ١٠ مي ($10 \text{ } \mu\text{m}$) قبل اضمحلاله ، إذا انطلق بسرعة 10^8 م / ث ؟ (٢) أي جسيم يتحرك قبل اضمحلاله — بنفس هذه السرعة — مسافة تزيد ، في المتوسط ، على قطر الأرض ؟

ت ٣,٦ تدبر جدول ٣,١ كي تجيب عن السؤالين التاليين :

(١) ما هي جملة المنتجات النهائية للجسيم Ξ^0 بعد أن تجري الاضمحلالات المتعاقبة مجراها المؤلف ؟

(٢) عندما ينتقل المرء من نيوكليون إلى أوميغا عبر باريونات تردد أقل باضطراب ، ماذا يحل بمتوسط الشحنة الكهربائية لكل صنف من أصناف الجسيمات ؟

ت ٣,٧ (١) افحص بدقة مسارات البيون الخمسة في شكل ٣,٦ .

(أ) أي قاعدة تربط إشارة الشحنة مع اتجاه إنحناء curvature المسار ؟ (ب) ما هو الترابط correlation (أي العلاقة المتبادلة) بين شدة المسار intensity of track وسرعة الجسيم ؟ (جسيم أبداً ينحرف بقوة أكبر .)

(٢) أحدثت إلكترون مساراً حلزونياً (لولبياً) spiral صغيراً في الجزء الأيسر من أعلى الصورة . فهل كان هذا الإلكترون موجباً أم سالباً ؟ وكيف تستطيع أن تستنتج اتجاه الحركة ؟

بند ٣,٨

ت ٣,٨ ما هي الدقة التي تستطيع أن تُقدر بها — على وجه التقريب — الكميات التالية . وذلك بدون استخدام أية أجهزة قياسية (ساعات ، ماساطر ، موازين ، وهلم جرا) :

(أ) فترات زمنية مؤلفة من فترات معدودة ؛ (ب) فترات زمنية من ساعات معدودة ؛ (ج) مسافات من بضع بوصات ؛ (د) مسافات من بضع ياردات ؛ (هـ) كتل من باوندات معدودة ؟ (إقتراح : قم ببعض التقديرات من هذا القليل ، ثم راجع دقتك بواسطة الأجهزة القياسية . قدّم تقريراً عن نتائجك .)

ت ٣,٩ إذا ما فقد جسيم ألفا ، أثناء مروره عبر غرفة غيمة ، ٣٠ ٪ من الطاقة لكل جزيء يُوْبِنُه ، فكيف أثبتاً يترك ، في أعقاب مروره ، لكل مغ ٪ ف من الطاقة المفقودة ؟

مسائل

البنية النووية

م ٣,١ وفقاً للنظرية النووية : لو كان للنيوترون والبروتون كتلة متساوية ، ولو أثرت داخل النوى القوة النووية القوية strong nuclear force* ، وحدها ، (أ) لكان $N \cong Z$ لكل النوى المستقرة (أي لتساوى تقريباً عدد النيوترونات N مع عدد البروتونات Z) ، و (ب) لما انتهى الجدول الدوري للعناصر elements ، حيث يغدو ممكناً حينئذٍ وجود نوى مستقرة ذات عدد ذري atomic number غير محدود باستعمال هذه المعلومات كخلفية ، علّل الحقائق التالية : (١) للنوى الخفيفة (مثل الأوكسجين - $^{16}_8\text{O}$) $N \cong Z$ ، (٢) للنوى الثقيلة (مثلاليورانيوم $^{238}_{92}\text{U}$) $N > Z$ ، (٣) النواة هيليوم - ^3_2He) ، الذي يكون فيها $Z = 2$ و $N = 1$ ، هي النواة المستقرة الوحيدة ذات الخاصية $Z > N$. (٤) الجدول الدوري ينهي فعلاً ؛ إذ لا توجد ذرات في الطبيعة يكون فيها $Z > 92$.†

كتل الجسيمات

م ٣,٢ لقد نوقش أن كتل الجسيمات الأولية تتخذ قيماً أقرب من مضاعفات صحيحة لوحدة كتلة معينة ، هي m_0 ، مما يمكن تفسيره بالمصادفة وحدها . وتقع الكتلة m_0 ضمن المدى $65m_e < m_0 < 70m_e$ ، حيث m_e كتلة الإلكترون . أوجد « أفضل » قيمة للكتلة m_0 في هذا المدى ، وفّر المحكّ criterion الذي تستخدمه لاختيارها . قارن كتل الجسيمات في جدول ٣,١ مع مضاعفات صحيحة للكتلة m_0 . هل تعتبر الاتفاق فيما بينها أفضل من مخض صدقة ؟ ... يمكنك أن تورد إما حجة حدسية بغض الشيء أو حجة رياضية .

متوسط المسار الحر
mean free path

م ٣,٣ اعتبر قطر نواة مساوياً للقيمة 5 fm ($5 \times 10^{-15} \text{ m}$) والمسافة spacing بين النوى في جسم صلب مساوية للقيمة $2 \text{ \AA}$ ($2 \times 10^{-10} \text{ m}$) . فما متوسط المسافة التقريبي الذي يستطيع النيوترون أن يقطعه عبر مادة صلبة قبل أن يرتطم بنواة ؟ هل تتوقع الجسيمات المشحونة أن تنفذ خلال مسافة أكبر أم أقل في المادة الصلبة ؟ لماذا ؟

تطور المسارعات

م ٣,٤ في الجدول المرفق أدناه ، تُبين خصائص المسارعات الدائرية للجسيمات كدالة function في الزمن . فإذا افترضنا استمرار الاتجاه المبين ، صف المسارع المنوي إنشاءه عام ٢٠٠٠ . (اقترح :

« هذه هي القوة المسؤولة عن التفاعلات التي تحدث بين النيوكليونات وتشارك فيها البيونات - كماربنا - كجسيمات تبادلية . وهي الأقوى من بين أربع قوى أساسية تحكم مدى الظواهر الطبيعية الذي نعرفه . أما الثلاث الأخرى . فهي - على الترتيب من الأقوى فالأضعف - القوة الكهرومغناطيسية ، والقوة (النووية) الضعيفة weak (المسؤولة عن اضمحلال بيتا ، مثلاً ، وسواء من الاضمحلالات البطيئة للجسيمات) ، وقوة الجاذبية . ومعضلة توحيد هذه القوى الأربع ضمن إطار نظري واحد لمي من أعمق المعضلات الفيزيائية المعاصرة وأكثرها إثارة .

(المشرف)

† هذا لا يعني - بالطبع - وجود ذرات صناعية يزيد عددها الذري (أو عدد البروتونات فيها) على ٩٢ ؛ بل هذا هو واقع الحال .

(المشرف)

أرسم المُعطياتِ في رسم بيانيّ على ورقة خاصّة نصف - لوغاريتميّة (semilog graph paper) من ناحيةٍ أُخرى ، كانت كُلفُ المُسارعات الحديثة حوالي ١,٠ سِنْت 0.1 ء لكلّ ء ف (أو مليون دولار 1 million \$ لكلّ جمء ف) . فعَلَى هذا المعدل rate ء كم سيكون ثمن المُسارع المتخيل إنشاؤه عام ٢٠٠٠ ؟ علّق على حَصَافَةٍ تَكهّنُكَ .

المُسارع	سنة إتمامه	طاقته	قُطرُه
ساينكلوترون لورنس / ليفنغستون Lawrence / Livingston cyclotron	١٩٣٢	١,٢ مغ ء ف	١١ بوصة
ساينكلوترون جامعة كولومبيا Columbia University cyclotron	١٩٣٨	١٤ مغ ء ف	٣٦ بوصة
سينكرو ساينكلوترون بيركلي Berkeley synchrocyclotron	١٩٤٦	٣٥٠ مغ ء ف	١٨٤ بوصة
بيفاترون بيركلي Berkeley Bevatron	١٩٥٤	٦ جمء ف	١٠٠ قدم
سينكروترون بروكهيفن المتردد التدرّج Brookhaven AGS *	١٩٦٠	٣٣ جمء ف	٨٤٠ قدم
المُسارع الوطني National Accelerator	١٩٧٢	٥٠٠ جمء ف	٦٥٦٠ قدم (١,٢٤٤ ميل)

• ترمز هذه الحروف الثلاثة (AGS) إلى التّعبير (Alternating-Gradient Synchrotron) ، أيّ السّينكروترون الذي يعتمد عمله على مبدأ التدرّج المتردد (أو - كما يُدعى أحياناً - مبدأ التبوّر القسويّ strong focusing) . وقد اقترح هذا المبدأ - أوّل ما اقترح - في الولايات المتحدة الأمريكيّة في مطلع الخمسينات .
(المشرف)



٤. قوانين الحفظ

Conservation Laws

إبان القرون القليلة الماضية ، ارتقت قوانين الحفظ من دور ثانوي مُساعد في الفيزياء إلى دور الصدارة . فما نعيه الساعة عن تفاعلات وتحويلات الجسيمات إنما ترفده — إلى حد بعيد — قوانين حفظ معينة تحكم سلوك الجسيمات الأولية . أضف إلى ذلك أنه ، في العالم بمقياسه المتراخي ، تُكوّن قوانين الحفظ مصدر أعمق تبصّرنا عن انتظام الطبيعة البسيط . كذلك ، فقد برهنت قوانين الحفظ — في أغلب الاحوال — على أنها أدوات قيمة لحلّ معضلات عملية .

٤,١ قوانين الحفظ المطلقة Absolute Conservation Laws

يُعبّر قانون الحفظ الثابت أثناء
التغير

إن قانون حفظ ما هو إفادة عن الثبات constancy في الطبيعة — وعلى الأخص ، الثبات أثناء التغير . فإذا كان بالإمكان تعريف كمية ما لنظام معزول isolated system بحيث تبقى ثابتة تماماً ، بغض النظر عن أية تغيرات قد تحدث داخل النظام ، نقول إن الكمية محفوظة بصورة مطلقة absolutely conserved . كذلك ، في السنوات الأخيرة ، أخذت تسترعي الانتباه كميات محفوظة جزئياً partially conserved ، تبقى ثابتة فقط أثناء أنواع معينة من التغيرات ؛ بيد أننا سنقتصر اهتمامنا في هذا الباب على سبع كميات يُعتقد أنها تخضع لقوانين حفظ مطلقة . وهذه هي :

١ — الطاقة (بما فيها الكتلة) .

٢ — الزخم .

٣ — الزخم الزاوي ، بما فيه الغزل .

٤ — الشحنة .

٥ — عدد أعضاء عائلة الإلكترون .

٦ — عدد أعضاء عائلة الميون .

٧ — عدد أعضاء عائلة الباريونات .

وقد كان حفظ الكميات الأربع الأولى معروفاً في الفيزياء الكلاسيكية . أمّا قوانين الحفظ

لِلثَلَاثِ الْآخِرَةِ ، فَلَمْ تُفْتَرَضْ وَتُخْتَبَرُ إِلَّا فِي الْعُقُودِ الْحَدِيثَةِ . وَتَلَقَّى ، حَتَّى قَوَانِينِ الْحِفْظِ الْكَلَّاسِيكِيَّةِ ، أَكْثَرَ اخْتِبَارَاتِهَا شِدَّةً وَصَرَامَةً فِي الْعَالَمِ دُونَ الْمَجْهَرِيِّ .

يُحْفَظُ صَنَفَانِ مِنَ الْكَمِّيَّاتِ :
خصائص الحركة ، وخصائص ذاتية

وَيُوجَدُ فِي الْقَائِمَةِ أَعْلَاهُ صَنَفَانِ مُخْتَلِفَانِ مِنَ الْكَمِّيَّاتِ يُمْكِنُ تَسْمِيَتُهُمَا : (أ) خِصَائِصُ حَرَكَةٍ ، وَ (ب) خِصَائِصُ ذَاتِيَّةٍ لِلْجَسِيْمَاتِ ؛ إِلَّا أَنَّ هَذَيْنِ الصَّنَفَيْنِ غَيْرِ مَنْفَصَمَيْنِ تَمَاماً . فَالزَّخْمُ الزَّائِي بِتَضَمُّنِ الزَّخْمِ الزَّائِي الْمَدَارِيِّ وَالْعَزَلُ الذَّائِي عَلَى حَدِّ سَوَاءٍ ؛ كَمَا أَنَّ الطَّاقَةَ تُشْمَلُ كَلَّاً مِنَ الطَّاقَةِ الْحَرَكِيَّةِ وَالْكَتْلَةِ . الَّتِي هِيَ خَاصِيَّةٌ ذَاتِيَّةٌ . أَمَّا الزَّخْمُ ، فَهُوَ خَاصِيَّةٌ لِلْحَرَكَةِ وَحَدَّهَا ؛ فِي حِينٍ أَنَّ الْكَمِّيَّاتِ الْأَرْبَعَ الْآخَرَى هِيَ خَوَاصُّ ذَاتِيَّةٌ فَحَسْبُ .

وَتَدُلُّ تَفَاعُلَاتُ وَتَحْوِيلَاتُ الْجَسِيْمَاتِ الْأَوَّلِيَّةِ عَلَى قَوَانِينِ الْحِفْظِ بِصُورَةٍ رَاضِيَةٍ ؛ وَعَلَيْهِ ، فَسَنُرَكِّزُ اهْتِمَامَنَا عَلَى هَذِهِ الْجَسِيْمَاتِ لِأَغْرَاضِ تَوْضِيحِيَّةٍ فِي هَذَا الْبَابِ ؛ بَيْنَمَا سَتُعْرَضُ تَطْبِيقَاتُ عَلَى أَنْظِمَةٍ أُخْرَى فِي وَقْتٍ لَاحِقٍ . فَالْجَسِيْمَاتُ تَزُودُ أَفْضَلَ أَرْضِيَّةٍ اخْتِبَارٍ مُمَكِّنَةٍ لِقَوَانِينِ الْحِفْظِ ؛ إِذْ أَنَّنَا نَتَوَقَّعُ مِنْ أَيِّ قَانُونِ حِفْظٍ نَخْضَعُ لَهُ أَعْدَادٌ صَغِيرَةٌ مِنَ الْجَسِيْمَاتِ أَنْ يَنْطَبِقَ عَلَى سَائِرِ الْمَجْمُوعَاتِ الْأَكْبَرِ مِنْهَا ، بِمَا فِيهَا الْأَجْسَامُ الْجَاهِرِيَّةُ الَّتِي تَنْتَمِي إِلَى عَالَمِنَا الْيَوْمِيِّ . إِلَّا أَنَّ تَسْوِيعَ اسْتِقْرَاءِ قَوَانِينِ الْحِفْظِ دُونَ الْمَجْهَرِيَّةِ إِلَى الْمَضْمَارِ الْكُونِيِّ لَهُوَ أَمْرٌ مُحْفُوفٌ بِالشَّكِّ ؛ خَيْثُ أَنَّ الْجَاهِزِيَّةَ ، الَّتِي تَبْدُو تَأْثِيرَاتِهَا فِي دُنْيَا الْجَسِيْمَاتِ تَافَهُةً تَمَاماً ، تَغْدُو ذَاتُ أَهْمِيَّةٍ كَاسِحَةٍ عَلَى الصَّعِيدِ الْفَلَكَكِيِّ .

وَلَقَدْ نَاقَشْنَا فِي الْبَابِ الثَّلَاثِ خَوَاصُّاً ذَاتِيَّةً مُتَفَرِّقَةً لِلْجَسِيْمَاتِ ؛ لِذَا ، فَسَتَفْخَصُ أَوَّلاً قَوَانِينِ الْحِفْظِ الْمُتَعَلِّقَةِ بِالْخَوَاصِّ الذَّائِيَّةِ .

٤,٢ حِفْظُ الشَّحْنَةِ Charge Conservation

يَتَطَلَّبُ قَانُونُ حِفْظِ الشَّحْنَةِ أَنْ تَبْقَى الشَّحْنَةُ الْكُلِّيَّةُ ثَابِتَةً أَثْنَاءَ كُلِّ عَمَلِيَّةٍ تَفَاعُلٍ أَوْ تَحْوِيلٍ . فِي أَيِّ حَادِثَةٍ تُشْمَلُ جَسِيْمَاتٌ ، إِذَنْ ، يَتَوَجَّبُ عَلَى الشَّحْنَةِ الْكُلِّيَّةِ مَا قَبْلَ الْحَادِثَةِ أَنْ تَنَاطَرَ نَفْسَ قِيَمَةِ الشَّحْنَةِ الْكُلِّيَّةِ مَا بَعْدَهَا . مِثْلًا ، فِي اِضْمِحْلَالِ جَسِيمٍ لَامِداً إِلَى نِيُوتْرُونٍ وَبِيُونٍ ،

الشَّحْنَةُ مَا قَبْلُ =
الشَّحْنَةُ مَا بَعْدُ

$$\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0,$$

تَكُونُ الشَّحْنَةُ صِفْراً مَا قَبْلَ الْاِضْمِحْلَالِ وَبَعْدَهُ عَلَى حَدِّ سَوَاءٍ . كَذَلِكَ ، فِي اِضْمِحْلَالِ الْبِيُونِ الْمَوْجِبِ ،

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu,$$

تَكُونُ الْمُنْتَجَاتُ مَبْنُوءَةً مُوجِباً وَنِيُوتْرِيناً مُتَعَادِلًا . وَأَخِيرًا ، قَدْ يَأْخُذُ سَبِيلَهُ تَصَادُمُ نُورِيٍّ مُمَكِّنُ ذُو طَاقَةٍ عَالِيَةٍ كَمَا يَلِي :

$$p + p \rightarrow n + \Lambda^0 + K^+ + \pi^+.$$

فلا يبقى حباً في أعقاب هذا التصادم أي من البروتونين الموجبي الشحنة ؛ لكن محصلة الشحنة +2 تظهر على الجسيمات الناتجة .

يمكن زبط الحفظ بالتكيفية

لاحظ أن قانون حفظ الشحنة يُؤفّر تفسيراً جزئياً لورود شحنات الجسيمات بمقدار واحد فقط . فلو كانت الشحنة التي يحملها بون ٧٣,٠ من شحنة الإلكترون ، لكان من الصعب حقاً أن نوازن حساباتنا في عمليات التحويل ، بحيث نستقي حفظ الشحنة . وفي واقع الأمر ، فإنه بموجب النظرية الراهنة للعمليات الأولية ، تكون الشحنة محفوظة ليس من « قبل » إلى « بعد » فحسب ، بل أيضاً في كل مرحلة متوسطة للعملية . فبمقدور المرء أن يتصور الشحنة المفردة كوحدة غير قابلة للقسمة ، يمكن تسليمها من جسيم لآخر — كالعصا في سباق التناوب (أو التتابع) relay race — دون إسقاطها قط أو تقسيمها .^٥

استقرار الإلكترون

ولعل أكثر تأثيرات قانون حفظ الشحنة فائدة فيما يتعلق بالإنسان هو استقرار الإلكترون ؛ إذ أن الإلكترون أخف جسيم مشحون ، ولا يستطيع الاضمحلال لهذا السبب وحده . والجسيمات الوحيدة الأخف منه — الفوتون والنيوترينات (والغرافيتون) — متعادلة ؛ فاضمحلال الإلكترون ، إذن ، سوف يبطل — بالضرورة — قانون حفظ الشحنة . وعليه ، فإن استقرار الإلكترون هو واحد من أبسط الاختبارات ، لكن أكثرها صرامة ، لقانون حفظ الشحنة . فلو سرى مفعول هذا القانون بصورة تقريبية ، لكان للإلكترون عُمر متناه ؛ مع أن تجربة ، أعلنت رسمياً عام ١٩٦٥ ، تضع عمر الإلكترون فوق ٢١١٠ سنة .^٦ والواقع أننا لا

^٥ لقد تكهن ذوو الشأن بوجود جسيمات افتراضية تُدعى كواركات quarks ، تحمل شحنات كسرية قيمها $\frac{1}{3}e$ و $\frac{2}{3}e$. [راجع تعليقاتنا في بُد ٢٠١٠] . وفي الوقت الذي نكتب فيه هذا الكتاب ، فإن مساعي تجريبية واسعة النطاق تجري على قدم وساق بحثاً وراء الكواركات ؛ وتشير بعض التقارير الأولية إلى أنه من الحائز أنها قد شوهدت . فإذا ما وُظّدت دعائم وجودها ، فأنها سوف لا تبطل أبداً من قانون حفظ الشحنة أو حقيقة تكيفية الشحنة ؛ بل سوف تفصح فقط عن وجود وحدة كم للشحنة تعادل قيمتها ثلاثة أضعاف أقل مما ندعوه الآن أصغر وحدة .

[حاشية إضافية : ما زالت كلمة المؤلف هذه ، التي كتبها قبل أكثر من ثماني سنين ، سارية المفعول بصورة عامة ؛ وإن اضطّر العلماء النظريون منذ ذلك الحين إلى زيادة عدد هذه الجسيمات الافتراضية من ثلاثة إلى ستة ، وذلك كمحاولة لمواكبة التقدم التجريبي في هذا المضمار . فالكوارك ، إذن ، هو واحد من ستة جسيمات وُصِّدَتِها (antiquarks) ، نستطيع تجمعاتها المتباعدة أن تفسّر خواص كل الجسيمات دون الذرية المعروفة التي تخضع للتفاعلات النووية القوية (أي الجسيمات الثقيلة) التي تُسمى « هَدْرُونات hadrons » ، والتي تشمل الميزونات والباريونات معاً . وقد اقترح وجود الكواركات لأول مرة العالمان موراي غيلمان Murray Gell-Mann وجورج زفافينج George Zweig — كل على حدة (عام ١٩٦٣) . كما أطلق عليهما غيلمان هذه التسمية الغربية ، نعت تأثير أول سطر من أغنية في رواية « ناين فينغان Finnegan's Wake » التي نشرها عام ١٩٣٩ الأديب الإيرلندي المشهور جيمس جويس James Joyce (١٨٨٢ - ١٩٤١) .

(المشرف)

^٦ لتقرير فني عن هذه التجربة ، أنظر م . ك . م . و . ف . راينز ، المجلد ١٤٠ ، ص ٩٩٢ B (عام ١٩٦٥) : M.K.Moe and F. Reines, *Physical Review* 140, B992 (1965).

تملك حق القول عما قد يحدث في ٢٠١٠ سنة ، الذي يشكّل زمناً أضخم بكثير ممّا ندعوه بعمر الكون . ومعنى هذا الرقم - تجريبياً - أنّه في مجموعة قوامها ٢٠١٠ إلكترون ، لا يخضع للاضمحلال أكثر من إلكترون واحد كلّ سنة . فحفظ الشحنة ينبغي أن يُعتَبَر على الأقلّ كتقريب جيد لقانونٍ مُطلق .

٤,٣ قوانينُ حفظِ عددِ أعضاء العائلة Family-number Conservation Laws

بخلاف القوانين الأربع الأخرى ، التي كانت معروفةً في العالم الجاهريّ ، فقد اكتُشِفَت القوانين الثلاثة لحفظ عدد أعضاء العائلة من خلال دراسات تحويل الجسيمات . ونستطيع أن نُفسّر مدلولها على أفضل وجه بواسطة بعض الأمثلة .

□ عائلة الباريونات Baryon Family

أذكرُ أولاً أن البروتون وكلّ الجسيمات الأثقل منه في جدّول ٣,١ تُدعى باريونات ؛ أي أنّها تنتمي إلى عائلة الباريونات . ففي اضمحلال جسيم Λ (لامدا) الـلاَمستقرّ ،

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- ,$$

حفظ الباريونات

يتلاشى باريون واحد ، هو جسيم Λ ؛ لكنّ يظهر آخر ، هو البروتون . وبالمثل ، في اضمحلال جسيم Σ^0 (سيغما المتعادل) ،

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma ,$$

يكون عدد الباريونات محفوظاً . لاحظ أنّ بيوناً يُخلَق في أوّل هذين المثالين ؛ بينما يُخلَق في الآخر فوتون . والبيونات والفوتونات لا تنتمي إلى أيّ من مجموعات العائلات الخاصة ؛ فبمقدورها أن تُولَدَ وأن تُفنى بأيّ عدد . كذلك ، في تصادم بروتون - بروتون نموذجي ، يبقى عدد الباريونات (إثنان) ثابتاً ، كما في المثال التالي :

$$p + p \rightarrow p + \Sigma^+ + K^0 .$$

... هذه الأمثلة وأخرى عديدة جعلت عدد الباريونات يبدو وكأنّه ثابت إلى الأبد - في كلّ حادثة منفردة ، وبالتالي طبعاً ، في أية بنية أكبر .

وكلّ من الجسيمات Ω ، Ξ ، Σ ، Λ والنيوترون يخضع لاضمحلال تلقائيّ إلى باريون أخفّ . لكنّ أخفّ باريون ، البروتون ، ليس له من مكان يُسمّى شطره . ففانون حفظ الباريونات يجعل البروتون مستقراً ؛ كما يجعل بالإمكان بناء النوى والذرات ، وبالتالي ، عالمنا . ومن وجهة نظر فيزيائيّ الجسيمات ، فإنّ هذه لظاهرة خارقة حقاً ؛ حيث يحتم البروتون فوق كتلة تقارب ٢٠٠٠ ضعف كتلة الإلكترون ، بطاقة ذاتيّة مقدارها ١ جـ ف تقريباً ؛ بينما تربض تحته بضعة جسيمات لامستقرة قانون حفظ الباريونات وحده هو الذي يجسّ هذه الطّاقة

استقرار البروتون

الهائلة داخل البروتون جاعلاً منه لينةً بنائيةً مناسبةً للكون . فالبروتون يبدو مستقرًا بصورة مطلقة .
أما إذا كان لا مستقرًا ، فنصف عُمره - وفقًا للتجربة * - أطولُ من 2×10^{28} سنة . وكما نُعبرُ
عن هذه النتيجة بدلالة احتمال probability ، بدلاً من زمن كهذا لا قِل لنا بتخيل طوله ، نقول :
إن الاحتمال أن يضمحلَّ بروتون في سنة واحدة هو أقلُّ من 0.5×10^{-28} (ولم يتم بعد رؤية
أي مثال محدد على اضمحلال البروتون) .

والعبارة - أن لكلِّ باريون يتلاشى يظهرُ باريون آخر - هي غيرُ مكتملة ؛ إذ أنها تُسقطُ
ضديّات الباريونات من حسابنا . فحادثة نموذجية لإنتاج ضديّات البروتون في بيفاترون بيركلي
قد تجري كما يلي :

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p},$$

(حيث يرمز الخط الأفقي فوق الحرف إلى ضديّد الجسيم . وبما أن لضديّد البروتون شحنةً
سالبة ، تكون الشحنة الكلية $2+$ محفوظة .) فيبدو أننا حولنا باريونين إلى أربعة . وبالمثل ، في
حادثة مُحَقِّ ضديّد البروتون ،

$$p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0,$$

ضديّات الباريونات والعدد
الباريوني السالب

يتلاشى باريونان ، فيما يبدو . فالطريقة الواضحة لترميم قانون حفظ الباريونات هي أن نَعزُو إلى
ضديّات الجسيمات العددَ الباريونيَّ baryon number (-1) ، وإلى الجسيمات العددَ الباريونيَّ
 $(+1)$. عندئذ ينصّ هذا القانون على أنه : في كلِّ حادثة ، يكون (عددُ الباريونات الكليّ
ناقص عدد ضديّات الباريونات الكليّ) محفوظاً :

$$\text{total baryon number} = N_B - N_{\bar{B}} = \text{constant}. \quad (4,1)$$

$$[\text{العدد الباريوني الكلي} = N_B - N_{\bar{B}} = \text{ثابتاً}]$$

ومع كلِّ هذه التعاريف الاعتبارية المتعددة - أي جسيمات يجب أن يُدعى باريونات ،
وأبها لا ؛ كذلك أيها يتطلب أعداداً باريونية سالبة - قد لا يبدو عجيباً أننا نستطيع صياغة
قانون حفظ . غير أنه - في الواقع - ليس من السهل إيجاد قانون حفظ مطلق . فالعشور على أية
كمية محفوظة بصورة مطلقة في الطبيعة هو من عظم الأهمية بحيث يسوّغ ابتكار بضعة تعاريف
اعتباطية . والاعتباطية في هذه المرحلة من التاريخ لا تعكس سوى افتقارنا إلى أي إدراك عميق

تبرير عملي للعدد الباريوني السالب

* أنظر : هـ . س . غير ، و . ر . كروب ، ف . واينر و ب . مير : « اختبار تجريبي لحفظ الباريونات » ، المجلة النقدية
الفيزيائية ١٥٨ ، ١٣٢١ (١٩٦٧) :

H.S.Gurr, W.R. Kropp, F.Reines, and B. Meyer, "Experimental Test for Baryon Conservation",
Physical Review 158, 1321 (1967).

لسبب حفظ الباريونات ؛ إلا أنها لا تحط من قدر حفظ الباريونات البين كناموس للطبيعة .
أضيف إلى ذلك أن رياضيات فيزياء الكم تبين أن استخدام عدد باريوني سالب لضديدات
الحسيمات هو طبيعي تماماً ؛ بل إن النظرية - في الحقيقة - تقتضي ذلك . ومرد ذلك أن
وصف ظهور ضديد جسيم هو « مكافي » (بمعنى رياضي لا نستطيع الخوض فيه هنا)
لوصف تلاشي جسيم ؛ والعكس بالعكس ، فإن محق ضديد جسيم « مكافي » لخلق جسيم .

□ عائلة الإلكترون وعائلة الميون Electron Family and Muon Family

لا تشمل عائلة الإلكترون إلا الإلكترون ونيوترينه ؛ كما لا تشمل عائلة الميون إلا الميون
ونيوترينه . ولكل من هاتين المجموعتين الصغيرتين ، يتم حفظ أعضاء العائلة تماماً على غرار
حفظ الباريونات . فينبغي أن تعتبر ضديدات الحسيمات أعضاء سالبية من هاتين العائلتين ،
والحسيمات أعضاء موجبة . وهذان القانونان لحفظ الحسيمات الخفيفة غير مختبرين بنفس
الدرجة كقوانين الحفظ المطلقة الأخرى ، نظراً للصعوبات التي نكتنف دراسة النيوترينات ؛ إلا
أنه لا توجد استثناءات معلومة لها .

واضمحلال بيتا للنيوترون ،

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e ,$$

يدلل بوضوح على قوانين الحفظ التي ناقشناها . ففي بادئ الأمر ، تكون شحنة النيوترون المفرد
صفرًا ، والعدد الباريوني ١ ؛ وعدد أعضاء عائلة الإلكترون صفرًا . أما في النهاية ، فإن
البروتون والإلكترون المتضادي الشحنة يحفظان الشحنة الصفرية ؛ ويحفظ البروتون المفرد العدد
الباريوني ؛ كما يحفظ الإلكترون وضديد نيوترينه $\bar{\nu}_e$ معاً عدد أعضاء عائلة الإلكترون
الصفرية كذلك ، في عمليتي اضمحلال البيون ،

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \text{ و } \pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

يقتضي حفظ عائلة الميون أن يرافق نيوترينو ضديد الميون μ^+ ، وأن يرافق ضديد نيوترينو
الميون μ^- . ويضمحل الميون بدوره إلى ثلاثة جسيمات ؛ مثلاً ،

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e ,$$

مما يحفظ أعضاء عائلة الميون وعائلة الإلكترون .

وثمة مؤشر قوي منبثق عن دراسات الحسيمات الأولية يشير إلى أن الكابح الوحيد

قانونا حفظ إضافيان لعدد أعضاء
العائلة

اضمحلال النيوترين يدل على عدد
من قوانين الحفظ

اضمحلال البيون

اضمحلال الميون

المفروض على دَقِّ الأحداث الفوضوي في دنيا الصَّغير جداً هو الذي فرضته قوانينُ الحفظ . فكلُّ شيءٍ يمكن حدوثه دون أن يخرقَ قانونَ حِفْظٍ يَحْدُثُ فِعْلاً . * وَحَتَّى عام ١٩٦٢ ، كان هناك استثناء بارز لهذه القاعدة ؛ وتفسير التناقض المترتب على ذلك عزز - بشكل رائع - الفكرة بأنَّ قوانين الحفظ تلعب دوراً رئيسياً في العالم دون المجهرى . وتفصيل ذلك أن اضمحلال الميون إلى إلكترون وفوتون ،

$$\mu^- \rightarrow e^- + \gamma ,$$

لغز $\mu-e-\gamma$

لم يُرَ مطلقاً - الأمر الذي أخذ يُعرفُ بلغز $\mu-e-\gamma$ ؛ إذ كان يُعتقدُ ، قبل اكتشاف نيوترينو الميون ، أن الإلكترون والميون ونيوتريناً واحداً تكونُ عائلةً واحدة (يُطلقُ عليها اسمُ عائلة اللبتونات lepton family)[†] تخضع لقانون واحد لحفظ العائلة . فلو كانت هذه هي الحال ، لما حظُرَ أيُّ قانونٍ حِفْظٍ اضمحلال الميون إلى إلكترون وفوتون ؛ حيث يحلُّ إلكترون محلَّ الميون الضائع ؛ كما تكونُ الشحنة وسائر الكميات الأخرى محفوظة . وعليه ، فبِمُقْتَضَى النظرية الكلاسيكية للقانون الفيزيائي ، كان يتعيَّن ألا يكونُ غيابُ هذه العملية مدعاةً لأيِّ قلق ؛ بل ، قبل هذا وذاك ، لم يكنُ ثمة من قانون معروف يتطلَّب حدوثها . كان هنالك فقط العبارة السلبية المزدوجة double negative : لم يكنْ معلوماً أيُّ قانون حِفْظٍ يحول دون الاضمحلال .

* يقتبس بعض الفيزيائيين جملةً من رواية ت. ه. وايت: « ملك الماضي والحاضر » (نيويورك : شركة أولاد ج. ب .

بَنام ، ١٩٣٩):

T.H. White, *The Once and Future King* (New York: G.P. Putnam's Sons, 1939)

ويعبرون عنها بحدة أكبر بقولهم : إن كلَّ شيءٍ غير محظور إلزامي . ومثل هذه العبارات ينبغي أن تعتبر أنماطَ نظر إلى الطبيعة ، وليس نواحيسَ طبيعية .

[حاشية إضافية : تيرنس هانبوري وايت Terence Hanbury White (١٩٠٦-١٩٦٤) هو روائي إنجليزي له أيضاً مؤلفات في التاريخ الاجتماعي وكتابات ساخرة جيدة . وقد لمع نجمه - أكثر ما لمع - بفضل روايته المذكورة أعلاه ، التي اقتبس أحداثها ببراعة منقطعة النظير عن كتاب السير توماس مالوري Sir Thomas Malory حول الملك آرثر وفرسان المائدة المستديرة *Morte Darthur* (١٤٧٠) . ورواية وايت هذه هي - في الحقيقة - رابعة ، نُشِرَ الجزء الأول منها عام ١٩٣٩ والرابع عام ١٩٥٨ . وتعرفها الجماهير على الأغلب كمسرحية موسيقية حُوِّلت فيما بعد إلى فيلم موسيقي بعنوان « كاميلوت » Camelot .

(المشرف)

† بخلاف الهذرونات التي تخضع للتفاعلات النووية القوية ، فإنَّ اللبتونات (= الحسببات الخفيفة) تخضع للتفاعلات الضعيفة .

(المشرف)

غَيْرَ أَنَّ النَّظْرَةَ لِلدَّورِ الْأَسَاسِيِّ لقوانين الحفظ في الطبيعة ، كالكابح الوحيد على العمليات الفيزيائية ، كانت قد غَدَتْ متَّصِلَةً في تفكير الفيزيائيين إلى درجة أَنَّ غِيَابَ هذه الطَّرِيقَةِ المَعِينَةِ لاضمحلال الميُون اعتُبِرَتْ أُحْجِيَةً هَامَّةً . وقد كانت هذه الأُحْجِيَةُ هي التي حَفَزَتْ — بالدرجة الأولى — البحثَ عن نيوترينو ثانٍ ينتمي إلى الميُون وَحْدَهُ . فوطِدَ اكتشاف نيوترينو الميُون — بشكلٍ شبه قاطع — الحقيقة أَنَّ الإلكترون والميُون ينتميان إلى عائلتين صغيرتين مختلفتين يُحْفَظُ كُلُّ مَهِمَا عَلَى حِدَةٍ . وَكُونُ الإلكترون والميُون يحكمها قانونا حفظ مستقلان ، فَإِنَّ حَظَرَ اضمحلال $\mu-e-\gamma$ أَضْحَى مفهوماً لَوَّه ؛ كَمَا أَنَّ الْإِيْمَانَ — بِأَنَّ مَا يُمْكِنُ أَنْ يَحْدُثَ يَحْدُثُ فعلاً — عَزَّزَ إلى مدى أبعد .

اكتشاف نيوترينو الميُون حلَّ هذا اللغز

... ننتقل الآن إلى قوانين الحفظ التي تنطوي على خواصَّ للحركة (الثلاثة الأولى في القائمة على صفحة ٩٣) .

٤,٤ حِفْظُ الطَّاقَةِ Energy Conservation

إِنَّ الْاِكْتِشَافَ ، في الأربعينات من القرن الماضي ، أَنَّ الحرارة هي صورةٌ من صُورِ الطَّاقَةِ ، أَفْضَى بِسُرْعَةٍ إِلَى التَّسْلِيمِ بِالْأَهْمِيَّةِ الجامعة لقانون حِفْظِ الطَّاقَةِ . فتحت إسم القانون الأول للديناميكا الحرارية first law of thermodynamics ، أَمْسَى هذا دعامةً من دعائم النظرية المطورة للديناميكا الحرارية . ومنذ ذلك الحين ، اِكْتِشِفَتْ صُورٌ أُخْرَى من الطَّاقَةِ ، قابلةٌ كُلُّهَا لِلتَّحْوِيلِ فيما بينها interconvertible ، مثل عِمَلَاتِ الْعَالَمِ ، وَكُلُّهَا يَسَاهِمُ بِنَصِيْبِهِ في مجموع الطَّاقَةِ الثَّابِتِ . ففي طول وعَرْضِ الكيمياء والأحياء والهندسة ، فضلاً عن فروع الفيزياء بِجَمَلَتِهَا ، يُعْتَبَرُ قانون حِفْظِ الطَّاقَةِ قانوناً أساسياً وأداةً عمليَّةً على حدِّ سواء .

الطاقة : صُوَرُهَا المتعددة تجعلها مهمة على نطاقٍ واسع

وبالرَّغْمِ من هذا المدى الواسع لتطبيقات حفظ الطَّاقَةِ ، فسوف نقصر النَّقَاشَ في هذه المرحلة على دنيا الجسيمات ، حيث لا يكون مهماً سوى صنفين من الطَّاقَةِ : الطَّاقَةُ الْحَرَكِيَّةُ ، وطاقَةُ الكتلة . فعلى سبيل المثال ، يكون للجسيمين ،

هناك صورتان فقط من الطاقة للجسيمات

$$E = K_1 + m_1 c^2 + K_2 + m_2 c^2 . \quad (٤,٢)$$

وخلال عمليات التَّحْوِيلِ ، تتغيَّر الطَّاقَاتُ الحَرَكِيَّةُ وطاقَاتُ الكتلة ، لكنَّ الطَّاقَةَ الكُلِّيَّةَ تَبْقَى محفوظة :

$$E_{\text{before}} = E_{\text{after}} . \quad (٤,٣)$$

وهناك نتيجةٌ بسيطةٌ لحفظ الطَّاقَةِ للاضمحلال التلقائي للجسيمات الالامستقرة ، ألا وهي المتطلب أَنَّ الكتلة الكُلِّيَّةَ لِلْمُنتَاجَاتِ (الوليدة) ينبغي أَنْ تَقُلَّ عن كتلة التَّوْجِ (الأَصْل) parent . ففي كُلِّ من عمليات اضمحلال النَّالِيَةِ ، يكون مجموعُ الكتل على اليمين أَقَلَّ من الكتلة على اليسار :

قاعدة « الانحدار » لاضمحلال الجسيمات : كتلة التَّوْجِ تزيد على كتل النَّاتِجِ

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-,$$

$$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-,$$

$$\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0.$$

وعليه ، تكون هذه عملياتٍ جائزة ، حيث « تنحدر » فيها الكتلة نحو قيمةٍ أدنى [من اليسار إلى اليمين] ، أما الاضمحلالات « الصاعدة » ، فهي محظورة . ويكونُ الجسيمُ لامستقرٍ ساكنٍ طاقةً كينونته فقط ، وليس طاقة حركة . والفرق بين كتلة التتوَج هذه وكتلة الجسيمات الناتجة يتحوَّل إلى طاقةٍ حركية ، تنقلها الجسيمات الناتجة بعيداً .

وقد يفترض المرءُ أنه إذا كان الجسيمُ التتوَج متحركاً أثناء اضمحلاله ، فسوف يكون له ذاته طاقة حركية قد تتحوَّل إلى كتلة . إلا أنَّ حفظ الزخم يمنع ذلك . وتدعى طاقة الحركة الزائدة طاقةً لامتاحة (لامتوافرة) unavailable energy لناخذُ حالةً متطرفة : لو تحوَّلت طاقةُ الجسيمِ التتوَج كلها ، من طاقة حركية زائد طاقة كتلة ، إلى طاقة كتلة للجسيمات الناتجة ، لكانت هذه الجسيمات الناتجة عديمة الحركة (أي لساوت طاقتها الحركية صفراً) ، ولخُرقَ بالتالي حفظ الزخم على وجه اليقين ؛ إذ لما كان للجسيمات الناتجة زخمٌ يُناظرُ زخمَ الجسيمِ التتوَج . وقد آل الأمر في النهاية إلى أنَّ حفظ الزخم والطاقة ، إذا ما أُخذَ معاً ، يحولان دون الاضمحلالات الصاعدة إلى جسيماتٍ أثقل ، بغض النظر عن السرعة التي قد يتحرك بها الجسيمُ الابتدائي . وعلى صعيد آخر ، إذا تصادم جسيমান ، فإن بعض - وليس كل - طاقتها الحركية تكونُ متاحةً available لِخلقِ كتلة هذه هي الطريقة التي تُصنعُ بواسطتها الجسيمات اللامستقرة المتبينة في المختبر .

٤,٥ حفظُ الزخم Momentum Conservation

الزخم هو خاصيةٌ بحتةٌ للحركة : أي أنه ، إن لم توجد أية حركة ، لن يكون ثمة أي زخم . وفي الميكانيكا الكلاسيكية ، يُعرفُ الزخم كحاصل ضرب الكتلة والسرعة :

الزخم : كمية متجهة

$$p = mv \quad (٤,٤)$$

(حيث p هو الرمز المعتاد للزخم) . أما في الميكانيكا النسبية (حيث يوجد زخم حتى للجسيمات العديمة الكتلة) ، فيكون تعريفه أعقد قليلاً .^٥ فالزخم أبسط من الطاقة من حيث أنه لا يتميز بتعددية الأشكال ؛ بيد أنه أعقد من الطاقة من ناحية واحدة ؛ إذ أنه كمية متجهة ، وليس كمية قياسية . وفي الباب السادس ، سنعيد النظر في جمع المتجهات ، الذي يشكل سمة جوهرية لقانون حفظ الزخم . أما للأغراض التدليلية الراهنة ، فحسبنا أن نستفيد من الحقيقة القائلة : إن مجموع متجهين أو أكثر قد يكون له مدى واسع من القيم ،

٥ أنظر المعادلتين ٢١,٢٦ و ٢١,٣٠ .

اعتماداً على الاتجاه النسبي للمتجهات . وعلى وجه الخصوص ، فإن مجموع متجهين متساويين مقداراً ومتضادين اتجاههما يكون صفراً .

إعتبر الآن تطبيق قانون حفظ الزخم على اضمحلال كيون إلى ميون ونيوترينو

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

وافرض أن الكيون يكون في حالة سكون قبل الاضمحلال [شكل ٤,١ (أ)] . فبعد الاضمحلال ، يقتضي حفظ الزخم أن ينطلق الميون والنيوترينو بزخمين متساويين مقداراً ومتضادين اتجاههما [شكل ٤,١ (ب)] ؛ إذ أنه بهذه الطريقة وحدها يمكن للمجموع الاتجاهي vector sum للزخمين النهائيين أن يساوي الزخم الأصلي ؛ أي ، صفراً . وهذا النمط من الاضمحلال ، الذي يُدعى اضمحلالاً ثنائي الجسم two-body decay ، هو شائع إلى حد ما ، ويميز دائماً بأن الجسيمات تنبثق باتجاهين متضادين تماماً .

الاضمحلالات الثنائية الجسم :
تنبثق المنتجات بزخمين متساويين ومتضادين في إطار إسناد السكون للجسيم الناتج



(أ)



(ب)

شكل ٤,١ : حفظ الزخم في اضمحلال الكيون يساوي الزخم الكلي صفراً ما قبل وما بعد الاضمحلال على حد سواء

أما في الاضمحلال الثلاثي الأجسام three-body ، فتكون للجسيمات المنبثقة حرية أكبر تفحص مقدماً شكل ٨,١٤ كي ترى اضمحلال كيون ساكن إلى ثلاثة بيونات ، تُؤشر مساراتها في اتجاهات ثلاثة مختلفة . فمجموع الزخام النهائية الثلاثة يكون صفراً ؛ غير أنه لا توجد أية قاعدة ثابتة عن اتجاهاتها النسبية . أما حفظ الزخم على نطاق أعظم ، فهو مبيّن في شكل ٤,٢ ، حيث تنبثق ثمانية جسيمات عن حادثة مفردة .

إضمحلالات ثلاثية الأجسام : لا توجد قواعد بسيطة للاتجاه

وهناك حظر أساسي لقانون حفظ الزخم ضد الاضمحلالات الأحادية الجسم one-body . إعتبر ، مثلاً ، إمكانية الاضمحلال

$$K^+ \rightarrow \pi^+$$

إضمحلال أحادية الجسم : يحول دونها قانونا حفظ الطاقة والزخم مجتمعين معاً

أي تحويل الكيون إلى بيون . فهو يخضع لقانوني حفظ الشحنة وحفظ عدد أعضاء العائلة ؛ كما أنه متوافق مع حفظ الطاقة لأنه « تنازلي » في الكتلة ، ويخضع أيضاً لحفظ الغزل . بيد أن الفرق في الكتلة بين الكيون والبيون ينبغي أن يتحول إلى طاقة حركة ؛ وعلى ذلك ، لو كان الكيون ساكناً ، لانتطلق البيون بعيداً . وأبداً كان اتجاه حركته ، فسيكون له زخم ما ، وبالتالي سيخرق حفظ الزخم ، لأن الكيون لم يكن له أي زخم البتة . من ناحية أخرى ، إذا وضعنا

قانون حفظ الزخم موضع التنفيذ وأبقينا البيون في حالة سكون ، فسنكون قد خرّفنا بذلك حفظ الطاقة لأنّه ، في هذه الحالة ، لن نتمكن من تعليل الطاقة الزائدة الناجمة عن فرق الكتلة .



شكل ٤.٢: حفظ الزخم في حادثة مَحَق ضديّد بروتون
ضديّد بروتون ، كان قد دخل من أسفل الصورة ، يتصادم مع بروتون في غرفة الفقاقيع . فَيَتَرَدَّدُ spray off نتيجة لحادثة المحق هذه ثمانية بيونات : أربعة سالبة وأربعة موجبة . ويمكن قياس زخم كل منها من انحناء المسار ؛ وإنّ الجمع الاتجاهي للزخام الثانية يساوي تماماً زخم ضديّد البروتون المفرد الداخل . أما الإنشاء kink في المسار في أسفل اليمين ، فيشير إلى اضمحلال بيون : $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. (بأي اتجاه إجمالي انطلق النيوتريينو غير المرئي؟)
(المصدر : مختبر لورنس للإشعاع ، جامعة كاليفورنيا ، بيركلي .)

٤.٦ حِفْظُ الزَّخَمِ الزَّائِيَّ Angular-momentum Conservation

في بواكير القرن السابع عشر ، نشر يوهانز كيبلر ثلاثة قوانين عن الحركة الكوكبية planetary motion . وما ثانياً ، الذي يُدعى قانون المساحات law of areas ، إلّا قانون حِفْظ . فَيَمُوجِبُ هذا القانون ، فإنّ خطّاً مستقيماً وهمياً مرسوماً من الأرض إلى الشَّمْسِ يَمَسِّحُ sweeps out مساحةً في الفضاء بمعدّل ثابت . مثلاً ، في غُضُونِ يوم واحد ، يمسح هذا الخطُّ منطقةً ضيقةً مثلثة الشكل triangular ، يقع رأسها apex عند الشَّمْسِ وقاعدتها base على امتداد مدار الأرض . وتكون مساحة هذا المثلث هي نفسها كلّ يوم من السّنة . وهكذا ، فحين تكون الأرض أقرب إلى الشَّمْسِ ، فإنّها يجب أن تتحرّك أسرع كي تُحدّدَ مثلثاً بنفس المساحة . بل إنّ سرعتها تزداد ، في الحقيقة ، إلى درجةٍ كافيةٍ بالضبط للإبقاء على زخمها الزَّائِيَّ ثابتاً ، وبالتالي يمكن أن نشقّ قانون المساحات كنتيجة بسيطة لقانون حفظ الزَّخَمِ الزَّائِيَّ . والواقع أنّ مفهوم الزَّخَمِ الزَّائِيَّ لم يدخل الفيزياء إلّا بعد اكتشافات كيبلر بأكثر من مئة سنة ؛ ولم يَبْدُ كواحدٍ من صفوة مفاهيم الميكانيكا الأساسيّة إلّا مع مقدّم الصِّياغات الرِّياضيّة الجديدة للميكانيكا في القرن التاسع عشر . ومثله مثل الزَّخَمِ ، فإنّ الزَّخَمِ الزَّائِيَّ هو خاصيّة بحته للحركة ، كما أنّه كميّة متّجهة . وسنعرّفه بدقّة في الباب التاسع .

إنّ قانون كيبلر للمساحات مكافئ لحفظ الزَّخَمِ الزَّائِيَّ

الزخم الزاوي المِعْزَلِي في اضمحلال
الجسيمات

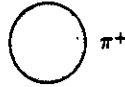
وكما هما للأرض ، فإنَّ الغَزْلَ والزَّخْمَ الزَّاوِيَّ المداريَّ كليهما يكونان هامَّين للجسيمات
الأُولِيَّة أيضاً . وأحد الأمثلة البسيطة التي تتضمن الغَزْلَ فقط هو اضمحلال البيون العديم الغَزْل
spinless إلى مُيون ونيوترينو ، غَزْل كلِّ منهما يساوي $\frac{1}{2}$ (بَوَحَدَات $\hbar$) . وفي شكل ٤,٣ ،
نستخدم الحرية الفنية artistic license في التعبير ونمثل الجسيمات ككُرَيَّات ذات سِهَام تشير
إلى اتِّجاه غزلها . فالميون والنيوترينو يَغْزِلَان باتجاهين متضادَّين كي يحفظا الزَّخْمَ الزَّاوِيَّ الكليَّ
الصَّفْريَّ .

تقارن الغَزْلَ والزَّخْمَ الزَّاوِيَّ المداريَّ

كذلك ، يدلُّل اضمحلال آخر ثنائيَّ الجسم — هو اضمحلال Λ — على تَقَارُن (أو
اقتران) coupling الغَزْل والحركة المدارية . فجسيم لامدا ، الذي يُفْتَرَضُ أَنَّهُ ساكن في
بإحدى طرائق اضمحلاله الممكنة هي

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-.$$

قبل (لا يوجد غَزْل)



بعد (الغَزْلان يُلغِيَان بعضُهما البعض)



شكل ٤,٣ : حفظ الزَّخْمَ الزَّاوِيَّ
في اضمحلال البيون يساوي
الزَّخْمَ الزَّاوِيَّ الكليَّ صفراً ما قبل
وما بعد الاضمحلال .

وقد يتمَّ ذلك وَفْقاً لطريقتين . فَقَدْ يتحرَّك البروتون والبيون بعيداً عن بعضهما البعض
بدون أيِّ زخم زاويِّ مداريِّ ، بحيث يَتَّجِه غَزْلُ البروتون إلى أعلى ليناطِرَ غَزْلَ Λ الابتدائيَّ
[شكل ٤,٤ (ب)] ؛ أو قد يَنْقَلِبُ be flipped غَزْلُ البروتون بحيث يَتَّجِه إلى أسفل ، بينما
ينفصل البروتون والبيون بِوَحْدَةٍ واحدة من الزَّخْمَ الزَّاوِيَّ المداريَّ متَّجِهَةً إلى أعلى [شكل ٤,٤
(ج)] . ففي الحالة الأولى ، يكون :

الغَزْلُ الأصليُّ $\frac{1}{2}$ (إلى أعلى) ← الغَزْلُ النَّهائيُّ $\frac{1}{2}$ (إلى أعلى) .

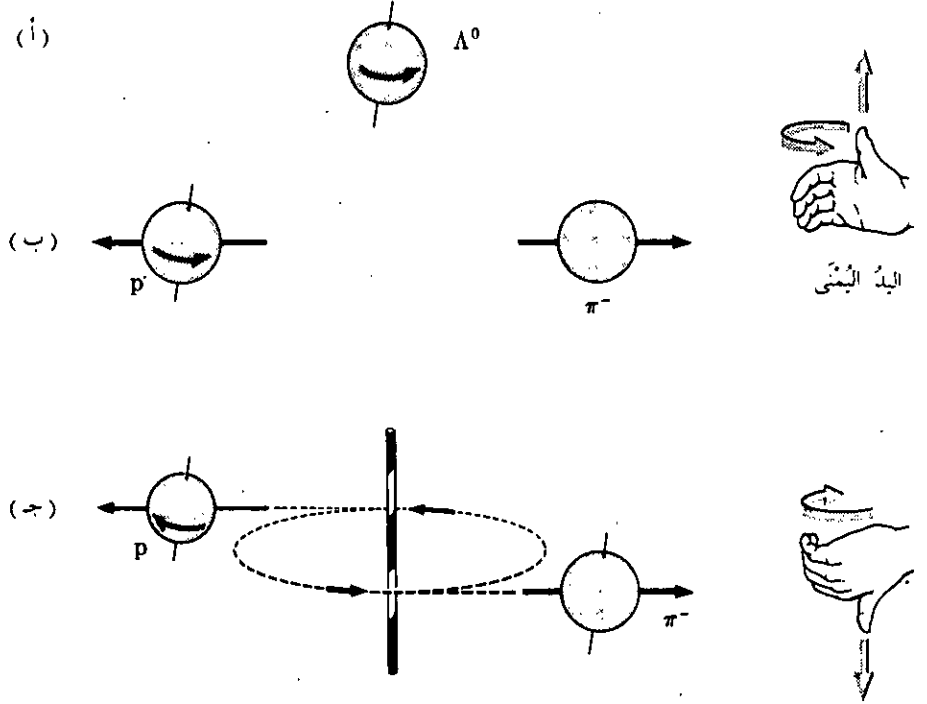
أما في الحالة الثانية ، فيكون

الغَزْلُ الأصليُّ $\frac{1}{2}$ (إلى أعلى) ← الغَزْلُ النَّهائيُّ $\frac{1}{2}$ (إلى أسفل) + الزَّخْمَ الزَّاوِيَّ المداريَّ ١
(إلى أعلى) .

ونظراً لطبيعة الزَّخْمَ الزَّاوِيَّ الاتجاهية ، فإنَّ حساب « ما قبل وما بعد » البسيط ،
الذي يصلح للشحنة أو العدد الباريوني ، لا يمكن تطبيقه على غَزْل الجسيمات . إلا أَنَّهُ توجد

قاعدة كمية خاصة لجمع مقادير
الغزل

قاعدة عامة واحدة هي : أن مجموع مقادير الغزل الابتدائية ومجموع مقادير الغزل النهائية ينبغي
إما أن يكون كلاهما صحيحاً أو أن يكون كلاهما نصف عدد صحيح فردي . وينجم هذا عن
قوانين الكم التي تحكم اتجاهات المتجهات (الباب الرابع والعشرون) . فهذه القاعدة تعني ،
مثلاً ، أن جسيماً ذا غزل $\frac{1}{2}$ لا يستطيع الاضمحلال إلى جسيمين غزل كل منهما يساوي $\frac{1}{2}$ ، مع
أن جسيماً ذا غزل 1 قد يضمحل إلى جسيمين غزل كل منهما يعادل 1 .



شكل ٤,٤ : حفظ الزخم الزاوي في اضمحلال جسيم لامتداد ... يبين استخدام قاعدة اليد اليمنى أن غزل الجسيمات يكون
إلى أعلى في الرسمين التوضيحيين (أ) و (ب) وإلى أسفل في الرسم التوضيحي (ج) ؛ أما الزخم الزاوي المداري فهو إلى أعلى
في الرسم (ج) .

★ ٤,٧ قوانين الحفظ ومبادئ التماثل (أو التناظر)

Conservation Laws and Symmetry Principles

إن السمة التي تجعل قوانين الحفظ تبدو للعالم النظري والفيلسوف كأجمل وأعظم التعبيرات
عن الناموس الطبيعي هي علاقتها مع مبادئ التماثل في الطبيعة . بعبارة أخرى ، تُحفظ الطاقة
والزخم والزخم الزاوي كافة لأن الزمان والمكان متكافئ الاتجاهات isotropic (متماثلان في
كل اتجاه) ، ومتجانسان homogeneous (متماثلان في كل موضع) . وهذه عبارة في غاية
الإثارة إذا ما فُكر فيها المرء ملياً ؛ إذ أنها تنص على أن ثلاثة من قوانين الحفظ المطلقة السبعة
تتبع لا شيء إلا لأن الفراغ empty space ليس له خصائص مميزة ، كما أنه — في كل

تكافؤ الاتجاهات والتجانس هما
التماثلان الأساسيان للزمان والمكان

موضع - خالٍ وغير مميّز بنفس الدرجة . (نظراً للآصرة النسبية relativistic link بين الزمان والمكان ، فإننا نعني - في الواقع - الزمكان spacetime) . أي يبدو أننا نحصل هنا ، بالمعنى الدقيق لهذه الكلمة ، على شيءٍ من لا شيء .

ومع ذلك ، فليس ثمة من شكٍ حول الصلة بين الفراغ وقوانين الحفظ الأساسية . وتثير هذه الصلة تساؤلاتٍ فلسفيةً سننوه بها دون أن نتابعها بأيّ إسهاب . فعلى صعيدٍ واحد ، يمكن تأويل هذه الصلة بحيث تعني أن قوانين الحفظ ، كونها مبنية على أساس أكثر الأفكار أوليةً وحديثةً ، هي أعمقُ التعابير عن الناموس الطبيعي . وعلى صعيدٍ آخر ، قد يُناقشُ المرء - كما فعل برتراند رسل Bertrand Russell * - بأن هذه الصلة لا تبرهن إلا على خواء hollowness قوانين الحفظ (التي هي مجرد « بدهيّات truisms » ، وفقاً لرسل) ؛ إذ أن الطاقة والزخم والزخم الزاوي جميعاً تُعرّفُ تماماً بحيث يغدو حفظها حتمياً .^٥ ... والحقيقة أنه ليس من التناقض في شيء أن نُؤمنَ بكلتا النظرتين في آنٍ واحد . فإذا كان هدفُ العلم هو الوصف المتوافق ذاتياً للظواهر الطبيعية والمبني على أساس أبسط فئة من الافتراضات الأساسية ، فإذا عساه أن يكون أكثر قبولاً من توافر افتراضات أساسية ، أولية وبدئية إلى أبعد الحدود (مثلاً ، انتظام uniformity الزمكان) ، بحيث نستطيع أن نسمي القوانين المشتقة منها بدهيّاتٍ ؟ كذلك ، بما أن العالم مبالٍ - على العموم - لأن يعتبر الأيسر والأمثل كأنه الأعمق ، فهو ليس أسمى من أن ينعت بدئيةً ما بالعمق . أو بكلماتٍ عملية أكثر ، ينبغي أن نعرّف باكتشاف أي شيءٍ محفوظٍ بصورةٍ مطلقةٍ كضربٍ من الإنجاز ، بغض النظر عن اعتباطية التعريف المشمول . كما أن تفحص قوانين الحفظ التي لا نعي أسسها (أي قوانين الحفظ الثلاثة لعدد أعضاء العائلة) يجعلنا ندرك الحقيقة القائلة إنه لئمن الأسهل أن ندعو قانون حفظ بدئيةٍ بعد أن نفهمه ، ممّا هو الحال قبل ذلك . فيبدو من المحتمل كلّ الاحتمال أننا سنكون قد اكتسبنا

هل قوانين الحفظ بدهيّات أم تعابير عميقة ؟

قد نكون كلا الأمرين

* برتراند رسل (١٨٧٢-١٩٧٠) : هو الفيلسوف والمنطيق البريطانيّ السامع . كان عقلياً علمانياً إلى أبعد الحدود . وقد ذاع صيته - وهو يعد في ريعان الشباب - لإنجازاته في المنطق الرياضي ، التي يشملها كتاباه : « أصول الرياضيات » Principles of Mathematics (١٩٠٣) [الترجمة العربية بقلم الدكتور محمد مرسي أحمد والدكتور أحمد فؤاد الأهواني ، دار المعارف بمصر ، أربعة أجزاء ، ١٩٥٨-١٩٦٤] و « مبادئ الرياضيات » Principia Mathematica (١٩١٠-١٩١٣) مع ألفرد نورث وايتهيد Alfred North Whitehead . كما أن له جولاتٍ وصولاتٍ في الفلسفة البحتة والاجتماع والسياسة والتربية ، تُرجمَ شطرٌ منها إلى العربية . ولا ننسى أن نوه هنا بنزله الرفيع ونبله الإنساني .

(المشرّف)

٥٥ برتراند رسل : « أبجدية النسبية » (نيويورك : المكتبة الأمريكية الجديدة ، ١٩٥٩)

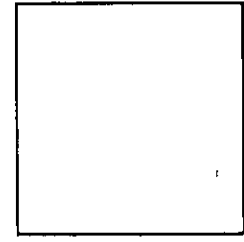
Bertrand Russell, *The ABC of Relativity* (New York: New American Library, 1959).

[وقد نشر هذا الكتاب لأول مرة عام ١٩٢٥ (المشرّف) .]

إدراكاً أعمق للطبيعة وللنواميس الطبيعية قبل أن يلوح حفظ العدد الباريوني لأيّ امرئ كما لو كان حقيقةً بديهيةً .

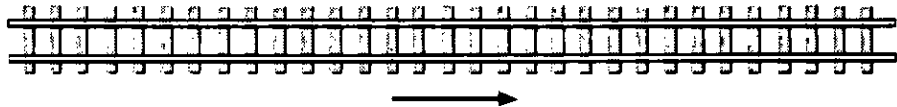
وقبل أن نحاول - من خلال أمثلة بسيطة - إجلاء العلاقة بين قوانين الحفظ وانتظام المكان ، فسنعتبر السؤال : « ما هو التماثل ؟ » ... بدلالة أكثر التعبيرات عموماً ، يعني التماثل أنه ، على الرغم من حدوث تغيير معين في شيء ما ، فإن شيئاً آخر يبقى ثابتاً (أنظر شكل ٤,٥) . فالوجه المماثل (المتناسق) هو ذلك الوجه الذي تبقى سبأؤه واحدة إذا ما تبادل طرفاه الإثنان الموضع . كذلك ، إذا أدير شكل مربع بمقدار ٩٠ ، فلا يتغير مظهره . ومن بين الأشكال المستوية plane figures ، تكون الدائرة هي الأكثر تماثلاً ، لأنها إذا أديرت حول مركزها خلال أية زاوية على الإطلاق ، ظلت متعدرة التمييز عن الدائرة الأصلية - أو ، بدلالة لغة الفيزياء الحديثة ، بقي شكلها لا متغيراً invariant .

التماثل المكاني : بعض التغييرات الهندسية تُبقي المظهر ثابتاً



(ب)

(أ)



(ج)

شكل ٤,٥ : ثلاثة أنواع من التماثل . (أ) تماثل انعكاسي reflection symmetry : لا يتغير وجه تماثل (متناسق) إذا ما تبادل اليسار واليمين وضعيهما (= انعكاس خلال مستوى رأسي vertical plane) . (ب) تماثل دَوْراني rotation symmetry : لا يتغير مظهر مربع إذا أدير خلال ٩٠ درجة أو أي مضاعف صحيح لهذه القيمة . (ج) تماثل انتقالي translation symmetry : لا يتغير خط سكة حديدية railroad مستقيم ، لامتناهي الطول على سبيل الافتراض ، إذا ما نُقل عدداً صحيحاً من قضبان الربط ties .

[(أ) اللوحة « مدام مواتيسيه » للفنان الفرنسي جان-أوغست-دومينيك أنغر (١٧٨٠-١٨٦٧) : المعرض الوطني للفنون ، واشنطن ، د. س. ، مجموعة صموئيل هـ. كريس :

Madame Moitessier, Jean-Auguste-Dominique Ingres, National Gallery of Art, Washington, D.C., Samuel H. Kress Collection.]

ونحن معتادون على التفكير بالتماثل بدلالة اصطلاحات مكانية . فتماثل الدائرة والمربع والوجه مقترنٌ بدورانات rotations أو ارتكاسات inversions في المكان . وما تماثل الزمان إلا امتداد بين التماثل المكاني ؛ فكون نوااميس الطبيعة تظهر للعيان وكأنها تبقى ثابتة مع مرور الوقت إنما هو تماثل أساسي في الطبيعة . على أية حال ، هناك تماثلات أدق ؛ فمن المعقول أن نُحْمَنَ أن حفظ البارونات ، مثلاً ، سيتحقق فهمه عن طريق اكتشاف تماثلات جديدة لا تمت بصلة مباشرة إلى الزمان والمكان .

وفي التماثل الذي يُعْنَى به الفيزيائي ، يكون الشيء الثابت — أي العنصر اللامتغير — هو شكل النوااميس الطبيعية . أما الشيء المتغير ، فقد يكون الاتجاه في المكان ، أو الموضع في الزمان أو المكان ، أو تغييراً آخر أكثر تجريداً (ليس — بالضرورة — قابلاً للتحقيق عملياً) ، مثل تبادل جسيمين . كما أن ارتكاس المكان وانقلاب reversal اتجاه تدفق الزمان إنما هما مثالان آخران غير قابلين للتحقيق عملياً ، مع أنها مهمتان لتماثلات الناموس الطبيعي . وسنبحث هاتين الظاهرتين الأخيرتين في الباب السابع والعشرين .

وإذا ما قام العلماء في شيكاغو Chicago وسيربوكوف Serpukhov* وجنيف Geneva بنفس التجربة وحصلوا على نفس الجواب (ضمن حدود الشك التجريبي) ، فإنهم بذلك يُقيمون الدليل على أحد تماثلات الطبيعة ، ألا وهو تجانس المكان . كذلك ، إذا أعيدت التجربة فيما بعد وأعطت نفس النتيجة ، فلن يستغرب ذلك أحد بعد أن بننا نُسَلِّمُ بتجانس الزمان . فحسب علمنا ، تكون نوااميس الطبيعة هي نفسها عند سائر النقاط في المكان ولكل الأزمنة . وهذا اللاتغير invariance هو من الأهمية بمكان ، كما أنه متعلق بقانوني حفظ الطاقة والزخم ؛ لكن الخبرة المعتادة تُكَيِّفُنَا لكي نتوقع مثل هذا اللاتغير ، بحيث يترأى لنا — لأول وهلة — تافهاً أو بديهاً . وقد يبدو من العسير أن نتصور قيام أي علم على الإطلاق لو تغير الناموس الطبيعي من موضع لآخر ومن زمن لآخر ؛ مع أنه ، في حقيقة الأمر ، قد يكون العلم المقداري ممكناً حتى بدون تجانس الزمكان . تخيل نفسك ، مثلاً ، على متن دُورامة « مدينة الملاهي » merry-go-round ، بحيث تتسارع هذه وتباطأ بموجب جدول أعمال مُنْتَظَم . فلو قُمْتَ بتجاربٍ كما تستنتج قوانين الميكانيكا ، ولم تكن ثمة أية طريقة لمعرفة أنك في نظام دائر ، لانتبهت إلى النتيجة بأن الكرات الساقطة تحكمها قوانين تتفاوت مع الزمن والموضع (المسافة من المحور المركزي) ؛ إلا أنه سيكون بمقدورك أن تستنبط هذه القوانين بالتفصيل وأن تتنبأ بدقة بنتائج تجارب المستقبل بشرط أن تعلم أين ومتى ستقام التجربة . لكن بفضل التجانس الفعلي للزمان والمكان ، فإن نتائج تجارب المستقبل يمكن — في الحقيقة — التنبؤ بها دون أية معرفة عن الأين والمتى .

التماثل في الفيزياء : لا تتأثر نوااميس الطبيعة بتغيرات معينة

تجانس الزمكان : لا تتأثر القوانين بتغير الموضع أو الزمن

قد تكون الفيزياء ممكنة بدون هذا التماثل

* مدينة في الاتحاد السوفيتي ، فيها سنكروترون بروتوني مشهور تبلغ طاقته القصوى ٧٠ ج.ف . (المشرق)

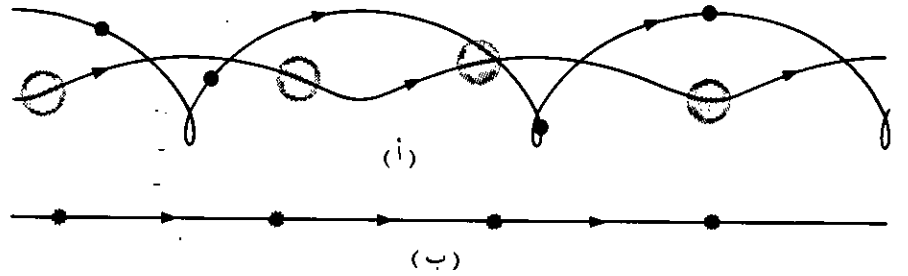
التماثل يستلزم لا تغيراً

كنا نشرح أعلاه حلقة الوصل الأولى في السلسلة المترابطة : تماثل $\leftarrow$ لا تغير $\leftarrow$ حفظ .
فتماثل الزمان والمكان ، أو ربما تماثل آخر أدق للطبيعة ، يستلزم لا تغير القوانين الفيزيائية تحت تأثير تغييرات معينة ترافق هذا التماثل . مثلاً ، في أبسط حالة ، يستلزم تماثل المكان ، الذي ندعوه تجانساً ، لا تغير النتائج التجريبية حينما تنقل أدوات التجربة من موضع إلى آخر . وهذا اللا تغير يستلزم ، بدوره ، وجود قانون حفظ معين . أما حلقة الوصل بين اللاتغير والحفظ فهي ما نسعى الآن لإلقاء الضوء عليه من خلال مثالين ، مع أن أي شرح وافٍ لهذا الموضوع الهام يتطلب وسائل تنتمي إلى مقررات أكثر تقدماً في الميكانيكا .

★ ٤,٨ انتظام المكان The Uniformity of Space

نظام افتراضي معزول : نجوم ثنائية
في الفضاء التيمجري

تحيل زوجاً من النجوم يتفاعلان جاذبياً gravitationally ويسدوران الواحد حول الآخر .^٥ وافترض أن هذا النظام مستقر في أعماق الفضاء التيمجري (البين مجري) intergalactic ، بمنأى عن التأثيرات الخارجية إلى درجة أنه يمكن اعتباره معزولاً بحق وحقيق . دعنا نتظاهر أنه بمقدورنا أن نشاهد هذين النجمين بأية درجة من الدقة نختارها . فإذا نظرنا عن كسب ، ماذا نرى ؟ ... يسلك النجمان مسارات معقدة في الفضاء ، هي عبارة عن اثتلافات من حركة دورانية وانتقالية ، أشبه شيء بطرفي مضرب كرة طاولة (تينس) tennis racket يُقذف فيغزل عبر الهواء [شكل ٤,٦ (أ)] . أما إذا تراجعنا بعيداً حتى يترأى لنا النظام الثنائي بأكمله وكأنه نقطة مفردة من الضوء ، فإننا نجد حركته في غاية البساطة : إذ يتحرك في خط مستقيم بدرجة ثابتة [شكل ٤,٦ (ب)] . أي أن للنظام ككل بساطة تفترق إليها أجزاؤه المستقلة . فهل هذه حقيقة هامة ؟ ... بلى ؛ لأنها متعلقة بقوانين نيوتن في الميكانيكا ، وبقانون حفظ الزخم ، وبتجانس المكان .



شكل ٤,٦ : (أ) نظام مكون من نجم ثنائي : إذا راقبناه من قُرب ، نجد أنه يقوم بحركة معقدة . (ب) أما إذا شاهدناه عن بُعد كبير ، فإن هذا النظام يظهر للعيان كنقطة تتحرك بدرجة ثابتة . في كلا الرسمين التوضيحيين ، نصور النجمين في فترات زمنية متساوية .

٥ مثل هذه النجوم المزدوجة double stars ، أو النجوم الثنائية binaries ، شائعة بعض الشيء في مجرتنا .

وليس هناك أدنى استغراب من الحركة البسيطة للنظام ككل (أو لمركز كتلته center of mass ، في الواقع) ، حيث افترضنا أن النظام حر من المؤثرات الخارجية . ومع ذلك ، إذا حصرنا اهتمامنا في حركة النجمين كل بمفرده ، فإن الحركة البسيطة لمركز كتلتها لا تكون جلية ؛ إذ أن كل نجم يتسارع ويؤثر بقوة على الآخر . فلم لا تتحد هاتان القوتان لتُسارعا النظام بأكمله ؟ أو ، في مثال أقرب مثلاً ، لِمَ تلغي بلايين القوى البندرية (البين ذرية) interatomic - التي لا عد لها ولا حصر ، والمؤثرة داخل كتاب على سطح منضدة - مفعول بعضها البعض بدقة متناهية ، بحيث لا يترج الكتاب قط للحركة تلقائياً ؟

لماذا لا تؤثر الديناميكا الداخلية المعقدة على الحركة الجرمية ؟

إن الطالب الذي سبق أن درس بعض الفيزياء يعلم بأن إجابتي هذين السؤالين تكمنان في قانون نيوتن الثالث : كل القوى في الطبيعة ترد بأزواج متناظرة من القوى المتساوية والمتضادة . فقوة نجم أ على نجم ب مساوية تماماً ومضادة لقوة نجم ب على نجم أ . وعليه ، يكون المجموع الاتجاهي للقوتين صفراً ، كما لا تؤثر أية قوى إضافية من الخارج ؛ فلا يتسارع - بالتالي - النظام ككل . كذلك ، يمكن أن نشق - من قانون كلاسيكي آخر ، هو قانون نيوتن الثاني - الحقيقة القائلة إن الزخم الكلي لنظام يكون ثابتاً إذا كانت القوة الإجمالية المؤثرة على النظام صفراً . فلنظام النجم الثنائي ، نستطيع أن نكتب :

إحدى الإجابات على ذلك : قانون نيوتن الثالث

يكون مجموع القوى الداخلية صفراً

$$p_1 + p_2 = \text{constant, if } F_{\text{total}} = 0. \quad (4,5)$$

من قانون نيوتن الثاني : تستلزم القوة الصغرية زخماً ثابتاً

[حيث p_1 ، p_2 هما الزخمان الفرديان و F_{total} القوة الإجمالية]

فالزخمان الفرديان ، p_1 و p_2 ، يتغيران على الدوام ؛ إلا أن مجموعهما الاتجاهي يكون ثابتاً . وأخيراً ، بمقدور المرء أن يبرهن أن مركز كتلة نظام يتحرك بسرعة ثابتة ، إذا كان الزخم الكلي للنظام ثابتاً (ويظهر هذا البرهان في الباب الثامن) .

الزخم الثابت يعني سرعة ثابتة لمركز الكتلة

هذا هو - بإيجاز - النهج الكلاسيكي لفهم حركة نظام معزول . فنحن نشق قانون حفظ الزخم عن طريق « اكتشاف » وتطبيق قانونين ، هما قانونا نيوتن الثاني والثالث . وقانون الحفظ هذا يفسر ، بدوره ، السرعة الثابتة لمركز الكتلة (أنظر شكل ٤,٧) .

النهج الكلاسيكي يبدأ بقوانين نيوتن

وثمة نهج حديث لنفس المعضلة يبدأ بأسلوب مغاير تماماً ، وذلك بأن يبحث أولاً عن مبدأ يفسر لماذا لا يتسارع النظام ككل أذكر سلسلة الأفكار الرئيسية المنوّه بها أعلاه : تماثل - لا يتغير - حفظ ؛ ثم دعنا نعتبر هذه الأفكار الثلاث لنظام النجم الثنائي . يكون التماثل الهام هنا تجانس المكان ؛ إذ نفترض أنه ، في أعماق الفضاء اليممجرى^٥

هناك نهج حديث يبدأ بالتماثل

التماثل : تجانس المكان

^٥ في التجارب التي تكون فيها الجاذبية غير هامة ، كما في مضارب الكهرباء أو الظواهر الذرية ، يمكن اعتبار المكان على سطح الأرض متجانساً .

قانون نيوتن الثالث :
ينبغي أن تتلاشى القوة الداخلية
الكلية .

↑
حِفْظ : يكون الزخم الإجمالي ثابتاً .

↑
يتحرك مركز الكتلة بدرجة ثابتة .

↑
لا تغيّر : لا تعتمد أية سمة لحركة
النظام على موضع مركز كتلته .

↑
تماثل : إن المكان الثاني عن المادة
متجانس .

قانون نيوتن الثالث :
تتلاشى القوة الداخلية الكلية .

↓
يكون الزخم الإجمالي ثابتاً لنظام
معزول .

↓
يتحرك مركز كتلة النظام بدرجة
ثابتة .

شكل ٤,٧ : السلسلة الكلاسيكية (من أعلى إلى أسفل)
للمنطق الخاص بحركة نظام معزول إن قانون نيوتن الثالث
أساسي ؛ ومن ثم نشقّ السلسلة الثابتة لمركز الكتلة .

شكل ٤,٨ : سلسلة حديثة (من أسفل إلى أعلى) للمنطق
الخاص بحركة نظام معزول إن تجانس المكان أساسي ؛
ومن ثم يُشتقّ قانون نيوتن الثالث .

حيث وضعنا نجمينا ، تكون كل النقاط في المكان متكافئة ومتعددة التمييز .

اللاتغير : لا تعتمد قوانين الحركة
على موضع مركز الكتلة

ويُفَضِّي هذا التماثل إلى مبدأ لا تغيّر : لا يعتمد أيّ قانون يحكم حركة النظام على موضع
مركز كتلته . (مركز كتلة نظام هو الموضع المتوسط لكتلته برمتها .) وتُسبغ هذه العبارة مدلولاً
فيزيائياً على فكرة التجانس . فنقل النظام من أحد أجزاء الفراغ إلى جزء آخر لا يستطيع أن يغيّر
طبيعة حركته .

الحِفْظ : تكون درجة مركز الكتلة
والزخم الكلي ثابتين

ما الذي يُحَفَظُ إذن ؟ ... إذا كان لمركز الكتلة سرجة معينة عند نقطة ما ، فلا مناص
من أن يكون له نفس السرجة عند نقطة أخرى ؛ وإلا اعتمدت قوانين الحركة على الموضع .
وعلى ذلك ، تكون سرجة مركز الكتلة ثابتة . وهذا يستلزم بدوره حفظ الزخم . وأخيراً ، حتى
نضمن حفظ الزخم ، يتعين علينا أن نفترض أن القوى الداخلية تُبْطِلُ مفعول بعضها البعض
(قانون نيوتن الثالث) . والنقطة الأخيرة في هذه السلسلة من الاستنتاجات المنطقية (الملخصة
في شكل ٤,٨) هي نفسها نقطة البداية لما سميته السلسلة الكلاسيكية لعملية استدلال النتائج
من مُقَدّماتها (شكل ٤,٧) .

النّهج الحديث ينهي بقوانين نيوتن

والخيار بين هاتين الطريقتين في الاستدلال والتفكير حول نظام معزول هو أكثر من مجرد
مسألة ذوق : إذ يمضي المنطق الحديث مباشرة من مبدأ التماثل إلى قانون الحِفْظ دون الاستعانة
بقوانين نيوتن . فإذا لم نتجاوز قانون الحِفْظ في شكل ٤,٨ ، سيكون لدينا منطق يصلح لنظريتي

حجة التماثل أعمق وأشمل

النسبية وميكانيكا الكم ؛ أي ، حتى عندما تخفق قوانين نيوتن ، يبقى حفظ الزخم ساري المفعول ويمكن ربطه بتجانس المكان .

يرتكز حفظ الزخم الزاوي على تكافؤ اتجاهات المكان

كذلك يمكننا - من خلال أمثلة مماثلة - أن نربط قانون حفظ الزخم الزاوي بتكافؤ اتجاهات isotropy المكان . فإن إبرة بوصلة ⁺ compass needle ، إذا مضطبت أولاً باتجاه الشرق ومن ثم تركت حرة ، سوف تدور نحو الشمال نظراً لتأثير مجال الأرض المغناطيسي عليها . أما إذا أخذت إبرة البوصلة نفسها إلى أعماق الفضاء الحالي ، بمنأى عن سائر المؤثرات الخارجية ، وضبطت باتجاه ما ، فإنها ستبقى مشيرة نحو ذلك الاتجاه ؛ إذ أن تأرجحاً باتجاه أو بآخر لسوف يستلزم لانتظاماً nonuniformity* في المكان . فإذا تبيننا انتظام المكان كمبدأ تماثل أساسي ، انتهينا إلى النتيجة بأن الزخم الزاوي الإجمالي لكل المكونات الذرية للإبرة يجب أن يكون ثابتاً . وإلا ، فقد يكون بمقدور الحركات الداخلية داخل الإبرة أن تسبب دوراناً تلقائياً للإبرة ككل ، مما يتنافى ومبدأ التماثل .

بينما يرتكز حفظ الطاقة على تجانس الزمان

وأخيراً ، بطريقة لا يمكن الإنكار أنها عسيرة الإدراك ، يتعلّق حفظ الطاقة بتجانس الزمان . وهكذا ، « تفهّم » قوانين الحفظ الثلاثة بأجمعها - للطاقة ، والزخم ، والزخم الزاوي - بدلالة تماثل الزمكان .

+ البوصلة Boussola كلمة إيطالية تعني « الصندوق » أو « الحق » . وقد استعملت هذه الكلمة لأول مرة - فيما يبدو - في بواكير القرن السادس عشر . وكانت البوصلة قد شاعت عند الملاحين العرب في المحيط الهندي قبل ذلك بعدة عقود ، كما يتضح من مؤلفات الملاح العربي العظيم أحمد بن ماجد (القرن الخامس عشر الميلادي ، التاسع الهجري) ، الذي كان يشير إليها باسم « بيت الإبرة » تارة و « الحقّة » أو « الدبرة » تارة أخرى هذه المعلومات الطريفة وسواها ، أنظر : د . أنور عبد العلم : « الملاحة وعلوم البحار عند العرب » ، سلسلة عالم المعرفة - العدد ١٣ (المجلس الوطني للثقافة والفنون والآداب ، الكويت ، كانون ثاني ، ١٩٧٩) ؛ الفصل التاسع ؛ ص ٢٠٧-١٨١ . (المشرف)

* إذا اعتبرنا الأمر بدقة ، فإن حفظ الزخم يرتكز على تجانس المكان (انتظام الموضع) ؛ بينما يرتكز حفظ الزخم الزاوي على تكافؤ اتجاهات المكان (انتظام الاتجاه) . إلا أن التمييز بينهما ليس بشيء شأن لما ربنا ؛ فمن المقبول أن نفكر بالمكان ببساطة وكأنه واحد في كل موضع ، ملخصين بذلك التجانس وتكافؤ الاتجاهات بكلمة « انتظام » .

خلاصة الأفكار

□ إن قانون الحفظ هو قانون الثبات أثناء التغير . وهو لا يُملي بدقة في العالم دون المجهرى . وهو يعلّل استقرار الإلكترون بذاته أيّ تسلسل معين للحوادث ؛ إلا أنه يضع قيداً □ يُعرّف العدد الباريوني بالقيمة $(N_B - N_{\bar{B}})$ ؛ أي عدد الباريونات ناقص عدد ضدّيات الباريونات . constraint عاماً على نظام ما .

□ إن حفظ الشحنة معروف في العالم الجاهري ؛ كما أنه اختبر □ يُعلّل حفظ الباريونات استقرار البروتون .

- يعتقد أن حفظ عدد أعضاء عائلة الإلكترون وحفظ عدد أعضاء عائلة الميون هما صحيحان ؛ إلا أنها لم يُختبراً بدقة عالية .
- التماثلات في الفيزياء مرتبطة بـلاتغير نوااميس الطبيعة .
- إن حفظ الطاقة هو من الأهمية بمكان في فروع الفيزياء قاطبة وفي جل العلوم الأخرى .
- يُبني حفظ الطاقة قاعدة الانحدار لاضمحلال الجسيمات ؛ كما أنه يُحدد إنتاج الجسيمات في المسارعات النووية .
- يُبنى حفظ الزخم الزاوي على أساس تكافؤ اتجاهات المكان (انتظام الموضع) .
- الزخم هو كمية متجهة . وبحول حفظه دون الاضمحلالات الأحادية الجسم ؛ كما يجعل للاضمحلالات الثنائية الجسم خواصاً بسيطة .
- يشمل حفظ الزخم الزاوي زخماً زاوياً مغزلياً وزخماً زاوياً
- يُبنى حفظ الطاقة على أساس تجانس الزمان .
- قوانين الحفظ هذه يمكن اشتقاقها كلاسيكياً من قوانين نيوتن ؛ غير أنها أشمل من ذلك ، فتبقى سارية المفعول في الفيزياء الحديثة اللاينوتونية non-Newtonian .

أسئلة :

- س ١؛ إن حفظ المادة مبدأ هام في الكيمياء ، وعلم البيئة ecology ، وفي علوم أخرى . وهو ينص على أن عدد الذرات من نوع معين لا يتغير في أية عملية كيميائية أو أحيائية . فلماذا لم يُشمل هذا المبدأ كواحد من قوانين الحفظ المطلقة في هذا الباب ؟
- س ٢؛ أورد مثلاً على كمية تكون ثابتة في مواضع مختلفة داخل نظام ما ، لكنها تتغير مع الزمن مثل هذه الكمية لا تُسمى كمية محفوظة .
- س ٣؛ استنبط صياغة لقانون حفظ القيمة value (مال ، وسلع goods ، وخدمات services) ، كما هو مُطبق على الموارد المالية finances لفرد ما . هل هو قانون حفظ مطلق ؟
- س ٤؛ إذا سرت على بساط rug في يوم جاف ، فإن جسمك يكتسب شحنة كهربائية . لم لا يتعارض تغيير الشحنة هذا مع مبدأ حفظ الشحنة ؟
- س ٥؛ لقد افترض أن العدد البارونوي الإجمالي للكون يكون صفراً . فسر معنى ذلك وما ينطوي عليه من مدلولات بخصوص طبيعة بعض المجرات الأخرى .
- س ٦؛ افرض أن النيوترون كان أقل ثقلاً بقليل من البروتون ، بدلاً من كونه أثقل بقليل . ما الذي قد يترتب على ذلك من لزومات لبنيّة المادة ؟
- س ٧؛ لماذا يكون لا حفظ non conservation الفوتونات بهذه الأهمية القصوى في عالمنا ؟
- س ٨؛ إن الفكرة ، بأن ما يمكن حدوثه يحدث فعلاً ، تبدو - لأول وهلة - وكأنها عقيدة لاعلمية إلى حد بعيد . فسر كيف أن عالماً فيزيائياً تحكمه قوانين بسيطة يمكن وصفه بهذه الطريقة . (تلميح : ينبغي أن تدخل النقاش فكرة الاحتمال .)

بند ٤,٤

س ٤,٩ لا داعي لأن تُحفظ الطاقة لنظام ليس معزولاً . أورد مثلاً بسيطاً على مثل هذا اللاحفظ .
س ٤,١٠ هل يمكننا — من حيث المبدأ — تحويل قطعة ١ كـرغ من المادة كلياً إلى طاقة ؟ هل يمكننا — عملياً — أن نفعل ذلك ؟ فسر .

س ٤,١١ في بعض مختبرات الفيزياء ، تُشاهد كل يوم انتهاكات فادحة لحفظ المادة . أما في مختبرات الكيمياء ، فليس بمقدور الأدوات القياسية ذات أقصى دقة متيسرة أن تكشف عن أية انحرافات عن قانون حفظ المادة . فسر .

س ٤,١٢ في عملية تشغيل تنور (فرن) oven ، تكون الحرارة محفوظة ؛ أي أن الحرارة التي يزودنا بها عنصر التسخين تساوي مجموع الحرارة المكتسبة داخل التنور والحرارة المنقولة إلى محيطه . فهل حفظ الحرارة قانون حفظ مطلق ؟ أعط سبباً لإجابتك .

بند ٤,٥

س ٤,١٣ يتحرك جسم لا مُستقر عبر المختبر . فسر لماذا يتوجب على واحد من منتجات اضمحلاله — على الأقل — أن يكون متحركاً .

س ٤,١٤ تنفجر قذيفة مدفع shell كانت قد أطلقت رأسياً إلى أعلى ، فتتحطم إلى شظيتين fragments متساويتين مباشرة بعد لحظة بلوغها أقصى ارتفاع لها (حيث تكون ساكنة في هذه اللحظة) . فكم عدد الاتجاهات التي يجوز لشظيتيها أن تنطلقا فيها بعيداً عن بعضها البعض ؟ فسر لماذا يتعين على الشظيتين أن تبدأ بالحركة بعيداً بطاقة حركية متساوية تماماً لكل منهما .
س ٤,١٥ حين تُقذف كرة في الهواء ، يقل مقدار زخمها ثم يزداد . فلماذا لا يتنافى هذان التغيران مع مبدأ حفظ الزخم ؟

بند ٤,٦

س ٤,١٦ رائد فضاء عائم في الفضاء يُطلق بندقيته ذات ماسورة مُحززة حلزونياً rifled barrel ، بحيث تعطي الرصاصة عزلاً . اشرح حركة رائد الفضاء بعد إطلاق الرصاصة ، على افتراض أنه كان ساكناً قبل ذلك .

بند ٤,٧

س ٤,١٧ أذكر بضع طرق بسيطة تعتمد فيها يومياً على تجانس الزمان والمكان .

بند ٤,٨

س ٤,١٨ هب أن الكون ليس مُنظماً uniform ، بل أن له مركزاً محدداً وحدوداً boundaries . فسر لماذا قد تحفز هذه الخاصية للكون المترامي الفيزيائيين كي يسبروا أغوار العالم دون المجهرى ، بحثاً وراء انتهاكات صغيرة لقانون حفظ الزخم .

س ٤,١٩ تفسر الفقرة ما قبل الأخيرة في هذا الباب الصلة بين تكافؤ اتجاهات المكان وحفظ الزخم الزاوي . أكتب فقرة مماثلة بنفس الطول تقريباً ، تعلل فيها — بأكبر إيجاز ممكن — الصلة بين تجانس المكان وحفظ الزخم . مثلاً ، قد تستهل فقرتك كما يلي : « إن صخرة ، حُمِلت فوق سطح الأرض ثم تُركت ، سوف تتسارع إلى أسفل نظراً لتأثير مجال الجاذبية الأرضية عليها . أما إذا أخذت نفس الصخرة إلى أعماق الفضاء الخالي ... »

س ٤,٢٠ اقترح تجارب بسيطة قد تقوم بها داخل غرفة مغلقة لإيجاد ما إذا كانت الغرفة تدور أم لا . في غرفة دائرة ، ما هي الكمية المحفوظة عادة التي سوف تبدو غير محفوظة ؟

مراقبون متحركون

س ٤,٢١ حينما يقيس مراقبون observers بعض الكميات في أطر إسناد مختلفة ، فإنهم يجدونها نفس الشيء ، مع أنها ليست كميات محفوظة . سم كمية واحدة من هذا القبيل ، واعط سبباً لخيارك .

س ٤,٢٢ حينما يقيس مراقبون بعض الكميات في أطر إسناد مختلفة ، فإنهم يجدونها مختلفة مع أنها كميات محفوظة . سمّ كمية واحدة من هذا القبيل ، واغط سبباً لخيارك .

تمارين

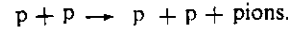
ت ٤,١ افترض أنّ متوسط عمر الإلكترون $^{25}10$ سنة . فكم إلكترونات يلزم في عينة ما sample حتى يكون معدل اضمحلال العينة ككل 1 إلكترون لكل ثانية ؟ وكم ستكون تقريباً كتلة المادة المناظرة ؟ (افترض أنّ هناك بروتوناً واحداً ونيوترون واحد لكل إلكترون في العينة .)

ت ٤,٢ يرتطم ضديّد نيوترون ببروتون . أكتب بضعة نتائج ممكنة لهذا التصادم ، وفسّر لماذا يكون كل منها ممكناً .

ت ٤,٣ أكتب صيغة تفاعل reaction formula تعبّر عن اضمحلال μ^+ ثم بين أنها تخضع لقوانين الحفظ المناسبة .

ت ٤,٤ إذا كانت E الطاقة الإجمالية في نظام مغلق ، فإنه يمكن كتابة قانون حفظ الطاقة جبرياً على صورة $E = constant$ (أي $E = \text{ثابت}$) . أكتب هذا القانون بصورة بديلة تستخدم مشتقة derivative .

ت ٤,٥ يتم تصادم معين بين بروتون وآخر كما يلي :

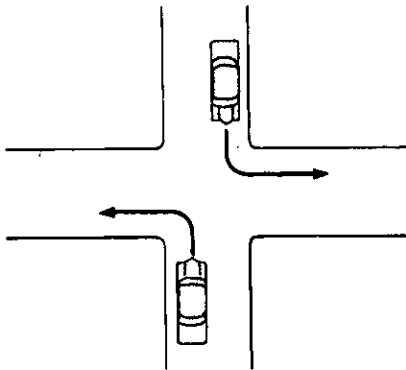


إذا كانت الطاقة المتاحة لصنع كتلة جديدة تساوي 600 مغ e ، فاكتب أربع نتائج ممكنة للتصادم مما يحفظ الطاقة والشحنة .

ت ٤,٦ (١) ما بُعد الزخم ؟ (٢) وما وحدته الدولية (SI) ؟ (٣) بين أنّ حاصل ضرب القوة والزمن له نفس البعد كالزخم .

ت ٤,٧ يرتطم بروتون متحرك بسرعة 10 بالمئة من سرعة الضوء بكتلة 1 غ من المادة ، فيسكن داخل المادة . بأي سرعة ترتد كسرة المادة نتيجة للضربة التي سددها البروتون ؟

ت ٤,٨ تقترب سيارتان من نقطة تقاطع intersection من اتجاهين متضادين ، ومن ثم تنعطف كل منهما نحو يمينها ، كما هو مبين في الشكل أدناه (شكل ٤,٩) . فإتجاه زخمهما الزاوي النسبي : (أ) قبل الانعطاف ؛ (ب) أثناء الانعطاف ؛ و (ج) بعد الانعطاف ؟ برّر كل جزء من إجابتك .



شكل ٤,٩ : تمرين ٤,٨ .

ت ٤,٩ عند نقطة الحضيض الشمسي perihelion (أي النقطة الأدنى من الشمس) ، تكون الأرض على بُعد ٩١,٤ مليون ميل عن الشمس . أمّا عند نقطة الأوج aphelion (النقطة الأقصى عن الشمس) ، فتكون المسافة بين الأرض والشمس ٩٤,٥ مليون ميل . (١) وفقاً لقانون المساحات ، هل تكون سرعة الأرض المدارية أكبر عند نقطة الحضيض أم عند نقطة الأوج ؟ (٢) ما الفرق النسوي percentage difference لسرعة الأرض المدارية عند هاتين النقطتين ؟

ت ٤,١٠ أرسم رسماً مشابهاً لشكل ٤,٣ ، مبيّناً فيه الرّسمين التّوضيحيّين « قبل » و « بعد » لاضمحلال النيوترون ، الذي هو اضمحلال ثلاثي الأجسام . انتبه بصورة خاصّة لحفظ الزخم وحفظ الزخم الزاوي .

ت ٤,١١ بيّن جدول ٣,١ أنّ جسيم Σ^+ يستطيع الاضمحلال إلى نيوترون وبيون موجب . أذكر طريقة أخرى يجب أن يتمكّن من الاضمحلال بواسطتها وبرر إجابتك بأن تحدّد كيفية تحقيق كلّ قانون حفظ مناسب .

عمليات مباحة ومحظورة

ت ٤,١٢ تحدث اثنتان من عمليات التفاعل الآتية واثنتان لا تحدثان . انتقِ التفاعلين المباحين ، وفسر كيف تتحقق قوانين الحفظ المناسبة . (افرض أنّ طاقة كافية تكون متاحة في التصادم حتى تزود أية زيادة ضرورية في الكتلة .)

$$(أ) \quad n + p \rightarrow \Lambda^0 + n + K^+ + \pi^0 \quad (ج) \quad e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \pi^-$$

$$(ب) \quad p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + \Sigma^+ \quad (د) \quad e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$$

ت ٤,١٣ يتعارض كلّ من اضمحلالات الجسيمات التالية ، ما عدا واحداً ، مع أحد قوانين الحفظ . فأبها لا يتعارض مع أية قوانين ؛ وأي قانون أو قوانين يخرقها كلّ من الاضمحلالات الأخرى ؟

$$(أ) \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + e^- \quad (د) \quad n \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

$$(ب) \quad \pi^- \rightarrow K^- + \nu_\mu \quad (هـ) \quad e^- \rightarrow \nu_e + \gamma$$

$$(ج) \quad K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (و) \quad \Lambda^0 \rightarrow p + e^-$$

ت ٤,١٤ أذكر على الأقل قانوني حفظ يتعارض معها كلّ من عمليات الاضمحلال المحظورة التالية :

$$(أ) \quad e^- \rightarrow \nu_\mu + \gamma \quad (ج) \quad \mu^- \rightarrow \pi^- + \gamma$$

$$(ب) \quad p \rightarrow e^- + \pi^+ + \pi^+ \quad (د) \quad \pi^+ \rightarrow \mu^+ + e^-$$

مسائل

م ١,٤ أكتب بضع نتائج ممكنة لتصادم بروتون - بروتون تنبثق عنه أربعة جسيمات . (افرض أنّ طاقة كافية تكون في المتناول لإخلاق جسيمات جديدة .) فسر لماذا تعتبر النتيجة ممكنة لكلّ حالة .

عمليات مباحة

م ٢,٤ انتقِ أية أربعة من قوانين الحفظ الأساسية ؛ سمّ لكلّ منها اضمحلالاً واحداً أو عملية تحويل يقوم بحظرها . اختر ، على الأقل لقانونين من هذه الأربعة ، عملية لا يمنعها إلا قانون الحفظ الوحيد المُعتبر في كلّ حالة .

عمليات محظورة

اضمحلال π^0

م ٤,٣ ؛ بيون مُعَادِل (π^0) ساكنٌ له طاقة كتلة مقدارها ١٣٥ مغ ء ف ... يضمحلّ إلى فوتونين . (١) حدّد (أ) طاقة كلّ فوتون بالوحدتين مغ ء ف وجول ؛ (ب) زخم كلّ فوتون بالوحدة كغ م / ث (للفوتون : $E = pc$) ؛ و (ج) الاتجاه النسبي للفوتونين . (٢) ما هي قوانين الحفظ المناسبة في هذا الاضمحلال ؟ (٣) لو اضمحلّ البيون أثناء الانطلاق بدلاً من السكون ، فكيف كانت النتائج ستختلف نوعياً ؟

اضمحلال ثلاثي الأجسام

م ٤,٤ ؛ فسّر بوضوح كيف يعمل اضمحلال بيتا للنيوترون وفقّ قوانين حفظ الطاقة ، والشحنة ، وعدد أعضاء عائلة الإلكترون ، والعدد الباريوني ؟ (٢) إذا اضمحلّ نيوترون ساكن ، فإن المسارات الابتدائية للجسيمات الثلاثة الناتجة ينبغي أن تقع في مستوى واحد . أي قانون حفظ يفرض هذا الشرط ؟ فسّر كيف يفعل ذلك .

حظر الاضمحلال الأحادي الجسم

م ٤,٥ ؛ في عملية اضمحلال افتراضية ، يتحوّل جسيم ذو كتلة m_1 ومتحرك بسرعة v_1 إلى جسيم ناتج وحيد ذي كتلة m_2 ومتحرك بسرعة v_2 . باستخدام قانوني حفظ الطاقة والزخم ، بالإضافة إلى المتطلب أن لا v_1 ولا v_2 تستطيع أن تزيد على سرعة الضوء c ، برهن أن هذا الاضمحلال محظور . (استعمل الصيغ اللانسيية : $K = \frac{1}{2}mv^2$ و $p = mv$ ، واشمل طاقة الكتلة mc^2 في الميزان الطاقي energy balance .)

حظر الاضمحلال الصاعد

م ٤,٦ ؛ في عملية اضمحلال افتراضية ، يتحوّل جسيم كتلته m إلى جسيمين آخرين ، كتلة كل منها تساوي m . إذا كان الجسيم الابتدائي ساكناً ، فمن البين أن حفظ الطاقة يمنع هذا الاضمحلال . أثبت أن حفظ الطاقة والزخم ، بالإضافة إلى الشرط أن سرعات الجسيمات لا تستطيع أن تزيد على سرعة الضوء c ، تحول جميعها دون هذا الاضمحلال ، حتى إذا كان الجسيم الابتدائي متحركاً . افرض ، بغية البساطة ، أن الجسيمات الابتدائية والنهائية تتحرك على امتداد نفس الخط المستقيم . (استعمل الصيغ اللانسيية : $K = \frac{1}{2}mv^2$ و $p = mv$ ، واشمل طاقة الكتلة mc^2 في الميزان الطاقي .) مسائل اختيارية : عمّم برهانك إلى كتل غير متساوية للجسيمين النهائيين ، و/أو إلى اتجاهات اعتباطية للجسيمين النهائيين .

نوع آخر من الحفظ

م ٤,٧ ؛ بعض قوانين الحفظ لا تقتضي أن يكون للكمية قيمة ثابتة ؛ لكنها تتطلب منها أن تتسم بخاصية أخرى ثابتة ، مثل الفردية (الوترية) oddness أو الزوجية (الشفعية) evenness تأمل الضيوف في حفلة استقبال reception الذين يتخالطون معاً ويتصافحون بين الآونة والأخرى . ففي أية لحظة محددة ، يكون عدد معين منهم قد صافح عدداً فردياً من المرات ؛ بينما يكون الباقون قد صافحوا إما لا أحد على الإطلاق أو عدداً زوجياً من المرات ركّز انتباهك على عدد الضيوف الذين قاموا بالمصافحة عدداً فردياً من المرات .

- (١) فسّر لماذا لا يلزم أن يكون هذا العدد ثابتاً .
- (٢) أي خاصية تكون محفوظة لهذا العدد ؟ علّل الأساس الذي تركز عليه إجابتك .



الجزء الثاني

PART TWO

الرياضيات

MATHEMATICS

٥. الرياضيات في العلوم

Mathematics in Science

طوال الشطر الأعظم من التاريخ البشري، كانت الرياضيات والفيزياء (أو الفلسفة الطبيعية) متلازمتين أشد التلازم، كل موضوع منها مُخصباً الآخر. أما اليوم، فنحن نجدُهُما على سابق عهدهما من عمق الوشائج، مع أنَّ علاقتهما قد تغيرت كثيراً عما كانت عليه قبل مئتي عام أو حتى مئة عام. فلقد نمت الرياضيات حتى أُمست موضوعاً معالماً أوضح من السابق، كما أنَّ اعتمادها على الأفكار الفيزيائية قد قلَّ. لكن، على صعيد آخر، تظلَّ الفيزياء بدون رياضيات مُتَعَذِّرة التَّصَوُّر؛ بل الواقع أنَّ مقداراً أكبر فأكبر من الرياضيات لواجب الآن مكانة له في الفيزياء. فلا مندوحة عن أنَّ يتعلَّم طالب الفيزياء أو الهندسة مقداراً كبيراً من الرياضيات وكيفية تطبيقه. كذلك، يتعيَّن عليه أنَّ يتعلَّم كيف يُميز بوضوح بين الرياضيات والفيزياء. فلا يمكن أن نُقدِّر — على أكمل وجه — الدور الذي تلعبه الرياضيات في العلم، إلا إذا أدركنا كنهها كمغامرة بشرية قائمة بذاتها.

وسنُعنى، في هذا الباب والذي يليه، بساتٍ عملية للرياضيات بالدرجة الأولى؛ حيث تكون هذه بمثابة أدوات لدراسة الطبيعة. غير أننا سنبدأ، في بُدَيِّ ٥,١ و ٥,٢، بنقاش أعمِّ لماهية الرياضيات وعلاقتها مع العلم.

٥,١★ نوعان من الحقيقة الرياضية Two Kinds of Mathematical Truth

إذا سئل طالب رياضيات مبتدئ لماذا يُساوي اثنان زائد اثنين أربعة، فعلى الأرجح أنه سيُجيب بأن ذلك إنَّما هو ببساطة حقيقة بديهية. لكن إذا أعطي وقتاً أطول كي يتدبَّر هذا السؤال، فلربما يدرك أنه يتقبَّل صواب العبارة أعلاه لسببين مختلفين. الأول، سبب منطقي أو رياضي بحت، مفاده أنَّ المفهومين العدديَّين «اثنين» و «أربعة» والمفهومين العمليَّتين «زائد» و «يساوي» قد عُرِّفَت بحملتها بحيث تكون العبارة صحيحة. فيمكننا القول إنَّ اثنين

زائد اثنين تساوي أربعة بالتعريف. والواقع أنها ليست صحيحةً بالتعريف مباشرة ، بل بفضل تعاريف معينة . مضافاً إليها قواعد استدلال منطقيّ logical deduction من هذه التعاريف هذه هي الحقيقة بالنسبة للرياضي . ويمكننا أن ندعوها « الحقيقة الجوّانية (أو الباطنة) inner truth » * للعبارة الرياضية .

الحقيقة الجوّانية :
حقيقة تنتمي إلى المنطق

غَيْرَ أَنَّ ثَمَّةَ نوعاً مُغَايِراً تماماً من الحقيقة في العبارة « اثنان زائد اثنين تساوي أربعة » ، يمكن أن ندعوها « الحقيقة البرّانية (أو الظّاهرة) outer truth » . وهذه هي الأكثر إقناعاً للمرء غير المدرّب رياضياً ؛ كما أنها السّبب وراء اعتباره ضوَاب هذه العبارة بديهيّاً . فنحن نعلم جميعاً من خبرتنا الشّخصيّة أنّه إذا أخذنا جسمين ثم أضفنا إليهما جسمين آخرين ، فسنحصل على أربعة أجسام . وعليه ، فإن العبارة « اثنان زائد اثنين تساوي أربعة » ليست مجرد إفادة منطقيّة عن علاقةٍ ما بين الرّموز الرّياضيّة ؛ بل هي إفادة أيضاً عن العالم « الحقيقي » ، عن الطّبيعة ؛ وبالتالي ، فهي حقيقة علميّة . أو بالمصطلح الإنسانيّ ، فإن الحقيقة الجوّانية للرياضيات إنّ هي إلّا حقيقة فكريّة بحثيّة ، حقيقة عن إجماع بشريّ . أمّا الحقيقة البرّانية للرياضيات ، فهي حقيقة عن العالم المادّيّ ، عالم المدارك الحسيّة للإنسان .

الحقيقة البرّانية :
حقيقة البرهان الفيزيائيّ

ومن المُسلّم به — على وجه العموم — أنّ للواقعة الرّياضيّة ، هذا إنّ كانت صحيحةً على الإطلاق . حقيقةً جوّانيّة وأخرى برّانيّة على حدّ سواء . وليس ثمة أدنى استغراب من هذا الاعتقاد ؛ حيث أنّ كلّ الرّياضيّات الأولى التي تُعلّم عادةً في المدارس تتسمُ فعلاً بكلا النوعين من الحقيقة . ومع ذلك ، فمن وجهة نظر الرّياضيّات البَحْثيّة pure mathematics ، ما الحقيقة البرّانيّة إلّا كسب إضافيّ ليس ضرورياً البتّة . والرّياضيّ لا يقتضي من وقائعه إلّا أن تكون مُتوافقةً منطقيّاً مع وقائع أخرى ، وأن تكون قابلةً للاستدلال من تعاريفه الأساسيّة وافتراضاتِهِ (مسلّماتِهِ axioms) . وإذا صادف أنّها تُطابق شيئاً معروفاً في العالم المادّيّ ، وبالتالي تغدو أدوات مفيدة للعالم أو الرّجل العمليّ ، فإنّها لا تجعل الوقائع أكثر ولا أقلّ استساغةً للرّياضيّ . أمّا من وجهة نظر العالم ، فلا بُدّ وأنّ نعتبرها معجزةً طبيعيّةً أنّ الرّياضيّات — وغالباً رياضيّات في غاية البساطة — يمكن أن تُستخدَم بنجاح لوصف الظواهر الطّبيعيّة بتفصيل مقداريّ .

بالنسبة للرّياضيّ ، تكون
الحقيقة الجوّانية كافية

ولم يُميّز دائماً بين الحقيقة الجوّانيّة والحقيقة البرّانيّة في الرّياضيّات ؛ إذ لم يتمّ انفصامهما على نحوٍ بينيّ إلّا في وقتٍ جدّ متأخّر في تاريخ الرّياضيّات — في الفترة ما بين منتصف القرن التاسع عشر إلى مطلع القرن العشرين . ولعلّ أهمّ اكتشافٍ مُقرِّدٍ تمّ في الرّياضيّات على الإطلاق

الرّياضيّات بدون الحقيقة البرّانيّة إنّما
هي اكتشافٌ حديث

« لقد وجدنا التعبيرين «جوّانيّ» و«برّانيّ» أجملّ التعابير في هذا المقام وأعظمها دلالة . وهما يتكرران إلى أبعد الحدود في مؤلّفات الدكتور عثمان أمين ، الذي بنى على أساسها فلسفةً متكاملة .

(المشرّف)

كان الإكتشاف أنَّ الرِّياضيَّات إِنَّمَا هي بِنِيانٍ منطقيٍّ مستقلٍّ عن العالم المادِّي . وقد نشأ هذا « الاكتشاف » ، الذي لم يصدر عن امرئ واحد ولا في زمان واحد ، على امتداد فترة من العقود ، بينما كانت الرِّياضيَّات « غير الفيزيائية » تُقبَلُ شيئاً فشيئاً كجزء هامٍّ من الرِّياضيَّات ، وكانت الرِّياضيَّات « الفيزيائية » تُوضَعُ على أساسٍ منطقيٍّ صُلِدَ بمعزلٍ عن التجربة . فما فتئت الرِّياضيَّات غير الفيزيائية تفرع البابَ لقرون عديدة ، بانتظار أن يُودَنَ لها بالدخول : إذ عُرِفَت الأعداد السَّالبة في بعض الحضارات القديمة ؛ لكنَّها اعتبرت أنَّها خارج نطاق الرِّياضيَّات ، حيث بدا أنَّ الطَّولَ السَّالبَ والكمِّيةَ السَّالبةَ هما خِلْوٌ من المدلولات الفيزيائية . (والواقع أنَّ الأعداد السَّالبة ظلت مشبوهةً إلى حدٍّ ما حتَّى القرن السَّابع عشر .) كذلك اكتشف الإغريق الأطوالَ « الأَجْذَرِيَّةَ » (أو الصِّمَاءَ) irrational ؛ لكنَّهم نبذوا الأعدادَ الأَجْذَرِيَّةَ لأنَّها تنطوي على مفهوم اللانهاية infinity غير الفيزيائي . كما أنَّ الأعدادَ التَّخِيلِيَّةَ imaginary numbers ، التي دُرِسَتْ بدقةً لأوَّلَ مرَّةٍ في القرن السَّادس عشر ، كان عليها أن تنتظر حتَّى القرن التَّاسع عشر لتغدو عُضْواً مقبُولاً كَلِيَّةً في عائلة الحساب .

وقد كان التطوران الخاصان في القرن التَّاسع عشر اللذان أَفْضَا إلى التَّمَدُّد الانفجاريِّ للرِّياضيَّات إلى ميادينٍ غير فيزيائية هما دراسة الهندسة اللاأقليديَّة non-Euclidean geometry ودراسة فراغاتِ spaces تتَّسم بأكثر من ثلاثة أبعاد : إذ أنَّ هندسة أقليدس Euclid هي ذلك الفرع من الرِّياضيَّات الذي تكمنُ حقيقته البرَّانية في العلاقات المكانية لعالمنا الثلاثي الأبعاد . فهي - في آنٍ واحد - فرع من الرِّياضيَّات (حيث أنَّها بُنيانٌ من الأفكار مُتَّسِقُ الأجزاء منطقياً) ، وفرع من الفيزياء (حيث أنَّها وصفٌ مقداريٌّ للمسافات والأشكال في عالمنا المادِّي) . وقد أَقَلَّتِ الرِّياضيُّون لأوَّلَ مرَّةٍ من رِبْقَةِ متطلَّب الحقيقة البرَّانية حين عدَّلوا بكلِّ جرأةٍ إحدى المسلَّات الأساسيّة للهندسة الأقليديَّة ، ومن ثَمَّ شَيَّدوا بُنياناً نظريّاً جديداً مُتَّسِقَ الأجزاء على أساسِ المسلَّات الجديدة . وفي أعقاب ذلك ، توالَتْ هندسات تتَّسم بأكثر من ثلاثة أبعاد ، وضروبٌ من الجبر تتنافى وقوانينِ الحِساب . وأخيراً ، أُعيدت صياغةُ الفروع القديمة المألوفة من الرِّياضيَّات « الفيزيائية » على نَسَقٍ منطقيٍّ صِرْفٍ ، كفئاتٍ مكوَّنة من مسلَّاتٍ أساسيّة وعلاقاتٍ مشتقة من تلك المسلَّات ، بحيث أَضحى الأمرُ سيَّانَ عمَّا إذا طابقت هذه الفروع مشاهداتٍ في العالم المادِّي أم لا .

الهندسة اللاأقليديَّة : أوَّل
رياضياتٍ غَيْرٍ فيزيائيةٍ

وَجَدَ غَاوْسُ أنَّ المكانَ الجاهريَّ
أقليديَّ

وأثناءَ عمليةِ مَسَحِ الأراضِي surveying في جزءٍ كبيرٍ من ألمانيا الشماليَّة في العشرينات من القرن التَّاسع عشر ، وَجَدَ كَارْلُ فَرِيدْرِشْ غَاوْسُ Karl Friedrich Gauss — ضِمْنَ نِطاقِ الشَّكِّ في عمليَّته القياسيّة الذي كان يُقَارِبُ ثَانِيَةَ قَوْسِيَّةٍ واحدةٍ 1 sec of arc — أنَّ الزَّوايا الداخليَّةَ لمثلثاتٍ كبيرة الحجم (كلٌّ ضلعٍ منها يساوي العديدَ من الكيلومترات) يكون مجموعها ١٨٠ . وعلاوةً على دَقَّتِها الاستثنائية بالنسبة إلى ذلك الوقت ، فإنَّ هذه النتيجة

ذات أهمية خاصة لأنَّ غاوس نفسه كان أحد مؤسسي الهندسة اللاأقليدية ؛ إذ نستطيع ، من تعليقات وردت في مراسلاته ، أن نجزم بأنَّه كان مُدركاً أنه — عن طريق عملته هذه — كان يضع الهندسة الأقليدية موضع اختبار تجريبي . إلا أنَّ كونه رجلاً كان يجتنب كلَّ ما من شأنه أن يُثير الجدل والخلاف ، جعله يُفضِّل عدم التعليق في أعماله المطبوعة على هذه السمة من عملية المسح هذه . †

ومن وجهة النظر الحديثة ، يمكن تعريف الرياضيات على وجه التقريب بالطريقة التالية : هي دراسة العلاقات المنطقية بين « كينونات » رياضية مبنية على أساس بضعة افتراضات أساسية حول خواص هذه الكينونات . و « كينونات » الدراسة الرياضية هي مفاهيم تجريدية لا تتحدد ماهيتها الجوهرية إلا بالمسلات التي تُعين مسلكها . فالمتجهات هي أمثلة على كينونات رياضية من هذا القبيل . وكذا أيضاً الأعداد العادية في الرياضيات — الأعداد الصحيحة ، والأعداد الموجبة ، والأعداد السالبة ، والأعداد الحقيقية real numbers ، والأعداد الجذرية rational numbers ، والأعداد التخيلية . ولا تترأى لنا جلُّ الأعداد تجريدية بصورة صارخة إلا لأنَّه اتفق أننا نعلم أنَّ القواعد التي تحكم سلوك الأعداد هي نفس القواعد التي تحكمُ اثلاثات من كينونات فيزيائية حقيقية في العالم الخارجي external world . فإحدى مسلمات حساب الأعداد ، مثلاً ، تُدعى قانون تبادل الحدود في الجمع commutative law of addition . وينصُّ هذا على أنَّ :

$$a + b = b + a;$$

أي أنَّ نتيجة جمع عددين هي نفسها بغضُّ النظر عن ترتيبها في عملية الجمع . وقد اعتُبر هذا ، على مرِّ عصور لا عدَّ لها ولا حصر ، ليس كافتراض عن مسلك المفاهيم التجريدية ، بل كحقيقة بديهية عن أشياء مادية concrete things تماماً تُدعى أعداداً . فانت تعلم أنك إذا أودعت عشرة دولارات في حسابك المصرفي اليوم وعشرين دولاراً غداً ، فإنَّ رصيدك سيزداد بنفس المقدار تماماً كما لو أودعتَ عشرين دولاراً أولاً ومن ثمَّ عشرة . وما هذا إلا أمر « بديهي » . لكنَّ الاكتشاف العظيم الذي تمَّ في القرن التاسع عشر كان الإدراك أنَّ قانون التبادل يمكن اعتباره افتراضاً اعتباطياً كلياً . وكونه كذلك ، فبالإمكان نبذُه أو تغييره كما يحلو لنا ؛ وبالتالي يمكن تطوير حساب جديد كامل على أساس مُسلّمات جديدة . مثلاً ، فيما يُدعى بالجبر السلاتبادلي noncommutative algebra ، لا تساوي $a + b$ الكمية $b + a$. ففي هذا الفرع غير الفيزيائي من الرياضيات ، يُمثِّلُ الزمان a و b كينونتين يتعذر تخيلُهما ؛ حيث أننا

تعريف للرياضيات

الأعداد والمتجهات : هي أمثلة عن « كينونات » رياضية

مُسلِّمة حسابية

† أنظر ، مثلاً ، ف . سميلجا : « بحثاً عن الجمال » ؛ ترجمة عن الروسية : عبدالله حبه (دار مير للطباعة والنشر ، موسكو ، ١٩٧٦) ؛ الباب السابع ، ص ١٨٨-٢٤٢ ؛ وهو فصل ممتع أياً إمتاع .

بالنسبة للرياضي ، تكون الكينونات
اللاتبادلية حقيقة تماماً كالكينونات
التبادلية

لا نعرف أية كينونات مادية تخضع لقانون لاتبادل للجمع . إلا أنه من وجهة نظر رياضية صرفة ، فإن الكينونات اللاتبادلية noncommuting ليست أكثر تجريداً أو أقل حقيقة من الكينونات التبادلية ؛ إذ حدث من باب الصدفة فقد أن الكينونات التبادلية ، التي ندعوها أعداداً ، تتسم بعلاقة دقيقة مع الأشياء التي نراها في العالم المادي ؛ بينما تخالف ذلك الكينونات اللاتبادلية . * وهذه الحقيقة تمنحنا تبصراً هاماً عن ماهية العالم المادي ؛ لكنها لا تؤثر البتة على بُنيان الرياضيات .

ولقد كانت مفاجأة علمية كبرى في القرن العشرين أن بعض الفروع « غير الفيزيائية » من الرياضيات ظهر أنها فيزيائية برغم كل شيء . وسنعود إلى هذه النقطة في البند التالي .

★ ٥,٢ الرياضيات والطبيعة Mathematics and Nature

الرياضيات كلغة : تشابه عميق

من الأفضل أن ننظر إلى الرياضيات البحتة — باعتبارها بُنياناً فكرياً مستقلاً — وكأنها لعبة ؛ إذ أنها كذلك بالضبط . فسلطانها تعرف اللعبة ، التي تلعب وفقاً لقواعد المنطق . ورموز الرياضي تكون بمثابة القطع التي تحرك هنا وهناك . كما أن وفرة العلاقات التي يوسعنا اشتقاقها من المسلمات الأساسية تناظر التشكيلة الغنية من المواقف التي قد تنشأ في لعبة ذات قواعد بسيطة بعض الشيء . ففي حقل بسيط أينا بساطة في الرياضيات ، مثل دراسة مجموعة مكونة من ثلاث كينونات فحسب ، يمكن اشتقاق كل النتائج الجائزة للمسلمات ، تماماً كما أن كل إمكانية في لعبة « التكتكتو tic-tac-toe » † بالمستطاع تحقيقها بصورة لا لبس فيها . أما في الحقول الأكثر تعقيداً في الرياضيات ، فإن ذلك الفيض اللامحدود — على ما يبدو — من النتائج المتدفقة من المسلمات لا يني يتحدى عقول أجيال من الرياضيين ، تماماً كما أن الإمكانات التي لا تنضب في لعبتي « البريدج bridge » و « الشطرنج chess » قد ملكت لب أجيال من اللاعبين . وحتى نتابع هذا التشابه العميق الجذور إلى مدى أبعد نوعاً ، دعنا نعتبر لعبة الشطرنج . فكيف نجعلها تناظر فرعاً من الرياضيات ، علينا أن نعتبر الرقعة board بمثابة مجموعة أوراق الرياضي ،

* بعض الجبر اللاتبادلي قد وجد لذاته مكانة في الفيزياء الحديثة . فهو غير فيزيائي فقط بقدر ما هو معني بوصف العالم المؤلف .

† وتكتب أيضاً tictacktoe ؛ وهي « لعبة يتناوب فيها كل من اللاعبين رسم علامة خاصة به ضمن مربع من مربعات رقعة ما ، ويفوز فيها من يوفد قبل غيره إلى ملء ثلاثة مربعات متوالية بعلامته الخاصة » .
(عن المورد)

٥٥ لعبة ذائعة من ألعاب الورق (الشدة) .
(المشرف)

والبياذق* (أحجار الشطرنج) chessmen بمثابة الرموز التي تُمثلُ كينونات الدراسة التجريدية. وقد تكون إحدى فئات البياذق مصنوعة من العاج ivory ، وفئة أخرى من الخشب ، وأخرى لدائنية (بلاستيكية) plastic ؛ إلا أن كلَّ فرس knight - بغض النظر عن حجمه أو شكله أو مادته - يُمثلُ نفس الجوهر. فليس هناك إلا كينونة تجريدية واحدة تُدعى « فرساً ». والقطعة على رُفعة الشطرنج ليست ذلك المفهوم الجوهرى بأكثر من كون جرة قلم على صفحة من الورق الكينونة التجريدية للبحث الرياضى. وما بيانات الطريقة التي يستطيع كلُّ يئذق التحرك بها إلا مسلمات اللعبة. فمجرد تغيير ثانوي في إحدى المسلمات يُنتج تغييراً عنيفاً في اللعبة ، تماماً كما أن تعديلاً واحداً في مسلمات الحساب يُنتج ضرباً جديداً كلياً من الرياضيات. وأخيراً ، هنالك السؤال عما يُؤلف معرفة تامة عن مفهوم ما أو عن يئذق. ... عندما يتم تحديد الطريقة التي يتحرك بها الفرس ، والطريقة التي يستولي بها على أحجار أخرى ، والطريقة التي يستولي عليه بواسطتها حجر آخر ، فإن ذلك يحملته يُؤلف تعريفاً تاماً لمفهوم الفرس التجريدي. وليس ثمة شيء آخر تجدر معرفته. فالأسئلة من قبيل كيف قد يتحرك فرس على رُفعة مثلثة الشكل هي خلو من أي مدلول ، لأنها خارجة عن نطاق لعبة الشطرنج. صحيح أنه ما انفك هناك الشيء الكثير مما نستطيع أن نتعلمه عن جدوى فرس ما وعلاقته بالبياذق الأخرى ؛ لكن ليس بوسعنا إضافة أكثر مما سبق قوله لتعريف ماهيته. وعلى نفس الغرار ، فإن مفهوماً رياضياً يُعرف كلياً بدلالة بضع مسلمات ؛ بل إن تجريده بحد ذاته يرتكز على الحقيقة بأنه لا يُحدّد إلا حفنة من خواصه. قد يقول طالب رياضيات مبتدئ : « أجل ، أنا أفهم كيف تتصرف المتجهات ؛ لكن ما هو المتجه ؟ » ... الجواب الممكن الوحيد هو أن المتجه إنما هو فكرة معرفة بواسطة بضع قواعد خاصة بسلوكه. أما العالم ، الذي يكون أكثر اهتماماً بجعل الفكرة قابلة للتصور ومفيدة مما هو بالتعلق بأهداب الدقة المنطقية ، فقد يجب : « حسناً ؛ إن القوة ، مثلاً ، هي متجه ». والذي يرمي إليه بقوله هذا هو أنه يوجد مفهوم فيزيائي يُسمى « قوة » يتصرف كالمفهوم الرياضى الذي يدعى « متجهاً » ؛ أي لقد وجد أن المفهوم الرياضى يُناظر مفهوماً فيزيائياً ، مما أكسبه حقيقة برآنية علاوة على حقيقته الجوانية. وجوابه هذا إنما يكافئ تماماً القول عن قطعة معينة منحوتة من العاج : « هذه فرس ». بعبارة أدق ، فإن القطعة هي جسم مادي يتصرف كمفهوم « الفرس » التجريدي ؛ كما أن جوهر الفرس هو فكرة مستقلة تماماً عما إذا كانت القطعة سوداء أم بيضاء ، كبيرة أم صغيرة ، عاجية أم لدائنية. وعلى نفس الشاكلة ، فإن الأفكار الرياضية - من عدد ، أو متجه ، أو طول ، أو زاوية - هي جميعاً تجريدات مستقلة تماماً عن أي تناظر مع الأشياء في العالم « الحقيقى ».

المتجهات الرياضية. والمتجهات
الفيزيائية

* وَيُقَالُ أَيْضاً بِيَاذَقَةٌ ؛ وهي كلمة فارسية الأصل. واليئذق - في اللغة - هو الدليل في السفر ، أو الجُنْدِي الرَّاجِلُ ؛ ومنه يئذقُ الشطرنج. (أنظر معاجم اللغة).

فبمقدورنا ، إذن ، أن نعتبر الرياضيات كأحد مُبدعاتِ العقلِ البشريِّ - بمعزلٍ عن العلمِ ومعزلةٍ عن الطبيعة . من هذا المنطلق ، فهي ليست مثل لعبةٍ فحسب ، بل إنها لعبةٌ حقاً : قواعدُها اعتباطيةٌ ، ومحكُّها الوحيد للصواب هو الحقيقةُ الجوانيةُ الكامنة في اتساقِ أجزائها . وبدلالةِ كُنْهِ الحقيقةِ ، يمكنُ فَصْمُ الرياضياتِ والعلمِ بوضوح . فالرياضياتُ ، بغضِّ النظر عن تعدُّدِ تطبيقاتها في العالمِ الحقيقيِّ ، لا تجدُ محكَّها النهائيَّ للصواب إلا على إيقاعِ الحقيقةِ الجوانيةِ . أمّا العلمُ ، فهما كانت مفاهيمُهُ مجردةً ومنطقُهُ نظرياً ، فهو لا يُبرِّرُ في النهايةِ إلا بواسطة الحقيقةِ البرآنيةِ القائمةِ على البرهانِ التجريبيِّ . وبالمصطلحِ الإنسانيِّ ، يمكننا التعبير عن هذه الثنائِيَّةِ dichotomy على الوجه التالي : يتركز العلم في صميمه على وعي الإنسان بعالمٍ منهجيٍّ خارجٍ نفسه ؛ بينما تتركز الرياضياتُ أساساً على وعي الإنسان بعالمٍ منظمٍ داخِلٍ نفسه .

تُبْرِّرُ الحقيقةُ الجوانيةُ الرياضياتَ

بينما تُبْرِّرُ الحقيقةُ البرآنيةُ العلمَ

وغني عن القولِ إنَّ الرياضياتَ ، بالنسبة للعالمِ ، هي أكثر من مجرد لعبةٍ . فالعلمُ دون رياضياتٍ يستحيلُ تصوُّره ؛ حيثُ أنَّ الرياضياتَ هي التي تعطي العلمَ مِيزَتَهُ المقداريةَ وقدرتهِ التنبؤيةَ . بيدَ أننا إذا تَبَيَّنَّا وجهةَ النظر الحديثة حول ماهيةِ الرياضياتِ ، فلا بُدَّ من أنْ نعتبرها مُصادفةً خارقةً أنَّ الرياضياتَ قد وَجَدَتْ تطبيقاً مفيداً في وصفِ العالمِ الماديِّ .

المففعةُ العمليةُ للرياضياتِ : أهي
يَتَأَجُّ الحاجةُ المُلِحَّةُ أم المصادفةُ
السَّعيدةُ ؟

أم هل هي مصادفةٌ حقاً ؟ بالطبع ، ليس عجباً أن يَمْتَ الحساب والجبر والهندسة الأُقلِيدِيَّةُ بِصِلَةٍ إلى العالمِ الحقيقيِّ ؛ إذ أنها اختُرِعَتْ وَطُوِّرَتْ لأهدافٍ عمليةٍ ، بُغْيَةً وَصِفٍ الطبيعةِ . فالتطبيقُ وَرَدَ أولاً ، ومن ثَمَّ التجريدُ . إلا أنَّ السؤالَ يتغلغلُ أعمقَ من ذلك . ففي صميمه هو الآتي : هل الإنسان قادر على تصوُّرِ كَوْنٍ غيرِ ماديٍّ ؟ وبما أنَّ الإنسانَ هو ذاته جزءٌ من العالمِ الماديِّ ، فهل يُعْقَلُ أنْ نُمَيِّزَ بينِ عالِمِهِ الجَوَانِيِّ وعالِمِهِ البرآنيِّ ؟ وهل يَتَوَجَّبُ على أية رياضياتٍ ، بوسعِ العقلِ البشريِّ أنْ يَخْتَرِعَهَا ، أن تكونَ على صِلَةٍ ما بالعالمِ الماديِّ ، سواء أكانت هذه الصِّلَةُ قد اكتُشِفَتْ بعد أم لا ؟ بكلماتٍ أخرى . أَلْعَلَّ « الفِكْرَةَ الخاطئةَ misconception » الرَّاجعةُ عن الحقيقةِ البرآنيةِ للرياضياتِ ليست فكرةً خاطئةً رَغَمَ كلِّ شيءٍ ؟ ... مهما خَبَأَ لنا المستقبلُ في طَيَّاتِهِ ، فالواقعُ أنَّه توجد الآن فروع من الرياضياتِ ليست لها حقيقةٌ برآنيةٌ معلومةٌ ؛ ويظلُّ ذلك الجزء من الرياضياتِ ، حتَّى الآن ، مَحْضَ تمرينٍ فكريٍّ .

وفي نفس الوقت ، فالكثير من الرياضياتِ « غير الفيزيائية » التي تنتمي إلى القرن التاسع عشر قد أَصْبَحَ الرياضياتُ الفيزيائيةُ للقرن العشرين : إذ لقد عُمِّمَ المكانُ الثلاثيُّ الأبعادُ إلى الزَّمَكانِ الرباعيِّ الأبعادِ ؛ كما بَيَّنَتْ نظريةُ النسبيةِ العامةُ أنَّ المكانَ ليس أُقلِيدِيًّا حقاً ، رغم أنَّه يبدو كذلك في أية منطقةٍ صغيرةٍ . كذلك ، فقد تطلَّبت الصِّياغةُ الرياضيةُ لنظريةِ الكمِّ استعمالَ الأعدادِ التَّخِيلِيَّةِ ، بالإضافة إلى كمِّيَّاتٍ لا تَبْدُلُ commute مع بعضها البعض ، ومَتَجِهَاتٍ

تَسْتَخْدِمُ الفيزياءُ رُفَعَاتِ أَوْسَعِ
فَأَوْسَعِ من الرياضياتِ

قابعة في مكان ذي أبعاد لامتناهية العدد . وتحت تأثير التمدد الهائل في القاعدة الرياضية للفيزياء ، كتب بول ديراك عام ١٩٣١ يقول :

إن الهندسة الأقليدية والجبر اللاتبادلي ، اللذين اعتبرا في أحد الأوقات فيما مضى خيالات صرفة للعقل وتسلية عابرة للمفكرين المنطقيين ، قد وجد الآن في غاية الضرورة لوصف الواقع العامة للعالم المادي . ويبدو من المحتمل أن عملية التجريد المتزايد هذه ستستمر في المستقبل ؛ كما أن التطور في الفيزياء سيكون مقترنا بتعديل وتعميم متواصلين للمسلّمات الجامعة عند قاعدة الرياضيات ، بدلاً من التطوير المنطقي لأي مخطط scheme رياضي واحد مبني على أساس ثابت .^{*}

فلا يقول ديراك إن الرياضيات بأسرها ستغدو في نهاية المطاف مفيدة للوصف العلمي للطبيعة ؛ لكنه يُعبر عن اعتقاده بأن رُقعاتٍ أوسع فأوسع من الرياضيات ستبرهن أنها رياضيات فيزيائية — أي أنها تتسم بحقيقة برآنية فضلاً عن حقيقة جُوانية . وحتى لو كان صحيحاً أن أي مخطط رياضي مُتسق الأجزاء ، بمقدور الإنسان أن يخترعه ، ينطوي بالضرورة على بعض التناظر مع العالم المادي (وهي قضية proposition تبدو غير محتملة لمؤلف هذا الكتاب)[†] ، فإنه من المستحيل — على ما يبدو — أن يتمكن الإنسان من إثبات ذلك لنفسه . في السابق نحو الحقيقة ، لسوف يكون الرياضيون على الدوام متقدمين على العلماء بمرحلة أو سواها . وفي سائر الأوقات ، لسوف يوجد بعض فروع من الرياضيات مما لم يتمكن بعد من إيجاد تطبيق فيزيائي ، ومما سيطر — على الأقل ردحاً من الزمن — « خيالات صرفة للعقل وتسلية عابرة للمفكرين المنطقيين » .

٥,٣ أنظمة الإحداثيات وأطر الإسناد Coordinate Systems and Frames of Reference

إن حلبة الفيزياء هي الزمكان . بيد أنه بمقدورنا ، في الوقت الحاضر ، أن نضع الزمان جانباً كما نتدبره على حدة فيما بعد ، وأن نحصر اهتمامنا في المكان الثلاثي الأبعاد . فجُلّ الفيزياء ينطوي على بيانات حول الموضع في المكان . وتحدد عادة نقطة في المكان بواسطة إحداثيات . فلتعيين موضع نقطة على خط مستقيم ، يكون إحداثي واحد كافياً ؛ بينما يلزم إحداثيان لتحديد نقطة في مستوى ، وثلاثة إحداثيات لتحديد نقطة في مكان ثلاثي الأبعاد . ويتألف نظام

^{*} « محاضر جلسات الجمعية الملكية (لندن) » ، المجلد ٨١٣٣ ، ص ٦٠ (١٩٣١) :

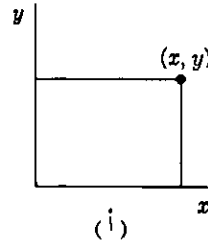
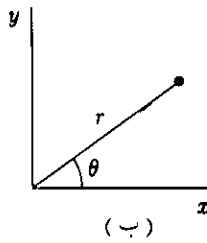
Proceedings of the Royal Society (London) A 133, 60(1931).

كان بول ديراك ، أحد الفيزيائيين النظريين البارزين في إنجلترا ، مسؤولاً هو نفسه عن الإدخال في الفيزياء رياضيات سبق أن كانت غير فيزيائية . ففي عام ١٩٢٨ ، اكتشف أن الإلكترون ينبغي أن يُوصف ليس فقط بواسطة موضعه في الزمان والمكان العاديين ، بل أيضاً بواسطة موضعه في « مكان مغزلي » spinor space « تجريدي غريب . وقد أفضت هذه الرياضيات الجديدة إلى نظرية مُحسنة للإلكترون وإلى التنبؤ بموضعه . ولأجل عمله هذا ، نال ديراك جائزة نوبل في الفيزياء عام ١٩٣٣ .

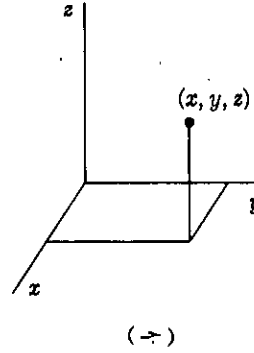
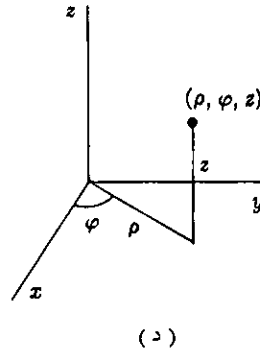
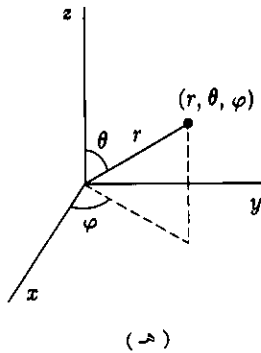
[†] ولنا أيضاً .

المشرف :

إحداثي من نقطة معينة ، هي نقطة الأصل origin ؛ ومن اتجاهات معينة ، أو محاور axes ؛ ومن تعليمات instructions تعرف كيفية رسم النقاط في المكان نسبة إلى نقطة الأصل وإلى المحاور . وليس ثمة من نهاية لعدد الأنظمة الإحداثية التي يمكن تعريفها ؛ كما أن العديد من الأنظمة الخاصة يكون مناسباً لمعضلات خاصة . إلا أن هناك أنظمة قليلة نسبياً تستخدم على نطاق واسع ؛ ومن بين الأكثر شيوعاً الأنظمة : الديكارتية Cartesian [†] ، والقُطبية polar ، والأسطوانية cylindrical ، والكروية (أو الكُرَيَّة) spherical (شكل ٥،١) . وسنجد أن الإحداثيات الديكارتية والقُطبية تفي بالغرض تقريباً لكل التطبيقات الواردة في هذا الكتاب .



شكل ٥١ : أنظمة إحداثية شائعة . (أ) إحداثيات ديكارتية في بُعْدَيْن . (ب) إحداثيات قطبية في بُعْدَيْن . (ج) إحداثيات ديكارتية في ثلاثة أبعاد . (د) إحداثيات أسطوانية . (هـ) إحداثيات كروية .



وفي بُعْدَيْن اثنين [أي في مُستَوًى] ، تُدعى الإحداثيات الديكارتية اصطلاحاً x, y ،

[†] نسبة إلى رينيه ديكارت Rene Descartes (١٥٩٦-١٦٥٠) ، الرياضي والفيلسوف الفرنسي العظيم ، الذي يُعدُّ بحق أب الفلسفة الأوروبية الحديثة . وهو مخترع الهندسة التحليلية (وإن لم يكن ذلك بشكلها النهائي) ، التي طُبِّق فيها الجبر على الهندسة لأول مرة على ذلك النطاق الواسع . وقد ميَّز بصورة قاطعة بين العقل (الذي اعتبره راسخاً ثابتاً لا يتزعزع) والمادة (التي فسَّرها بدلالة مفاهيم ميكانيكية بحتة) . كما لا يزال نَشْتَعُرُ في العلم الحديث بتأثير بذور الشك التي بَذَرها في سياق منهجه المشهور ، الذي يشكُّ بكل شيء من أجل الوصول إلى اليقين المُمَثَّلَ بالبداية الفكرية الراسخ (« الكوجيتو » الديكارتية) : « أنا أفكر ؛ إذن فأنا كائن » [أو موجود] *cogito ergo sum* . ومن أبرز مؤلفاته (التي تُرجم بعضها إلى العربية الدكتور عثمان أمين) : « المقال في المنهج » (١٦٣٧) و « التأملات » (١٦٤١) و « مبادئ الفلسفة » (١٦٤٤) و « رسالة في الأهواء (أو الانفعالات) » (١٦٤٩) .

والإحداثيات القطبية r, θ . ونتمتع في شكل ٥,١ العُرفَ الشائعَ بصدد استعمال نفس الرمزَين x, y لوسم المحورَين ولتحديد نقطة معينة أيضاً . وترتبط هاتانِ الفئتانِ من الإحداثياتِ المستوية بالمعادلتين

$$x = r \cos \theta, \quad (٥,١)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (٥,٢)$$

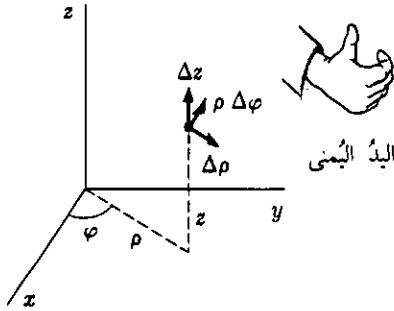
العلاقة بين الإحداثيات

القطبية والديكارتية

(سنعيد النظر في صيغِ عِلْمِ المُثلثاتِ trigonometry في ملحق ٦) . أما الإحداثيُّ الثالثُ ، z ، فهو يُعمِّمُ النظامَ الديكارتِيَّ من بُعْدَيْنِ إلى ثلاثة ، كما يُعمِّمُ أيضاً الإحداثياتِ القطبيةَ الثنائيةَ البُعْدِ إلى الإحداثياتِ الأسطوانيةِ الثلاثيةِ الأبعادِ (مع تغيير في الرموز من r, θ إلى ρ, φ) . كذلك تشمل الإحداثيات الكروية مسافةً واحدة ، r ، وزاويتين اثنتين ، هما φ و θ . غير أننا لن نتابع تفاصيلَ نظامِ الإحداثياتِ هذا .

والنظام الديكارتِيَّ المبين في شكل ٥,١ (ج) هو ما يُدعى نظاماً يمينياً right-handed system . فإذا أشارت أصابعُ اليدِ اليمْنَى باتجاهَ محورِ x ، ومن ثم قُوسَتْ لتشيرَ باتجاهَ محورِ y ، فإن الإبهامَ الأيمنَ سيدلُّ على اتجاهِ محورِ z . أو بطريقةٍ بديلة ، فكَرُّ بندويرِ محورِ x نحو محورِ y ، بحيث تُبينُ الأصابعُ المُتَقَوِّسةُ لليدِ اليمْنَى اتجاهَ الدورانِ . عندئذٍ سيُتجه الإبهامُ مرةً ثانيةً على امتدادِ محورِ z . * لاحظْ أنَّ هذا التعريفَ للالتفافِ handedness

تعريف نظام يميني



شكل ٥,٢ : يكون النظام الإحداثي الأسطواني يمينياً إذا رُتِبَتِ الإحداثيات بحيث يَرُدُّ ρ أولاً ثم φ ثم z . وبما أنَّ الإزاحات $\Delta \rho$ ، $\Delta \varphi$ و Δz متعامدة بالتبادل ، فإن هذا النظام هو أيضاً متعامد .

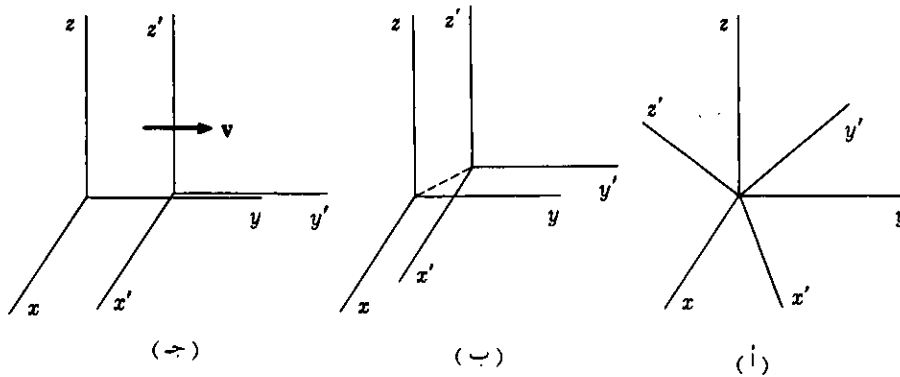
يعتمد على ترتيب الإحداثيات x أولاً ، و y ثانياً ، و z ثالثاً . وتكاد أنظمة الإحداثيات اليمينية تُستخدَمُ دونَ ما عداها في الفيزياء ، وذلك من باب العُرفِ والإجماع العام . وإنَّ نظامَ الإحداثياتِ الأسطوانيِ المبين في شكل ٥,١ هو أيضاً يميني إذا اختيرَ الترتيبُ بحيث يكون ρ ثم φ ثم z . ويبيِّن شكل ٥,٢ مَرَّةً ذلك . . . تأمَّلْ ماذا يحدثُ لنقطة عند ρ, φ, z إذا زِيدَتْ ρ وَحَدَّهَا بمقدار $\Delta \rho$ ، أو φ وَحَدَّهَا بمقدار $\Delta \varphi$ ، أو z وَحَدَّهَا بمقدار

* كذلك يمثِّلُ محورُ z الاتجاهَ الذي سوف يندفعُ نحوه لَوَلَبُ (بُرْغِي) يميني right-handed screw ، لو قُيِّلَ بهذه الطريقة . twisted

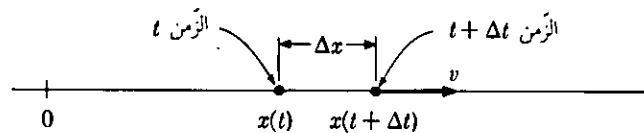
Δz . فإن التغيرات المستقلة الثلاثة للنقطة تكون كما تدل عليه السهام في هذا الشكل ؛ حيث تكون اتجاهات الزيادات الثلاث فئة يمينية من المحاور البالغة الصغر عند النقطة المعينة
وبما أن هذه الاتجاهات الثلاثة متعامدة بالتبادل mutually perpendicular ، فإن النظام الأسطواني هو ما يدعى نظاماً متعامداً orthogonal system ، تماماً كالنظام الديكارتي .

أنظمة متعامدة

لاحظ أن الإحداثيات اللاديكارتية non-Cartesian لا تزال تُعرف بالنسبة إلى فئة محاور ، نستمر بتسميتها محاور x و y و z ، رغم أن الإحداثيات المستخدمة لتعيين مواضع النقاط لم تعد x و y و z . وعلى العموم ، نعرف نقطة أصل مع فئة محاور ما يدعى بإطار إسناد . وإطار الإسناد هو فكرة أشمل من نظام الإحداثيات ، حيث يكون ممكناً ضمن إطار واحد العديد من أنظمة الإحداثيات المختلفة . كما قد يحتفظ إطاراً إسناداً مختلفان بنقطة أصل مشتركة ، حيث لا يختلفان إلا في اتجاه محاورهما [شكل ٥,٣ (أ)] ؛ أو قد تكون نقطتا الأصل لهما على بُعد ثابت عن بعضهما البعض [شكل ٥,٣ (ب)] ؛ أو قد يكون أحد الإطارين متحركاً نسبة إلى الآخر [شكل ٥,٣ (جـ)] ؛ أو قد يختلفان بأي اثتلاف من هذه الحالات . وفي التطبيقات الفيزيائية ، نختار أطر الإسناد على الأغلب لكي توافق شيئاً مادياً . فنحن نتكلم مثلاً عن إطار مثبت على الأرض ، أو إطار مثبت على الشمس ، أو إطار الإسناد لمراقب متحرك . وواضح أنه كلما عيّنت إحداثيات جسيم ، كان من المهم أن نعرف نسبة إلى أي إطار إسناد تقاس الإحداثيات .



شكل ٥,٣ : نعرفُ المحاور xyz و $x'y'z'$ إطاراً إسناداً . وقد يختلف هذان الإطاران : (أ) بالدوران ؛ (ب) بالانقلاب ؛ (جـ) بالسرعة النسبية بينهما ؛ أو بأي اثتلاف من هذه الحالات .



شكل ٥,٤ : جسيم يتحرك على امتداد محور x بين الزمنين t و $t + \Delta t$ ، تكون إزاحته Δx كما يكون خارج القسمة $\Delta x / \Delta t$ متوسط مركبة x لسرعته في هذه الفترة .

وقد يعتمد على إطار الإسناد ليس إحداثيات الجسم فحسب ، بل أيضاً خواص فيزيائية أخرى . فسؤال من قبيل « ما هي القوة باتجاه x ؟ » لا يمكن إجابته إلا إذا عُرف اتجاه محور x . كذلك ، قد تعتمد سرجة جسم على إطار الإسناد ؛ إذ قد يكون الجسم ثابتاً في أحد أطر الإسناد ، ومتحركاً بالنسبة إلى إطار آخر .

٥,٤ السرعة ؛ المشتقة "Speed; the Derivative"

إعتبر جسماً متحركاً على امتداد خطٍ مستقيم ؛ ولنعرف هذا الخط كمحور x (شكل ٥,٤). وبما أن موضع الجسم يكون دالة في الزمن ، نستطيع أن نرمز إليه بالصورة $x(t)$. فكما هو مبين في الشكل ، يكون الجسم في الزمن t عند الموضع $x(t)$ ؛ بينما يكون في الزمن $t + \Delta t$ عند الموضع $x(t + \Delta t)$. وعليه ، ففي الفترة الزمنية Δt ، تتحدد إزاحته displacement بالعلاقة :

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t). \quad (٥,٣)$$

كما أن متوسط مركبة x (average x component) لسرجهته إبان هذه الفترة هو - بالتعريف - الإزاحة مقسومة على الفترة الزمنية :

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (٥,٤)$$

متوسط مركبة السرجة

أما متوسط سرعته ، الذي يكون كمية موجبة ، فهو مقدار $\bar{v}_x$ (magnitude) . (قارن هذا مع المعادلة ٢,٨ ، حيث يُفترض أن Δs موجبة .)

من ناحية أخرى ، إذا تحرك الجسم باتجاه محدد وبسرعة ثابتة v_0 ، فإن إزاحته تتناسب مع الفترة الزمنية :

$$\Delta x = \pm v_0 \Delta t$$

(حيث تكون الإشارة الموجبة للحركة إلى اليمين في شكل ٥,٤ ؛ بينما تنتمي الإشارة السالبة للحركة إلى اليسار). وبذلك ، تعطي المعادلة ٥,٤

$$\bar{v}_x = \frac{\pm v_0 \Delta t}{\Delta t} = \pm v_0$$

• بإمكان القراء الذين هم على حسن اطلاع على حساب التفاضل والتكامل الأولي elementary calculus أن يخطئوا هذا البند أو أن ينظروا إليه نظرة عجيلى بغية المراجعة . أما الطلاب الذين بدأوا لتوهم مقررًا في التفاضل والتكامل ، فقد يرغبون الآن في دراسة هذا البند والبندين ٥,٨ و ٥,٩ عن التكامل ، علّهم أن يرجعوا إليها فيما بعد ، عندما يقطعون شوطاً في مقررَي الرياضيات والفيزياء .

وهذه كمية ثابتة لا تعتمد على اختيار الزمنين t و $t + \Delta t$. أما إذا تحرك الجسم بسرعة متغيرة ، فإن متوسط مركبة x لسرجهته سيعتمد على الزمنين t و $t + \Delta t$. وهناك كمية ذات

جدول ٥,١ : مثال عددي على عملية النهاية

يفترض أن الأزمنة والمواضع المبينة أدناه قد قيست ؛ أما متوسط السرعات فقد حُيب .^٥ وعند اللحظة الزمنية ١ ث $t = 1 \text{ sec}$ تكون المسافة ١٠ م $x = 10 \text{ m}$.

$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (م/ث)	Δx (م)	$x(t + \Delta t)$ (م)	Δt (ث)	$t + \Delta t$ (ث)
٢٢,٥٠٢٠	٢٢,٥٠٢٠	٣٢,٥٠٢	١	٢
١٩,٣٧٦٥	٩,٦٨٨٢٥	١٩,٦٨٨٢٥	٠,٥	١,٥
١٦,٨٧٦١	١,٦٨٧٦١	١١,٦٨٧٦١	٠,١	١,١
١٦,٣١٣٥	٠,١٦٣١٣٥	١٠,١٦٣١٣٥	١٠ ⁻	١,٠١
١٦,٢٥٧٣	٠,٠١٦٢٥٧٣	١٠,٠١٦٢٥٧٣	١٠ ^{-٣}	١,٠٠١
١٦,٢٥١٦	٠,٠٠١٦٢٥١٦	١٠,٠٠١٦٢٥١٦	١٠ ^{-٤}	١,٠٠٠١
١٦,٢٥١١	٠,٠٠٠١٦٢٥١١	١٠,٠٠٠١٦٢٥١١	١٠ ^{-٥}	١,٠٠٠٠١
١٦,٢٥١٠	٠,٠٠٠٠١٦٢٥١٠	١٠,٠٠٠٠١٦٢٥١٠	١٠ ^{-٦}	١,٠٠٠٠٠١

^٥ إن الأعداد في هذا الجدول مبينة على أساس الصيغة المختارة جرافاً : $x = 3.749t + 6.251t^2$.

أهمية خاصة لمثل هذه الحركة ؛ ألا وهي مركبة السرجية اللحظية instantaneous velocity عند اللحظة الزمنية t . وتُعرف هذه بواسطة عملية النهاية limiting process التالية :

مركبة السرجية اللحظية

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} . \quad (٥,٥)$$

وبما أن Δx تقترب من الصفر عندما تقترب Δt من الصفر ، تكون هذه نهاية النسبة لهاتين الكميتين عندما تقترب كلاهما من الصفر . وإذا وجدت هذه النهاية ، فإنها تدعى مشتقة x بالنسبة إلى t ؛ وتكتب dx/dt . وهكذا نحصل على

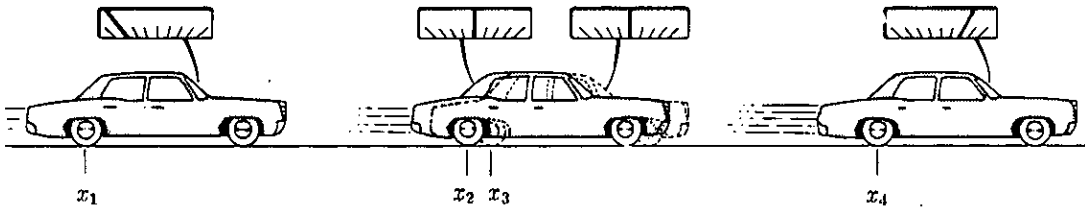
هذه المركبة إن هي
إلا مشتقة

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} . \quad (٥,٦)$$

ويمكن تطبيق هذا التعريف الأساسي للمشتقة على دوال أخرى أيضاً. * لاحظ أن الرمز dx/dt لا يعني أن dx مقسومة على dt ؛ بل لقد اختيرت الرموز لكي تُعيد إلى الذهن عملية النهاية التي تُعرف المشتقة. وفي جدول ٥,١ ، يُدُلُّ مثالٌ عدديٌّ على عملية النهاية هذه. فعندما يقترب التزايدان increments ، Δx و Δt ، من الصفر ، كلٌّ على حدة ، فإن النسبة بينهما تُؤول إلى قيمة متناهية معينة.

ويكون للمشتقة المعروفة بالمعادلة ٥,٦ قيمة محددة إذا تغيرت « بصورةٍ ملساءً smoothly ». ويعني هذا - فيزيائياً - أن الجسم لا يخضع لأيّة تغيرات مباغتة في الموضع أو السّرجية. فلو نُقِلَ الجسم - بفضل معجزةٍ ما - من موضعٍ لآخر بمثل لَمْحِ البصر ، لَمَا كان لزاماً على سرعته أن تكون ذا قيمةٍ فريدةٍ عند لحظة نقله. كذلك ، لو سدّدنا إليه ضربةً مطرقةً مثاليةً تستغرق فترةً زمنيةً صفريةً ، لما عُرِفَت المشتقة - أو السّعة - عند اللحظة التي تحدث فيها ضربةُ المطرقة. غير أن السّعة سوف تكون محددةً عند لحظات زمنيةٍ أخرى - ما قبل وما بعد الضربة مباشرة. ويظهر مثال على الحركة « الملساء » في شكل ٥,٥.

الدوال « الملساء » فقط لها مشتقات



شكل ٥,٥ : سيارةٌ مُسَارِعةٌ. ويزوّدنا عدادُ السّعة speedometer فيها بمقياسٍ لسرعتها اللحظية ، dx/dt . فلإِزاحةٍ صغيرةٍ لدرجةٍ كافية ، كذلك بين x_2 و x_3 ، يُقَارِبُ متوسطُ سرعتها ، $[(x_3 - x_2) / (t_3 - t_2)]$ ، سرعتها اللحظية عند x_2 (أو عند x_3).

وفي الحالات التي توجد فيها المشتقة ، يمكن تأويلها بأنّها المعدّل الذي تتغيّر بموجبه إحدى الكميات في الوقت الذي تُفاوِت فيه كميةً أخرى. وعلى وجه الخصوص ، فإنّ السّعة هي معدّل تغير الموضع عندما يتغيّر الزمن - أو ، كما يُعبّر عنها عادةً ، معدّل تغير الموضع بالنسبة إلى الزمن. كذلك ، فإنّ للمشتقة مدلولاً هاماً باعتبارها الميل slope لخطٍّ أو منحنى في رسم بياني. وسنعتبر هذه السّمة للمشتقة في بند ٥,٦.

وما المشتقة إلا معدّل (تغيّر)

■ مثال ١ : توصف حركة جسمٍ على امتداد محور x بالمعادلة

$$x = x_0 + v_0 t. \quad (٥,٧)$$

• مثلاً ، إذا كانت y دالةً في x ، نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

دعنا نبين على وجه التحديد ، من تعريف المشتقة ، بأن مركبة x لسرعتها هي v_0 .
من المعادلة ٥,٧ ، نجد أن

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{[x_0 + v_0 \cdot (t + \Delta t)] - [x_0 + v_0 t]}{\Delta t} = \frac{v_0 \Delta t}{\Delta t} .$$

وخارج القسمة quotient هذا يساوي v_0 لكل الكميات Δt ، مهما كانت صغيرة . وبذلك ، تكون المشتقة

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_0 \Delta t}{\Delta t} = v_0 .$$

■ مثال ٢ : يُمَثِّلُ حجرٌ ساقطٌ للمعادلة :

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2, \quad (٥,٨)$$

حيث z ارتفاعه عن سطح الأرض ، و g و h ثابتان . فما سرعته كدالة في الزمن ؟
باستبدال x بالرمز z ، نحصل من المعادلة ٥,٥ على

$$\begin{aligned} v_z &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[h - \frac{1}{2}g \cdot (t + \Delta t)^2] - [h - \frac{1}{2}gt^2]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-gt \Delta t - \frac{1}{2}g \cdot (\Delta t)^2}{\Delta t} . \end{aligned} \quad (٥,٩)$$

وتساوي النسبة $(\Delta t / \Delta t)$ ١ ، وتبقى ١ عند النهاية $\Delta t \rightarrow 0$. أما خارج القسمة $(\Delta t)^2 / \Delta t$ ، فيساوي Δt ويقترب من الصفر عند النهاية . وهكذا ، فلا يبقى على يمين المعادلة ٥,٩ عند النهاية إلا الحد الأول . وعليه ، تكون مركبة z للسرعة

$$v_z = \frac{dz}{dt} = -gt .$$

■ أما السرعة فتكون $|v_z| = gt$.

□ بعض قواعد التفاضل Some Rules of Differentiation

من الدوال الهامة متغيرٌ مرفوعٌ إلى قوة ثابتة :

$$f(x) = x^n .$$

وقد اشتقت مشتقتا x و x^2 ، في صميمها ، في المثالين السابقين ١ و ٢ . فهاتان المشتقتان

(لاحظ أن الحرف x يحل محل 1 هنا) هما :

$$\frac{dx}{dx} = 1; \quad (5,10)$$

بعض المشتقات البسيطة

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x. \quad (5,11)$$

وكمثال آخر ، اعتبر $f(x) = x^3$. فتحدد مشتقتها بنم كالآتي :

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مثال على عملية نهاية

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x},$$

حيث ينتج التعبير الأخير عن مفكوك ذات الحدين binomial expansion للكمية $(x + \Delta x)^3$. وعند النهاية ، يتلاشى الحدان المتناسبان مع $(\Delta x)^2/\Delta x$ و $(\Delta x)^3/\Delta x$ ؛ بينما يبقى الحد $3x^2 \Delta x/\Delta x$ ، الذي يؤول إلى $3x^2$. وبذلك ، فإن

$$\frac{d(x^3)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2. \quad (5,12)$$

ونبين هنا - إلى يمين إشارة التساوي الأولى [ابتداءً من اليسار] - رمزاً شائعاً آخر للمشتقة . وستترك كتمرين البرهان أنه - باستعمال تعريف المشتقة ونظرية ذات الحدين - يكون لأي ثابت n :

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}. \quad (5,13)$$

مشتقة x^n

وهذه وبعض المشتقات المألوفة الأخرى مُدرّجة في جدول ٥,٢ . وسناقش الدوال المثلثية trigonometric ، والأسية exponential ، واللوغاريتمية logarithmic ، الواردة في هذا الجدول ، في بُنود لاحقة .

وتُدعى عملية إيجاد المشتقة لدالة ما مُفاضلة differentiating الدالة . ويمثل التفاضل لبضع قواعد بسيطة جديرة بالاستظهار ، مودى إثنين منها أن : مشتقة (ثابت ضرب دالة) هي

جَدْوَل ٥,٢ : بعض المشتقات المألوفة

$f(x)$	$\frac{df}{dx}$
$a = \text{constant}$ (ثابتاً)	0
x	1
x^2	$2x$
$1/x$	$-1/x^2$
$1/x^2$	$-2/x^3$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\sin ax$	$a \cos ax$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos ax$	$-a \sin ax$
$\tan x$	$\sec^2 x = 1/\cos^2 x$
$\tan ax$	$a \sec^2 ax = a/\cos^2 ax$
e^x	e^x
e^{-x}	$-e^{-x}$
e^{ax}	ae^{ax}
$\ln x$	$1/x$
$\ln ax$	$1/x$

الثابت ضرب مشتقة الدالة ؛ كما أنَّ مشتقة مجموع دالتين هي مجموع مشتقتيهما . وتزودنا هاتان القاعدتان معاً بما يُسمى بالخاصية الخطية *linearity property* للتفاضل :

الخاصية الخطية للتفاضل

$$\frac{d}{dx} [af(x) + bg(x)] = a \frac{df}{dx} + b \frac{dg}{dx} , \quad (٥,١٤)$$

حيث a و b هنا ثابتان . ومُفاضلة دالة إنَّ هي إلاَّ مثالٌ على « إجراء عملية operating » على الدالة . ونظراً للخاصية المُعبَّر عنها بالمعادلة ٥,١٤ ، فإنَّ التفاضل يُدعى عملية خطية *linear operation*

كذلك ، تُعبَّر واحدة من أهمَّ قواعد التفاضل عن مشتقة حاصل الضرب *product* لدالتين $f(x)$ و $g(x)$. وتنصُّ هذه على أنَّ

مشتقة حاصل ضرب

$$\frac{d}{dx} (fg) = f \frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx} g. \quad (٥,١٥)$$

ولكي نشتق هذه النتيجة ، دعنا نعتبر خارج القسمة :

$$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}.$$

فبمقدورنا أن نُعيد كتابة هذا التعبير كالآتي :

$$\frac{f(x + \Delta x)[g(x + \Delta x) - g(x)] + [f(x + \Delta x) - f(x)]g(x)}{\Delta x}.$$

وبذلك ، تكون النهاية التي تُعرف المشتقة هي

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(fg) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} & \left[f(x + \Delta x) \left(\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) g(x) \right]. \end{aligned}$$

وفي النهاية ، نُوول الكميتان ضمن الهلالين parentheses الكبيرين إلى المشتقتين df/dx و dg/dx ، كما يُوول مَضْرُوباهما multipliers إلى $f(x)$ و $g(x)$ ، على التوالي . فنكون النتيجة المعادلة ٥،١٥ . وثمة صيغة وثيقة العرى ، نترك برهانها كمسألة للقارئ ، تُحدد مشتقة خارج القسمة لدالتين :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{df}{dx} g - f \frac{dg}{dx}}{g^2}. \quad (٥,١٦)$$

مشتقة خارج قسمة

كما أن هناك قاعدة أخرى للتفاضل غالباً ما تكون مفيدة في التطبيقات الفيزيائية : افترض أن f هي دالة في المتغير u ، الذي هو بدوره دالة في المتغير t . عندئذ ، يمكن كتابة المشتقة df/dt كحاصل ضرب مشتقتين :

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{du} \frac{du}{dt}. \quad (٥,١٧)$$

قاعدة السلسلة

وهذه هي ما يُسمّى بقاعدة السلسلة chain rule لحساب التفاضل differential calculus .

■ مثال ٣ : تحدد الطاقة الحركية لجسم كتلته m بالعلاقة $K = \frac{1}{2}mv^2$. افترض أن سرعته v تتناسب مع الزمن : $v = at$. فما معدل التغير الزمني time rate of change لطاقته الحركية ؟

بتطبيق المعادلة ٥,١٧، نجد أنَّ

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dv} \frac{dv}{dt},$$

التي يمكن كتابتها

$$\frac{dK}{dt} = mv \times a.$$

وبما أنَّ $v = at$ ، فإنَّ هذه هي نفس الشيءِ مثل

$$\frac{dK}{dt} = ma^2 t.$$

... كيف كان يمكن أنَّ نحصلَ على هذه النتيجة بطريقتٍ أخرى ؟

المشتقة الثانية

وتُسمَّى مشتقة المشتقة بالمشتقة الثانية second derivative . وتُكتبُ

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \text{ أو } \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)$$

كذلك ، يمكن تعريف المشتقة الثالثة والمشتقات العليا على نفس الغرار . فالمفاضلة المتعاقبة لا تنطوي على أية أفكار جديدة . وَلَسَوْفَ يجدها المرءُ عملية مباشرة حالما يتصلع من المشتقات الأولى . مثلاً ، تكون المشتقة الزمنية الثانية للطاقة الحركية في مثال ٣ :

$$d^2 K / dt^2 = ma^2$$

■ مثال ٤ : ما هي المشتقة الثانية للدالة $f(x) = ax^n$ ؟

بما أنَّ المشتقة الأولى لهذه الدالة هي $df/dx = anx^{n-1}$ ، فإنَّ مشتقتها الثانية تكون

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} (anx^{n-1}) = an(n-1)x^{n-2}.$$

٥,٥ الزوايا والسرعة الزاوية Angles and Angular Speed

وَحَدَّثَانِ لِلزَّوَايا

توجد وَحَدَّتَانِ شائعَتانِ لقياس الزوايا : دَرَجَة (°) (deg) ، ودائرية (مسر) radian (rad) †. فالدَّوْرَة revolution الكاملة تحتوي على 360 deg ، أو 2π مسر. وَتُعْرَفُ (الْوَحْدَة) الدَّائرية ، التي تساوي $(\pi / 180)$ deg ، أو حوالي ٥٧,٣ deg ، 57.3 deg ، بأنَّها الزاوية التي تُقَابِلُ subtends قَوْساً دائرياً circular arc طوله مساوٍ لنصف قطر الدائرة

$$1 \text{ مسر} = \frac{180}{\pi} \text{ deg}$$

† نستخدم هنا الرمزَيْن الدوليتين (°) و rad لهاتين الوحدتين ، مع أنَّ مؤلَّفَ هذا الكتاب لا يُشيرُ إلى هذين الرمزَيْن قَطَّ ! (المشرف)

[شكل ٥,٦ (أ)]. وكما هو مبين في شكل ٥,٦ (ب)، فإنه يُعبَّرُ عن أية زاوية بالوحدات الدائرية بواسطة العلاقة

$$\theta = \frac{s}{r}, \quad (٥,١٨)$$

بفضل القياس الدائري حيث r نصف قطر القوس الدائري و s طوله. والدائرية هي الوحدة المفضلة للعمل العلمي؛ ولستوف نلتزم بها — على العموم — في هذا الكتاب. فكلما كانت وجدة الزاوية غير مذكورة، نستطيع أن نفترض أنها دائرية.

وإذا كانت الزاوية متغيرة مع الزمن، فبوسعنا أن نعرف سرعة زاوية. والوحدة المعتادة للسرعة الزاوية هي مس/ث rad/sec ؛ كما أن رمزها المألوف على الأغلب هو ω [أوميغا: آخر حروف الأبجدية اليونانية]. ... إعتبر جسيماً يتحرك حول محيط دائرة نصف قطرها r (شكل ٥,٧). فإذا «كَنَّس» sweeps out، في زمن مُعَيَّن، زاوية θ ، فإنه يقطع في نفس الوقت مسافة s ، بتحدد — وفق المعادلة ٥,١٨ — بالعلاقة

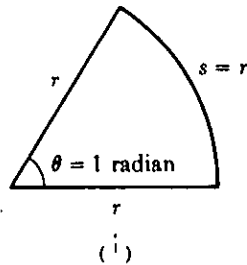
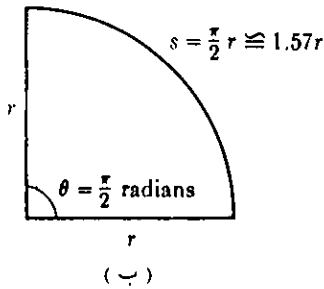
$$s = r\theta. \quad (٥,١٩) \quad \text{هناك علاقة بسيطة بين المسافة}$$

والزاوية للحركة الدائرية وعليه، إذا افترضنا أن التغير في s ، في فترة زمنية قدرها Δt ، هو Δs ، والتغير في θ هو $\Delta \theta$ ، فإن هذين التزايدين يرتبطان بالمعادلة

$$\Delta s = r \Delta \theta.$$

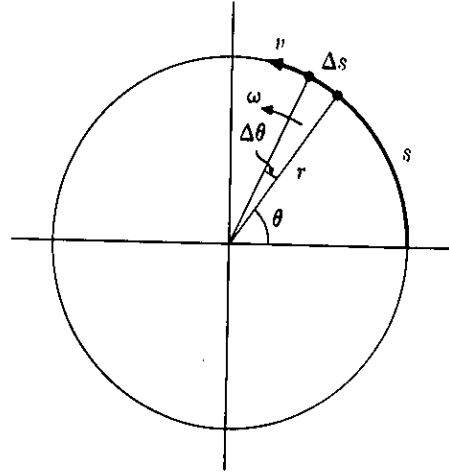
وبقسمة كلا الطرفين على Δt ، نحصل على

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = r \frac{\Delta \theta}{\Delta t}. \quad (٥,٢٠)$$



شكل ٥,٦: تعريف الوحدة الدائرية (الراديان).
(أ) إذا كان طول قوس دائري مساوياً لنصف القطر، فإن الزاوية θ تكون ١ دائرية، أو حوالي ٥٧,٣°. (ب) لأي زاوية أخرى، فإن نسبة طول قوس دائري إلى نصف القطر تساوي الزاوية مقاسة بالوحدات الدائرية: $\theta = s/r$.

وفي النهاية حيث تقترب Δt من الصفر، يؤول الطرف الأيسر إلى السرعة اللحظية v . كما أن السرعة الزاوية تُعرف بطريقة مماثلة:



شكل ٥,٧ : جسيم يتحرك في دائرة . وتكون سرعته الزاوية : $\omega = d\theta/dt = v/r$

تعريف السرعة الزاوية

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (٥,٢١)$$

وعلى ذلك ، في النهاية حيث تتلاشى Δt ، تصبح المعادلة ٥,٢٠

$$v = r\omega \quad (\text{constant } r). \quad (٥,٢٢)$$

ويمكن اشتقاق هذه الصيغة البسيطة والمفيدة التي تربط v و ω بطريقة أسهل ، وذلك بالتطبيق المباشر لحساب التفاضل والتكامل على المعادلة ٥,١٩ . فبما أن r ثابت ، فإن مفاضلة طرفي المعادلة ٥,١٩ بالنسبة إلى الزمن تعطينا

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{constant } r). \quad (٥,٢٣)$$

والمعادلتان ٥,٢٢ و ٥,٢٣ هما ، بالطبع ، متكافئتان .

وإذا خصصنا الحديث أكثر لحركة دائرية بسرعة ثابتة ، فإننا نجد أن المسافة والزاوية كلتيهما يتزايدان طردياً مع الزمن . وهكذا ، فإذا بدأنا القياس من اللحظة الزمنية $t = 0$ ، نجد أن

$$\begin{aligned} s &= vt, & \left(\begin{array}{l} \text{حركة دائرية منتظمة} \\ \text{uniform circular motion} \end{array} \right) & (٥,٢٤) \\ \theta &= \omega t. & & (٥,٢٥) \end{aligned}$$

■ مثال ١ : يدور « عمود إدارة » shaft بمعدل n دورة لكل ثانية . فما سرعته الزاوية ؟

إستخدم عامل التحويل radian/revolution واكتب

$$\omega = n \frac{\text{revolution}}{\text{sec}} \times 2\pi \frac{\text{radian}}{\text{revolution}}$$

لتحصل على

$$\omega = 2\pi n \text{ radian/sec.} \quad (٥,٢٦)$$

■ مثال ٢ : يساوي متوسط السرعة الزاوية للأرض في مدارها ٦,٢٨ دائرية / سنة ؛ كما يُقارب بُعدها عن الشمس $1,٥ \times 10^{11}$ م. فما سرعتها في المدار؟
بما أن المدار شبه دائري ، فإننا نستطيع أن نستخدم المعادلة ٥,٢٢ . وباستعمال عامل تحويل مناسب ، فإن عملية الحساب تبدو كما يلي :

$$v = r\omega = \frac{1.50 \times 10^{11} \text{ m} \times 6.28 \text{ radian/year}}{3.16 \times 10^7 \text{ sec/year}} ;$$

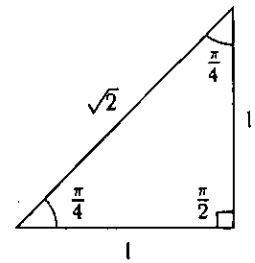
وبذلك ، تكون

$$v = 2,98 \times 10^4 \text{ م/ث} \quad (٥,٢٧)$$

ويمكن أيضاً كتابة هذه السرعة ٢٩,٨ كم/ث (19.8 km/sec) ، أو ١٨,٥ ميل/ث (18.5 mile/sec) (والواقع أن السرعة المدارية للأرض تتفاوت لأن المدار ليس دائرياً تماماً .
وتختلف السرعتان الكبرى والصغرى بما يساوي ٣ في المئة .)

□ الدوال المثلثية * Trigonometric Functions

تُعرف عادةً الدوال المثلثية لزاوية ما باستخدام مثلث قائم (الزاوية) right triangle . أما الزوايا التي تزيد على ٩٠ ، فتقتضي تعميماً طفيفاً للتعاريف في شكل ٥,٨ ، يكون الوتر hypotenuse لمثلث قائم بمثابة نصف القطر في دائرة مرسومة حول نقطة الأصل . فإذا كانت θ هي الزاوية التي يصنعها نصف القطر هذا مع محور x ، بحيث تُقاس بعكس اتجاه عقربي الساعة counter-clockwise ، فإن الدوال المثلثية الأكثر استعمالاً تكون :



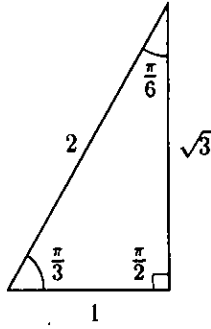
$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad (٥,٢٨)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad (٥,٢٩)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (٥,٣٠)$$

معادلات صحيحة لأي زاوية

* أنظر أيضاً ملحقَي ٦ و ٧ .



والإشارات التي تستلزمها هذه التعاريف ملخصة في جدول ٥,٣ قَارِنِ المعادلتين ٥,٢٨ و ٥,٢٩ مع المعادلتين ٥,١ و ٥,٢ . فَإِنَّ هَذَيْنِ الزَّوْجَيْنِ المتكافئتين من المعادلات يصلحان لتعريف الجيب sine وَجَيْب التَّسَام cosine ، ولربط الإحداثيات الديكارتية المستوية بالإحداثيات القطبية — سواء بسواء . وفي هذا الدَّور الأخير ، تُدْعَى هذه معادلات تحويلية transformation equations .

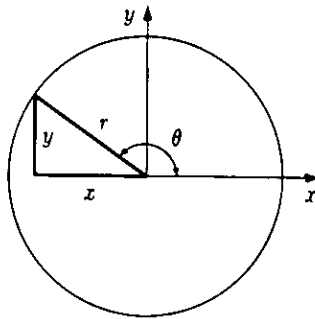
وَجَيْبُ التَّام هو من الأهمية بمكان في العملية الهندسية المعروفة بالإسقاط projection إِيْتَبَرُ قِطْعَةً خَطِيَّةً line segment طولها L ، تميل بزاوية θ بعيداً عن محور x (شكل ٥,٩) . فَإِنَّ مَسْقَطَ (projection) L على محور x يُعَرَّفُ بِأَنَّهُ القِطْعَةُ الخَطِيَّةُ L_x ، التي تتكوّن عند إسقاط خطوط متعامدة مع المحور من كلا الطرفين للقطعة L . ومن هندسة المثلث القائم ABC في شكل ٥,٩ ، واضحٌ أَنَّ

مُعَادَلَةُ مَسْقَط

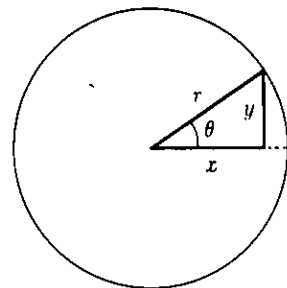
$$L_x = L \cos \theta \text{ أو } \cos \theta = \frac{L_x}{L} \quad (٥,٣١)$$

وينطبقُ مَنَطِقٌ مُشَابِهٌ على المَسْقَط L_y . وبما أَنَّ الزَّاوِيَةَ φ بين القطعة y ومحور L تساوي $\frac{1}{2}\pi - \theta$ ، فَإِنَّا نَحْصِلُ على :

$$L_y = L \cos \varphi = L \sin \theta. \quad (٥,٣٢)$$

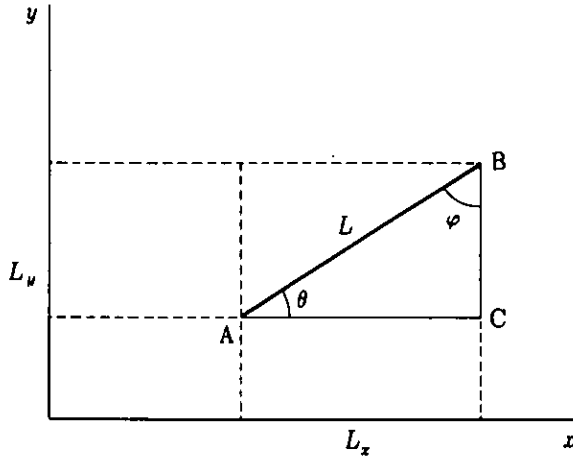


(ب)



(أ)

شكل ٥,٨ : رسام توضيحيان لبيان التعاريف العامة للدَّوَالِ المثلثية .



شكل ٥,٩ : أمثلة على مساقط ... تُدعى القطعتان الخطيتان L_x و L_y بسقطتي القطعة الخطية AB (ذات الطول L) على محوري x و y .

ورغم ظهور $\sin \theta$ هنا ، فيجدر أن نتذكر أن كلَّ مسقط يُعرفُ بواسطة جيب الزاوية بين القطعة الخطية والمحور المعني . ويمكن التفكير بالمساقط كأنها ظلالُ القطعة الخطية على المحاور . وإذا مثلت القطعة الخطية متجهاً ، فإن مساقطه تُسمى مركبات المتجه components of the vector . وسنعتبر المركبات في بند ٦,٥ .

مركبات المتجه إن هي
إلا مساقط

٥,٦ الدوال ، والجداول ، والرسم البياني Functions, Tables, and Graphs

ثمة فكرة رئيسية في التحليل الرياضي وفي الفيزياء ، ألا وهي فكرة الاعتماد (أو التبعية) dependence . فإن كمية ما تعتمد على أخرى إذا رافق التغير في واحدة منها تغير في الأخرى . ويتوه الرياضيون بالمتغير المستقل independent variable ، والمتغير التابع dependent variable . أما في الفيزياء ، فمن الأفضل أن نفكر بكميات متكافئة أو متوافقة (أي معتمدة على بعضها البعض) interdependent : إذ أن الفكرة – بأن إحدى الكميات المتغيرة مستقلة وأخرى تابعة – هي ، مثل كل الأفكار التي تنتمي إلى سبب ومسبب (أو علّة ومعلول) cause and effect ، مفيدة غالباً كطريقة لوصف الحوادث ، لكنها ليست ضرورية تماماً . فمن منظور منطقي ، لا يكون ذا مدلول إلا العلاقة relationship بين الكميات الفيزيائية المختلفة .

جدول ٥,٣ : إشارات الدوال المثلثية الرئيسية

مدى الزاوية				
الدالة	$0-\pi/2$ Quadrant I (الربع الأول)	$\pi/2-\pi$ Quadrant II (الربع الثاني)	$\pi-3\pi/2$ Quadrant III (الربع الثالث)	$3\pi/2-2\pi$ Quadrant IV (الربع الرابع)
جا	+	+	-	-
جنا	+	-	-	+
ظا	+	-	+	-

الدوال

وإذا اعتمدت إحدى الكميات على أخرى ، قِيلَ إنها دالة في الأخرى . فتوسط سعر الأسهم المالية stock market هو دالة في الزمن ؛ وسرعة سيارة متسارعة هي دالة في موضعها ؛ كما أَنَّ لَمَعَانَ (أو سَطْوَعَ) brightness بقعة على أنبوبة تِلْفَاز (تِلْفِزيون) television tube إنها هو دالة في سرعة الإلكترونات . فالعلاقات الدالية functional تتغلغل في كل جزء من العلوم ؛ ذلك أَنَّ الشَّطْرَ الأعظم من العلوم معنيُّ بالصِّلات بين المفاهيم الفيزيائية المختلفة . والكثير من العمل التجريبي في العلوم مُكرَّس للتعلُّم بتفصيلٍ مقداري كيف تعتمد بالضبط إحدى الكميات على أخرى . كما أَنَّ اختزال العلاقات التجريبية إلى دوال رياضية بسيطة يُشكِّل جزءاً كبيراً من العمل النظري في العلوم .

بمقدور الجداول ، والرسم البيانية ،
والمعادلات أَنْ تُعَبَّرَ عن الدوال

وبمقدورنا أَنْ نُسَمِّعَ على اعتماد كمية على أخرى تعبيراً مقداريّاً بثلاث طرقٍ متباينة :
بالعَرْض الجدوليّ tabular presentation ، والعَرْض البيانيّ graphical ، وبالمعادلات الرياضية . ومع أَنَّ المعادلة تزوِّدنا بأكثر التعبيرات إيجازاً لعلاقة دالية ، فإنَّ الجداول والرسم البيانية غالباً ما تكون مفيدة أيضاً ؛ إذ يكون جدول من المُعْطِيَّات data ملائماً حين تكون العلاقة الرياضية الدقيقة غير معلومة ، أو عندما نَرْغَبُ في عَرْضِ القِيَم العددية لدرجة عالية من الدقَّة . وإسوةً بالجداول ، فإنَّ الرسم البيانية يمكن أَنْ تُسْتَعْمَلَ لعَرْضِ علاقات ، مثل تلك المكتشفة تجريبياً ، ممَّا لا تكون صيغتها الرياضية الدقيقة معلومة . وحتى إذا كانت المعادلة معروفة ، فإنَّ الرسم البيانيّ يستطيع أَنْ يفعلَ الكثيرَ لجعلها متقدِّة بالحياة ويجعل مدلولها أوضح . وفي الغالب ، سنستخدم الرسم البيانية في هذا الكتاب لمثل هذا الغرض بالذات - أي لتوضيح معادلةٍ نجعلها تصويرية pictorial .

□ الدالة الخطية Linear Function

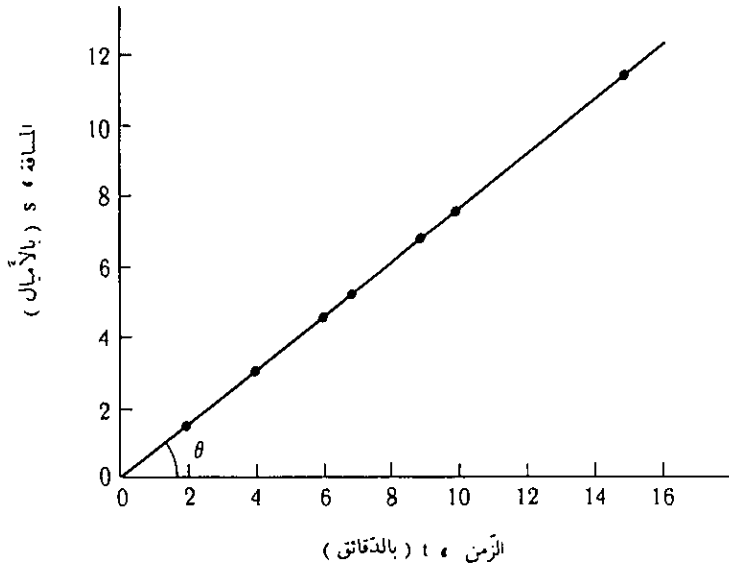
إنَّ أبسطَ علاقة دالية هي تناسبٌ طرديّ direct proportionality . فشلاً ،

تتناسب المسافة التي تقطعها سيارة متحركة بسرعة ثابتة مع الزمن المنقضي . وقد نعرض المُعطيات لمثال معين على مثل هذه الحركة بصورة عددية ، كما هو مبين في جدول ٥،٤ . فالمسافة هي دالة في الزمن . (أو بطريقة بديلة ، بوسعنا القول إن الزمن هو دالة في المسافة ؛ إلا أن هذه طريقة غير مألوفة للنظر إلى الحركة . فلم يكن طبيعياً أكثر أن نعتبر الزمن متغيراً مستقلاً ، والمسافة متغيراً تابعاً ؟) لكن ، في هذا المثال ، لن نتضح العلاقة الرياضية الدقيقة بين الزمن والمسافة فور تفحص الجدول . وهذه إحدى نقائص العرض الجدولي . فمع أن القيم العددية قد تُعين بدقة ، إلا أنها لا تنقل للتوصيرة واضحة عن العلاقة بين المتغيرات ، بعكس الرسم البياني الذي يؤدي هذه الوظيفة أفضل بكثير .

الجدول : تنسب بالدقة العددية ، مع أن نسق العلاقة الإجمالي قد يكون غير واضح

في شكل ٥،١٠ ، نعرض نفس المُعطيات بيانياً ، حيث نعين أفقياً موقع المتغير الذي اخترنا أن نعتبره مستقلاً — في هذه الحالة الزمن — ورأسياً موقع المتغير الذي اخترنا أن نعتبره تابعاً . فكل زوج من الأعداد في الجدول يحدد نقطة مفردة على الرسم البياني . وإنه لو أصبح على الفور أننا نستطيع أن نصل النقاط بواسطة خط مستقيم مفرد . وليس صحيحاً — بالضرورة —

والرسوم البيانية : تنسب بوضوح النظرة الإجمالية



شكل ٥،١٠ : رسم بياني للمسافة ضد الزمن لمعطيات جدول ٥،٤ .

أن كل نقطة على هذا الخط تظهر بالضبط مكان السيارة في زمن محدد ؛ إذ لم نرؤد إلا بعض النقاط المختارة . لكن كون تلك النقاط واقعة على مستقيم لهو موضح للغاية . فإنه — على الأقل — لا فراض معقول أن الخط المستقيم يمثل أيضاً موضع السيارة عند نقاط متوسطة . ذلك أن الحركة قد نُفدت — على ما يبدو — بسرعة ثابتة .

والمعادلة التي توافق هذه المُعطيات المُجدولة والبيانية هي

$$s = 0.75t,$$

حيث تُمثَّلُ s المسافة بالأميال و t الزمن بالدقائق . ومن الأفضل أن نستبدل هذه المعادلة ، التي يُعوّزها توافق الأبعاد ، وبالتالي تكون مقيدةً بفئةٍ محدّدة من الوحدات ، بالعلاقة

$$s = v_0 t, \quad (٥,٣٣)$$

أما المعادلات :
فهي موجزةٌ وعمامة

حيث تمثل v_0 ثابتاً قيمته في هذا المثال هي

$$v_0 = ٠,٧٥ \text{ ميل / د} = ٤٥ \text{ ميلاً / س} .$$

جدول ٥,٤ : مُعطيات الزمن والمسافة لحركةٍ بسرعةٍ ثابتةٍ

الزمن المنقضي (د)	المسافة (أميال)
صفر	صفر
٢	١,٥٠
٤	٣,٠٠
٦	٤,٥٠
٧	٥,٢٥
٩	٦,٧٥
١٠	٧,٥٠
١٥	١١,٢٥

وتُدعى معادلة على هذا النمط **معادلةً خطيّةً** *linear equation* لكون رسمها البيانيّ خطاً مستقيماً . وهناك معادلة خطيّة أشمل هي

$$s = v_0 t + s_0, \quad (٥,٣٤)$$

معادلة خطيّة

حيث s_0 ثابت آخر ، مدلوله الفيزيائيّ في هذا المثال هو البُعد الابتدائيّ عن نقطة أصل مختارة جزافاً . وعلى ذلك ، فإنّ التناسب الطرديّ هو حالة خاصّة للعلاقة الخطيّة .

تعريفُ المِلّ لخطّ مستقيم

ويساوي أيضاً البارامتر (المتغير الوسيط) v_0 (parameter) الظاهر في المعادلة ٥,٣٣ مِلّ المستقيم في شكل ٥,١٠ . ويُعرّف مِلّ خطّ في رسمٍ بيانيّ بأنّه ظلّ *tangent* الزاوية التي يصنّعها الخطّ مع المحور الأفقيّ . ويُرْمَزُ إلى هذه الزاوية بالحرف θ في شكل ٥,١٠ . ففي المثال الخاصّ الذي نعتبره السّاعة ، يكون

$$\tan \theta = \frac{s}{t} = v_0. \quad (٥,٣٥)$$

الميل هو بُعْدِي

ومن المهم أن نلاحظ تعميمنا لفكرة الظل من مدلوله الهندسي البحت ؛ حيث أن الكمية التي ندعوها هنا $\tan \theta$ (جا θ) هي كمية بُعْدِيَّة ، وتساوي الطول مقسوماً على الزمن . وسنقيس الميل دائماً كتزايد رأسي مقسوم على تزايد أفقي في رسم بياني ، كل تزايد مُقاساً بالوحدة المناسبة للكمية المعنية . حينئذٍ ، لن يعتمد ميل خط على المقاييس scales المختارة لإعداد الرسم البياني .

□ الأهمية البيانية للمشتقة Graphical Significance of the Derivative

وثمة نتيجة أخرى لهذا التعريف للميل ، هي أن للميل مدلولاً فيزيائياً بسيطاً : إذ أنه معدل تغير الكمية المعنية رأسيًا بالنسبة إلى الكمية المعنية أفقيًا ؛ أي أنه مشتقة . فإذا كانت $s = v_0 t$ (المعادلة ٥,٣٣) ، فإن مشتقة s بالنسبة إلى الزمن ، تكون

$$\frac{ds}{dt} = v_0 . \quad (٥,٣٦)$$

الميل هو مشتقة

وتنص هذه المعادلة على أن معدل تغير الموضع بالنسبة إلى الزمن هو v_0 ؛ أي نفس الكمية كميل الخط في الرسم البياني . وعندما تكون الكمية المعنية أفقيًا هي الزمن ، فإن « المعدل » يأخذ معناه الشائع ؛ أي معدل التغير نسبة إلى الزمن . لكن ، بصورة أعم ، فقد يُعرف المعدل نسبة إلى كميات غير الزمن .

□ الدالة التربيعية Quadratic Function

يدرس فيزيائي الخواص الحرارية لمادة معينة . ويصوغ نظرية مقادها أنه إذا بُردت chilled قطعة كروية من المادة بانتظام ، ومن ثم أُعيدت إلى درجة حرارة محيطها ، فإن درجة حرارتها الداخلية internal temperature ستتحدد بعد مرور بعض الوقت بالعلاقة

$$T = T_0 + Ar^2 , \quad (٥,٣٧)$$

معادلة تربيعية

حيث T درجة الحرارة ، r البعد النصف قطري (النصف قطري) عن مركز الكرة ، و T_0 و A ثابتان . ولكي يجعل هذه المعادلة تصويرية ، فهو يرسم رسماً بيانياً لدرجة الحرارة T ضد r (شكل ٥,١١) . ونظراً لظهور r^2 على يمين المعادلة ٥,٣٧ ، فإن T تدعى دالة تربيعية في r .^٥ ونستطيع أن نسميها - سواء بسواء - دالة مكافئة parabolic function ، لأن الرسم البياني T ضد r هو قطع مكافئ parabola .

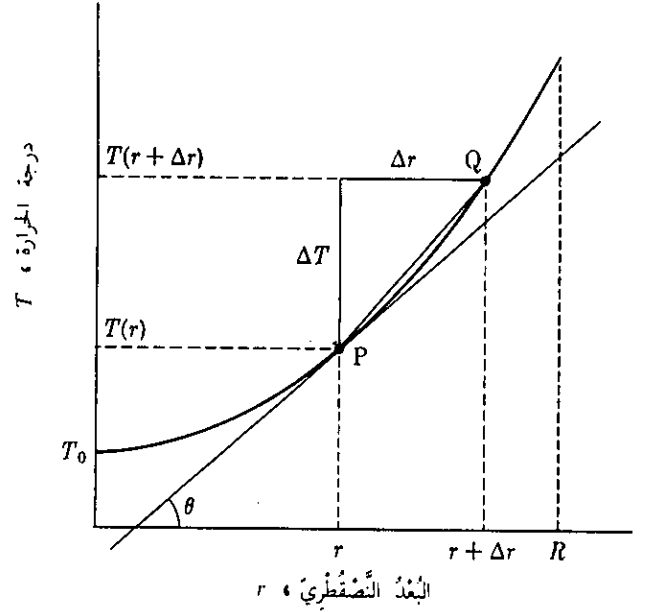
رسمها البياني هو قطع مكافئ

ويُعرف ميل منحنى ما بواسطة عملية نهاية . مثلاً ، اختر نقطتي P و Q على المنحنى في

^٥ بصورة عامة ، تكون y دالة تربيعية في x إذا كانت $y = a + bx + cx^2$ ، حيث a و b و c ثوابت .

شكل ٥,١١ : توزيع افتراضي لدرجة الحرارة داخل كرة نصف قطرها R . ويكون ميل المنحنى عند النقطة P :

$$dT/dr = \tan \theta.$$



شكل ٥,١١ ، وارسم خطاً مستقيماً عبرها . فيكون ميل هذا الخط $\Delta T/\Delta r$. وتُعرف نهاية هذا الميل عندما تقترب Q من P بأنها ميل المنحنى عند النقطة P :

$$\text{slope at point P} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{T(r + \Delta r) - T(r)}{\Delta r}. \quad (٥,٣٨)$$

وغني عن القول إن هذه لمشتقة (أنظر المعادلة ٥,٦) :

تعريف ميل المنحنى

$$\text{slope at point P} = \frac{dT}{dr}. \quad (٥,٣٩)$$

وكما يوضح شكل ٥,١١ ، فإن الميل المعروف بهذه الطريقة هو نفس الشيء كالميل لمماس tangent المنحنى عند النقطة P :

$$\text{slope at point P} = \tan \theta. \quad (٥,٤٠)$$

ويوضح هذا الشكل أيضاً مِحَكَّ « الملاسَة smoothness » المذكور في بند ٥,٤ . فحتى نُعرف مشتقة دالة على نحو فريد عند نقطة معينة ، من الضروري ألا يتغير ميل الرسم البياني للدالة بصورة منقطعة (أي غير مستمرة أو غير متصلة) discontinuously عند تلك النقطة .

وفي هذا المثال ، يكون بُعد $\tan \theta$: درجة حرارة / مسافة (تذكر النقاش أدنى المعادلة ٥,٣٥) ، وبمقدورنا أن نحسبه بياناً . لكن ، بما أن المعادلة ٥,٣٧ تزودنا بتعبير صريح explicit للدالة $T(r)$ ، فمن الأسهل أن نحصل على الميل بالتفاضل :

التدرج : هو مشتقة بالنسبة
إلى المسافة

$$\frac{dT}{dr} = 2Ar. \quad (٥,٤١)$$

ومثل معدل التغير هذا بالنسبة إلى المسافة يُدعى عادةً تدرجاً (أو انحداراً) $gradient^\dagger$. فهو هنا تدرج درجة الحرارة .

لنفترض الآن أن الفيزيائي المذكور قد أدخل مجسّات probes في كرة مصنوعة من المادّة التي يدرسها ، وأنه قد قاس درجة حرارة الكرة الداخلية بينما كانت تسخن . وبيّن جدول ٥,٥ فئة من مُعطياته . فنحن نتركها كمسألة للقارئ لأنّ يكشف ما إذا كانت المعادلة ٥,٣٧ تمثل هذه المعطيات لدرجة كافية أم لا .

٥,٧ الكينماتيكا الأحادية البعد One-dimensional Kinematics

يمكن تعريف الكينماتيكا بأنها ذلك الوصف للحركة الذي يستخدم مفهومين أساسيين فحسب ، هما الطول والزمن . أمّا مفهوماها المشتقان فهما السرعة والتسارع . وكان غاليليو أول من أعطى تعريفاً واضحاً للتسارع ، في بواكير القرن السابع عشر . كما اكتشف كينماتيكا الأجسام الساقطة سقوطاً حراً freely falling objects ، والكرات المتدحرجة أسفل مستويات مائلة inclined planes ، والبنادل pendulums ، والمقذوفات projectiles . وفي هذا البند ، سنخصّص الحديث على الكينماتيكا للحركة الأحادية البعد ؛ إذ تمدّنا هذه بمدخل للميكانيكا وبتطبيق مفيد للرياضيات على الطبيعة .

نستخدم الكينماتيكا الطول والزمن

دعنا نفترض من باب البساطة والملاءمة ، كما فعلنا في بند ٥,٤ ، أن ثمة جسيماً يتحرك على امتداد محور x . فإذا تحرك بين الزمنين t_1 و t_2 من الموضع x_1 إلى x_2 ، فإن متوسط سرعته أثناء هذه الفترة الزمنية يُعرف بأنه

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} . \quad (٥,٤٢)$$

متوسط السرعة

$\dagger$ أو ممّالاً ؛ وهذه لفظة اختارها مجمع اللغة العربية بالقاهرة (راجع الموقود مثلاً) ؛ لكنها لم تنل - على ما يبدو - حظاً كبيراً من الزواج .

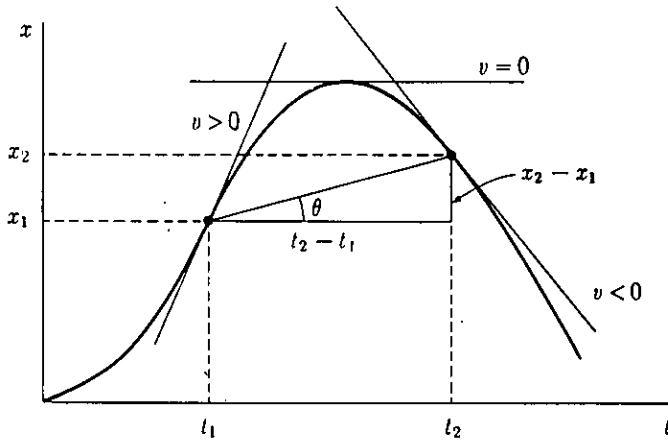
(المشرف)

٥ لتبسيط الصياغة اللفظية phraseology في هذا البند ، نستعمل كلمة «سرعة» لتعني مركبة x للسرعة ، وكلمة «تسارع» لتعني مركبة x للتسارع . كذلك ، لتبسيط الرموز ، فإننا نُسقط الرمز السفلي (subscript) x من v و a .

... وباستثناء التغيرات في الرموز ، فإن هذه هي نفس المعادلة ٥,٤ . كذلك ، تكون السرعة اللحظية اللحظية للجسيم (المعادلتان ٥,٥ و ٥,٦) :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (٥,٤٣)$$

السرعة اللحظية



شكل ٥,١٢ : السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية يحدد ميل الخط المرسوم بين النقطتين dots السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية t_1 إلى t_2 : $\bar{v} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$. أما ميل (جمع ميل) الخطوط المماسية ، فنحدد السرعات اللحظية عند هذه النقاط .

جدول ٥,٥ : قياسات درجة الحرارة في تجربة التراجعية

العدد ، r ، عن مركز الكرة (سم)	درجة الحرارة ، T (ك)
صفر	٢٥١,٠
١	٢٥٢,٠
٢	٢٥٤,٦
٣	٢٥٩,٠
٤	٢٦٥,٣
٥	٢٧٣,٧
٦	٢٨٣,٤
٧	٢٩٥,٠

وهذه العمليات مبيّنة بيانياً في شكل ٥,١٢ . وعلى نفس الغرار ، يُعرّف التسارع بأنه معدل تغير السرعة بالنسبة إلى الزمن . ففي فترة متناهية ، يتحدد متوسط التسارع بالعلاقة

تعريف متوسط التسارع

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (٥,٤٤)$$

في حين أن التسارع اللحظي يُعرّف بالمعادلة

التسارع اللحظي

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (٥,٤٥)$$

كذلك يجوز أن يُكتب التسارع كمشتقة ثانية :

$$a = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (٥,٤٦)$$

وإنها لَسِمَةٌ جديرة بالملاحظة لنظرية الميكانيكا أنه يمكن وصف الحركة بأسرها دون الاستناد إلى مشتقات أعلى من الثانية .

الطبيعة بسيطة : فالميكانيكا تحتاج إلى المشتقتين الأولى والثانية فقط

وبيّن شكل ٥,١٣ رسوماً بيانيةً للكيات x ضد t ، و v ضد t ، و a ضد t لمثالٍ على حركة لا تتبع قانوناً رياضياً بسيطاً . وتساعد مثل هذه الرسوم البيانية على تصوّر الحركة . لاحظ السمات المميزة التي تربط بين الرسوم البيانية الثلاثة . فمثل منحنى الموضع مساوٍ لارتفاع منحنى السرعة ؛ وميل منحنى السرعة مساوٍ لارتفاع منحنى التسارع . وعندما يبلغ منحنى الموضع قيمةً عظمى أو صغرى ، تكون السرعة صفراً . كذلك ، عندما تبلغ السرعة قيمةً عظمى أو صغرى ، يكون التسارع صفراً . وتوجد صلة بسيطة أيضاً بين منحنى الموضع والتسارع ، بدون الصورة الوسطى intermediary المكونة من منحنى السرعة : حيث يكون انحناء منحنى الموضع سالباً — مثل كأس مقلوب — عندما يكون التسارع سالباً (أي متجهاً نحو اليسار) ؛ بينما يكون هذا الانحناء موجباً للتسارع الموجب . وأخيراً ، يكون لمنحنى الموضع نقطة انعطاف inflection point (أي انحناء صفري) عند نقطة تسارع صفري .

□ الحركة بسرّجهة ثابتة Motion With Constant Velocity

نحدث الحالة الخاصة الأبسط رياضياً للحركة بسرّجهة ثابتة عندما يكون الجسم عند نقطة الأصل ، $x = 0$ ، في الزمن الابتدائي ، $t = 0$. وبصورة أعم ، قد يكون الجسم في موضع آخر ، عند x_0 ، في اللحظة الزمنية $t = 0$. والمعادلات للحالتين الخاصة والعامة هي :

الحالة العامة	الحالة الخاصة
$x = x_0 + v_0 t. \quad (٥,٤٨)$	$x = v_0 t, \quad (٥,٤٧)$

كلتا الحالتين

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0, \quad (٥,٤٩)$$

معادلات السرعة الثابتة

$$a = \frac{dv}{dt} = 0. \quad (٥,٥٠)$$

وبما أن $v = v_0$ ، فإننا نستطيع استعمال الرمز v و v_0 بصورة متعاضدة (أي قابلة للتبادل)

interchangeably . ولهذا المثال الأبسط على الحركة ، يكون الرسم البياني للموضع ضد الزمن خطأ مستقيماً ميله v (شكل ٥,١٠) ؛ كما يكون الرسم البياني للسرعة ضد الزمن خطأ مستقيماً أفقياً (ميله صفر) .

□ الحركة بتسارع ثابت Motoin With Constant Acceleration

للتسارع الثابت ، نميز ثانية بين حالة خاصة والحالة العامة . فتتسم الحالة الخاصة بالموصفات $v = 0$ و $x = 0$ حينما يكون $t = 0$ ؛ أي بحركة تبدأ من السكون عند نقطة الأصل . أما للحالة العامة ، فلا الموضع الابتدائي x_0 ولا السرعة الابتدائية v_0 تلزم لأن تكون صفراً . ويمكن كتابة جميع المعادلات الهامة التي تحكم الحركة المتسارعة بانتظام في حيز صغير . وسنُسوقها أولاً في قائمة ، ومن ثم نناقشها . فهي

الحالة العامة

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2, \quad (٥,٥٥)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0 t, \quad (٥,٥٦)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = a_0, \quad (٥,٥٧)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a_0(x - x_0). \quad (٥,٥٨)$$

الحالة الخاصة

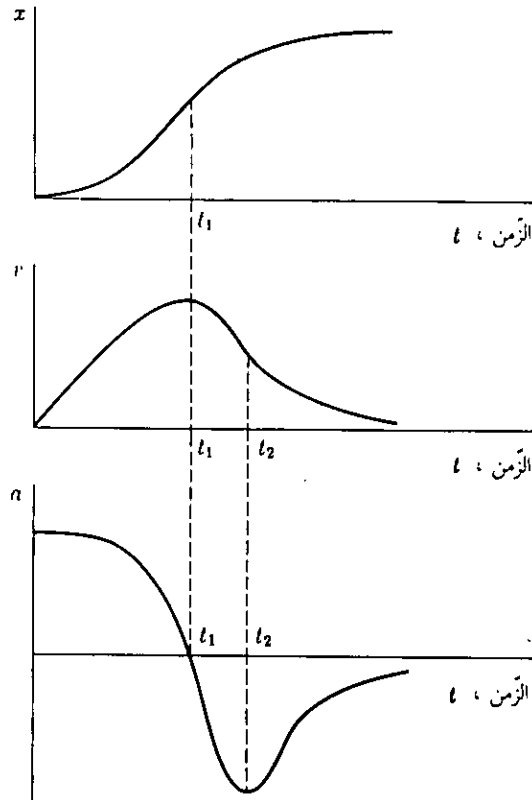
$$x = \frac{1}{2} a_0 t^2, \quad (٥,٥١)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = a_0 t, \quad (٥,٥٢)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = a_0, \quad (٥,٥٣)$$

$$v^2 = 2a_0 x. \quad (٥,٥٤)$$

معادلات التسارع الثابت



شكل ٥,١٣ : رسوم بيانية للموضع ، والسرعة ، والتسارع ، لمثال على الحركة في بُعد واحد . وكل من الكميات المعينة رأسياً هي - في الواقع - مركبة كمية متجهة . وثمة خطان متقطعان رأسيان dashed مرسومان عند t_1 ، وهو زمن السرعة الموجبة العظمى والتسارع الصفري ؛ وعند t_2 ، وهو زمن أقصى معدل لفقصان السرعة (أي ذروة التسارع السالب) .

ولتبسيط الرموز ، يمكن أن نستبدل الثابت a_0 بالرمز a في أي من المعادلات أعلاه . ومفاضلة المعادلة الأولى في كل عمود column تعطي المعادلة الثانية في نفس العمود ؛ كما أن مفاضلة الثانية تعطي الثالثة ، التي تؤكد ثبوت التسارع . أما المعادلتان الرابعة ، فهما علاقتان مفيدتان بين v و x ؛ ونحصل عليهما بحذف (أو إزالة) eliminating الزمن بين أول معادلتين في كل عمود . وإنه ليمن المثير أن نقارن المعادلتين ٥,٥٢ و ٥,٥٤ . فالأولى تنص على أن السرجة تزداد طردياً مع الزمن ؛ أما الثانية فتتنص على أن مربع السرجة يزداد طردياً مع المسافة ؛ أو بصورة مكافئة ، أن السرجة تزداد طردياً مع الجذر التربيعي square root للمسافة .^٥

■ مثال ١ : إن السقوط الحر من السكون هو مثال بسيط على الحركة بتسارع ثابت . ومعطيات الزمن والمسافة لمثل هذه الحركة محددة في جدول ٥,٦ ؛ حيث تقاس x إلى أسفل من نقطة البداية ؛ وحيث الاحتكاك friction مهمَل . والرسم البياني للمسافة x ضد t الذي يمثل هذه الأعداد هو قطع مكافئ يمر عبر نقطة الأصل (شكل ٥,١٤) . ومعادلته هي

$$x = \frac{1}{2}gt^2, \quad (٥,٥٩)$$

حيث

$$a = g = 9.8 \text{ m/sec}^2.$$

ومثل الخط المستقيم في شكل ٥,١٤ مساوٍ لمتوسط السرجة في الفترة الزمنية : صِفِر إلى ١ . ويكون هذا

$$\bar{v} = \frac{x}{t} = \frac{1}{2}gt.$$

^٥ في كتابه « محاورات حول علمين جديدين » *Dialogues Concerning Two New Sciences* ، يعترف غاليليو بأنه حين استهل دراسته للحركة المتسارعة بانتظام ، كان يعتقد أن السرجة تزداد طردياً مع المسافة المقطوعة — وهذا خطأ سرعان ما صحَّحه .

[حاشية إضافية : الكتاب المذكور هو أحد شوامخ الأدب العلمي العالمي ؛ وقد اعتبره غاليليو نفسه غرّة أعماله . وقد نشره قبل وفاته بأربع سنوات (أي عام ١٦٣٨) في ليدن بهولندا ، وذلك هروباً من سلطة محاكم التفتيش التي كانت قد حظرت تداول أعماله ونشرها . وهو مبني على أساس تجارب رائدة عديدة كان قد أجراها ، ونظريات مبدعة كان قد صاغها ، طوال ٣٠ عاماً . والكتاب مكتوب بأسلوب بسيط أخذ على صورة محاورات بين أستاذ وتلميذ ؛ وفيه يعالج غاليليو سمات الحركة المشار إليها في مستهل هذا البند ، بالإضافة إلى سرعة الضوء والصوت وبعض صفات الجوامد . ولا توجد - للأسف - ترجمة عربية لهذا الكتاب العظيم . إلا أن ترجمته الإنجليزية الأولى نُشرت عام ١٦٦٥ ؛ كما أن هناك ترجمة ثانية (عام ١٧٣٠) وأخرى ثالثة (١٩١٤) . وهذه الترجمة الأخيرة أعادت نشرها - عام ١٩٥٤ - شركة دوفر للنشر المحدودة بنيويورك Dover Publications, Inc., New York في طبعة زهيدة ؛ وهي بقلم هنري كرو والفونسو دي سالفيو Henry Crew and Alfonso de Salvio .

جَدْوَل ٥,٦ : مُعْطَيَاتُ الزَّمنِ وَالْمَسَافَةِ لِحَرَكَةِ بِتْسَارِعٍ ثَابِتٍ

الزَّمن ، t (ث)	المسافة ، x (م)
صفر	صفر
١	٤,٩
٢	١٩,٦
٣	٤٤,١
٤	٧٨,٤
٦	١٧٦,٤
١٠	٤٩٠,٠

ومن الطَّريف أنَّ نلاحظ أنَّ متوسطَّ السَّرجِهة ، للسُّقوط الحرِّ من السُّكون وحتى زمن محدد ، يساوي تماماً نصف السَّرعَةِ اللَّحظِيَّةِ عند ذلك الزَّمن :

$$v = gt. \quad (٥,٦٠)$$

والرَّسم البيانيُّ للسَّرجِهة v ضدَّ t مبين في شكل ٥,١٥ . فما مِثْلُهُ ؟

■ مثال ٢ : تقوم طائرةٌ نفاثةٌ بعمليةِ الدَّرَجِ السابق للإقلاع takeoff roll بتسارعٍ ثابتٍ تقريباً : $a = ١,٥ \text{ م/ث}^٢$ ، كما تكون مدَّة الدَّرَج ٤٠ ث . فما طول المَدْرَجَةِ runway اللازم ؟ وما سرعة الإقلاع ؟

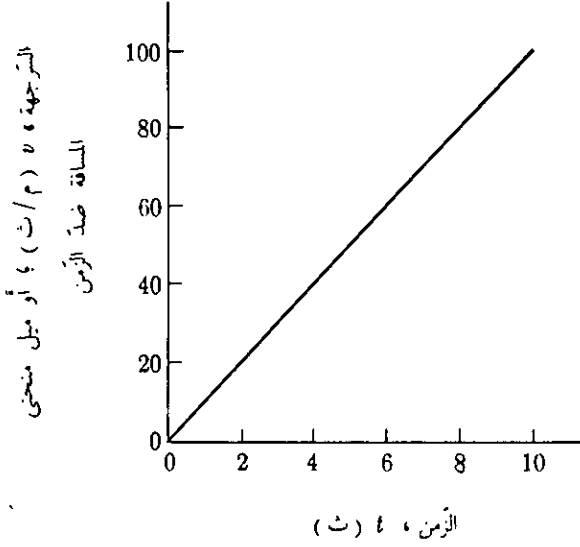
المعادلات الخاصَّة ٥,٥١-٥,٥٤ تبي بالغرض هنا . وبما أنَّ التَّسارع والزَّمن محدَّدان ، فبمقدورنا أنَّ نحسب سرعة الإقلاع من المعادلة ٥,٥٢ مباشرةً . وتعاذل هذه

$$v = at = 1.5 \text{ m/sec}^2 \times 40 \text{ sec} = 60 \text{ m/sec} ;$$

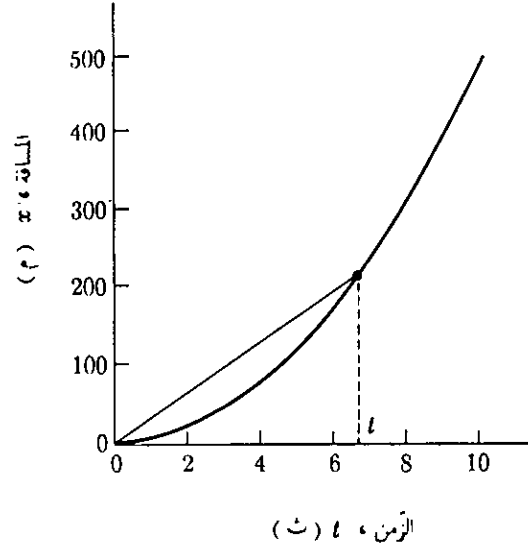
(أو ١٣٤ ميلاً / ساعة) . كذلك ، يمكن أنَّ نستخدم إمَّا المعادلة ٥,٥١ أو المعادلة ٥,٥٤ لنحصل على مسافة الإقلاع . دعنا نستعمل كليهما . فمن المعادلة ٥,٥١ ، نجد أنَّ

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(1.5 \text{ m/sec}^2)(1,600 \text{ sec}^2) = 1,200 \text{ m.}$$

ومن المعادلة ٥,٥٤ ، نحصل على



شكل ٥,١٥ : الرسم البياني للسرعة ضد الزمن
للسقوط الحر بدون احتكاك ... تكون السرعة ،
المعينة رأسياً ، هي نفسها ميل المنحنى في شكل
٥,١٤ .



شكل ٥,١٤ : الرسم البياني للمسافة ضد الزمن
للسقوط الحر بدون احتكاك ... يكون المنحنى قطعاً
مكافئاً ، كما يساوي ميل الخط المستقيم متوسط
السرعة في الفترة الزمنية : صفر إلى ٧ . ويتبين أن
هذا يعادل نصف السرعة اللحظية عند الزمن ٧ .

$$x = \frac{v^2}{2a} = \frac{3,600 \text{ m}^2/\text{sec}^2}{2 \times 1.5 \text{ m/sec}^2} = 1,200 \text{ m} = 1.2 \text{ km}.$$

وهناك مدلول طريف للمعادلة ٥,٥٤ مفاده أنه ، عندما تقطع الطائرة نصف مسافة الإقلاع ، تكون سرعتها قد بلغت ٧٠,٧ بالمئة من سرعة الإقلاع . فإذا وجد رُبان pilot طائرة نفائة أنه قد بلغ ٦٠ بالمئة فحسب من سرعة الإقلاع عندما قطع نصف طول المدرجة ، فهل يجب أن يستمر في عملية الإقلاع أم أن يحاول التوقف ؟ ■

■ مثال ٣ : تُقذف كرة قاعدة (بيسبول) رأسياً إلى أعلى ، بحيث تبحر يد الرامي على ارتفاع ٢,٠ م فوق سطح الأرض بسرعة قدرها ١٥ م / ث . فما أقصى ارتفاع فوق سطح الأرض تبلغه الكرة ؟

مثال لا يساوي فيه كل من v_0 و x_0 صفرًا

قبل أن نستطيع تطبيق معادلات التسارع المنتظم ، ينبغي أن نختار نقطة أصل للإحداثي x ونقطة أصل للزمن ؛ كما ينبغي أن نعرف قيم الثوابت الثلاثة x_0 ، v_0 ، و a . فمن المناسب أن نختار - كنقطة أصل الزمن - اللحظة التي تترك فيها الكرة يد الرامي ؛ كذلك ، بوسعنا أن نختار نقطة أصل x عند سطح الأرض ، بحيث يُقاس اتجاه x الموجب إلى أعلى ابتداءً من هذه النقطة (أي بعكس اتجاه x في مثال ١) . بهذين الخيارين ، تكون الثوابت :

$$x_0 = 2.0 \text{ m},$$

$$v_0 = 15 \text{ m/sec},$$

$$a = -9.8 \text{ m/sec}^2.$$

فالأول ، x_0 ، هو الارتفاع الابتدائي فوق سطح الأرض ؛ أي قيمة x عند $t = 0$. والثاني ، v_0 ، هو السرعة الابتدائية التي تكون موجبة لأنها متجهة إلى أعلى . كما أن التسارع الناتج عن الجاذبية هو متجه ثابت مقداره 9.8 م/ث^2 ، ويتجه رأسياً إلى أسفل ؛ وبالتالي ، في هذا المثال ، تكون مركبة x له ، أو مركبته إلى أعلى a ، سالبة . ويمكن أن نعوض هذه الأعداد في المعادلات $0.58-0.55$ لنحصل على معادلات أخرى تصف التاريخ اللاحق لكرة القاعدة (حتى تصطدم بالأرض) . ولإجابة السؤال المحدد الذي طرحناه أعلاه ، ينبغي أن نستخدم الحقيقة بأن سرعة الكرة تكون صفراً فور بلوغها ارتفاعها الأقصى . في تلك اللحظة ، نؤول معادلة السرعة ، $v = v_0 + at$ ، إلى

$$0 = 15 - 9.8t.$$

وحلها ، $t = 1.53$ ث ، هو الزمن الذي تكون فيه الكرة عند ذروة ارتفاعها . كذلك تكون المعادلة العامة للموضع ، $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ ، في هذا المثال ،

$$x = 2.0 + 15t - 4.9t^2.$$

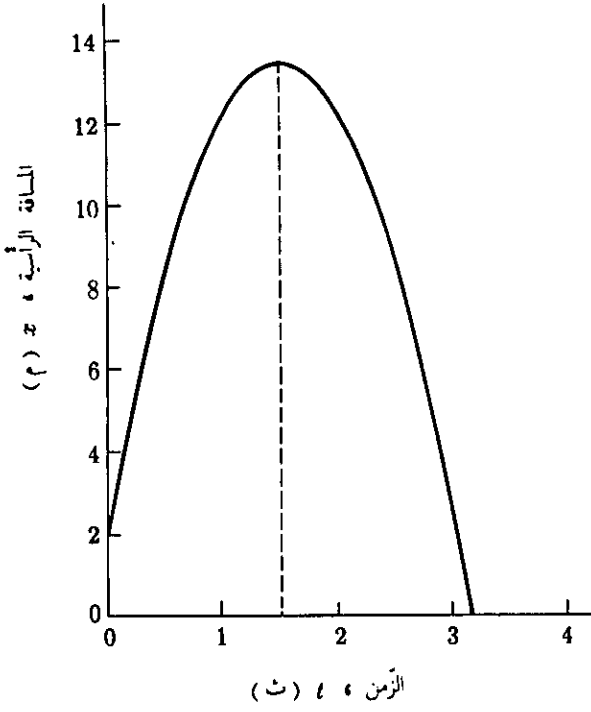
في الزمن $t = 1.53$ ث ، تكون $x = 13.5$ م . وهذا هو أقصى ارتفاع للكرة . ■
وكما يوضح هذا المثال ، فالمعادلات إنها هي أدوات لا تزودنا بإجابات صائبة تلقائياً . فمن الضروري أن نختار إطار إسناد (في هذه الحالة نقطتي أصل x و t) ؛ وأن نوجد الثوابت الصحيحة ؛ وأن نتقن المعادلة الملائمة ؛ وأن نستعمل المحك criterion السليم للحل (في هذه الحالة : الحقيقة بأن $v = 0$ عند أقصى ارتفاع) ؛ وأن نستخدم فئة من الوحدات المتوافقة ؛ كما وأن نؤول الحل بصورة صحيحة . وكثيراً ما تكون الرسوم التوضيحية نافعة - إما رسوم تصويرية للمعضلة المعنية ، أو رسوم بيانية للمتغيرات موضع اهتمامنا الأكبر . وبين شكل ٥,١٦ كلا الصنفين من الرسومات لمثال كرة القاعدة المقدوفة .

٥,٨ التكامل غير المحدود The Indefinite Integral

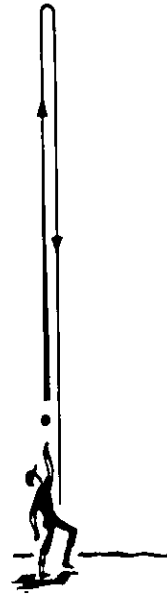
تُدعى العملية العكسية للتفاضل بالتكامل integration . فمشتقة دالة ما $I(x)$ هي نفسها التكامل : هو معكوس التفاضل دالة ، نسُميها $f(x)$:

$$f(x) = \frac{dI}{dx} \quad (٥,٦١)$$

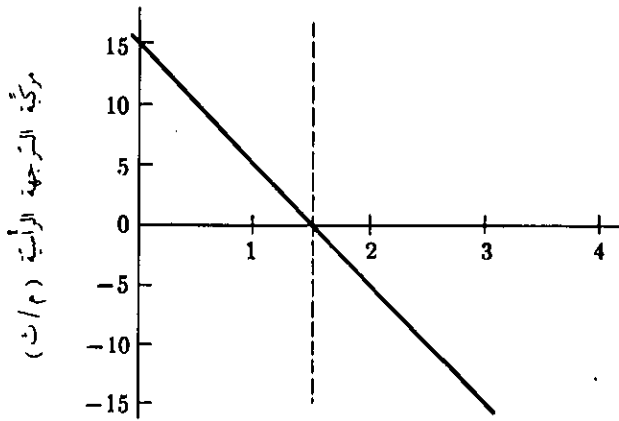
ويمكن التكامل في إيجاد الدالة $I(x)$ التي تساوي مشتقتها دالة معطاة $f(x)$. وسنُعنى في



(ب)



(أ)



(ج)

شكل ٥,١٦ : مثال على كرة قاعدة مقذوفة رأسياً. (أ) رسم تصويري. (ب) رسم بياني للموضع ضد الزمن. ويكون المنحنى قطعاً مكافئاً. (ج) رسم بياني للمركبة الرأسية للسّرجة ضد الزمن.

الوقت الحاضر بدوال $f(x)$ ذات صيغة رياضية بسيطة . أما في البند التالي ، فسنفحص المغزى البياني للتكامل ؛ مما سيتيح لنا أيضاً إمكانية معالجة دوال $f(x)$ معقدة رياضياً أو معرفة فقط بواسطة مُعطيات جدولية .

■ مثال ١ : نتحدد دالة مشتقة derivative function بالعلاقة $f(x) = 0$. فما الدالة $I(x)$ التي ترتبط بالدالة f بواسطة المعادلة ٥,٦١ ؟

إن معرفة المشتقات البسيطة (أنظر جدول ٥,٢) كافية لإيجاد الجواب . فالدالة التي تساوي مشتقتها صفراً هي ثابتة :

$$I(x) = C,$$

حيث C هو أي عدد ثابت .

■ مثال ٢ : الدالة $f(x) = ax$ (حيث a ثابت) هي مشتقة أي دالة $I(x)$ ؟

يوحي تفحص جدول ٥,٢ بالتناسب $I \sim x^2$ ؛ كما يتبين بالتجربة والخطأ trial and error أن المعامل coefficient الصحيح للكتابة x^2 هو $\frac{1}{2}a$. وعليه فإن أحد الأجوبة يكون

$$I(x) = \frac{1}{2}ax^2.$$

غير أن هذا ليس بالجواب الأعم ؛ إذ بما أن إضافة أي ثابت C إلى I لا تُغيّر مشتقتها ، فإن جواباً أعم (بل في الحقيقة الجواب الأعم) يكون

$$I(x) = \frac{1}{2}ax^2 + C.$$

ويمكن التحقق من صحة هذا الجواب بمفاضلته :

$$\frac{dI}{dx} = ax = f(x).$$

وتُدعى I في المثالين أعلاه تكاملاً غير محدود للدالة f . وهو « غير محدود » لأنه اعتباطي (اختياري) ضمن حدود ثابتة جمعي additive constant (أنظر شكل ٥,١٧) . ورمز التكامل غير المحدود هو

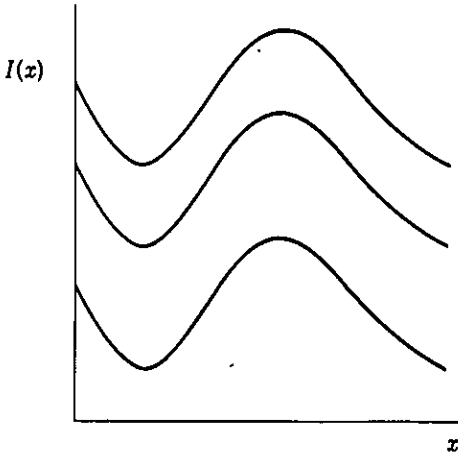
$$I(x) = \int f(x) dx. \quad (٥,٦٢)$$

وتُسمى $f(x)$ في هذا التعبير بالمكامل integrand . فهي مشتقة I (المعادلة ٥,٦١) ، و I هي التكامل غير المحدود للدالة f . [كذلك تُعرف الدالة I أحياناً بضد ، أو نقيض ، مشتقة f (antiderivative)] وبمجموعة الرموز على الطرف الأيمن من المعادلة ٥,٦٢ تمثل بحملتها كينونة مفردة . فهي لا تعني ، مثلاً ، أن $f(x)$ مضروبة بالعنصر dx . وسيُتضح السبب في هذا الاختيار لرمز التكامل في البند التالي .

• وغالباً ما يُحذف الثُّغْرُ « غير المحدود » .

للتأكد من صحة تكامل غير محدود ، قُم بمفاضلته

رمز التكامل غير المحدود



شكل ٥,١٧ : إنَّ الدَّوالَّ ذات المشتقات المتطابقة قد تختلف عن بعضها البعض بِثَابِتٍ .

ويمكن التعبير عن نتيجتي المثلين ١ و ٢ بالمعادلتين :

$$\int 0 \, dx = C,$$

$$\int ax \, dx = \frac{1}{2}ax^2 + C.$$

تحتوي التكاملات غير المحدودة على ثابت اعتباطي (اختياري)

وهذان وتكاملات شائعة أخرى مُدرَّجَة في جَدُول ٥,٧ . لاحظ أنَّ التَّحْرُكَ « إلى الخلف » في هذا الجَدُول (أي من العمود الأيمن إلى الأيسر) يكافئ عملية التفاضل ؛ في حين أنَّ الانتقال من العمود الأيمن إلى الأيسر في جدول ٥,٢ يكافئ عملية التَّكامل .

والتَّكاملُ ، شأنه شأن التفاضل ، هو عملية خطية . ونستطيع أن نُعبِّر عن الخاصية الخطية هذه بالمعادلة

$$\int [af(x) + bg(x)] \, dx = a \int f(x) \, dx + b \int g(x) \, dx, \quad (٥,٦٣)$$

الخاصية الخطية للتَّكامل

حيث a و b ثابتان . إلَّا أنَّه لا توجد قواعد بسيطة مشابهة للمعادلتين ٥,١٥ و ٥,١٦ لتكامل حواصل الضرب أو خوارج القسمة . فالتَّكامل هو — على العموم — عملية أعقد من التفاضل .^٥

■ مثال ٣ : في التطبيقات الفيزيائية ، يتحدَّد عادةً ثابت التَّكامل بالاستعانة بشروط ابتدائية initial conditions ، أو « شروط حدية (شروط الحدود الفاصلة) boundary conditions » .

^٥ يَبْدُو أنَّ التَّكاملَ عموماً أكثر دقَّة من التفاضل في العمل العددي ، كما في حسابات الحاسبة الإلكترونية .

... على سبيل المثال ، إعتبر جسيماً يتحرك على امتداد محور x بتسارع ثابت ، حيث تتحدد سرعته بالعلاقة

$$v = a_0 t,$$

ويكون موضعه $x = x_0$ عند الزمن $t = 0$. فما موضعه في وقت لاحق ؟ بما أن

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (٥,٦٤)$$

حيث v معطاة و x مجهولة ، فإن هذه لَمَسْأَلَةٌ عن التكامل لنقارن المعادلتين ٥,٦٤ و ٥,٦١ . فيكون التناظر كما يلي :

المعادلة ٥,٦١

$$\int \frac{1}{x}$$

المعادلة ٥,٦٤

$$\frac{v}{x}$$

وبذلك ، يكون مكافئ المعادلة ٥,٦٢

$$x(t) = \int v(t) dt. \quad (٥,٦٥)$$

وفي هذا المثال ، نجد أن

$$x(t) = \int a_0 t dt = \frac{1}{2} a_0 t^2 + C. \quad (٥,٦٦)$$

يمكن الآن استخدام الشروط الابتدائية : في المعادلة ٥,٦٦ ، ضَعْ $t = 0$ و $x = x_0$ لتحصل على

$$x_0 = 0 + C.$$

أي أن الثابت C يساوي x_0 ؛ وعليه ، ففي هذا المثال على الحركة ، تؤول المعادلة ٥,٦٦ إلى

$$x = x_0 + \frac{1}{2} a_0 t^2.$$

وتطابق هذه النتيجة المعادلة ٥,٥٥ ، إذا وضعنا فيها $v_0 = 0$. لاحظ - عبوراً - أنه بمقدورنا كتابة المعادلة ٥,٦٥ أيضاً على الصورة

$$x(t) = \int \frac{dx}{dt} dt.$$

وتعني بساطة هذه الصورة أن المقارنة التفصيلية للرموز في المعادلتين ٥,٦٤ و ٥,٦١ ليست ضرورية في الواقع .

★ التكاملُ والمعادلاتُ التفاضليَّةُ Integration and Differential Equations

تُلخَّصُ المعادلاتُ ٥,٥٥-٥,٥٨ سِمَاتِ الحركة بتسارع ثابت . وعند اعتبار مثل هذه

جَدْوَل ٥,٧ : بعض التكاملات غير المحدودة

$f(x)$	$I(x) = \int f(x) dx$
0	C
$a = \text{constant}$ (ثابتاً)	$ax + C$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + C$
$1/x$	$\ln x + C$
$1/x^2$	$-(1/x) + C$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x} + C$
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\sin ax$	$-\frac{1}{a} \cos ax + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\cos ax$	$\frac{1}{a} \sin ax + C$
$\tan x$	$-\ln \cos x + C$
$\tan ax$	$-\frac{1}{a} \ln \cos ax + C$
e^x	$e^x + C$
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax} + C$
e^{-x}	$-e^{-x} + C$
e^{-ax}	$-\frac{1}{a} e^{-ax} + C$
$\ln x$	$x \ln x - x + C$
$\ln ax$	$x \ln ax - x + C$

الحركة ، يكون أسلم منطقاً - إلى حد ما - أن « نرتقي » من المعادلة ٥,٥٧ إلى ٥,٥٦ ومن المعادلة ٥,٥٦ إلى ٥,٥٥ بالتكامل المتعاقب ، بدلاً من أن « نهبط » بالتفاضل . وعلى العموم ، للحركة في بُعد واحد (حيث لا يكون التسارع ثابتاً بالضرورة) ، فإننا نحصل على السّرجة من التسارع بواسطة صيغة التكامل

$$v = \int \frac{dv}{dt} dt = \int a dt ; \quad (٥,٦٧)$$

كما نحصل على الموضع من السّرجة بواسطة الصيغة المشابهة

$$x = \int \frac{dx}{dt} dt = \int v dt. \quad (٥,٦٨)$$

صنع التكامل للكينماتيكا
الأجادية البعد

وبغياب أية معرفة معينة عن الشروط الابتدائية ، يكون هذان تكاملين غير محدودين ، حيث ينتج لكل منهما ثابت تكامل اعتباطي . وللحالة الخاصة المنطوية على تسارع ثابت ، يمكن إجراء عمليتي التكامل على الفور ؛ إذ تعطي المعادلة ٥,٦٧ حينئذٍ

$$v = a \int dt = a(t + C) = at + v_0 . \quad (٥,٦٩)$$

إن C هنا ثابت تكامل ، وقد أعدنا كتابة الالتلاف aC على شكل ثابت آخر ، v_0 . وتبين هذه النتيجة أن المعادلة ٥,٥٦ هي أوسع تعميم للمعادلة ٥,٥٧ . كذلك ، إذا استبدلنا v بالتعبير $at + v_0$ ، في المعادلة ٥,٦٨ ، فإننا نحصل على

$$x = \int (at + v_0) dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 , \quad (٥,٧٠)$$

حيث x_0 ثابت التكامل الجديد . وتتطابق هذه النتيجة مع المعادلة ٥,٥٥ . وثمة طريقة أخرى للنظر إلى المسلك من التسارع إلى السرجة فالموضع ، ألا وهي أن نستعين بفكرة المعادلات التفاضلية . فمعادلة على غرار

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \quad (٥,٧١)$$

معادلة تفاضلية بسيطة

هي معادلة تفاضلية . ويعني هذا ببساطة أنها معادلة تحوي مشتقات وربما تعابير جبرية أيضاً . ويمكن اعتبار هذه المعادلة المعينة كتعبير عن الدالة $v(t)$. فلو لم تكن $v(t)$ معلومة ، لطرحَت المعادلة السؤال التالي : أي دالة $v(t)$ لها مشتقة أولى تساوي الثابت a_0 ؟ وإيجاد الدالة (أو الدوال) $v(t)$ يُسمى حل المعادلة التفاضلية . ولدينا هنا مثال بسيط جداً نعرف أننا نستطيع الحصول على إجابته بالتكامل مباشرة . فالجواب هو

$$v(t) = v_0 + a_0t .$$

حل المعادلة التفاضلية

يبدو أن حل معادلة تفاضلية يقتضي - على العموم - طرائق أعقد . ولسنا نهدف هنا إلى بحث هذه الطرائق ؛ بل نود فقط أن نلفت الانتباه إلى الحقيقة بأن بعض المعادلات الهامة في الفيزياء هي معادلات تفاضلية .

من ناحية أخرى ، يمكن إعادة كتابة المعادلة ٥,٧١ على الصورة

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_0 , \quad (٥,٧٢)$$

التي نُدعى معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية second-order . وحلها العام تحدده المعادلة ٥,٧٠ . ومن مميزات الحل لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية أنه يحوي ثابتي تكامل .

٥,٩ التَّكَامُلُ المَحْدُودُ The Definite Integral

كما علمنا في بنود آتية ، فإنَّ للتفاضل تأويلاً بيانياً بسيطاً ؛ إذ أنَّه مكافئٌ لعملية إيجاد مَبْلٍ منحنىٍّ ما . وللتكامل أيضاً تأويلٌ بيانيٌّ بسيطٌ ؛ حيث أنَّه مرتبطٌ بإيجاد المساحة تحت منحنى . وفي هذا البند ، سَنُعَرِّفُ أولاً التَّكَامُلَ المَحْدُودَ بأنَّه المساحة تحت منحنى في رسم بيانيٍّ ؛ ومن ثَمَّ سنتحرى خواصَّ التَّكَامُلِ المَحْدُودِ المعرَّفِ على هذا النُّحو ؛ وأخيراً سنبرهن الصِّلةَ البسيطةَ والهامَّةَ بين التَّكَامُلَيْنِ المَحْدُودِ وغير المَحْدُودِ .

□ تعريفُ التَّكَامُلِ المَحْدُودِ Definition of the Definite Integral

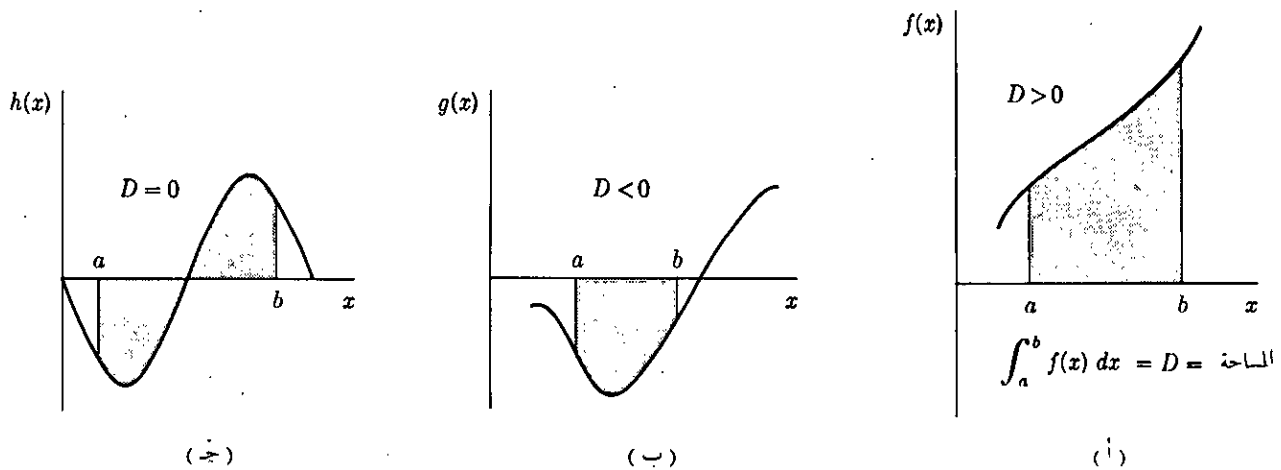
إذا عُرِضَتْ دالَّةُ $f(x)$ بيانياً على الصُّورة $f(x)$ ضدَّ x ، فإنَّ العبارة « المساحة تحت المنحنى بين الحديتين a و b » تعني المساحة التي يَحُدُّها منحنى $f(x)$ ، ومحور x ، والخطَّان $x = a$ و $x = b$ (شكل ٥,١٨) . والمساحة تحت المنحنى البيانيَّ لدالَّة موجبة تُعرَّفُ بأنَّها موجبة ؛ في حين أنَّ المساحة « تحت » (في الواقع فوق) المنحنى البيانيَّ لدالَّة سالبة تُعرَّفُ بأنَّها سالبة . وكما هو مبين في شكل ٥,١٨ (ج) ، فإنَّ المساحات الموجبة والسالبة تُضَافُ جبرياً ، وقد تَخْتَرِلُ بعضها بعضاً . والمساحة الكلية بين حديتين محدَّدتين للإحداثي x تُدْعَى **تكاملاً محدوداً** . والرَّمزُ المستخدم للتَّكَامُلِ المَحْدُودِ هو

تعريفُ المساحة تحت منحنى

المساحة = التَّكَامُلُ المَحْدُودِ

$$D = \int_a^b f(x) dx . \quad (٥,٧٣)$$

رمز التَّكَامُلِ المَحْدُودِ



شكل ٥,١٨ : تعريف التَّكَامُلِ المَحْدُودِ D . فهو مساوٍ للمساحة التي يَحُدُّها محور x ، ومنحنى مرسوم ، وحدَّان مختاران جزافاً للإحداثي x ، مثل a و b . وتُعرَّفُ المساحة فوق محور x بأنَّها موجبة ؛ بينما تُعرَّفُ المساحة تحت محور x بأنَّها سالبة . ونبيِّن هنا أمثلةً على (أ) $D > 0$ ؛ (ب) $D < 0$ ؛ و (ج) $D = 0$.

كما تُدعى هذه المساحة بتكامل $f(x)$ من a إلى b . وعلى الرغم من تشابه هذا الرمز برمز التكامل غير المحدود ، فليس لدينا من مدعاة ، مبنية على أساس ما قدمناه حتى الآن ، لأن نرى أية صلة بين هذين النوعين من التكامل ؛ مع أنهما ، بالطبع ، لوثيقا العرى ... لكننا سوف لا نثبت علاقتها قبل نهاية هذا البند . أما الساعة ، فدعنا نعتبر التشابه في الرموز محض مصادفة ، ولنخص في تفحص خواص التكاملات المحدودة - أو ، بكلمات مكافئة ، المساحات تحت المنحنيات .

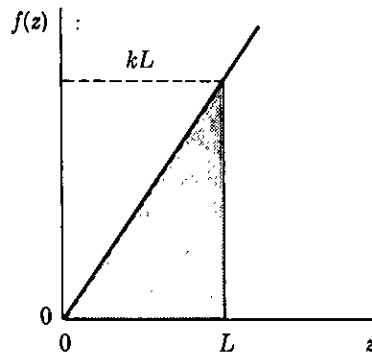
□ بعض خواص التكاملات المحدودة Some Properties of Definite Integrals

من المهم أن نلاحظ أن التكامل المحدود بين حدين ثابتين هو كمية ثابتة ، وليس دالة : إذ أن له قيمة عددية معينة ؛ كما أن له - على العموم - وحدة ، لا داعي لأن تكون وحدة مساحة مثل m^2 أو cm^2 . فكما أن فكرة الميل تُعمَّم من معناها الهندسي البحت وتكتسب وحدة يحددها خارج قسمة الكمية المعينة رأسياً على الكمية المعينة أفقياً ، فإن فكرة المساحة تُعمَّم أيضاً بحيث تكتسب وحدة يحددها حاصل ضرب الكميتين المعينتين رأسياً وأفقياً . مثلاً ، لو عبّر عن $f(x)$ بوحدة القوة ، نيوتن ، وعن x بوحدة المسافة ، متر ، لعبّر عن المساحة تحت منحنى $f(x)$ بوحدة القوة ضرب المسافة ، $N \cdot m$. والرمز $\int_a^b f(x) dx$ يجعل تذكر ذلك سهلاً .

المساحة المُعمَّمة قد يكون لها أية وحدة

■ مثال ١ : تساوي دالة $f(x)$ ثابتاً C . فما تكاملها المحدود من $x = a$ إلى $x = b$ ؟
كما هو مبين في شكل ٥,١٩ ، يكون التكامل المحدود

$$D = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b C dx$$



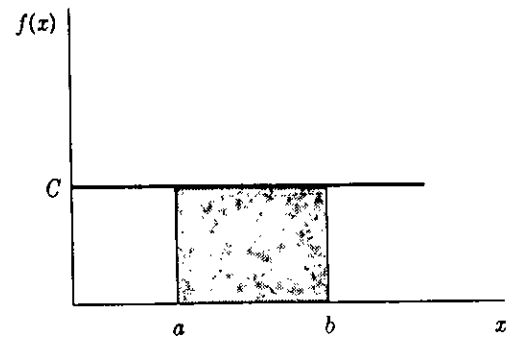
شكل ٥,٢٠ : الرسم البياني للدالة

$f(z) = kz$ يكون التكامل

المحدد من $z = 0$ إلى $z = L$

مساوياً لمساحة المثلث

المظلل shaded .



شكل ٥,١٩ : الرسم البياني للدالة $f(x) = C$.

... من السهل حساب التكامل المحدود من a إلى b ؛

إذ أنه مساحة مستطيل .

لايجاد بعض المساحات ، تكون الهندسة البسيطة كافية

مساوياً لمساحة مستطيل rectangle : قاعدته هي المسافة $b - a$ ؛ وارتفاعه C . وبذلك ، تكون المساحة

$$D = (b - a)C.$$

■ وواضح أنَّ وَحْدَةَ D هي وَحْدَةُ x مضروبة في وَحْدَةُ f .

■ مثال ٢ : نتحدّد دالة قوّة معيّنة بالعلاقة $f(z) = kz$ ، حيث z هي المسافة المُقاسَة بالأمتار و k ثابت مُعَبَّر عنه بالوحدة N / m . إحسب التّكامل المحدود

$$D = \int_0^L f(z) dz = \int_0^L kz dz.$$

بيّن الرّسم البيانيّ المناسب (شكل ٥,٢٠) أنَّ هذا التّكامل المحدود مساوٍ لمساحة مثلث قائم ذي قاعدة L وارتفاع kL . وهذه المساحة هي

$$D = \frac{1}{2} \times L \times kL = \frac{1}{2}kL^2.$$

■ أمّا وَحْدَةُ D فهي $N \cdot m$.

وكما هو مبين في شكل ٥,٢١ ، فإنّ للتكاملات المحدودة خاصيّة جمعيّة بسيطة يُعَبَّر عنها بالعلاقة

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx ; \quad (٥,٧٤)$$

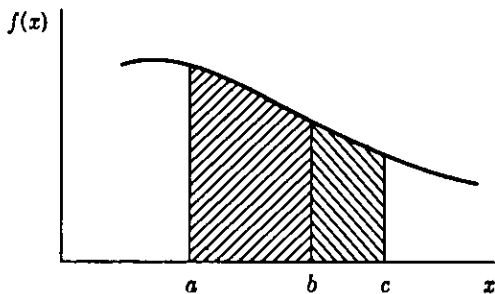
خاصيّة جمعيّة

حيث يكون ، في الشكل ، $a < b < c$. يبيّن أنَّ هذه الخاصيّة الجمعيّة تصحّ لأية مقادير نسبيّة للمحدود a و b و c ، بشرط أنَّ نُعرّف

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx. \quad (٥,٧٥)$$

تعريف التّكامل من «اليمين إلى اليسار»

وتنصّ هذه المعادلةُ على أنَّ التّكامل المحدود الذي نجريه باتجاه x المتناقصة هو (بالتعريف) مُساوٍ مقداراً ومتضادّ إشارةً للتّكامل الذي نجريه باتجاه x المتزايدة بين نفس الزوج من الحدود .



شكل ٥,٢١ : تدليل بيانيّ على المعادلة ٥,٧٤ . فالتكامل من a إلى c مُساوٍ لمجموع التّكاملين من a إلى b ومن b إلى c .

مثلاً ، في المعادلة ٥,٧٤ ، ضَعُ $c = a$ لتحصل على

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx.$$

فالتكامل المحدود على اليمين ، من a إلى a (مسافة صفرية) . يُساوي صفرًا .
كذلك ، فإن التكامل المحدود يُشارك التكامل غير المحدود في الخاصية الخطية :

الخاصة الخطية مرة ثانية

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \quad (٥,٧٦)$$

حيث α و β ثابتان . وهذا يعني ، على سبيل المثال ، أن أي ثابت مضاعف multiplicative يمكن أن يؤخذ خارج علامة التكامل . ونترك برهان هذه القاعدة كمسألة للقارئ .

□ التكامل المحدود كنهاية مجموع The Definite Integral as the Limit of a Sum

في المثاليين أعلاه ، استطعنا أن نحسب التكاملين المحدودين للتو باستعمال صيغ هندسية بسيطة لمساحتي المستطيل والمثلث . لكن ماذا لو كانت الدالة $f(x)$ أكثر تعقيداً ، كأن يكون رسمها البياني مثل ذلك في شكل ٥,١٨ ؟ أو ماذا لو لم يكن للدالة $f(x)$ أية صيغة رياضية معلومة على الإطلاق ، كأن تكون فقط منحنى مرسوماً خلال نقاط محددة تجريبياً ؟ عندئذ لن نفي بالغرض صيغ هندسية بسيطة للمساحة . غير أننا ندلل في شكل ٥,٢٢ على إجراء عام يصلح في هذه الحالات لكل الدوال ما خلا « المعتلة pathological » جداً قسم الفترة interval من $x = a$ إلى $x = b$ إلى n فترات جزئية subintervals ذات عرض $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. (قد تكون هذه الفترات الجزئية متساوية العرض ، لكن لا داعي لذلك .) ولتكن الأطراف اليسرى للفترات الجزئية المتعاقبة عند $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. فواضح ، من الشكل ، أن

$$x_1 = a,$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1,$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x_2,$$

⋮

كون الآن فئة من المستطيلات ، الأول ذو قاعدة Δx_1 وارتفاع $f(x_1)$ ؛ والثاني ذو قاعدة Δx_2 وارتفاع $f(x_2)$ ؛ ... ؛ والأخير ذو قاعدة Δx_n وارتفاع $f(x_n)$. فتكون مساحة المستطيل الأول $\Delta x_1 f(x_1)$ ؛ أما المساحة الإجمالية لكل المستطيلات ، فتكون

$$A_n = f(x_1) \Delta x_1 + f(x_2) \Delta x_2 + \dots + f(x_n) \Delta x_n.$$

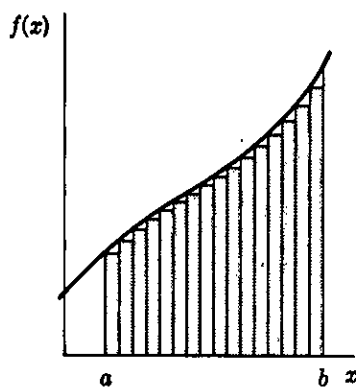
ويشير الرمز السفلي (الدليلي) n إلى عدد المستطيلات المستعملة لحساب المساحة . ويكتب هذا المجموع بصورة ملائمة أكثر ، وذلك باستخدام رمز الجَمْع summation notation ،

$$A_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i . \quad (٥,٧٧)$$

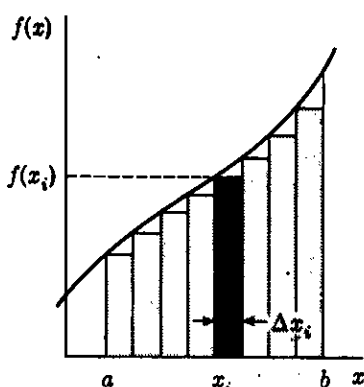
مساحة فئة من المستطيلات

وواضح في شكل ٥,٢٢ أن هذه المساحة التي جُمِعت من مستطيلات هي تقريب للمساحة الحقيقية تحت المنحنى ؛ وأنه كلما كان n أكبر ، كان التقريب أفضل (بشرط أن تنقص العناصر Δx_i جميعها ، عندما يزداد n). وفي وضع عملي عندما يكون المنحنى تجريبياً empirical ، يمكن حساب التكامل المحدود بهذه الطريقة ، بحيث يُختار n كبيراً لدرجة كافية كي يجعل الخطأ صغيراً إلى حد مُستساغ .

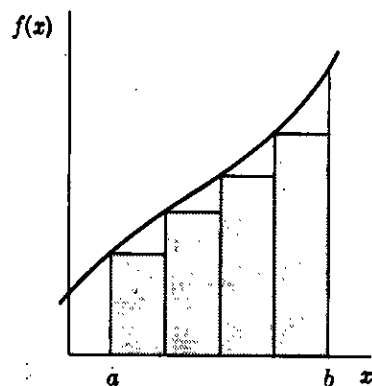
وهي تقريب للمساحة تحت المنحنى



(ج)



(ب)



(أ)

شكل ٥,٢٢ : تقريب التكامل المحدود كمجموع مساحات مستطيلة للحالات : (أ) $n = 8$ ؛ (ب) $n = 16$ ؛ (ج) $n = 16$. وعندما يقترب n من اللانهاية ، فإن المساحة الكلية للمستطيلات تقترب من المساحة الحقيقية تحت المنحنى .

والتكامل بواسطة الحاسبة الإلكترونية يُجرى عادةً بهذه الطريقة تقريباً ، سوى أن المستطيلات قد تُستبدل بأشكال ذات رؤوس مائلة slanting أو منحنية كي تتبع الرسم البياني للدالة بصورة أقرب .

وإنها لنظرية هامة في حساب التفاضل والتكامل أنه ، لطائفة واسعة من الدوال ، تكون المساحة الحقيقية تحت المنحنى نهاية المساحة A_n عندما يقترب n من اللانهاية وعندما تقترب كل العناصر Δx_i من الصفر :

$$D = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i . \quad (٥,٧٨)$$

التكامل المحدود كنهاية مجموع

(وعلينا أن نذكر أن هذه النهاية تنطوي أيضاً على الشرط $\Delta x_i \rightarrow 0$ لكل i ، وأسهل طريقة لضمان ذلك هي أن نضع كل العناصر Δx_i مساوية لنفس المقدار $(b - a)/n$ إن المعادلة ٥,٧٨ تجلو الآن السبب وراء استخدام رمز التكامل : إذ نحل علامة التكامل $\int$ (المشتقة من الحرف S عن كلمة « sum » بمعنى « مجموع ») محل الحرف اليوناني سيغما Σ ؛ كما يحل dx محل Δx_i . كذلك ، يحل حدًا التكامل ، a و b ، محل حدي المجموع ، 1 و n .

■ مثال ٣ : يتحرك جسيم على امتداد محور x بسرجهه $v(t)$ التي هي دالة معلومة في الزمن . فما إزاحة الجسيم من الزمن t_a إلى الزمن t_b ؟
 بمقدورنا أن نستخدم منطقاً فيزيائياً لنبين أنه يمكن كتابة الإزاحة كتكامل محدود .

في هذا النقاش ، لاحظ أن المتغير المستقل ، الذي سُمي x في النقاش العام السالف ، هو الآن الزمن t . ويكون التناظر كالاتي :

هذا المثال

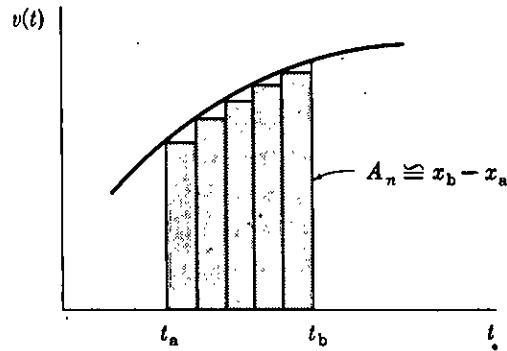
$$v(t)$$

النقاش العام

$$f(x)$$

كذلك ، تكون المسافة x ، في هذا المثال ، متغيراً تابعاً آخر ، يمكن كتابته $x(t)$. إلا أننا لا نشد هنا سوى الإزاحة المعينة $x_b - x_a$.

... عند أي زمن t_i ، تكون سرجهه الجسيم $v(t_i)$. ولن تتغير هذه السرجهه إلا قليلاً جداً بعد فترة لاحقة Δt_i ، صغيرة لدرجة كافية (أنظر شكل ٥,٥) . ويمكن حساب إزاحة الجسيم في غضون هذه الفترة القصيرة — على وجه التقريب — كما لو كان الجسيم متحركاً بسرجهه ثابتة :



شكل ٥,٢٣ : المساحة تحت منحنى السرجهه ضد الزمن لحركة أحادية البعد هي الإزاحة أثناء الفترة الزمنية المعنية . وتقريب المساحة بسلسلة من المستطيلات هو مكافئ لتقسيم الحركة إلى سلسلة متوالية من القطع ، تتم كل واحدة منها بسرجهه ثابتة .

تقريب السّرجة الثّابتة
في فترة وجيزة

$$\Delta x_i \cong v(t_i) \Delta t_i,$$

(حيث يعني الرّمز $\cong$ التعبير « يساوي بالتقريب »). وتحدّد صيغةً مماثلةً الإزاحة أثناء الفترة التّالية ، وهكذا دواليك لفترات أخرى . فإذا قُسمت الفترة الزّمنية الكليّة ، $t_b - t_a$ ، إلى n فترات ، $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ ، فإنّ صيغةً تقريبيةً للإزاحة الإجماليّة تكون

$$x_b - x_a = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \cong \sum_{i=1}^n v(t_i) \Delta t_i. \quad (5,79)$$

وهذه الصّيغة ممثلةً بيانيّاً في شكل ٥,٢٣. وواضح أنّها تعطي تقريب المستطيل rectangular approximation للفترة المحدّدة . وبما أنّ تقريب الحركة بسرجة ثابتة يغدو أضبط فأضبط كلّما تناقصت مدّة الفترة الزّمنية ، فإنّ المعادلة ٥,٧٨ تصبح دقيقةً في النّهاية $n \rightarrow \infty$ و $\Delta t_i \rightarrow 0$ ؛ فتكون

$$x_b - x_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(t_i) \Delta t_i \quad (5,80)$$

(حيث $\Delta t_i \rightarrow 0$ مفهومة أيضاً ضمناً) . وبموجب المعادلة ٥,٧٨ ، فإنّ هذه عبارة عن تكامل محدود :

$$x_b - x_a = \int_{t_a}^{t_b} v(t) dt. \quad (5,81)$$

الإزاحة في فترة زمنية ثابتة

وبما أنّ $v = dx/dt$ ، يمكن أنّ تُصاغ هذه النّتيجة على الصّورة

$$x_b - x_a = \int_{t_a}^{t_b} \frac{dx}{dt} dt. \quad (5,82)$$

ونحن نرى ها هنا الماعاً قوياً إلى الصّلة بين التّكاملين المحدود وغير المحدود (قارن المعادلة ٥,٦٨) .

■ مثال ٤ : يتحرّك جسيم بتسارع ثابت a_0 على امتداد محور x ، بحيث تتحدّد سرجته بالعلاقة

$$v(t) = v_0 + a_0 t. \quad (5,83)$$

فما إزاحته من $t = 0$ إلى $t = T$ ؟

تزوّدنا المعادلة الجبريّة ٥,٥٥ بالجواب بكلّ بساطة . فهو

$$x_T - x_0 = v_0 T + \frac{1}{2} a_0 T^2. \quad (5,84)$$

دعنا الآن نحصل على هذا الجواب بطريقة مختلفة ، وذلك باستخدام المعادلة ٥,٨١ مع فكرة

التكامل المحدود . فتعويض الطرف الأيمن من المعادلة ٥,٨٣ بدلاً من $v(t)$ في المعادلة ٥,٨١ يعطي

$$x_T - x_0 = \int_0^T (v_0 + a_0 t) dt .$$

والمكامل ، $v_0 + a_0 t$ ، مرسوم كدالة في الزمن في شكل ٥,٢٤ ، حيث تكون المساحة الكلية المظللة هي التكامل المحدود المطلوب . فهي مجموع مساحة مستطيل ،

$$A_1 = v_0 T ,$$

مع مساحة مثلث ،

$$A_2 = \frac{1}{2} \times T \times a_0 T = \frac{1}{2} a_0 T^2 .$$

وهكذا ، تكون الإزاحة

$$x_T - x_0 = A_1 + A_2 = v_0 T + \frac{1}{2} a_0 T^2 ,$$

التي هي نفسها كما في المعادلة ٥,٨٤ .

□ علاقة التكامل المحدود بالتكامل غير المحدود

Relationship of the Definite Integral to the Indefinite Integral

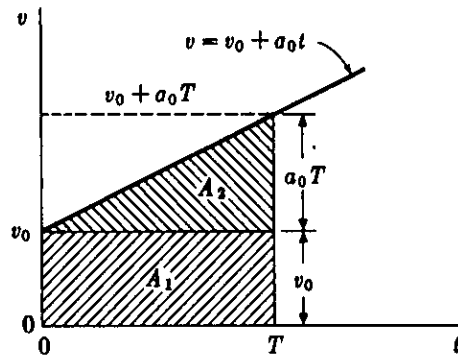
يمكن تحويل التكامل المحدود من كمية ثابتة إلى أخرى متغيرة بالسّاح لحدّه الأعلى upper limit بأن يتفاوت . مثلاً ، قد نكتب تكاملاً محدوداً كدالة في x بالطريقة التالية :

$$D(x) = \int_{x_0}^x f(x') dx' . \quad (٥,٨٥)$$

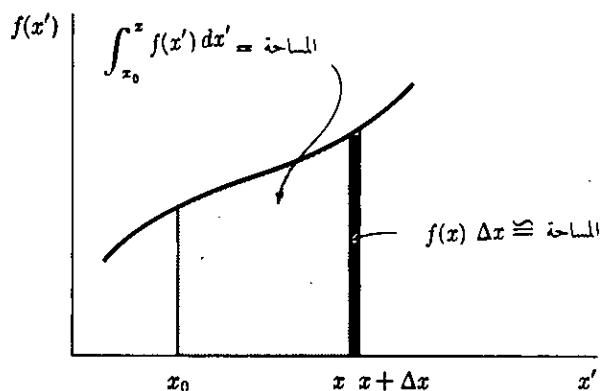
التكامل المحدود كدالة في حدّه الأعلى

دعنا نفحص كيفية اعتماد D على x . فكما هو مبين في شكل ٥,٢٥ ، إذا زدنا x بتزايد صغير Δx ، فإن زيادة التكامل المحدود تتحدد تقريباً بالعلاقة

$$\Delta D = D(x + \Delta x) - D(x) \cong f(x) \Delta x .$$



شكل ٥,٢٤ ، الطريقة البيانية لحساب تكامل محدود تكون المساحة تحت المنحنى (الذي هو خط مستقيم هنا) $A_1 + A_2$.



شكل ٥,٢٥ : عندما يتغير الحدُّ
الأعلى لتكامل محدود من x إلى
 $x + \Delta x$ ، فإنَّ قيمة التكامل
المحدود تتغير تقريباً بالكمية
 $f(x) \Delta x$.

ويمكن كتابة هذه على الصورة

$$f(x) \cong \frac{D(x + \Delta x) - D(x)}{\Delta x} \quad (٥,٨٦)$$

وفي النهاية التي تقترب فيها Δx من الصفر، تغدو هذه المتساوية التقريبية approximate equality تامة exact، لأنَّ تقريب المستطيل للتزايد ΔD (شكل ٥,٢٥) يصبح في تلك النهاية تاماً. وبذلك، فإننا نحصل على

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{D(x + \Delta x) - D(x)}{\Delta x} = \frac{dD}{dx} \quad (٥,٨٧)$$

مشتقته هي المُكامل

دعنا نكتب هذه النتيجة بجوار المعادلة ٥,٦١ :

$$f(x) = \frac{dD}{dx}, \quad f(x) = \frac{dI}{dx}.$$

نفس الخاصية للتكاملات المحدودة
وغير المحدودة

فالأولى [على الطرف الأيسر] تنص على أنَّ مشتقة تكامل محدود بالنسبة إلى حدٍّ أعلى متغير تساوي المُكامل $f(x)$ ؛ كما تنص الثانية [الطرف الأيمن] على أنَّ مشتقة التكامل غير المحدود مساوية لنفس المُكامل $f(x)$. وبما أنَّ للتكاملين D و I نفس المشتقة، فلا يمكن أن يختلفا إلا بثابت؛ فبمقدورنا أن نكتب إذن

$$D(x) = \int_{x_0}^x f(x') dx' = I(x) + C, \quad (٥,٨٨)$$

حيث C ثابت. ولإيجاد C ، ضَعْ $x = x_0$. فهذا يعني أنَّ مدى التكامل، من x_0 إلى x_0 ، هو صفر؛ وبذلك يكون التكامل المحدود صفرًا؛ وبالتالي

$$0 = I(x_0) + C.$$

إذن $C = -I(x_0)$ ؛ ويمكن إعادة كتابة المعادلة ٥,٨٨ على الصورة

$$D(x) = \int_{x_0}^x f(x') dx' = I(x) - I(x_0). \quad (٥,٨٩)$$

إنَّ النَّظْرِيَّةَ الْأَسَاسِيَّةَ تُرْبِطُ مَعاً
التَّكَامُلَاتِ الْمَحْدُودَةَ وَغَيْرِ الْمَحْدُودَةِ

تذكر أنَّ $I(x)$ هي التَّكَامِلُ غير المحدود ، أو نقيض المشتقة ، للمُكَامِل $f(x)$. وتُعرَفُ هذه النتيجة الهامة بالنَّظْرِيَّةِ الْأَسَاسِيَّةِ لحساب التَّكَامِلِ *fundamental theorem of integral calculus* . فكلما كانت الدَّالَّةُ $f(x)$ على صورةٍ تكاملها غير المحدود $I(x)$ معلومٌ ، فإنَّ النَّظْرِيَّةَ الْأَسَاسِيَّةَ هذه تزودنا بأسهل طريقة لحساب تكامل محدود . وثمة رمز آخر للمعادلة ٥,٨٩ هو

$$\int_a^b f(x) dx = I(x) \Big|_a^b. \quad (٥,٩٠)$$

رمز بديل

والرمز على يمين إشارة التساوي هو مختصر التعبير $I(b) - I(a)$.

■ مثال ٥ : دعنا نحلّ مثال ٤ باستخدام النَّظْرِيَّةِ الْأَسَاسِيَّةِ .
تكون الإزاحة ، للحركة المصوّرة في شكل ٥,٢٤ ،

$$x_T - x_0 = \int_0^T (v_0 + a_0 t) dt.$$

وبدلاً من حساب المساحة هندسياً ، بمقدورنا أن نكتب

$$x_T - x_0 = v_0 T + \frac{1}{2} a_0 T^2 \Big|_0^T.$$

وبما أنَّ الحدين terms على اليمين يتلاشيان عند الحد الأدنى lower limit ، $t = 0$ ،
تكون النتيجة :

$$x_T - x_0 = v_0 T + \frac{1}{2} a_0 T^2.$$

■ مثال ٦ : يُوصَفُ قِطْعٌ مكافئٌ بالمعادلة $y = x^2$. فما المساحة الواقعة تحت هذا القِطْعِ المكافئ من $x = 2$ إلى $x = 3$ (أنظر شكل ٥,٢٦) ؟
بتطبيق المعادلة ٥,٧٠ ، نجد أنَّ

$$D = \int_2^3 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_2^3 = \frac{27}{3} - \frac{8}{3}.$$

وهكذا يكون الجوابُ

$$D = \frac{19}{3}.$$

■ مثال ٧ : بين أن التغير في السرعة يرتبط بالتسارع لحسيم يتحرك في بُعد واحد بالعلاقة

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt. \quad (٥,٩١)$$

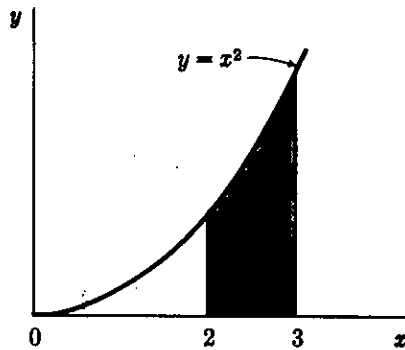
بما أن $a = dv/dt$ ، تكون v التكامل غير المحدود للتسارع a (المعادلة ٥,٦٧) .
وبذلك ، فإن

$$\int_{t_1}^{t_2} a dt = v(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = v(t_2) - v(t_1).$$

والفرق ، $v(t_2) - v(t_1)$ ، هو Δv ؛ أي تغير السرعة من t_1 إلى t_2 . وهذا يؤكد صحة المعادلة ٥,٩١ .

■ مثال ٨ : مضخة (رافعة) مائية hydraulic lift ، بدأت حركتها من السكون ، يتحدد تسارعها إبان الثواني القليلة الأولى بالعلاقة

$$a(t) = \beta t^2,$$



شكل ٥٢٦ : إيجاد المساحة تحت
منحنى مكافئ لـ مسألة بسيطة في
التكامل .

حيث β ثابت يساوي $١٠^{-٢}$ م/ث^٤ . فما إزاحة المضخة بعد ٢ ث ؟

من المعادلة ٥,٩١ ، تكون سرعتها عند الزمن t (نفس الشيء مثل التغير في سرعتها [حيث أنها بدأت من السكون]) ،

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t \beta t^2 dt \\ &= \frac{1}{3} \beta t^3 \Big|_0^t = \frac{1}{3} \beta t^3. \end{aligned}$$

لاحظ هنا أننا استعملنا نفس الرمز t للمتغير في المكامل ولإيجاد التكامل الأعلى . وهذه عادة مألوفة لا داعي لأن تسبب أي تشويش إذا كان المرء مطلعاً على هذا الاستعمال المزدوج . أما الإزاحة أثناء الزمن t (أنظر المعادلة ٥,٨١) ، فتكون

$$\Delta x = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t \frac{1}{2} \beta t^3 dt$$

$$= \frac{1}{2} \beta t^4 \Big|_0^t = \frac{1}{2} \beta t^4.$$

والتعويض $t = 2$ ث يُعطي

$$x = 0.133 \text{ م} = 1.33 \text{ سم}.$$

٥,١٠ دَالَتَا الْجَيْبِ وَجَيْبِ التَّامِّ * Sine and Cosine Functions

علاوةً على الدَّوَالِ الجبرية ، فإنَّ ثَمَّةَ بعضِ الدَّوَالِ الأخرى المتغلغلة في الفيزياء لدرجة استثنائية ، مما يجعلها خليفةً باهتمامٍ خاصٍ . وسنعتبر هنا دالَّتَي الجَيْبِ وجَيْبِ التَّامِّ ؛ كما سنتفحص في بند ٥,١١ الدَّالَّتَيْنِ الأسِّيَّةَ واللُّوغاريثميَّةَ .

إنَّ الكميَّةَ $\sin \theta$ (جا θ) هي دالَّةٌ في الزَّاوية θ ، التي تُدعى اتِّسَاعَ (أو مدلولَ عليه) argument الدَّالَّةِ . إلَّا أنَّه ليس هناك من داعٍ لأنَّ تنحصر الدَّلالةُ الفيزيائيةُ للاتِّساعِ في زاوية . فإذا كتبنا الدَّالَّةَ

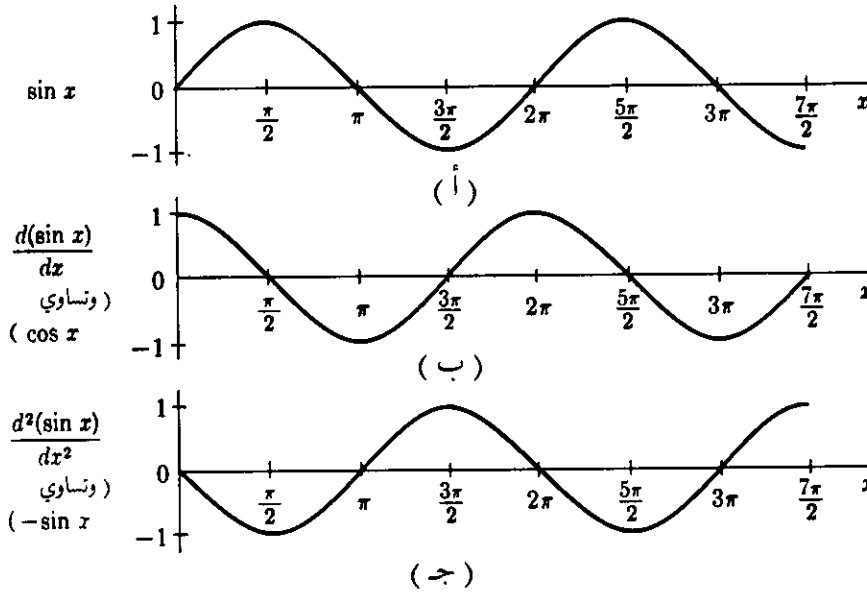
$$\sin x,$$

فإنَّ اتِّساعها x قد يكون أيَّةَ كميَّةٍ لأبعديَّةٍ ، وليس زاويةً بالضرورة . وأياً كان الأمر ، فإنَّنا نُسعُّ على هذا التعبير مدلولاً محدداً إذا استعنا بزاوية . مثلاً ، إذا كانت قيمة x العددية ٢ ، فإنَّ $\sin x$ تعني حينئذٍ جيب الزَّاوية ٢ مسر . لاحظ أنَّ التعميمَ من زوايا إلى كميَّاتٍ أخرى يركِّز على الإدراك أنَّ الدَّائريَّةَ ينبغي أن تكون الوَحْدَةَ المعياريَّةَ للقياس الزَّاوي . ثُمَّ إنَّ فكرة الدَّالَّةِ المثلثية التي لا تَمُتُ بصلَّةٍ إلى الزوايا والمثلثات هي أَقلُّ غرابةً ممَّا قد يبدو لأوَّل وهلة ؛ إذ أنَّها تعني ببساطة أنَّ الجَوْهَرَ الرِّياضيَّ قد « اسْتَقْفِرَ » distilled من التَّطبيق الفيزيائيِّ الأصليِّ (أو ، في هذه الحالة ، التَّطبيق الهندسيِّ) . فهي لا تختلف كثيراً عن استعمال المعادلة التَّربيعية $s = \frac{1}{2}gt^2$ لوصف شيءٍ لا يتعلَّق البتَّة بالسُّقوط الحرِّ .

ونبيِّن دالَّةَ جَيْبٍ في شكل ٥,٢٧ (أ) . فَيَبَيِّنُ $x =$ صفراً و π مسر ، يكون الجَيْبُ موجباً ، وذات قيمةٍ قُصْوَى تساوي ١ عند $x = \pi/2$. أمَّا ذروته السَّالبة (- ١) ، فيبلغها عند $x = 3\pi/2$. وبَعْدَ 2π ، يتكرَّر النمط . فدالَّةُ الجَيْبِ هي دالَّةٌ دوريَّةٌ periodic ، دَوْرَتُهَا 2π .

وإمعان النَّظَرِ في شكل ٥,٢٧ (أ) يجعل من الجليِّ أنَّ مشتقَّ دالَّةِ الجَيْبِ (أو مِثْلَ رسمها البيانيِّ) ينبغي أن تكون أيضاً دالَّةٌ دوريَّةٌ ذات دَوْرَةٍ قدرها 2π . وهذه المشتقة هي - الحقيقة - دالَّةُ جيب تمام :

* سنحتاج إلى مادة هذا البند لأوَّل مرَّة في سياق بند ٦,١٠ .



شكل ٥,٢٧ : (أ) الرسم البياني لدالة الجيب $\sin x$ ضد x ، حيث يعبر عن المقياس الأفقي بالوحدات الدائرية .
 (ب) مشتقة دالة الجيب تساوي دالة جيب التمام . ورسمها البياني هو نفسه كدالة جيب مزاحة أفقيًا إلى اليسار مسافة $\frac{1}{2}\pi$.
 (ج) المشتقة الثانية لدالة الجيب هي سالب دالة الجيب . ورسمها البياني هو نفسه كدالة جيب مزاحة أفقيًا مسافة π .

$$\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x. \quad (٥,٩٢)$$

ونرسم الدالة $\cos x$ في شكل ٥,٢٧ (ب) . لاحظ أن رسمها البياني مطابق لرسم الدالة $\sin x$ ، سوى أنها أزاحت إلى اليسار مسافة $\frac{1}{2}\pi$. ونعبر عن هذه الخاصية بالصيغة

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right). \quad (٥,٩٣)$$

كذلك ، كما هو مبين في شكل ٥,٢٧ (ج) ، فإن مشتقة دالة جيب التمام هي سالب دالة الجيب :

$$\frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x. \quad (٥,٩٤)$$

ومرة ثانية يكفي التفاضل هنا عملية إزاحة المنحنى إلى اليسار مسافة $\frac{1}{2}\pi$:

$$-\sin x = \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right). \quad (٥,٩٥)$$

كما يعبر عن الإزاحة المزدوجة من منحنى الجيب إلى سالبه بالعلاقة

$$-\sin x = \sin (\pi + x). \quad (٥,٩٦)$$

والتَمحيص الدقيق لشكل ٥,٢٧ سيُؤني أكله ؛ كما أنَّ تعلُّمنا كيف ننصِّور الرِّسوم البيانيَّة للمشتقَّتين الأولى والثَّانية ، وذلك بمعاينة الرِّسم البيانيَّ لدالَّة ما ، هو موهبةٌ جديرةٌ بالرَّعاية والتَّطوير .

وبتوحيد المشتقَّتين الواردتَيْن أعلاه ، نستطيع أنَّ نكتبَ المشتقَّةَ الثَّانيةَ لدالَّة الجيبِ على الصُّورة :

$$\frac{d^2}{dx^2} (\sin x) = -\sin x. \quad (٥,٩٧)$$

صفات بسيطة وخاصة للمشتقَّتين
الثَّانيتين

وعلى نفس الغرار ،

$$\frac{d^2}{dx^2} (\cos x) = -\cos x.$$

ولا يتَّسم بهذه الخاصَّة إلا دالَّتَا الجيبِ وجيب التَّمام (واثلافتاهما) . فلا يوجد لأية دالَّة أُخرى مشتقَّة ثانية تساوي سالبَ الدالَّة نفسها .

إنَّ السَّبب وراء الأهميَّة الخاصَّة لمنحني الجيبِ وجيب التَّمام في الفيزياء هو أنَّ العديدَ من الظواهر التَّدبديَّة oscillatory phenomena في الطَّبيعة يُوصَفُ رياضياً بواسطة هاتين الدالَّتَيْن . وحسبنا هنا أنَّ نعتبرَ واحدةً منها . فالمنحنى في شكل ٥,٢٨ يبيِّن إزاحةً ثَقُلِ بَندول pendulum bob من موضعه المركزي كدالَّة في الزَّمن . ومعادلة هذا المنحنى هي

معادلة الحركة التَّدبديَّة

$$s = A \sin \omega t, \quad (٥,٩٩)$$

حيث المتغيَّران هما الإزاحة ، s ، والزَّمن ، t ؛ في حين أنَّ الكَميَّتين الأُخريَيْن ، A و ω ، هما ثابتان . فالكميَّة A ، التي لها بُعدُ الطول ، هي اتساع الدَّبْدبة amplitude of the oscillation ؛ وتساوي القيمةَ العُظمى التي تحرَّزها s عند نهاية التَّأرجُح swing . كما أنَّ الثَّابت ω ، الذي له بُعدُ معكوس الزَّمن (ممَّا يعني أنَّ حاصل الضَّرب ωt هو لا بُدَّي) ، يرتبط بالدَّورة T ؛ إذ يتمَّ إنْجَاز دَبْدْبَةٍ كاملة لدالَّة الجيبِ عندما يساوي حاصلُ الضَّرب ωt القيمةَ 2π . لكنَّ عند تلك اللَّحظة ، تكون دورة كاملة قد انصرمت ؛ وعليه فإنَّ $t = T$ وهكذا ، نجد أنَّ $\omega T = 2\pi$ ؛ أو ، بحلِّ هذه المعادلة للثَّابت ω ،

الترَّد الزَّاوي

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (٥,١٠٠)$$

وتُدعى الكَميَّة ω بالترَّد الزَّاوي angular frequency . أمَّا التَّرَدُّد الحقيقي (عدد الدَّبْدبات لكلِّ وَحْدَةٍ زمن) ، الذي يكون رمزه المعتاد ν (الحرف اليوناني نيو nu) ، فهو معكوس الدَّورة T :

$$v = \frac{1}{T}. \quad (٥,١٠١)$$

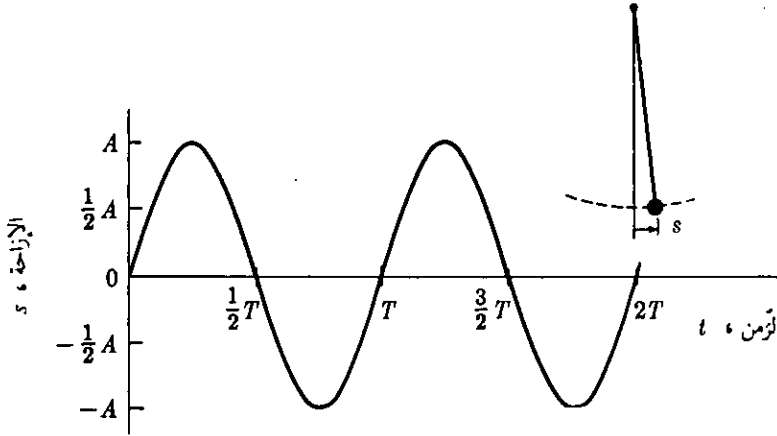
وعلى ذلك يرتبط التَّرْدَد الزَّاوِيّ والتَّرْدَد بواسطة العلاقة

$$\omega = 2\pi v. \quad (٥,١٠٢)$$

وأحد الأسباب وراء استعمال ω في المعادلة ٥,٩٩ هو ببساطة الإيجاز في الترميز؛ إذ تكتب نفس المعادلة، بدلالة التَّرْدَد أو الدَّوْرَة، كالآتي :

$$s = A \sin (2\pi vt) = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right). \quad (٥,١٠٣)$$

وفي هذا المثال، تكون مشتقة s بالنسبة إلى t مركبة السَّرجة لِثِقَل البَنْدُول. فبمفاضلة



شكل ٥,٢٨ : الرسم البياني للإزاحة ضدَّ الزمن لبندول يتأرجع خلال زاوية صغيرة. وهذا هو منحنى جَيْب، كما تعبَّر عنه المعادلة ٥,٩٩.

المعادلة ٥,٩٩، نحصل على

$$v = \frac{ds}{dt} = A\omega \cos \omega t. \quad (٥,١٠٤)$$

كما يعطي تفاضل ثانٍ تسارع الثَّقَل :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t, \quad (٥,١٠٥)$$

الذي يتناسب مع سالب الإزاحة s .

وكثيراً ما يكون تقريباً دالَّتِي الجَيْب وجَيْب التَّام مفيدَيْن عندما يكون الاتساع صغيراً.

وهذان التقريبان هما

$$\sin x \cong x \quad \text{if} \quad x \ll 1, \quad (5,106)$$

تقريبان مفيدان

$$\cos x \cong 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{if} \quad x \ll 1; \quad (5,107)$$

(حيث يعني الرمز «أقل بكثير من») . فبالقرب من $x = 0$ ، يكون جيب التمام مكافئاً parabolic ؛ بينما يكون الجيب خطياً linear . وهكذا ، فإن المنحنى في شكل ٥,٢٨ يبدأ تقريبا كخط مستقيم يتبع المعادلة

$$s \cong A\omega t.$$

... فإذا استلزم ذلك بالنسبة لسرعة ثقل البندول ، عندما يمر هذا خلال النقطة المركزية لتأرجحه ؟

٥,١١ الدالتان الأسية واللوغاريتمية ° Exponential and Logarithmic Functions

الدالة الأسية هي تلك التي يظهر المتغير فيها على صورة أس exponent . ففي حين أن 1^x تدعى دالة جبرية ، تدعى 2^x دالة أسية ؛ كما أن أي ثابت آخر مرفوع لقوة متغيرة يكون أيضاً دالة أسية . ولسبب ملائم خاص سنأتي إلى ذكره فيما بعد ، فلقد بُني ثابت معين كمعيار عند استخدام الدوال الأسية . وهذا عدد لاجذري (أصم) ، رمزه e ، وتساوي قيمته العددية التقريبية ٢,٧١٨٣ . وعلى ذلك تكتب الدالة الأسية المعيارية على الصورة :

$$e^x.$$

وبما أن أي عدد يُرفع للقوة صفر يساوي الوحدة ، فإن قيمة الدالة الأسية عند $x = 0$ هي ١ . أما عند $x = 1$ ، فقيمتها هي e ، أي حوالي ٢,٧٢ ؛ وعند $x = 2$ ، تكون قيمتها e^2 ، أي ٧,٣٩ تقريباً ؛ كما تساوي قيمتها ، عند $x = 3$ ، e^3 ، أي حوالي ٢٠,١ ؛ وعند $x = 10$ ، e^{10} ، أي زهاء ٢٢٠٠٠ . فالدالة الأسية تتميز بارتفاع سريع للغاية عندما تزداد x . كذلك ، يمكن أن تُعرف هذه الدالة بسهولة لقيم سالبة للأس x ، بفضل القاعدة

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}. \quad (5,108)$$

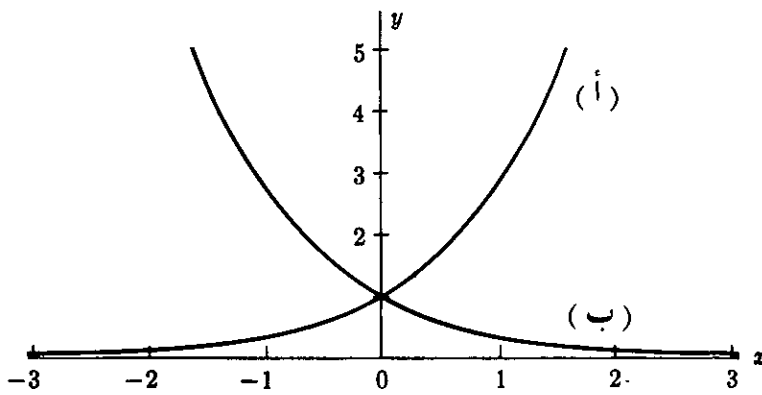
فعند $x = -1$ ، إذن ، تكون قيمة الدالة الأسية $e^{-1} = 1/2,72 = 0,368$. كما أن قيمتها ، عند $x = -10$ ، هي $e^{-10} = 1/2,72^{10} = 1/٥٤,٥ \times ١٠^{-٩}$. فواضح أن الدالة الأسية تنخفض بسرعة بالغة نحو الصفر عندما تغدو قيمة x سالبة أكثر . ونبين في شكل ٥,٢٩ رسماً بيانياً للدالة الأسية e^x ، كما نبين ، في نفس الرسم ، الدالة المعكوسة (reflected) e^{-x} ، وذلك بعبء المقارنة .

* سنحتاج إلى مادة هذا البند لأول مرة في سياق بند ٨,١٠ .

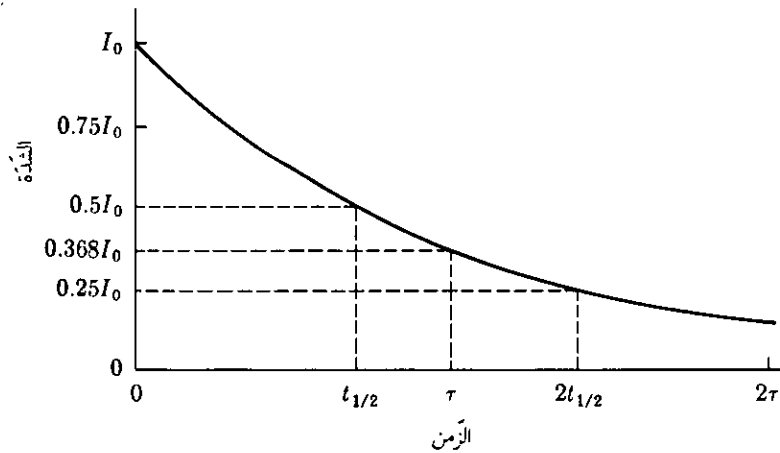
وبما أنَّ الدَّالة الأسِّيَّة تزداد بسرعة أكبر فأَكبر عندما تزداد x ، فإنَّ القيمة العددية للميل تكبر حين تكبر القيمة العددية للدَّالة . والحقيقة أنَّ للدَّالة الأسِّيَّة خاصيَّة هامة لا تشاركها مع أيَّة دالة أخرى : ألا وهي أنَّ ميلها يتناسب طردياً مع قيمتها . فإذا كان مقدار إحدى النِّقاط على منحنى أسِّيٍّ ضعف مقدار نقطة أخرى ، فإنَّ المِثلين عند هاتين النِّقطتين سيختلفان أيضاً بعاملٍ قدره اثنان . وهذا صحيح لأيَّة دالة أسِّيَّة ، مثل 2^x أو 3^x . بل إنَّ الدَّالة الأسِّيَّة الخاصَّة e^x لها صفة استثنائية أبرز : هي أنَّ ميلها يساوي قيمتها بالضبط . فبالتعبر عن هذه الصِّفة بدلالة مشتقة ، نجد أنَّ

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x. \quad (٥,١٠٩)$$

مشتقة e^x



شكل ٥,٢٩ :رسمان بيانيان لدالتين أُسيتين . (أ) أُسِّيٌّ صاعد ، $y = e^x$. (ب) أُسِّيٌّ نازل ، $y = e^{-x}$.



شكل ٥,٣٠ : الاضمحلال الأسِّيُّ لشدة الفاعلية الإشعاعية لعينة من مادة مشعة متوسط العمر هو τ ؛ بينما يكون نصف العمر $t_{1/2}$.

وهكذا ، فعند $x = 0$ في شكل ٥,٢٩ ، يساوي كل من قيمة الدالة والمقدار العددي لميلها ١ . كما تتحدد مشتقة الأسّي النازل بالعلاقة

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x}. \quad (٥,١١٠)$$

ولقد تبينَ الثابت e كالثابت المعياري للدوال الأسية نظراً لهذه الخواص البالغة البساطة .

وكثيراً ما نصادف الدالة الأسية في الفيزياء ، بالإضافة إلى الكيمياء ، والأحياء ، والعلوم الاجتماعية social sciences . وأحد الأمثلة الهامة التي تتضمن الأسّي المتناقص هو اضمحلال عينة من مادة مشعة . ونرسم ، في شكل ٥,٣٠ ، شدة الفاعلية الإشعاعية radioactivity كدالة في الزمن . فالمنحنى في هذا الشكل هو رسم بياني للدالة

$$I = I_0 e^{-t/\tau}, \quad (٥,١١١)$$

ذات المتغيرين : الشدة I والزمن t . أما الثابت I_0 ، فهو الشدة الابتدائية ؛ كما أن الثابت τ (الحرف التاسع عشر من الأبجدية اليونانية : تُو tau) ، الذي له بُعد الزمن ، يُدعى المتوسط الزمني mean time للاضمحلال . فعندما يبلغ الزمن t القيمة τ ، تكون $I = I_0 e^{-1} = 0.368 I_0$. وبذلك ، فإن τ هو الزمن اللازم للشدة كي تنخفض إلى ٣٦,٨ بالمئة من قيمتها الابتدائية* . وهناك زمن مميز آخر مقترن بمنحنى اضمحلال أسّي هو نصف العمر half life ، $t_{1/2}$. ويُعرف هذا الثابت بأنه الزمن اللازم للشدة كي تناقص إلى نصف قيمتها الابتدائية . ومن الجلي أنه زمن أقل نوعاً من متوسط الزمن . والعلاقة الدقيقة هي

$$t_{1/2} = 0.693\tau. \quad (٥,١١٢)$$

نصف العمر

وإحدى الخواص الرياضية الهامة للمنحنى الأسّي هي أن الزمن اللازم للمنحنى كما يهبط من أية قيمة إلى نصف تلك القيمة هو واحد لكل أجزاء المنحنى . وبصياغة هذه الخاصية بطريقة أخرى ، نقول إن متوسط زمن الاضمحلال هو واحد بصرف النظر عن اختيار الزمن الابتدائي .

مثال على أسّي متزايد : نشاط البحث العلمي في الفيزياء

■ مثال : في عام ١٩١٠ ، كان هنالك ١١ مجلة journal هامة في العالم تنشر نتائج البحث العلمي في الفيزياء . ومنذ ذلك الحين ، فقد تضاعف عدد مثل هذه المجلات مرة كل ١٦ سنة .

* والواقع أن الكمية τ هي متوسط الزمن أو معدل الزمن average time للاضمحلال بالمعنى الآتي تحتوي العينة المشعة بادي ذي بدء ، - عدداً كبيراً من النوى المشعة . وتضمحل كل واحدة من هذه بعد فترة زمنية لا يمكن التنبؤ بها ، وربما كانت مختلفة لكل نواة . فإذا قسنا الزمن المنصرم حتى لحظة اضمحلال كل نواة على حدة ، ومن ثم أوجدنا معدل هذه الأزمنة المختلفة ، كان معدلها متوسط الزمن τ .

فما الصيغة التي تعبر عن عدد مجالات الفيزياء كدالة في الزمن ؟ وماذا كان عدد مجالات الفيزياء عام ١٩٧٠ ، وفقاً لهذه الصيغة ؟

إن الحقيقة المعطاة عن تضاعف عدد المجالات كل ١٦ سنة تستلزم دالة أسية . فبمقدورنا أن نكتب : $N = Ae^{t/\tau}$ ، حيث N عدد المجالات ، ومن ثم أن نحدد الثابتين A و τ من البيانات المُعطيين . لكنه يلائمنا أكثر بقليل أن نكتب

$$N = N_0 e^{(t-1910)/\tau}, \quad (٥,١١٣)$$

حيث t هو الزمن بالسنين الميلادية . عندئذ ، يكون $N = N_0$ للزمن $t = ١٩١٠$ ، وبالتالي $N_0 = ١١$ مجلّة .

والبارامتر τ هو زمن طَيّ e -folding time (أي الزمن الذي يستغرقه N حتى يزداد بعامل قدره ٢,٧٢) . وهذا أطول من الزمن المضاعف doubling time ، t_2 ؛ حيث أن العلاقة بين t_2 و τ ، التي تشبه المعادلة ٥,١١٢ إلى حد بعيد ، هي

$$t_2 = 0.693\tau. \quad (٥,١١٤)$$

الزمن المضاعف

وبما أن $t_2 = ١٦$ سنة ،

$$\tau = ٢٣,١ \text{ سنة} .$$

وأخيراً ، نستطيع أن ندرك مضمون الصيغة أعلاه لعام ١٩٧٠ . ففي ذلك العام

$$\frac{t - 1910}{\tau} = \frac{60}{23.1} = 2.60;$$

من هنا ، فإن

$$N = 11e^{2.60} = (11)(13.5),$$

أو

$$N \cong ١٤٨ \text{ مجلّة} .$$

وهذا العدد على اتفاق وثيق نوعاً مع العدد الحقيقي لعام ١٩٧٠ . وفي الوقت الذي نكتب فيه هذه السطور ، فإنه ليس ثمة من إشارة إلى أيّ انحراف عن هذا السلوك الأسّي لنشر البحث العلمي في الفيزياء . إلا أنه واضح أن هذا الأسّي ، مثله مثل عدد آخر من الأسيات المتعلقة بالشؤون البشرية ، لا يمكن أن يدوم طويلاً في المستقبل . ■

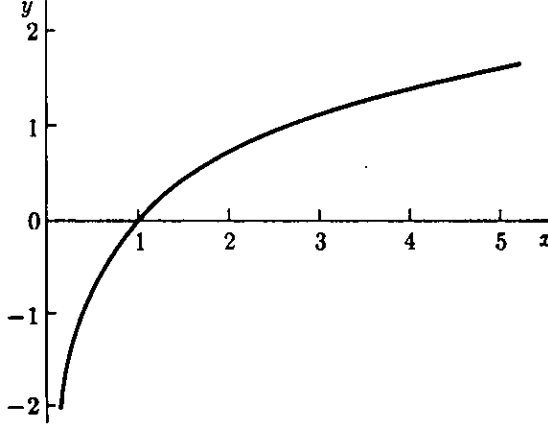
ويعطي ملحق ٦ مفكوك مُتسلسلة series expansion للدالة e^x ذا فائدة للحالة

$|x| < 1$. فليقيم $|x|$ الصغيرة ، تكون.

تقريب مُفيد

$$e^x \cong 1 + x \quad (|x| \ll 1). \quad (٥,١١٥)$$

كما نسوق في ملحق ٨ جدولاً عددياً للدالة الأسية .



شكل ٥,٣١ : الرسم البياني للدالة اللوغاريتمية ، $y = \ln x$.

□ اللوغاريتمات Logarithms

تُعرَّف اللوغاريتمات بالنسبة إلى ثابتٍ مختارٍ جزافاً ، يُدعى الأساس base . مثلاً ، إذا اختيرَ الأساس لأن يكون ١٠ ، فإنَّ المعادلة

$$y = \log_{10} x \quad (٥,١١٦)$$

تعني أنَّ y هي القوة التي يجب أن تُرفعَ إليها ١٠ لتُعطيَ x ؛ وهكذا ، فإنَّ

$$x = 10^y. \quad (٥,١١٧)$$

وفي العمل العلمي ، لا يكون الأساس المعياري ١٠ ؛ بل يكون نفس الثابت e الذي استخدمناه لتعريف الدالة الأسية . ويكتب اللوغاريتم للأساس e : $\log_e x$ ، أو ، بصورة أكثر شيوعاً ، $\ln x$. وتدعى مثل هذه باللوغاريتمات الطبيعية natural أو اللوغاريتمات النابيرية Napierian^٥ . فالمعادلة

^٥ إنه ليس من غير المألوف أن نرى اللوغاريتمات الطبيعية مشاراً إليها بالرمز $\log x$. لكننا سنستعمل في هذا الكتاب الرمز $\ln x$ فقط .

[حاشية إضافية : سُميت اللوغاريتمات النابيرية باسم جون نابير John Napier (١٥٥٠-١٦١٧) ، الرياضي وكاتب اللاموت الاسكتلندي ، الذي نشر عمله عن اللوغاريتمات في كتابين باللاتينية في عامي ١٦١٤ و ١٦١٩ . أما الترجمة الإنجليزية فلم تظهر إلا في عامي ١٨٥٧ و ١٨٨٩ . وعلى الرغم من الاعتقاد السائد بأن نابير قد أتى بأفكاره دون الاستناد إلى مجهودات سواه ، فتمت دلائل قوية على أن العرب قد مهدوا لهذا الاكتشاف ، تماماً كما فعلوا في فروع أخرى من المعرفة الإنسانية . أنظر مثلاً :

قدري حافظ طوقان : « تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك » (جامعة الدول العربية - الإدارة الثقافية : دار القلم بالقاهرة ، الطبعة الثالثة ، ١٩٦٣) ؛ ص ٨٤-٨٧ .

(المشرف)

$$y = \ln x \quad (٥,١١٨)$$

تعني أنَّ y هي القوَّة التي ينبغي أنَّ تُرْفَعَ إليها e لتُعْطِيَ x :

$$x = e^y. \quad (٥,١١٩)$$

ونبيِّن في شكل ٥,٣١ رسماً بيانياً للدَّالة $\ln x$. فهو يقترب من $-\infty$ عند $x = 0$ ؛ ويقترب من $+\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$ ؛ كما أنَّه يساوي صفرًا عند $x = 1$. وبالقرب من $x = 1$ ، يوجد تقريب مفيد للوغارثم هو

$$\ln x \cong x - 1 \quad \text{if} \quad |x - 1| \ll 1. \quad (٥,١٢٠)$$

تقريب لقيم x القريبة من ١

كذلك، نتحدَّد مشتقَّة الدَّالة اللُّوغاريثميَّة بالعلاقة

$$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}. \quad (٥,١٢١)$$

مشتقَّة $\ln x$

وبساطة التعبيرين على الطَّرَف الأيمن من المعادلتين ٥,١٢٠ و ٥,١٢١، اللَّذَيْن لا يحويان أيَّة ثوابتٍ إضافيَّة، هي أحد الأسباب وراء كَوْن e أكثرُ أُسُس اللُّوغاريثمات ملاءمةً.

وثمة تطبيق فيزيائي هامٌّ للدَّالة اللُّوغاريثميَّة على معضلة طَيْران الصَّاروخ rocket flight؛ إلَّا أنَّنا سنرجيُّ هذا المثال للباب الثامن. أمَّا الآن، فنختم هذا البندَ بمراجعة بضع خواصَّ هامة للوغاريثمات :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y; \quad (٥,١٢٢)$$

$$\ln(x^n) = n \ln x; \quad (٥,١٢٣)$$

$$\ln(e^x) = x; \quad (٥,١٢٤)$$

خواصَّ اللُّوغاريثمات

$$\ln(e) = 1; \quad (٥,١٢٥)$$

$$\ln(a^x) = x \ln a. \quad (٥,١٢٦)$$

كما أنَّنا ندرج في ملحق ٩ جدولاً من اللُّوغاريثمات الطَّبيعيَّة.

★ ٥,١٢ الاحتمال، والخطأ التجريبي، والشك (اللاتحديد)

Probability, Experimental Error, and Uncertainty

الاحتمال موضوع عريض في الرياضيات والفيزياء على حدٍّ سواء. ونودُّ هنا أن نبحثَ سِمةً واحدةً فقط من سِمات الاحتمال، تلك المقترنة بالخطأ التجريبي: إذ توجد خطوط مستقيمة

مثالته وقطوع مكافئة تامة في النظرية الفيزيائية ؛ لكن هذه لا توجد في القياس الفيزيائي لأن الدقة المطلقة في القياس مستحيلة . فأينما يوجد قياس ، يكن هناك خطأ ؛ وأينما يوجد خطأ ، يلبس مفهوم الاحتمال دوراً .

بُعْنَى الاحتمال بالجهل

وَبُعْنَى الاحتمال - في جوهره - بالجهل ignorance . ويمكن مناقشة الاحتمال مقدارياً لأننا نستطيع أن نصوغ عبارات دقيقة حتى حول الجهل . فمع أننا لا نعلم مقدماً نتيجة قذف قطعة نقدية toss of a coin ، إلا أننا نعرف أن احتمال استقرارها على وجه معين [heads or tails] هو ٠.٥ . كما أن شركات التأمين insurance companies تستطيع تحديد أقساطها premiums ببراعة ، على جهلها بمصير حامل عقد التأمين policyholder الفردي . كذلك ، فإن بوسع نادٍ للقامار gambling casino أن يضبط أرباحه adjust odds فوزه بحيث يكفل ربحاً ، على الرغم من جهله بنتيجة أية لعبة . والشئ الذي نجهله في قياس تجريبي هو مقدار الخطأ . فقد يكون قياس معين - بمحض الصدفة - صحيحاً تماماً ؛ أو قد يتسم بخطأ جسيم . ولكي يعقد الفيزيائي مقارنة ذات معنى بين التجربة والنظرية ، يتعين عليه أن يتمكن من تخمين مقدار الخطأ المحتمل . فلكل كمية محددة تجريبياً A ، يُعزى شك ΔA ؛ ويكتب مقدار الكمية ، مع الشك فيه ، على الصورة :

دَمَرُ الشك

$$A \pm \Delta A.$$

... هَبْ مثلاً أن البيان المصور (الكتالوج) catalogue لِكَلِيَّةٍ ينص على أن مساحة غرفة الطالب المفرد هي ٢٠٠ قدم^٢ ، وأن أحد الطلاب يقرر أن يراجع صحة هذا العدد ؛ فيقوم بقياس طول الغرفة وعرضها ، ثم يضرب هذين العددين معاً ليحصل - قرصاً - على ١٩٤ قدم^٢ . فهل يكون قد برهن أن بيان الكلية المصور على خطأ ؟ ... ليس بالضرورة ؛ إذ يعتمد ذلك على الشك الكامن في قياسه . وعادة لا يكون تحديد الشك سهلاً ؛ بل قد يؤول إلى أشبه شيء بالتخمين البارع educated guess . فقد يخمن ، مثلاً ، أن قياساته للطول والعرض دقيقة ضمن حدود ٢ بالمئة تقريباً . حينئذ سوف يستلزم ذلك أن يكون تحديده للمساحة دقيقاً ضمن حدود ٤ بالمئة . ومن ثم ، فإنه يدون مساحته المحددة تجريبياً على الصورة :

يكون غالباً مقدار الشك

بجدة تخمين بارع

$$(194 \pm 8) \text{ ft}^2,$$

معبراً بذلك عن رأيه بأن المساحة الحقيقية تقع - على الأرجح - في مكان ما بين ١٨٦ قدم^٢ و ٢٠٢ قدم^٢ . لذا ، فسوف يكون قياسه متوافقاً مع « النظرية » ، كما هي مُعلنة في البيان المصور .

وَتَبَيَّنَ طَرِيقَةُ أَفْضَلُ نَوْعًا لِتَحْدِيدِ الشَّكِّ ، رَغْمَ كَوْنِهَا غَيْرَ مَضْمُونَةٍ أَيْضًا ، بِوَسْطَةِ الْقِيَاسِ الْمَكْرَرِ . فَإِذَا اتَّفَقَتْ مَعًا بَضْعَةُ قِيَاسَاتٍ لِمَسَاحَةِ الْغُرْفَةِ ضَمِنَ حَدُودَ ٨ قَدَمٍ^٢ ، اسْتَطَاعَ الطَّالِبُ أَنْ يَكُونَ أَكْثَرُ ثِقَةً مِنْ أَنَّ الْقِيَمَةَ الصَّحِيحَةَ تَقَعُ ضَمِنَ ٨ قَدَمٍ^٢ مِنْ قِيَاسِهِ الْأَوَّلِ . غَيْرَ أَنَّ الْقِيَاسَ الْمَكْرَرَ لَا يَكْشِفُ إِلَّا عَنِ الْخَطَأِ الْعَشَوِيِّ random-error . فَقَدْ يَنْجُمُ ضَرْبُ آخَرٍ مِنَ الْخَطَأِ ، نُسَمِّيهِ خَطَأً نِظَامِيًّا systematic error ، عَنْ مِسْطَرَةٍ ذَاتِ خَلَلٍ أَوْ عَنْ طَرِيقَةِ قِيَاسِيَّةٍ ذَاتِ عَيُوبٍ ثَابِتَةٍ ؛ حَيْثُ تَوَثَّرَ مَصَادِرُ الْخَطَأِ هَذِهِ فِي نَفْسِ الْإِتْجَاهِ دَائِمًا ، بَدَلًا مِنْ أَنَّ تَكُونَ عَشَوِيَّةً فِي كُلِّ الْإِتْجَاهَيْنِ . وَبَعْدَ تَقْدِيرِهِ كُلِّ مَصَادِرِ الْخَطَأِ ، يَحَاوِلُ الْفِيزِيَايُ أَنْ يُحَدِّدَ شَكًّا نَعْرِفُهُ كَمَا يَلِي : يَجِبُ أَنْ يَشْمَلَ هَذَا الشَّكُّ مَدَى مِنَ الْقِيَمِ ، يَكُونُ احْتِمَالُ وَقُوعِ الْقِيَمَةِ الصَّحِيحَةِ ضَمْنَهُ ٦٦ بالمئة ؛ فِي حِينٍ أَنَّ احْتِمَالَ وَقُوعِ الْقِيَمَةِ الصَّحِيحَةِ خَارِجَ هَذَا الْمَدَى يَكُونُ ٣٤ بالمئة . وَهَكَذَا ، لَوْ كَانَ بِالْإِمْكَانِ تَعْرِيفُ الشَّكِّ فِي قِيَاسِ مَسَاحَةِ الْغُرْفَةِ لِهَذِهِ الدَّرَجَةِ مِنَ الْبَيَقِينَ ، لَكَانَ مَعْنَى التَّبْعِيرِ (8 ± 1.94) قَدَمٍ^٢ هُوَ أَنَّ قِيَمَةَ الْمَسَاحَةِ الْحَقِيقِيَّةِ تَقَعُ بَيْنَ ١٨٦ قَدَمٍ^٢ وَ ٢٠٢ قَدَمٍ^٢ بِاحْتِمَالٍ قَدْرُهُ ٠.٦٦ ؛ بَيْنَمَا قَدْ تَكُونُ أَقَلَّ مِنْ ١٨٦ قَدَمٍ^٢ أَوْ أَكْثَرَ مِنْ ٢٠٢ قَدَمٍ^٢ بِاحْتِمَالٍ قَدْرُهُ ٠.٣٤ .

هنالك نوعان من الخطأ :
عشوائي ونظامي

وَالْوَاقِعُ أَنَّهُ يُمْكِنُ تَحْدِيدُ الشَّكِّ فِي قِيَاسِ مَا بِدَقَّةٍ لِنَوْعٍ وَاحِدٍ فَقَطْ مِنَ الْخَطَأِ ، يُدْعَى خَطَأً إِحْصَائِيًّا statistical error . وَيَنْشَأُ الْخَطَأُ الْإِحْصَائِيُّ عَنْ قِيَاسِ حَوَادِثَ عَشَوِيَّةٍ صُرْفَةً . فَقَدْ يُحَدِّدُ ، مَثَلًا ، أَنَّهُ فِي عَيِّنَةٍ مَشَعَّةٍ مَعْيِنَةٍ ، تَضْمَحِلُ ١٠٠ نَوَاةٍ بِالضَّبْطِ فِي فِتْرَةٍ دَقِيقَةٍ وَاحِدَةٍ . بِمَعْنَى مِنَ الْمَعَانِي ، يَكُونُ هَذَا الْقِيَاسُ خَلُوءًا مِنَ الْخَطَأِ كَلْبًا ؛ إِذْ يُمْكِنُنَا الْإِفْتِرَاضُ أَنَّ الْعَدَدَ ١٠٠ قَدْ حُدِّدَ بِدَقَّةٍ تَامَّةٍ . لَكِنْ ، بِمَعْنَى آخَرَ ، فَإِنَّ فِيهِ « خَطَأً » بِالْفِعْلِ ؛ حَيْثُ قَدْ يَخْتَلِفُ عَنْ مَتَوَسِّطِ عَدَدِ الْأَضْمَحْلَلَاتِ فِي عَيِّنَاتٍ أُخْرَى مِمَّاثِلَةٍ . فَالْكَمِّيَّةُ ذَاتُ الْأَهْمِيَّةِ الْفِيزِيَايَةِ الْحَقِيقِيَّةِ هِيَ مَتَوَسِّطُ عَدَدِ الْأَضْمَحْلَلَاتِ لِكُلِّ دَقِيقَةٍ فِي عَدَدٍ كَبِيرٍ مِنَ الْعَيِّنَاتِ الْمِمَّاثِلَةِ . وَالَّذِي يُمْكِنُ أَنْ يُقَارَنَ بِصُورَةٍ هَادِفَةٍ مَعَ النَّظَرِيَّةِ إِنَّمَا هُوَ هَذَا الْمَتَوَسِّطُ ، وَلَيْسَ الْعَدَدُ الْفِعْلِيُّ لِلْأَضْمَحْلَلَاتِ . وَعَلَى ذَلِكَ ، فَإِنَّ فِكْرَةَ الْخَطَأِ تَرْدُ عِنْدَ الْبَحْثِ عَنْ إِجَابَةِ السُّؤَالِ : بِكَمْ يُحْتَمَلُ أَنْ يَخْتَلِفَ مَتَوَسِّطُ عَدَدِ الْأَضْمَحْلَلَاتِ لِكُلِّ الْعَيِّنَاتِ مِنْ هَذَا الْقَبِيلِ عَنِ الْعَدَدِ الْفِعْلِيِّ الْمَقَاسِ لِهَذِهِ الْعَيِّنَةِ ؟ هَذَا الْفَهْمُ لِلدَّلُولِ « الْخَطَأِ » الْكَامِنِ فِي قِيَاسِ دَقِيقٍ ، فَإِنَّهُ بِمَقْدُورِنَا أَنْ نُعْطِيَ إِجَابَةً بَسِيطَةً لِهَذَا السُّؤَالِ . « فَالشَّكُّ الْمُقْتَرَنُ بِقِيَاسِ « حَادِثَةٍ عَشَوِيَّةٍ هُوَ $\sqrt{n}$. بِعِبَارَةٍ أُخْرَى ، إِذَا خَضَعْتَ عَيِّنَةً مَشَعَّةً مُحَدَّدَةً لِأَضْمَحْلَلَاتٍ عِدْدِهَا « فِي فِتْرَةٍ زَمَنِيَّةٍ مَعْيِنَةٍ ، أَمْكِنُنَا الْقَوْلَ إِنَّ مَتَوَسِّطَ عَدَدِ كُلِّ الْعَيِّنَاتِ عَلَى هَذِهِ الشَّكْلَةِ هُوَ

يقترن الخطأ الاحصائي بعدد
الحوادث العشوائية

« عَلَى الرَّغْمِ مِنْ بَسَاطَةِ صِبْغَتِهَا ، فَإِنَّ هَذِهِ الْإِجَابَةَ لَيْسَتْ بِدَهِيَّةٍ عَلَى الْإِطْلَاقِ ؛ إِذْ تَرْتَكِزُ عَلَى نَظَرِيَّةِ الْعَمَلِيَّاتِ الْعَشَوِيَّةِ .

يتبع الشك الإحصائي « قاعدة جذر n التربيعي »

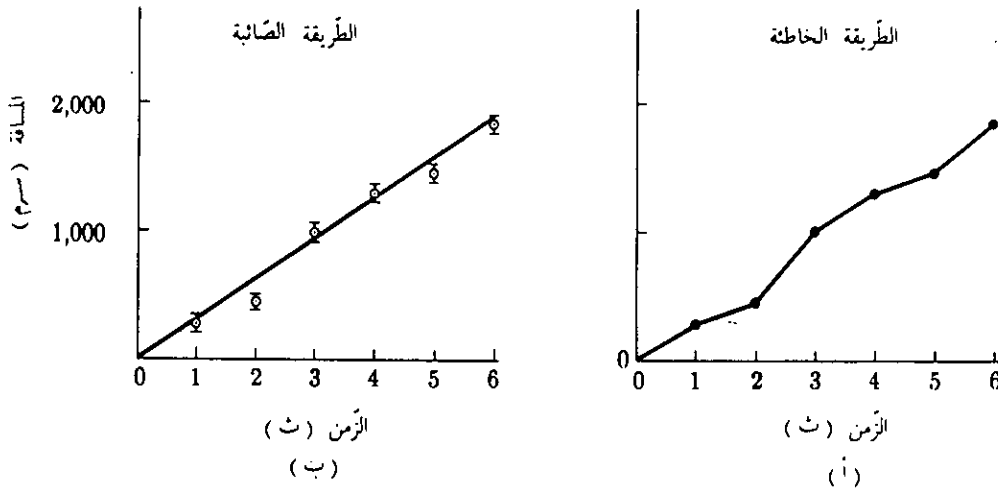
أي أن احتمال وقوع المتوسط الصحيح ضمن المدى $n - \sqrt{n}$ إلى $n + \sqrt{n}$ هو ٦٦ بالمئة . فإذا قاس أحد الطلاب في مختبر ١٠٠ اضمحلال في الدقيقة ، فإنه يتنبأ بأن متوسط العدد المقاس من قبل جميع الطلاب الذي يستخدمون عينات مماثلة سيكون 100 ± 10 . كما يوجد احتمال جيد (أي احتمال قدره ثلثان) بأن المتوسط الحقيقي يقع بين ٩٠ و ١١٠ . وهذا يعني أيضاً أن حوالي ثلثي الطلاب يجب أن يسجلوا قيمة ضمن هذا المدى . ومن المهم أن نتذكر أن « قاعدة جذر n التربيعي » square-root-of-n rule « تنطبق فقط على نوع واحد من المتغيرات هو عدد الحوادث العشوائية .

لا يكون أي نوع آخر من الشك بهذه البساطة

لقد تناول النقاش حتى الآن الأخطاء التجريبية المقترنة بالقياسات المفردة . كذلك يلعب الخطأ التجريبي دوراً في غاية الأهمية في تحديد العلاقات الدالية ؛ إذ ليس من المعقول أن نتمكن من رسم منحنى يمر بالضبط خلال كل نقطة محددة تجريبياً في رسم بياني ، لأن الأخطاء التجريبية في القياسات تنعكس على صورة شك في موضع النقاط في الرسم . هب ، مثلاً ، أننا نود أن نحدد العلاقة الدالية التي تستلزمها الفئة التالية من معطيات الزمن والمسافة لجسيم متحرك .

الزمن (ث)	المسافة (سم)
١	٢٨٠
٢	٤٥٠
٣	١٠٠٠
٤	١٣٠٠
٥	١٤٥٠
٦	١٨٤٠

هب أيضاً ، بُغية التدليل والتوضيح ، أن قياسات الزمن هي من الدقة بحيث يمكن إهمال الأخطاء فيها ؛ في حين أن قياسات المسافة تقريبية بعض الشيء ، ويقدر الشك في كل منها بأنه ± 70 سم . ويبين شكل ٥،٣٢ الطريقة الخاطئة والطريقة الصائبة على حد سواء لتناول هذه المعطيات بيانياً . في الطريقة الخاطئة المبينة في شكل ٥،٣٢ (أ) ، توصل القيم المقاسة ببساطة بواسطة قطع مكونة من خطوط مستقيمة . وهذا خطأ لأن (١) الأخطاء التجريبية تعني أن النقاط المعينة لا داعي لأن تمثل الموضع الفعلي للجسيم ؛ و (٢) المعطيات لا تزودنا بأي دليل عن كيفية حدوث الحركة بالضبط بين زمني القياس . أما في الطريقة الصائبة المبينة في



شكل ٥,٣٢ : (أ) الطريقة الخاطئة و (ب) الطريقة الصائبة لعرض معطيات تجريبية بيانياً . في هذا المثال ، تكون الشكوك التجريبية كبيرة لدرجة كافية ، بحيث أننا لا نستطيع تبرير الافتراض بأن الرسم البياني هو أي شيء عدا عن كونه خطأً مستقيماً .

شكل ٥,٣٢ (ب) ، فإن الأخطاء تُدمج في الرسم البياني بواسطة إرفاق كل نقطة من نقاط المعطيات بقصبة خطأ error bar يمتد ٧٠ سرم فوق ، و ٧٠ سرم تحت ، النقطة . وهذه القضبان تزودنا للتو بصورة عن موضع الجسيم الأكثر احتمالاً عند كل زمن . بعدئذٍ ، نرسم خطاً أو منحنى أملس بين النقاط بحيث لا تتعدى تفاصيل شكله وانحنائه الحد الذي يستطيع مقدار الشكوك تبريره . في هذا المثال ، يلائم المعطيات لدرجة كافية خطاً مستقيماً ، وليس بالإمكان تبرير السعي وراء تطابق « أفضل » مع منحنى ما . وهذا لا يعني ، بالطبع ، أن الخط المستقيم يمثل بالضرورة الحركة الفعلية على نحو دقيق . فليس بوسعنا أن نقول سوى أنه ، ضمن حدود دقة القياسات ، يكون متوافقاً مع واقع الحال أن نلتزم بأبسط افتراض ، وهو أن الحركة حدثت بسرعة منتظمة ، بحيث يكون الرسم البياني للمسافة ضد الزمن خطأً مستقيماً . وإذا امتد الشك ± 70 سرم فعلاً ليشمل مدى من القيم المنطوية على قيمة المسافة الصحيحة باحتمال قدره ٦٦ بالمئة ، فإن الخط المرسوم بين النقاط يجب أن يقطع ثلثي قضبان الخطأ تقريباً وأن يُخطئ ثلثاً واحداً منها .^٥ وكون الخط المستقيم في شكل ٥,٣٢ (ب) يقطع أربعة قضبان خطأً ويخطئ اثنين يميل إلى دعم الافتراض أن الخط المستقيم يزودنا بتمثيل كافٍ للمعطيات . عندئذٍ ، يزودنا ميل الخط المستقيم بقيمة لسرعة الجسيم . وميل الخط ، في شكل ٥,٣٢

يُستخدَم قصبُ الخطأ في الرسم البياني

يجب ألا تبيّن المنحنيات تفاصيل أكثر مما نستطيع قضبان الخطأ تبريره

^٥ يميل العديد من الفيزيائيين إلى المغالاة في تقدير الشكوك ، ربّما من قبيل الإحساس بالخذر . فن المؤلف في مجالات البحث العلمي في الفيزياء أن نرى رؤسوماً بيانية تقطع فيها المنحنيات كل - أو تقريباً كل - قضبان الخطأ .

(ب) ، هو ٣٠٠ سرم/ث . أمّا تقدير الشكّ في تحديد السرعة هذا ، فنتركه كمسألة للقارئ .

* * *

نختم هذا الباب ببعض الملاحظات حول الحسابات العملية ، وبعض كلمات النصّح . . .

إنّ النّفوذ والتبصّر في العلم لا يتأتّيان إلّا من خلال توازن تامّ بين الفهم النوعي والوصف الرياضي . وواضح أنّ الرياضيات تمدّد العلم بسلطانه . كما أنّها تزود شرطاً هاماً من التبصّر في ماهية العلم الحقيقية ؛ حيث ينبثق الكثير من جمال العلم عن البساطة الرياضية الرائعة التي تحلّي بها بعض قوانينه الأساسية . من ناحية أخرى ، فإنّ الرياضيات التي تنطوي عليها القوانين الفيزيائية لا تكون هي ذاتها إلّا بمثابة الهيكل العظمي للفيزياء ؛ فهي عقيمة مجذّبة بدون لحم ودم الأفكار ، والنماذج ، والقياسات . وإنّها لمعضلة هامة بالنسبة للطالب أنّ يفصل بين الصعوبات في إدراك المفاهيم وصعوبات الحساب العملي . فأفكار الفيزياء التي لا يعزّزها الحساب تزودنا - في أحسن الأحوال - بإدراك أجوف للموضوع . كما يفنقر إلى الجوهر - سواء بسواء - ذلك الأساس من الحساب الذي يركّز على قواعد مطبقة تطبيقاً أعمى . ونحن نسعى في هذا الكتاب إلى عقد توازن بين الجانب المفاهيمي conceptual والجانب الحسابي calculational .

من المهمّ عادةً أن تفكّر بمدلول الحساب الرياضي

أمّا النصيحة فهي هذه : تأمّل في الحسابات بنفس الحدة التي تنعم بها النظرة إلى الأفكار المعبر عنها شفهيّاً . ثمّ استفيد من الأعداد ؛ فكلّ عالمٍ ممارس يتعلّم كيف يفكّر بالرياضيات بطريقة تصويرية وكيف يفكّر بالصوّر (الرسم البياني) رياضياً . كما أنّ التعلّم ، بالنسبة للطالب ، كيف يسدّ بسرعة الفجوات بين الجداول والرسم البياني والمعادلات هو موهبة قيّنة بالصقل والتّهديب ؛ إذ تستطيع كلمة أو عبارة مفردة أن تنفخ الحياة في حشدٍ من الإشارات إلى الماضي ، مُجسّدةً بذلك عمراً طويلاً من الخبرة في قبضٍ من الكلمات . لكن لا توجد خلفيّة مشابهة من الخبرة الرياضية ، حتّى بالنسبة للطلّاب الماهرين رياضياً ، التي من شأنها أن تُثري مدلول معادلة أو نتيجة عددية . وعلى ذلك ، فيجب أن تُوسّع هذه الخلفيّة بتعمّد وإصرار . مثلاً ، يجب أن تحفّزنا الأعداد على عقد المقارنات الملائمة ؛ وأن تُثير المعادلات انطباعات ذهنيّة مناسبة ؛ كما يجب أن تُشجّعنا الحسابات على ابتكار اختبارات « لمعقوليّتها » . فإنّ نعلّم أنّ نيوتروناً بطيئاً يتحرّك بسرعة ٢٠٠٠ م/ث ليس بذی غناء إن لم نضع تلك السرعة ذهنيّاً في إطار من السرعات المألوفة ، كأنّ نسأل : كيف نقارنها مع سرعة طائرة ، أو رائد فضاء ، أو فوتون ؟ كذلك ، تكون معادلة مثل $s = vt$ حقيقة باردة مبنية إن لم يبت فيها الدفّ والحياة صورة جسم متحرّك أو - على الأقل - صورة رسم بياني لخطّ مستقيم . كما أنّ كلّ عملية حسابيّة إنّما

هي مشروع محفوف بالمخاطر إن لم تُنفذ بعقلٍ واعٍ يَقِظُ مُسَائِلَ عَمَّا إِذَا كَانَ ثَمَّةَ مِنْ مَغْزَىٍ وراءها . فقد يكون من السَّهْلِ أَنْ نَحْسَبَ (خطأ) أَنَّ ١ ميل يساوي ٠,٦ كرم . لكن ، هل يحمل ذلك أي معنى ؟ ... كلاً ؛ إذ قد يَفْظَنُ المسافرُ مِنَّا إِلَى أَنْ سيارته تقطع هنا أو في أوروبا عدداً أكبر من الكيلومترات خلال ساعة واحدة من عدد الأميال التي تقطعها في الولايات المتحدة مثلاً . كما قد يتذكر المرء المتحمس للرياضة البدنية sports enthusiast أَنَّ سباق الألف متر (١ كرم) أقصر من العيل . وأخيراً ، يجب أَنْ يتذكر طالب المختبر أَنَّ طول العصا المترية هو ١ باردة تقريباً ؛ وبذلك فَإِنَّ ١٠٠٠ م يُقَارِبُ ٣٠٠٠ قدم ؛ أي أَنَّهُ أَقَلُّ مِنَ المسافة ٥٢٨٠ قدماً التي تُكوِّن الميل .

وعلى الرغم من الأهمية الكبرى للتفكير بالمعادلات وتأويلاتها ، فَإِنَّ هناك وقتاً أيضاً لِتُدِيرَ المِرْفَقَ الرِّبَاضِيَّ * turn the mathematical crank ؛ حيث ينبثق جزء هام من سلطان العلم عن الحقيقة بأنه يمكن تنفيذ الاستدلال والاشتقاق وفقاً لفئة من القواعد الرياضية دون ضرورة التفكير الدقيق ، بدلالة تعابير فيزيائية ، حول مغزى كل خطوة . صحيح أَنَّ الاحتمال أكبر ، في التطبيق العملي ، أَنْ يُخْطِئَ الطالبُ من ناحية التفكير القليل جداً حول المعادلات ، بدلاً من التفكير الكثير جداً . ومع ذلك ، فيجدر التفكير ملياً بعبارة ألفرد نورث واينهد Alfred North Whitehead* ، الواردة في سؤال ٥,٣٥ ، التي تجزم بِحَسَنَاتِ تدوير المِرْفَقِ .

يكون من المهم أحياناً أَنْ تُدِيرَ المِرْفَقَ الرِّبَاضِيَّ *

* المِرْفَقُ هو ذراع الإدارة أو التدوير في محرك أو آلة . ويشير هذا التعبير الشائع إلى استخدامنا سلسلة من العمليات الروتينية بدون تفكير . فكأننا نحصل عليها من جراء إدارة ذراع في آلة .

(المشرف)

* * ألفرد نورث واينهد (١٨٦١-١٩٤٧) : هو رياضي وفيلسوف شهير إنجليزي المولد . تَلَمَّذَ ، ومن ثمَّ عَمِلَ ، في جامعة كيمبردج بإنجلترا حتى عام ١٩١١ . وبعد فترة دامت ثلاثة عشر عاماً في لندن ، غادرها عام ١٩٢٤ إلى الولايات المتحدة ، حيث استقر في جامعة هارفارد حتى وفاته . وقد شارك برتراند رسل في كتابة « مبادئ الرياضيات » (الذي ورد ذكره في حاشيتنا في بُسْد ٤,٧) . ومن أبرز أعماله أيضاً « العلم والعالم الحديث » Science and the Modern World (١٩٢٥) . كما أَنَّ له مؤلفات وآراء كثيرة ذائعة في الإنسانيات والعلوم والتربية والتعليم .

(المشرف)

خُلَاصَةُ الْأَفْكَارِ وَالتَّعَارِيفِ

- تتسم الرياضيات بحقيقة جُؤَانِيَّة (باطنة) قوامها ذلك المنطق □ لا يمكن أَنْ يُقَرَّرَ أمر تطبيق الرياضيات على العلوم إلا الذي يُسَوِّغُ وجودها كموضوع فكري قائم بذاته . بالتجربة .
- تتسم الرياضيات بحقيقة بَرَّانِيَّة (ظاهرة) تكمن في ذلك □ إِنَّ الأنظمة الإحداثية الشائعة - الديكارتية ، والأسطوانية ، الإثبات المادي الذي يُسَوِّغُ استعمالها في العلوم . والكروية - هي يمينية ومُتَعَامِدَةٌ .

- تُعرّف المشتقة بواسطة عملية نهاية (المعادلة ٥,٦) .
- يمكن تأويل المشتقة كمعدل تغير ، وكميل منحنى .
- تُدعى المشتقة بالنسبة إلى المسافة تدرجاً .
- بالتعريف ، تساوي الدورة الواحدة ، أو 360° درجة ، 2π (وحدة) دائرية .
- تُعرّف السرعة الزاوية بالمعادلة $\omega = d\theta/dt$ ؛ كما أنّ وَحْدَتَهَا هي مس/ث .
- إنّ مَسَقَطَ قطعة خطية L على محور ما يكون $L_x = L \cos \theta$ إذا صُنِّتِ القطعة الخطية زاوية θ مع المحور .
- في الرسم البياني يُعَمَّمُ مدلول $\tan \theta$ ؛ فيساوي المِثْلَ ، df/dx ؛ كما قد تكون له أية وَحْدَة .
- الكينماتيكا هي وصف الحركة باستخدام مفهومي الطول والزمن ليس غير .
- للحركة الأحادية البعد : يُعرّف متوسط السرعة بالعلاقة $\bar{v} = \Delta x / \Delta t = (x_2 - x_1) / (t_2 - t_1)$ ، والسرعة اللحظية بالمعادلة $v = dx/dt$ ؛ كما يُعرّف متوسط التسارع بالعلاقة $\bar{a} = \Delta v / \Delta t = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1)$ ، والتسارع اللحظي بالمعادلة $a = dv/dt = d^2x/dt^2$.
- تُوصَف الحركة الثابتة السرعة في بُعد واحد بواسطة المعادلة الخطية $x = x_0 + v_0 t$. فيكون الرسم البياني للكمية x ضد t خطاً مستقيماً .
- تُوصَف الحركة الثابتة التسارع في بُعد واحد بواسطة المعادلة التربيعية $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$. فيكون الرسم البياني للمسافة x ضد t قطعاً مكافئاً .
- رمز التكامل غير المحدود هو $I(x) = \int f(x) dx$ ؛ أمّا رمز التكامل المحدود فهو $D = \int_a^b f(x) dx$.
- توجد لتكامل الدالة $f(x)$ غير المحدود ، أي لتقيض مشتقتها ، مشتقة تساوي $f(x)$: $dI/dx = f(x)$.
- يحوي التكامل غير المحدود ثابتاً اعتباطياً (اختيارياً) جَمْعِيّاً .
- إنّ الذهاب من التسارع إلى السّرجة ، أو من السّرجة إلى الموضع ، يحتاج إلى تكامل (المعادلتان ٥,٦٧ و ٥,٦٨) .
- التكامل المحدود هو المساحة الواقعة تحت منحنى بين حدّين ؛ وقد يكون لمثل هذه المساحة المعممة أية وَحْدَة قياس .
- يمكن تقريب التكامل المحدود بواسطة مجموع مساحات مستطيلة ؛ وهو يساوي تماماً نهاية هذا المجموع (شكل ٥,٢٢ والمعادلة ٥,٧٨) .
- إذا عبّر عن التكامل المحدود على صورة دالة في حدّه الأعلى ، فإنّه يخضع للمعادلة $dD/dx = f(x)$ (المعادلة ٥,٨٧) .
- وفقاً للنظرية الأساسية لحساب التكامل ، يمكن التعبير عن التكامل المحدود بدلالة التكامل غير المحدود بواسطة العلاقة $D = \int_a^b f(x) dx = I(x) \Big|_a^b = I(b) - I(a)$. (٥,٩٠)
- التفاضل والتكامل هما عمليتان خطيتان (المعادلات ٥,١٤ ، ٥,٦٣ ، ٥,٧٦) .
- الدالتان $\sin x$ و $\cos x$ دوريتان ، وتساوي دَوْرَتُهُمَا 2π . كما تتسم هاتان الدالتان بالخاصية $d^2f/dx^2 = -f$.
- يرتبط التردد الزاوي ، والتردد ، والدورة بالعلاقة $\omega = 2\pi v = 2\pi/T$.
- تتغير الدالتان e^x و e^{-x} بكسور ثابتة لتزايد (أو تناقص) محدّد Δx . وتتسم هاتان الدالتان بالخاصية $d^2f/dx^2 = +f$.
- إنّ اللوغاريتم للأساس e ، الذي يُدعى لوغارثماً طبعياً ، شائع إلى أبعد الحدود في العمل العلمي ؛ ورمزه هو $\ln x$.

- يُمَيِّزُ بَيْنَ نَوْعَيْنِ مِنَ الْخَطَا : خطأ عشوائي وخطأ نظامي . □ لقياس n حادثة عشوائية ، يُعَرَّفُ « الخطأ » بأنه الفرق بين n والعدد المتوسط $\bar{n}$ لقياسات عديدة من هذا القبيل .
- في الغالب ، لا يعدو الشك في قياس ما أن يكون مجرد تخمين . والشك في n يكون $\sqrt{n} = \Delta n$. وهذه نتيجة خاصة ، لا يمكن تطبيقها على أنواع أخرى من الشك .
- إِذَا كُتِبَتْ كَمِيَّةٌ مَا عَلَى الصُّورَةِ $A \pm \Delta A$ ، فَإِنَّ الشَّكَّ □ بِنَبْغِي أَنْ يَتَعَلَّمَ طَالِبُ الْفِيزِيَاءِ كَيْفَ يُؤَوَّلُ الرِّيَاضِيَّاتُ وَيَقْدَّرُ ΔA يُعَرَّفُ عَادَةً بِحَيْثُ يَكُونُ احْتِمَالُ وَقُوعِ الْقِيَمَةِ الْحَقِيقِيَّةِ فَحَوَاهَا الْفِيزِيَاءِيُّ . كَذَلِكَ بِنَبْغِي أَنْ يُعَرَّفَ مَتَى يَلِيقُ بِهِ أَنْ يُدِيرَ الْمُرْفَقَ الرِّيَاضِيَّ .
- بين $A + \Delta A$ و $A - \Delta A$ حوالي $\frac{2}{3}$.

أَسْئَلَةٌ

- بند ٥,١ س ١,٥ ناقش القضية التالية بإيجاز (مؤيداً أو معارضاً pro or con) : « إنَّ العِلْمَ بدون رياضيات لمُسْتَحِيلٌ . »
- س ٢,٥ في عام ١٨١٧ ، كتب ك. ف. غاوس يقول : « على المرء أن يُصَنَّفَ الهندسة ليس مع الحساب ، الذي يحتلُّ مقاماً قَبْلِيّاً a priori ، بل مع الميكانيكا تقريباً . » أولُ هذه العبارة بدلالة فِكْرَتِي الحَقِيقَةِ الْجَوَانِيَّةِ (الباطنة) والْبَرَانِيَّةِ (الظاهرة) لِلرِّيَاضِيَّاتِ .
- س ٣,٥ بعض « العمليات » الفيزيائية ليست تبادلية : أي أنَّ العملية A متبوعةً بالعملية B لا تعطي نفس النتيجة مثل B تتبعها A . أورد مثالاً على عمليات لا تبادلية .
- س ٤,٥ أعطِ مثالاً على عمليتين فيزيائيتين تبادليتين A و B (بمعنى أنَّ محصلة النتيجة هي نفسها للعملية A تتبعها B كما هي للعملية B تتبعها A) .
- س ٥,٥ يُبْرَزُ بعض علماء الإنسانيات humanists جهلهم بالرياضيات بشيء من الفخر والاعتزاز . هل يمكن تبرير هذا الموقف بالنسبة لامرئ مهتم بالشخصية الإنسانية والعلاقات الإنسانية ؟ وهل نَظَنُ أَنَّ مثل هذا الموقف إِنَّا يعكس فكرة خاطئة عن ماهية الرياضيات الحقيقية ؟
- س ٦,٥ سَمِّ موضوعاً واحداً خِلافَ الهندسة يمكن أَنْ يُعْتَبَرَ فرعاً من الرياضيات والفيزياء سواء بسواء .
- س ٧,٥ هل تُؤَيِّدُ الفكرةَ بِأَنَّ كُلَّ بِنْيَانٍ منطقيٍّ مُتَّسِقٍ الأجزاء ، بمقدور الإنسان أَنْ يُشَيِّدَهُ ، بِنَبْغِي أَنْ يَنَاطِرَ شيئاً ما في الطَّبيعَةِ ؟ لِمَ أَوْ لِمَ لَا ؟
- س ٨,٥ سَيَّارَةٌ منطلقة بسرعة ٣٠ ميلاً/س ، إذا زادت سرعتها بمقدار ٣٠ ميلاً/س ، فَإِنَّهَا سَتَحْرُكُ بسرعة ٦٠ ميلاً/س هل تنسجم هذه العبارة بالحقيقة الجوانية المتعلقة بالرياضيات البحتة ؟ أم بالحقيقة البرانية التي تستند إلى الإثبات المادي ؟ أم بكلتيهما ؟ تأمل ذلك بدقة ، واشرح إجابتك .

س ٩،٥ تُكوّن خطوط العرض latitude والطول longitude فئة من الإحداثيات المتعامدة مع سطح الأرض . فسر لماذا .

بند ٥،٣

س ١٠،٥ صف بصورة نوعية حركة القمر في (أ) إطار إسناد مثبت على القمر ؛ (ب) إطار إسناد مثبت على الأرض ؛ و (ج) إطار إسناد مثبت على الشمس .

بند ٥،٤

س ١١،٥ إن عملية مثل

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

لهي عملية رياضية بحثة بدون أي نظير حقيقي في القياس الفيزيائي ، حيث لا يمكن قياس الأوقات متناهية . برغم ذلك ، لماذا يكون من المفيد والمشروع معاً أن نستخدم مشتقات في وصف الطبيعة ؟

س ١٢،٥ عندما نستعمل مشتقات في الفيزياء ، ما هو الافتراض الذي نفترضه عن الطبيعة ؟ وعلى وجه الخصوص ، حين نستخدم dx/dt للسرعة ، ما الذي نفترضه عن خواص الزمان والمكان ؟

س ١٣،٥ وفقاً لإحدى صيغ نقيضة زينون Zeno's paradox * ، لن يتمكن أرنب بري hare من اللحاق بسلفاة tortoise أبداً ، إذ - لكي يدرك السلفاة - يتعين على الأرنب أن يقطع أولاً نصف المسافة المتبقية بينها ؛ غير أنه مهما كان عدد المرات التي يقطع فيها الأرنب نصف المسافة المتبقية ، فإن بعض المسافة يظل غير مقطوع . أنقذ هذا النص للنقيضة .

س ١٤،٥ (١) هل يمكن أن تكون المعادلة ١٩،٥ ($s = r\theta$) صحيحة لحركة غير دائرية ؟ (٢) هل يمكن أن تكون صحيحة لحركة لا تتم بسرعة ثابتة ؟

بند ٥،٥

س ١٥،٥ أجب عن سؤال ١٤،٥ للمعادلة ٢٤،٥ ($s = vt$) .

س ١٦،٥ أجب عن سؤال ١٤،٥ للمعادلة ٢٥،٥ ($\theta = \omega t$) .

س ١٧،٥ يتزايد عدد سكان العالم مع الزمن . فما هو المتغير المستقل ؟ وما المتغير التابع ؟ هل نستطيع أن نبادل دور هذين المتغيرين ؟

بند ٥،٦

س ١٨،٥ يبين رسم بياني المساحة السطحية surface area لخزان reservoir كدالة في الزمن . فما وخذة القياس التي قد تكون ملائمة للتعبير عن ميل هذا المنحنى ؟

* زينون الإيليائي هو فيلسوف إغريقي ولد ونشأ في إيليا Elea في القرن الخامس قبل الميلاد . وقد تلمذ على بزمينيدس Parmenides ، ذلك الفيلسوف العظيم الذي سمي أفلاطون باسمه إحدى محاوراته المشهورة ؛ وفيها حوار طريف بين سقراط وبزمينيدس وزينون يُعد مصدراً مهماً عن بعض أفكار زينون . أما النقيضة المشار إليها أعلاه ، وسواها من التناقض التي شغلت رهناء من أساطين الفكر والرياضيات على عمر العصور ، فقد أوردتها أرسطو . وكان زينون قد ابتدعها لينكر حقيقة الحركة ووجود الفراغ . ومما يجدر ذكره أن زينون هذا هو غير زينون القبرصي مؤسس الفلسفة الرواقية ، الذي ولد في أواخر القرن الرابع قبل الميلاد .

س ٥,١٩ سَمَّ متغيراً عدا عن درجة الحرارة يكون تدرجه ذا أهمية فيزيائية . سَمَّ متغيراً عدا عن الموضع أو الإزاحة يكون معدل تغيره الزمني ذا أهمية فيزيائية .

س ٥,٢٠ أعطِ مثالاً فيزيائياً تكون فيه مشتقة ، بالنسبة إلى متغير غير الزمن أو المسافة ، من الأهمية بمكان .

س ٥,٢١ سَمَّ فرعاً أو فرعاً جزئياً من العلم ، خلاف الكينماتيكا ، لا يستخدم إلا مفهوماً أو مفهومين أساسيين في بنيانه النظري .

بند ٥,٧

س ٥,٢٢ صِفْ بكلمات مناسبة الحركة التي تمثلها الرسوم البيانية في شكل ٥,١٣ .

س ٥,٢٣ تُقَدَّفُ كُرَتَانِ من سطح الأرض إلى أعلى ، بحيث تساوي سرعة إحداها ضعف السرعة الابتدائية للأخرى . (١) فما نسبة ارتفاعيهما الأقصىين ؟ (٢) وما نسبة فترتي الزمن اللتين تقضيهما في الهواء ؟

س ٥,٢٤ تتحرك سيارة إلى الأمام بسرعة ds/dt . (١) إذا كانت d^3s/dt^3 سالبة . فإذا تستطيع أن تستنتج عن تسارع السيارة ؟ (٢) هل تكون سرعتها متزايدة أم متناقصة ؟ أم هل المعلومات المعطاة غير كافية لمعرفة ذلك ؟

س ٥,٢٥ كلمّا يتعين علينا أن نجمع عدداً كبيراً جداً من الإسهامات الصغيرة ، يكون التكامل هو الأداة التي نحتاج إليها على الأرجح . أورد مثالاً مأخوذاً من العلم أو الهندسة يُدَلِّلُ على هذه النقطة .

بند ٥,٩

س ٥,٢٦ إذا رمزنا إلى المرتب السنوي لرجل بالحرف S وإلى عُمره بالسنوات بالحرف t ، فإذا يكون مدلول التكامل $\int_0^S S dt$ ؟ وماذا تكون وحدته قياسه ؟

س ٥,٢٧ علِّلْ لماذا يكون التكامل العددي لمُعْطَيَاتٍ جَدْوَلِيَّةٍ أدقَّ عموماً من التفاضل العددي لمُعْطَيَاتٍ جَدْوَلِيَّةٍ .

س ٥,٢٨ ما هو المغزى الفيزيائي لمثل المنحنى في شكل ٥,٢٨ ؟

بند ٥,١٠

س ٥,٢٩ أين يمكن أن تُصادَفَ دالتي الجيب و/أو جيب التمام عند وصف الطبيعة ، علاوة على حركة البندول ؟ أورد — على الأقل — مثالاً واحداً أو — الأفضل — مثالين .

س ٥,٣٠ إذا قيسَت الشدة في شكل ٥,٣٠ بدلالة عدد الانحلالات disintegrations الإشعاعية لكل ثانية ، فإذا يكون مغزى المساحة الواقعة تحت المنحنى في هذا الشكل ؟

بند ٥,١١

س ٥,٣١ يُعَادَلُ الزمن اللازم حالياً لمضاعفة عدد سكان المعمورة حوالي ٣٠ سنة . فما هو — على وجه التقريب — عدد سكان الأرض المتوقع في عام ٢٠٠٠ ؟ هل تتوقع المعدل الحالي للنمو الأسّي أن يستمر بعد عام ٢٠٠٠ ؟ لِمَ أو لِمَ لا ؟

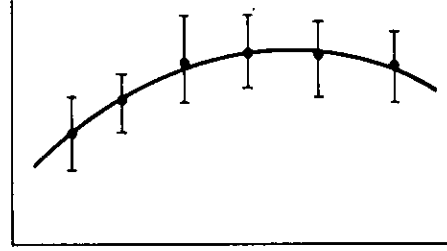
س ٥,٣٢ ما هي — بظنك — الفترة الزمنية التقريبية في المستقبل التي قد يسري فيها مفعول المعادلة ٥,١١٣ ، التي تصف نشر البحث العلمي العالمي في الفيزياء ، بنفس البارامترين المُعْطَيْن N_0 و τ ؟ أورد أسباباً لإجابتك .

س ٥,٣٣ ما هو الشكل المثوي التقريبي الذي قد تنسبه إلى (أ) مِيزَانِ حَمَامِ bathroom scale نموذجي ؟

بند ٥,١٢

(ب) عدّاد سرعة نموذجي لسيارة ؛ و (ج) قياس نموذجي بواسطة عصا ياردية ؛ أعط سبباً لكل إجابة .

س ٥,٣٤ ما هو الشيء الغريب في تمثيل الشكل التجريبي المبين في الرسم البياني المرفق أدناه (شكل ٥,٣٣) ؟



شكل ٥,٣٣ : سؤال ٥,٣٤ .

س ٥,٣٥ كتب ألفرد نورث وايتهيد يقول : « إنها لبديهة خاطئة خطأ عميقاً ، تلك التي نكررها الكتب المبتدلة قاطبةً وعليه القوم في حساباتهم ، بأننا يجب أن نرعى ونصقل عادة التفكير فيما نفعله . فالتقيض التام لذلك هو الصحيح ؛ إذ تتقدم الحضارة بزيادة عدد العمليات الهامة التي نستطيع إنجازها دون التفكير فيها . » دُلّ على وجهة نظر وايتهيد هذه ببعض الأمثلة على استعمالك الشخصي « بدون تفكير » للرياضيات والآلات (الماكينات) machines .

تمارين

ت ٥,١ (١) كَوْنْ جَدُولُ الضَّرْبِ الكامل للكيثونات الرياضية الأربع $1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$. بند ٥,٢
(٢) احسب $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{-1})^2$. استعمل الرمز i بدلاً من $\sqrt{-1}$ ، بُعْثَ البساطة .
ت ٥,٢ تتسم الأعداد المركبة complex الثلاثة

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad b = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad c = 1$$

(حيث $i = \sqrt{-1}$) ، بالخاصية القائلة إن أي اثنان من خواص الضرب للأعداد a و b و c يساوي a أو b أو c . (١) أقنع نفسك بهذه الحقيقة ، وذلك بإجراء سلسلة متوالية من خواص ضرب تجريبية . (٢) أورد مثالاً على فئة مكونة من ثلاث عمليات فيزيائية تتسم بخاصية مماثلة - بمعنى أن أي عدد من هذه العمليات ، يتم تنفيذه بأي ترتيب ، يُعْطِي نتيجة مشابهة لعملية مفردة من هذه العمليات .

ت ٥,٣ أرسم رسمين منطوريين perspective views مختلفين لنظام إحداثيات ديكارتي يميني . بند ٥,٣
(٢) أرسم منظرًا تخطيطيًا واحداً لنظام ديكارتي « يساري » left-handed .

ت ٥,٤ يقع مركز دائرة ، نصف قطرها a ، عند نقطة الأصل . (١) فما معادلة الدائرة بالإحداثيات الديكارتية ؟ (٢) وما معادلتها بالإحداثيات القطبية ؟

ت ٥,٥ (١) بين أنه يُعبّر عن الإحداثيات القطبية بدلالة الإحداثيات الديكارتية بواسطة العلاقاتين

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

وتدعى هاتان المعادلتان ، مثلها مثل المعادلتين ٥,١ و ٥,٢ ، بمعادلتين تحويليتين . (٢) اشرح الغموض الكامن في كل من هاتين المعادلتين . كيف يمكن إجلاء هذا الغموض ؟

بند ٥,٤

ت ٥,٦ تتحدّد دالتان بالعلاقين $f(x) = 3x$ و $g(x) = 4x^3$. أوجد dy/dx (أ) إذا كانت $y = fg$ ؛ (ب) إذا كانت $y = f/g$ ؛ و (ج) إذا كانت $y = f^2$.

ت ٥,٧ احسب المشتقتين الأولى والثانية لكل من الدوال التالية :

$$(1) f(x) = x^2 + 2ax + a^2 ؛ (2) h(z) = e^{-z^2}$$

$$(3) g(y) = \sqrt{ay} ؛ (4) x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

ت ٥,٨ يتحرك جسيم على امتداد محور x بتسارع ثابت. فما المشتقة الثالثة لإحداثي موضعه بالنسبة إلى الزمن، d^3x/dt^3 ؟

ت ٥,٩ جسيم طاقته الحركية $K = \frac{1}{2}mv^2$ وزخمه $p = mv$. بين أن $dK/dp = v$.

ت ٥,١٠ إذا كانت x دالة في t ، أمكن اعتبار t دالة في x . (١) باستخدام التعريف الأساسي للمشتقة (المعادلة ٥,٦)، برهن أن $(dt/dx) = 1/(dx/dt)$. (٢) دّل على هذه النتيجة، باستعمال الدالة $x(t) = \frac{1}{2}at^2$ ، حيث a ثابت.

ت ٥,١١ يتحرك جسيم في مستوى xy بمركّبي مرجحة $v_x = dx/dt$ و $v_y = dy/dt$. (١) باستخدام التعريف الأساسي للمشتقة (المعادلة ٥,٦)، برهن أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(dy/dt)}{(dx/dt)}$$

(٢) ما مدلول dy/dx الفيزيائي ؟

ت ٥,١٢ باستخدام التعريف الأساسي للمشتقة (المعادلة ٥,٦) ونظرية ذات الحدين (ملحق ٦)، أثبت أن

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}. \quad (٥,١٣)$$

ت ٥,١٣ برهن أن

$$\frac{d}{dx}[af(x)] = a \frac{df}{dx},$$

حيث a ثابت.

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}. \quad \text{ت ٥,١٤ أثبت أن}$$

ت ٥,١٥ ما عامل التحويل الذي يربط rad/sec (مس/ث) و rpm (عدد الدورات لكل دقيقة) ؟ (اقترح : احتفظ بهذه النتيجة، وذلك بأن تضيفها إلى ملحق ٤).

بند ٥,٥

ت ٥,١٦ (١) رتب ما يلي بحسب تزايد السرعة الزاوية : (أ) عقرب الدقائق minute hand في ساعة ؛ (ب) عقرب الساعات في ساعة ؛ (ج) الأرض في مدارها حول الشمس ؛ (د) دولاب قطره ٢ قدم في سيارة منطلقة بسرعة ٦٠ ميلاً/س ؛ (هـ) رائد فضاء يدور حول

الأرض في ٩٠ د ؛ و (و) عمود مرفقي crankshaft لآلة بدور بمعدل ٦٠٠ دَوْرَة في الدقيقة . (٢) حدّد السرعة الزاوية ω بالوحدات مسر/ ث لأية ثلاثة من هذه .

ت ٥,١٧ دَوْر طائرة عمودية (هليكوبتر) helicopter rotor يبلغ طول ريشته blade من أسطوانة عمود الإدارة shaft حتى أسلتها (رأسها) tip ٤ م ؛ وتدور بمعدل ٤٠٠ دَوْرَة في الدقيقة . فما نسبة سرعة أسلتها إلى سرعة الصوت في الهواء ؟

ت ٥,١٨ ما هي الكميات المثلثة التالية : (أ) $\sin(360 \text{ deg})$ ؛ (ب) $\tan(\pi \text{ radians})$ ؛ (ج) $\cos(135 \text{ deg})$ ؛ (د) $\sin(\pi/2 \text{ radians})$ ؛ و (هـ) $\cos(3\pi \text{ radians})$ ؟

ت ٥,١٩ (١) قطعة خطية L طولها ٤ وحدّات وتصنع زاوية ٣٠ مع محور x و ٦٠ مع محور y ؛ ما مسقطاها L_x و L_y على محوري x و y ؟ أرفق إجابتك برسم تخطيطي . (٢) ما العلاقة الجبرية التي تخضع لها L_x و L_y و L ؟

ت ٥,٢٠ برهن المتطابقتين التاليتين trigonometric identities :

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (أ) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (ب)$$

ت ٥,٢١ أثبت أن

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta = 1.$$

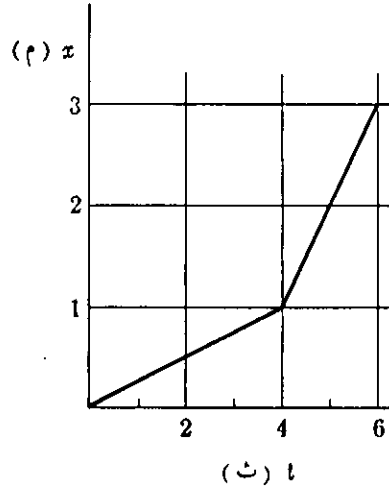
ت ٥,٢٢ أرسم رسوماً بيانية تخطيطية لخطوط مستقيمة مثلاً صفر ، ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، و ١- ، على الترتيب . بند ٥,٦

ت ٥,٢٣ أرسم رسماً تخطيطياً لمنحنى يتفاوت مثله بصورة مستمرة continuously من صفر إلى ما لا نهاية .

ت ٥,٢٤ يُعبّر عن حجم مكعب cube كدالة في طول أحد أضلاعه بواسطة العلاقة $V = l^3$. (١) أرسم رسماً بيانياً تخطيطياً للحجم V ضدّ l . (٢) ما هي المشتقة dV/dl ؟ ما مدلولها الفيزيائي ؟ وما بُعدها ؟

ت ٥,٢٥ يتناسب متوسط السرعة $\bar{v}$ لجزيء غازي مع الجذر التربيعي لدرجة الحرارة المطلقة T . (١) أكتب معادلة لمتوسط السرعة $\bar{v}$ كدالة في T (مستخدماً ثابتاً إذا لزم الأمر) . (٢) أرسم رسماً بيانياً تخطيطياً للمتوسط $\bar{v}$ ضدّ T . (٣) أرسم رسماً بيانياً تخطيطياً للمشتقة $d\bar{v}/dT$ ضدّ T .

ت ٥,٢٦ تُمثّل حركة جسيم على امتداد محور x - بصورة تقريبية - بواسطة الرسم البياني المبين أدناه (شكل ٥,٣٤) . (١) ما مركبة x لسرعة الجسيم عند $t = ٢$ ث ؟ (٢) ما هي dx/dt عند $t = ٥$ ث ؟ (٣) اشرح الحركة بالقرب من $t = ٤$ ث . ماذا حدث للجسيم عند هذا الزمن ؟ هل يمكن لنقطة انقطاع discontinuity حقيقة للميل أن تتحقّق في الطبيعة ؟ قسّر .



شكل ٥,٣٤ : تمرين ٥,٢٦ .

ت ٥,٢٧ (١) أرسم رسماً بيانياً تخطيطياً لتدرج درجة الحرارة ، dT/dr ، ضد r ، باستخدام المعادلة ٥,٤١ ، حيث $A > 0$. (٢) ما بُعد A ؟

ت ٥,٢٨ افترض أن المعامل A في المعادلة ٥,٣٧ سالب . (١) أرسم رسماً بيانياً تخطيطياً لدرجة الحرارة T ضد r . (٢) أي وضع فيزيائي قد يمثل ذلك ؟ (٣) احسب التدرج ، dT/dr ، وارسم له رسماً بيانياً تخطيطياً ضد r .

ت ٥,٢٩ توصف حركة جسيم متحرك بسرعة ثابتة على امتداد محور x بالمعادلة ٥,٤٨ . عند $t = 1$ ث ، $x = 3,5$ م ؛ وعند $t = 2$ ث ، $x = 5,0$ م . (١) فما سرعة الجسيم v_0 ؟ (٢) وما مقدار الثابت x_0 ؟ (٣) أين يكون الجسيم عند $t = 10$ ث ؟

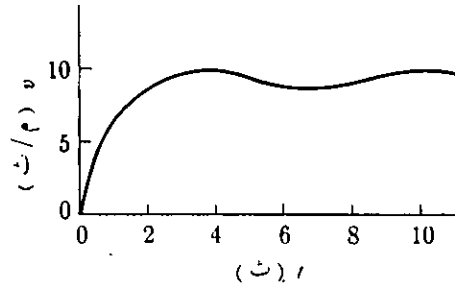
بند ٥,٧

ت ٥,٣٠ أرسم رسمين بيانيين تخطيطيين للسرعة v ضد x للحالتين الخاصة والعامة لحركة بتسارع ثابت (المعادلتان ٥,٥٤ و ٥,٥٨) . لاحظ الميل ، dv/dx ، عند $x = 0$ لهاتين الحالتين .

ت ٥,٣١ عبّر عن dv/dx للحالة العامة لحركة بتسارع ثابت (المعادلات ٥,٥٥ – ٥,٥٨) (أ) كدالة في v ، (ب) كدالة في x ؛ و (ج) كدالة في t .

ت ٥,٣٢ تزحف حشرة bug ، كانت قد بدأت عند $x = 0$ ، باتجاه x الموجب بسرعة ٣ سم/ث لمدة ٢ ث ؛ ثم تقف لمدة ٢ ث ؛ وبعد ذلك تزحف ثانية بنفس الاتجاه بسرعة ٢ سم/ث لفترة ٢ ث ؛ ومن ثم تعكس اتجاهها وتقف راجعة إلى نقطة بدايتها بسرعة ٥ سم/ث . (١) أرسم رسماً بيانياً لإزاحة الحشرة x ضد t . (٢) أرسم رسماً بيانياً لمركبة سرعتها v ضد t . (٣) وفقاً لهذا الوصف ، ما أقصى تسارع بمقدور الحشرة أن تبلغه ؟

ت ٥,٣٣ تتفاوت سرعة عدّاء runner في سباق المئة ياردة 100-yard dash كما هو مبين في شكل ٥,٣٥ . (١) أرسم رسماً بيانياً تخطيطياً يبين تسارعه كدالة في الزمن . (٢) قدر بصورة تقريبية متوسط سرعته أثناء السباق .



شكل ٥,٣٥ : تمرين ٥,٣٣ .

٥,٣٤ ت يسقط فنجان من الخزف الصيني china من ارتفاع ٥ سم على منضدة خشبية . (١) بأي سرعة يرتطم بالمنضدة ؟ (٢) إذا لآنت المنضدة مسافة $10^{-٥}$ م عند إيقافها الفئجان ، فإذا يكون مقدار تسارع الفئجان في فترة إيقافه (على افتراض أن التسارع منتظم) ؟ (٢) ما الفترة الزمنية التي تستغرقها المنضدة لإيقاف الفئجان ؟ (استعمل $g = 10$ م/ث^٢ سهلاً للحساب .)

٥,٣٥ ت تساوي مركبة تسارع الجاذبية على امتداد مجرى هوائي air track مائل ٣ م/ث^٢ . تُدفعُ عربة أعلى المجرى من $s = 0$ عند $t = 0$ بسرعة ابتدائية $v_0 = ٢$ م/ث . (١) أكتب معادلتين لموضعها s وسرعتها v كدالة في الزمن . (٢) ما المسافة التي تقطعها العربة على امتداد المجرى قبل أن تقفل راجعة ؟ (٣) متى تعود العربة إلى نقطة بدايتها ؟

٥,٣٦ ت رجل متكي على حافة جرف cliff يقذف صخرة رأسياً بسرعة ابتدائية v_0 : فتصطدم بسطح الأرض بسرعة v_1 على بُعد h أسفل النقطة التي قذفت منها . افرض أنها تحركت بتسارع ثابت إلى أسفل مقداره g . (١) إذا حددت السرعة الابتدائية v_0 ، برهن أن v_1 تكون مستقلة عن اتجاه الرمية الابتدائية (إلى أعلى أو إلى أسفل) . (٢) أكتب تعبيراً لطاقتها الحركية النهائية ($K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$) كدالة في طاقتها الحركية الابتدائية ($K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$) ، وارسم رسماً بيانياً تخطيطياً للطاقة K_f ضد K_0 .

٥,٣٧ ت يبدأ مضعد elevator حركته من $y = 0$ عند $t = 0$ ، ويبرمج programmed كسي يتبع الصيغة الكينمائية $y = Et^3$ للثلاث ثواني الأولى ، حيث E ثابت . (١) أورد صيغتين لسرعته وتسارعه إبان هذا الزمن . (٢) اقترح قيمة معقولة للثابت E ، وجدولاً - مستخدماً هذه القيمة - y و v و a عند $t = ١$ ، ٢ ، ٣ ث .

٥,٣٨ ت توصف حركة سيارة على امتداد طريق مستقيم - بصورة تقريبية - بواسطة المعادلة :

$$x = \frac{\frac{1}{2}at_0^2 t^2}{t_0^2 + t^2}$$

حيث a و t_0 ثابتان ، و t الزمن . (١) أرسم رسماً بيانياً تخطيطياً للكمية x ضد t . (٢) حدّد بُعدي a و t_0 ، و اشرح مدلولها الفيزيائي .

بند ٥,٨

ت ٥,٣٩ احسب التكاملات غير المحدودة التالية :

$$\begin{aligned} (١) \quad & \int (4x^3 + 5x^4) dx \\ (٢) \quad & \int \sqrt{ay} dy \\ (٣) \quad & \int (A \sin \omega t + B \cos \omega t) dt \\ (٤) \quad & \int (1 + \ln k\theta) d\theta \end{aligned}$$

ت ٥,٤٠ جسيم متحرك في بُعد واحد معروف بأن له تسارعاً صفرياً . بين أن أعمّ تعبير لموضعه كدالة في الزمن هو $x = x_0 + v_0 t$.

ت ٥,٤١ تعريف السرعة الزاوية هو $\omega = d\theta/dt$. (١) أكتب θ على صورة تكامل في الزمن . (٢) إذا كانت ω ثابتة ، فاحسب هذا التكامل واحصل على تعبير للزاوية θ يتضمن المعادلة ٥,٢٥ كحالة خاصة . (٣) إذا كانت

$$d^2\theta/dt^2 = \alpha \text{ (a constant),}$$

فما التعبير العام للزاوية ؟

ت ٥,٤٢ يتحدد تدرج درجة الحرارة في قطعة من مادة ما بالعلاقة $dT/dx = A + Bx^2$ ، وعند $x = x_0$ تكون درجة الحرارة $T = T_0$. بين أن درجة الحرارة ينبغي أن تتحدد بالمعادلة

$$T = T_0 + A(x - x_0) + \frac{1}{3}B(x^3 - x_0^3).$$

بند ٥,٩

ت ٥,٤٣ احسب التكاملات المحدودة التالية :

$$\begin{aligned} (١) \quad & \int_1^2 (5 + 4x^3) dx \\ (٢) \quad & \int_{-1}^1 u^2 du \\ (٣) \quad & \int_a^{-a} (bz + cz^3) dz \\ (٤) \quad & \int_{\pi}^{2\pi} \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

ت ٥,٤٤ في شكل ٥,١٣ : (١) ما المدلول الفيزيائي للمساحة الواقعة تحت منحنى a ضد t من $t = 0$ إلى $t = t_1$ ؟ (٢) ماذا ينبغي أن تكون المساحة الواقعة تحت منحنى a ضد t من $t = 0$ إلى $t = \infty$ ؟ (٣) ما المعنى الفيزيائي للمساحة الواقعة تحت منحنى v ضد t من $t = 0$ إلى $t = \infty$ ؟

ت ٥,٤٥ يمتد خندق trench ، ذو عرض ثابت w وعمق متغير d ، على طول مسافة إجمالية L . غير عن حجم الخندق على صورة تكامل . هل هذا تكامل محدود أم غير محدود ؟

ت ٥,٤٦ يساوي التردد الزاوي ω للبندول $١٠ \text{ ث}^{-١}$. (١) فما تردد البندول ν ؟ (٢) وما دورته T ؟ (٣) إذا كان اتساع البندول $٠,٠٣ \text{ م}$ ، فماذا تكون سرعة تأرجحه القصوى ؟

بند ٥,١٠

ت. ٥,٤٧ فاضل المعادلتين ٥,١٠٦ و ٥,١٠٧ (تقريباً $\sin x$ و $\cos x$ للزوايا الصغيرة) ، وَبَيَّنَ أَنَّ التَّيَجْتَيْنِ متوافقتان مع المعادلتين ٥,٩٢ و ٥,٩٤ .

ت. ٥,٤٨ إِنَّ مشتقة $\sin x$ هي ، بالتعريف ،

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} .$$

برهنْ أَنَّ النهاية على اليمين تساوي $\cos x$. كي تبدأ البرهان ، استخدم مفكوك $\sin(A + B)$ المثلي .

ت. ٥,٤٩ تكون معادلة خيط (أو وتر) مُهْتَز vibrating string

$$y = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \sin \omega t ,$$

حيث y هي الإزاحة المُستعرضة transverse displacement ، x المسافة المقاسة على امتداد الخيط ، و t الزمن . (١) أرسم رسوماً بيانية تخطيطية للكمية y ضد x لبضعة أزمنة t . (٢) ما مدلول λ و ω الفيزيائيان ؟ (٣) وما هي النقاط العقديّة nodal points ، أو النقاط الثابتة stationary ، على الخيط ؟

ت. ٥,٥٠ للدالة $f(x) = \sin(1/x)$ خواص استثنائية بالقرب من $x = 0$. (١) أوردْ تعبيراً للمشتقة df/dx . (٢) أرسم رسماً بيانياً تخطيطياً للدالة $f(x)$ ضد x ، وَبَيَّنْ مِيزَاتِهِ البارزة بالقرب من $x = 0$.

ت. ٥,٥١ عندما احتاجت إحدى شخصيات مُسلسلة هزليّة comic strip character إلى نحو من ١٠ دولار ، نُصِحَتْ بِأَنْ تُحَصِّلَ على دولار ومن ثَمَّ أَنْ تُصَاعِفَ نفوذها n مرة . فكم يكون n ؟ عُبِّرْ عن هذه العملية المضاعفة n مرة n-fold doubling process بواسطة معادلة بسيطة .

ت. ٥,٥٢ بَيِّنْ أَنَّ $t_{1/2} = \tau \ln 2$ للدالة الأسية المتناقصة ، $e^{-t/\tau}$ ، وَأَنَّ $t_2 = \tau \ln 2$ للدالة الأسية المتزايدة ، $e^{t/\tau}$. (الكميتان $t_{1/2}$ و t_2 هما قِبتا t اللتان تُساوي هاتان الدالتان عندهما ٠,٥ و ٢ ، على التوالي .)

ت. ٥,٥٣ افترضْ أَنَّ عددَ النيوترونات في قبيلة ذرّية منفجرة يتحدّد بالعلاقة $N = N_0 e^{t/\tau}$ ، حيث $N_0 = 1$ و $\tau = 10^8$ ث . بمعدل النموّ هذا ، كم سيستغرق N حتّى يَكْبُرَ إلى 6×10^{23} (مُول mole واحد من النيوترونات) ؟

ت. ٥,٥٤ ما هو التاريخ ، وَفَقاً للمعادلة ٥,١١٣ ، الذي لم يكن فيه سوى مجلّة فيزيائية هامة واحدة في المعمورة ؟ (إِنَّ عددَ المجلّات في ذلك التاريخ ، وما قبله ، هو أقلّ دقة ممّا يكفي لقياس نشاط البحث العلميّ في الفيزياء ؛ إذ كانت المجلّات حينذاك متعدّدة الاهتمامات

multidisciplinary . على كل ، فإن عدد المجالات في سائر حقول العلم يتبع قانوناً أسياً عوداً إلى عام ١٧٥٠ تقريباً .

ت ٥,٥٥ باستخدام مُعطيات مسألة ٣,٤ ، أوجد صيغاً تقريبية ، على صورة أُسية ، (أ) لطاقة المُسارعات الدائرية كدالة في الزمن ؛ و (ب) لقطر مثل هذه المسارعات كدالة في الزمن ما هما الزمن المضاعفان التقريبيان لهذين المتغيرين ؟

ت ٥,٥٦ أرسم على ورقة رسم بياني الدالة

$$y(x) = e^x + e^{-x}$$

من $x = -3$ إلى $x = +3$. تُعرف هذه الدالة مُنحني سِلْسِلَة (كاتينة) catenary ؛ وهو المنحنى الذي تتبعه سلسلة معلقة مثبتة عند طرفيها .

ت ٥,٥٧ (١) بين أن $y/d^2x^2 = z$ لمنحنى السلسلة المُعرّف في تمرين ٥,٥٦ . (٢) أي دالة $z(x)$ تنسم بالخاصية $d^2z/dx^2 = -z$ ؟

ت ٥,٥٨ اشتق المعادلة ٥,١٠٩ لمشتقة e^x . استخدم الحقيقة بأن $e^{x+\Delta x} = e^x e^{\Delta x}$ ، واكتب Δx بصورة تقريبية بالاستعانة بالمعادلة ٥,١١٥ .

ت ٥,٥٩ اشتق المعادلة ٥,١٢١ لمشتقة $\ln x$. لستوف نحتاج إلى استعمال واحدة أو أكثر من الخواص المُدرّجة في المعادلات ٥,١٢٢-٥,١٢٦ ، فضلاً عن التعبير التقريبي الذي تحدده المعادلة ٥,١٢٠ .

ت ٥,٦٠ يُعبّر عن موضع سيارة s ، في غضون فترة زمنية معينة ، كدالة في الزمن بالمعادلة $s = a \ln(t/t_0)$ ، حيث a و t_0 ثابتان . (١) ما بُعد a ؟ (٢) هل يمكن أن تكون المعادلة صحيحة عند $t = 0$ ؟ (٣) ما سرعة السيارة عند $t = t_0$ ؟ (٤) هل تسكن السيارة أبداً ؟

ت ٥,٦١ إذا كان $\sqrt{n}$ هو الشك المُقترن بالخطأ الإحصائي في قياس n حادثة عشوائية (المعادلة ٥,١٢٧) ، فما الشك الكسري (أو الجزئي) fractional ؟ بأي كسر ينبغي أن يزيد العدد n كي يتناصف الشك الكسري ؟

بند ٥,١٢

ت ٥,٦٢ يقوم طالبُ بسيرة قياسات للطول الموجي لضوء الصوديوم الأصفر ، فيحصل على النتائج المبينة في الجدول أدناه . وتبين قياسات أدق بكثير أن القيمة الصحيحة هي ٥٨٩٢ م . (١) فما المقدار التقريبي للخطأ العشوائي في هذه القياسات ؟ (٢) وهل ثمة من أي دليل على وجود خطأ نظامي ؟ (أنظر أيضاً مسألة ٥,٢١) .

التجربة	الطول الموجي ($\dot{\text{m}}$)
١	٥٨٨٩
٢	٥٨٧٤
٣	٥٨٨١
٤	٥٨٩٥
٥	٥٨٩٢
٦	٥٨٨١
٧	٥٨٨٣

مسائل :

م ١,٥ عبارات التالية هي مسلّمات الأعداد الصحيحة الموجبة positive integers :

$$١ - (\text{integer}) + 1 = (\text{next integer}) \quad ؛ \quad ٤ - ab = ba$$

$$٢ - a \cdot 1 = a \quad ؛ \quad ٥ - a(b + c) = ab + ac$$

$$٣ - a + b = b + a$$

أثبت أن $2a = a + a$ ، ذاكراً بدقة أيّ مسلّمة تستعمل عند كلّ خطوة من البرهان .

م ٢,٥ بمقدورنا أن نضيف إلى مسلّمات الأعداد الصحيحة الموجبة الواردة في مسألة م ١,٥ المسلّماتين التاليتين :

$$٦ - a + (b + c) = (a + b) + c \quad ؛ \quad ٧ - a(bc) = (ab)c$$

(١) باستخدام المسلّمات مباشرة ، برهن أن

$$(أ) \quad (ab)(c + d) = a(bc) + d(ba) \quad ، \quad \text{وأن}$$

$$(ب) \quad (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

(٢) لماذا لا يتمّ الفيزيائي عادةً براهين من هذا النوع ؟

مراقبون في أُطر
إسناد مختلف

م ٣,٥ يتحرك جسيم لا مُستقرّ داخل المختبر . اعتبر مشاهدته من إطارٍ إسناد ، أخذها ساكنٌ بالنسبة إلى المختبر ، والآخر ساكنٌ بالنسبة إلى الجسيم . بناءً على هذا الاعتبار ، أدلّ بحجّة دامغة تعلّل لماذا يتعيّن على الجسيم أن يمثّل « لقاعدة الاضمحلال الانحدارية » – القائلة إنّ مجموع الجسيمات الناتجة هو أقلّ من كتلة التّئوج (الأصل) .

إحداثيات كروية

م ٤,٥ (١) أوجد ثلاث معادلات مشابهة للمعادلتين م ١,٥ و م ٢,٥ تُعبّر عن الإحداثيات الديكارتية x و y و z بدلالة الإحداثيات الكروية r و θ و ϕ . (٢) بيّن أنّ r و θ و ϕ (بذلك الترتيب) تمثّل نظاماً إحداثياتٍ مميّزاً متعامداً .

مشتقة خارج قسمة

م ٥,٥ أثبت أن

$$(٥,١٦) \quad \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\frac{df}{dx} g - f \frac{dg}{dx}}{g^2} .$$

إنقطاع المِبل

م ٥,٦ يُبينُ الرّسمُ البيانيّ المُرفَقُ تَفرين ٥,٢٦ (شكل ٥,٣٤) نقطة انقطاع في المِبل . باستخدام المعادلة ٥,٦ والتدليل البيانيّ ، فسّر بدقّة لماذا لا يكون ميل المنحنى محدداً بوضوح عند $t = ٤$ ث ، لكنّه يكون محدداً تماماً عند أيّة نقطة أخرى .

التُمثيلُ البيانيّ لمُعطياتِ جَدْوَلَة

الطول (سم)	الكتلة (كغم)
٥٠	٣,٥
٧٥	١١
١٠٠	٢٠
١٢٥	٣١
١٥٠	٤٥

م ٥,٧ يُبينُ الجدولُ المُرفَقُ كتلةَ طفلٍ معيّن كدالة في طوله على مدى السنين . (١) أرسم رسماً بيانياً لهذه المُعطيات ، معيّناً الطولَ أفقياً والكتلةَ رأسياً . صلِ النقاطَ المعيّنة بمنحنى أملس . (٢) أيّ جزء من المنحنى يتسم بأقصى مِبل ؟ وما المقدار التقريبيّ لهذا المِبل ؟ (٣) أُمَدِّدْ هذا المنحنى خارجَ نطاقِ المُعطياتِ كما تُقدَّرُ كتلةُ الطفل قبل ولادته ، حين كان طوله ٣٥ سم ، وكما تتنبأ كتلته اللاحقة إذا نما إلى طول ١٧٥ سم .

م ٥,٨ (١) أرسم رسماً بيانياً للمسافة ضدّ الزمن لمُعطياتِ الجدول المُرفَق أدناه . (٢) صِفِ الحركةَ بكلماتٍ مناسبة . (٣) ماسرعة الحركة بالقرب من $t = ٨$ ث ؟ (٤) هل يمكن كتابة s كدالة رياضية بسيطة في t ؟

t (ث)	s (م)
٠	٠
١	٢,٥
٢	١٠,٠
٣	٢٢,٥
٤	٤٠
٥	٦٠
٦	٨٠
٧	١٠٠
٨	١٢٠

معادلة لتمثيل مُعطياتِ جَدْوَلَة

م ٥,٩ يَرغِبُ فيزيائيّ في اختبار ما إذا كانت مُعطياتُ جَدْوَل ٥,٥ تمثلُ للتعبير $T = T_0 + Ar^2$ أم لا . ويعتقد بأنّ الشكّ التجريبيّ في T هو نحو من ٠,١ ك ، في حين أنّ الشكّ التجريبيّ في r جدير بالإهمال . (١) هل تمثل هذه المعطيات لدرجة كافية للصيغة النظرية ؟ (٢) إذا فعلت ذلك ، فما قيمتا T_0 و A ؟ أما إنّ لم تفعل ، فهل هنالك أيّة صيغة أخرى بسيطة لحدّ معقول ، تلائم المعطيات بصورة أفضل ؟

م ٥,١٠ جسم ، كان قد بدأ من حالة السكون عند نقطة A ، يَتَرَلَقُ slides أسفل مسار عديم الاحتكاك frictionless تقريباً . تقاس سرعته عند نقطة B على بُعد ١ م عن A ، وعند نقطة C على بُعد ٢ م عن A . ويبيّن الجدول أدناه نتائج أربعة انزلاقات تجريبية trial slides . (١) قدّر الخطأ المئويّ التقريبيّ لهذه القياسات العشوائية . (٢) أوجد نسبة السرعتين v_C/v_B لكل تجربة . هل من المتوافق مع واقع الحال أنّ نفترض أنّ هذه النسبة ثابتة ضمن حدود الخطأ التجريبيّ ؟

(٣) افترض وجود معادلة على الصورة $(v_C/v_B) = (x_C/x_B)^n$ تربط نسبة السرعتين v_C/v_B بنسبة المسافتين x_C/x_B (التي تساوي ، في هذا المثال ، ٢) . إذا سَلِّمْتَ ببساطة نوااميس الطبيعة ، وَجَبَ أَنْ يكون " عددًا " بسيطاً . فما قيمة " n " التي تلائم النتائج التجريبية ؟

التجربة	السرعة عند B (سم / ث)	السرعة عند C (سم / ث)
١	٢٤,٨	٣٥,٠
٢	٢٤,٢	٣٤,٥
٣	٢٥,٠	٣٤,٨
٤	٢٤,٦	٣٥,٢

طبيعة السقوط الحر

م ٥,١١ في كتاب غاليليو « محاورات حول علمين جديدين » [أنظر حاشيتنا في بند ٥,٧] ، يقترح ساغريدو Sagredo أن السقوط الحر لجسم واقع تحت تأثير الجاذبية « يكون بحيث تزداد سرعته طردياً مع المسافة المقطوعة ؛ مما يترتب عليه ، مثلاً ، أن السرعة التي يكتسبها جسم عند سقوطه مسافة أربعة أذرع cubits سوف تكون ضعف تلك التي يكتسبها عند سقوطه مسافة ذراعين ، وهذه السرعة الأخيرة سوف تكون بدورها ضعف تلك المكتسبة في الذراع الأول . » عبر عن فرضية ساغريدو بدلالة تعابير رياضية ، وبرهن أنها غير متوافقة ليس فقط مع القياسات الدقيقة المقترنة بالسقوط الحر ، بل أيضاً مع أقل المشاهدات دقة لخواص السقوط الحر . (إذا أردت أن تعرف كيف يعالج سلفياني Salviati ، الذي يمثل « صوت غاليليو » ، فرضية ساغريدو ، فانظر محاوره اليوم الثالث ، تحت عنوان « الحركة المتسارعة طبيعياً Naturally Accelerated Motion » .)

الكميات الأحادية البعد

م ٥,١٢ (١) أثبت أن ميل الرسم البياني للكمية v^2 المرسومة كدالة في x يكون مساوياً للتسارع ، لحركة أحادية البعد . (٢) لأي رسم بياني آخر يكون الميل مساوياً للتسارع ؟

م ٥,١٣ جسم متحرك على امتداد محور x بتسارع ثابت ، يمر عبر نقطة الأصل ($x = 0$) عند $t = 0$ بسرجهه $v_0 = ١٠$ م / ث . وفيما بعد ، عند $t = ٤$ ث ، فإنه يمر عبر نقطة الأصل مرة ثانية . (١) فما تسارعه ؟ (٢) وما سرجهته في المرة الثانية التي يمر فيها عبر نقطة الأصل ؟ (٣) هل يمر

• الذراع cubit : هي وحدة قاييس قديمة للطول مبنية على أساس طول الساعد forearm من المرفق (الكوع) elbow حتى أخمص الإصبع الأوسط ؛ وتساوي عادة نحواً من ١٨ بوصة (وأحياناً ٢١ بوصة أو أكثر) .

(المشرف)

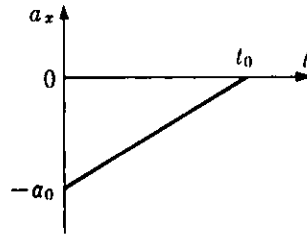
عبر نقطة الأصل مرة ثالثة ؟ إن صح ذلك ، فتي ؟ (٣) ما قيمة x الكبرى التي يجزها الجسم ؟

م ٥,١٤ يرغب الفتي المبين في شكل ٥,١٦ في قذف كرة واحدة إلى ارتفاع ٦ م فوق سطح الأرض ، وأخرى إلى ارتفاع ١٢ م فوق سطح الأرض . وتبرح كلتاها بدءاً على ارتفاع ٢ م . (١) فإذا ينبغي أن تكون نسبة السرعتين الابتدائيتين للكرتين ؟ (٢) وماذا يجب أن تكون نسبة طاقتيهما الحركيتين الابتدائيتين ؟

م ٥,١٥ تتحرك سيارة في بادئ الأمر بسرعة ١٥ م / ث . عندما تُكَمَحُ (تُفَرَمَلُ) is braked حتى تقف ، تتحدد مركبة x لتسارعها بالعلاقة (أنظر الرسم البياني المرفق ؛ شكل ٥,٣٦)

$$a_x = \frac{a_0(t - t_0)}{t_0} \quad (0 < t \leq t_0),$$

حيث $a_0 = 3 \text{ م / ث}^2$ و $t_0 = 10 \text{ ث}$. (١) بين أن سرعتها تبلغ صفراً عند نفس اللحظة التي يبلغ فيها تسارعها صفراً . (٢) كم تقطع السيارة أثناء العشر ثواني التي تُكَمَحُ فيها ؟ (٣) أكتب صيغتين للدالتين $x(t)$ و $v_x(t)$ تتضمنان شروطاً حدية مناسبة ويسري مفعولها إبان الفترة $0 < t \leq t_0$. (٤) على فرض أن السيارة تتحرك بسرعة ثابتة v_0 في الزمن $t < 0$ وأنها تظل ساكنة في الفترة $t > t_0$ ، أرسم رسمين بيانيين تخطيطيين للكميتين v_x ضد t و x ضد t بنظريان على الأزمنة ما قبل وما بعد فترة الكَمَح (الفرملة) braking period .



شكل ٥,٣٦ : مسألة ٥,١٥ .

م ٥,١٦ تتحدد سرعة سيارة سباق racing car في غضون تجربة زمنية time trial بالعلاقة

$$v = A(1 - e^{-t/T}),$$

حيث $A = 150 \text{ ميلاً / س}$ و $T = 6 \text{ ث}$. (١) أوجد تعبيرين لموضع السيارة وتسارعها كدالة في الزمن . (٢) أرسم رسوماً بيانية تخطيطية للكميات x ضد t ، v ضد t ، و a ضد t . (٣) أوجد تعابير تقريبية للكميات x و v و a سارية المفعول في الفترة $t \ll T$.

م ٥,١٧ للحركة الأحادية البعد ، يتحدد متوسط السرجة في الفترة الزمنية صفر إلى T بالعلاقة

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt.$$

(١) احسب هذا التعبير (أ) لحركة بسرجة ثابتة و (ب) لحركة بتسارع منتظم . (٢) فسّر المدلول البياني للمتوسط الزمني .

متوسط السرجة

الحركة في بُعْدَيْن

٥,١٨ م يتحدّد إحداثيًا x و y لِثِقَلٍ بَندُولٍ حُرٍّ، بِتَآرِجٍ فِي بُعْدَيْنِ، بِالْعَلاَقَتَيْنِ

$$x(t) = a \cos \omega t,$$

$$y(t) = b \sin \omega t,$$

حيث a و b ثابتان موجبان غير متساويين . (١) أُرْسِمُ رَسْمًا تَخْطِيطِيًّا لِمَسَارِ الثِقَلِ فِي مَسْتَوَى xy ، وَبَيِّنْ أَنَّهُ مَدَارٌ مُغْلَقٌ closed orbit . (٢) أَوْجِدْ مَرَكَبَتِي السَّرْجَهَةَ ، $v_x = dx/dt$ و $v_y = dy/dt$ ، وَالسَّرْعَةَ ، $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. أَيْنَ تَقَعُ قِيَمَةُ السَّرْعَةِ الْعُظْمَى ؟ وَأَيْنَ تَقَعُ قِيَمَتُهَا الصُّغْرَى ؟ (٣) أَوْجِدْ تَعْبِيرًا لِلْمَشْتَقَّةِ dy/dx ، أَيَّ مَبْلٍ الْمَسَارِ فِي مَسْتَوَى xy . عِنْدَ أَيِّ نَقَاطٍ تَكُونُ dy/dx صَفْرًا ؟ وَعِنْدَ أَيِّ نَقَاطٍ تَكُونُ لَانْهَائِيَّةً ؟ هَلْ هَذَا الْمَبْلُ الْلَّانْهَائِي غَيْرُ وَاقِعِي فِيزِيَايَا ؟

٥,١٩ م يُمْكِنُ تَعْرِيفُ التَّكَامُلِ الْمَحْدُودِ بِأَنَّهُ إِنَّمَا مَسَاحَةٌ هَنْدَسِيَّةٌ أَوْ نِهَآيَةٌ بِمَجْمُوعٍ . اسْتَغْمِلْ آيَا مِنْ هَذَيْنِ التَّعْرِيفَيْنِ أَوْ اثْنَلَا فَا مِنْ كُلَيْهِمَا لِتَبْرَهَنَّ الْآتِي :

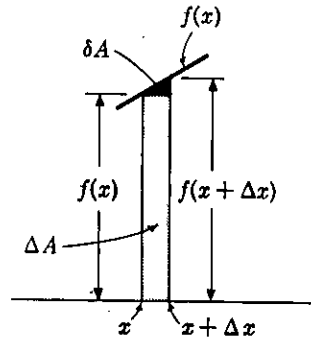
$$\int_a^b [F(x) + G(x)] dx = \int_a^b F(x) dx + \int_a^b G(x) dx \quad (١)$$

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \quad (٢)$$

حيث c ثابت . (٣) إِجْمَعْ هَذَيْنِ الْبَرَاهَيْنِ مَعًا لِتَبْتَثَ الْخَاصَّةَ الْخَطِيَّةَ لِلتَّكَامُلِ الْمَحْدُودِ (المعادلة ٥,٧٦) .

تَعْرِيفُ التَّكَامُلِ الْمَحْدُودِ

٥,٢٠ م فِي شَكْلِ ٥,٣٧ أَدْنَاهُ ، يُمَثِّلُ الْمُسْتَطِيلُ الْمُظَلَّلُ بِلَوْنٍ فَاتِحٍ ، وَالتِّي تَسَاوِي مَسَاحَتُهُ $\delta A = f(x) \Delta x$ ، الْمَسَاحَةُ التَّقْرِيبِيَّةُ الْوَاقِعَةُ تَحْتَ الْمَنْحَى مِنْ x إِلَى $x + \Delta x$ ؛ فَيَخْتَلِفُ عَنْ الْمَسَاحَةَ الْحَقِيقِيَّةَ بِالْمَقْدَارِ δA (أَيَّ الْمَسَاحَةِ الْمَظْلَلَةِ بِلَوْنٍ قَاسِمٍ) . قَرِّبْ $f(x)$ كَدَالَّةٍ خَطِيَّةٍ فِي الْمَنْطَقَةِ مَوْضِعِ الْإِهْتِمَامِ . أَحْصِلْ عَلَى تَعْبِيرٍ لِلْمَقْدَارِ δA ، وَبَيِّنْ أَنَّ الْخَطَأَ الْكُسْرِيَّ فِي تَقْرِيبِ الْمُسْتَطِيلِ ، $\delta A / \Delta A$ ، يَقْتَرِبُ مِنَ الصُّفْرِ عِنْدَمَا يَقْتَرِبُ ΔA مِنَ الصُّفْرِ . فَرِّعْ اخْتِيَارِي : بَرِّرْ التَّقْرِيبَ الْخَطِيَّ لِلدَّالَّةِ $f(x)$.



شكل ٥,٣٧ : مسألة ٥,٢٠ .

جذر متوسط مربع
(rms) الانحراف

م ٥,٢١ (١) أوجد متوسط ، أو معدل ، قيمة الطول الموجي λ ، لمعطيات تمرين ٥,٦٢ ، وسمِّه $\bar{\lambda}$.
(٢) أوجد جذر متوسط مربع الانحراف root-mean-square deviation تلك المعطيات عن المتوسط ، الذي يُعرَّف بالعلاقة

$$\Delta\lambda = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \bar{\lambda})^2}$$

حيث n عدد القياسات لو لم يكن هناك أي خطأ نظامي ، لَزَوَدْنَا $\Delta\lambda$ بمقياس جيد للشك الكامن في كل قياس . (٣) برهن أن $\bar{\lambda}^2 = \overline{\lambda^2} - (\Delta\lambda)^2$ ، حيث تُعرَّف $\overline{\lambda^2}$ بالعلاقة

$$\overline{\lambda^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 .$$

فرع اختياري : استشر مرجعاً آخر بخصوص الانحراف المعياري standard deviation ، وأوجد قيمة الانحراف المعياري لمتوسط القياسات السبعة في تمرين ٥,٦٢ .

م ٥,٢٢ قَدِّر الشك في مِثِل الرِّسْم البياني للخط المستقيم في شكل ٥,٣٢ (ب) . نَفِّذْ ذلك باستخدام أداة طريقة تحلو لك ؛ لكن فَسِّرْ كيف تحصل على نتيجةك .

الشك في التبل



٦. المتجهات

VECTORS

المتجه هو كينونة رياضية تتسم بخواص عددية وهندسية على حد سواء . ولقد استطاع الفيزيائي أن يفيد منه أحسن إفادة في وصفه للطبيعة . وسنعنى في هذا الباب بجبر المتجهات vector algebra وبيعض تفاضل وتكامل المتجهات vector calculus . ولسوف تجد خواص المتجهات المدروسة هنا ميداناً للتطبيق في كل ما تبقى من هذا الكتاب .

٦,١ الكميات القياسية والكميات العددية : الحساب الهندسي

Scalars and Numerics: Geometrical Arithmetic

الكمية العددية : هي كمية ممثلة
بعدد مفرد

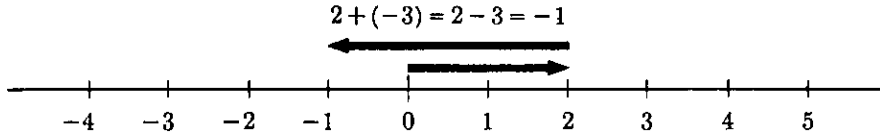
الكمية القياسية : هي كمية عددية
مستقلة عن نظام الإحداثيات

الكمية العددية هي كمية ذات مقدار فحسب ؛ أي أنها كمية يمثلها عدد مفرد . أما الكمية القياسية فهي نوع خاص من الكميات العددية ، نوع تكون قيمته العددية مستقلة عن اختيار إطار الإسناد أو نظام الإحداثيات . فخط الطول longitude على سطح الأرض هو مثال على كمية عددية ، حيث يُعَيَّنُ بواسطة عدد مفرد ؛ غير أن ذلك العدد يُحدِّدُه اختيار نقطة أصل ، هي صفر خط الطول المارَّ عبرَ غرينتش Greenwich . بالمثل ، من ناحية أخرى ، تكون كتلة جسم مستقلة عن اختيار إطار الإسناد ؛ فالكتلة ، إذن ، هي كمية قياسية (مع أن مقدارها قد يعتمد ، بالطبع ، على اختيار الوحدات) . ويمكن الجزم فيما إذا كانت كمية فيزيائية قياسية أم لا بالتجربة فقط .

وقواعد معالجة الكميات العددية هي القواعد المألوفة للحساب . ففي المدرسة يتعلَّم المرء عن التناظر بين الأعداد والمسافات المقاسة على امتداد خط . ونظراً لهذا التناظر ، فإنه يمكن تمثيل عمليات الحساب هندسياً بواسطة قواعد الإزاحة على امتداد خط مستقيم . ونعيد هنا النظر بإيجاز في الحساب الهندسي هذا . . .

يبين شكل ٦,١ خطأً عليه نقاط متساوية البعد موصومة labeled بالأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة وبالصفر . فلكل عدد حقيقي توجد نقطة تناظره على هذا الخط ؛ ولكل نقطة على الخط يوجد عدد حقيقي يناظرها ؛ فهذا تناظر واحد لواحد one-to-one correspondence . ويقال إن كل نقطة على الخط « موصومة » (أو مرقومة) بعدد . ويمكن أن يُدعى هذا الخط الموصوم (المرقوم) بالمحور الحقيقي real axis .

المحور الحقيقي : هو خط موصوم



شكل ٦,١ : المحور الحقيقي والحساب الهندسي هناك تناظر واحد لواحد بين النقاط على الخط والأعداد الحقيقية . ونمثل الإزاحات عمليتي الجمع والطرح .

الحساب الهندسي

ويكون جمع وطرح الأعداد مكافئاً للسَّير جيئةً وذهاباً على امتداد المحور الحقيقي بموجب القواعد التالية : لجمع عدد موجب أو طرح عدد سالب ، أجزِ إزاحة إلى اليمين بمسافة تُناظر العدد الذي نحن بصددده ؛ ولطرح عدد موجب أو جمع عدد سالب ، أجزِ إزاحة تساوي مسافة ملائمة إلى اليسار . كذلك ، تُمثِّلُ نتيجة سلسلة من عمليات جمع وطرح بمحصلة الإزاحة (موجبة أو سالبة) من نقطة البداية إلى نقطة النهاية . مثلاً ، إذا بدأنا عند نقطة الأصل ، وتحركنا وَحَدَتَيْنِ إلى اليمين ومن ثَمَّ ثلاث وَحَدَاتٍ إلى اليسار (مُنْتَهَيْنِ بذلك عند وَحْدَةٍ واحدة إلى يسار نقطة الأصل) ، فَإِنَّ ذَلِكَ يُمثِّلُ العملية $2 - 3 = -1$ ، أو $2 + (-3) = -1$. كما تُمثِّلُ العملية $1,5 + 1,5 - 3 = 0$ بإزاحات متعاقبة هي ١,٥ و ١,٥ و ٣ إلى اليمين ، انتهاءً عند ٦ وَحَدَاتٍ إلى يمين نقطة الأصل .

ويمكن استخدام هذه القواعد الهندسية للتدليل بطريقة بسيطة على الخواص الأساسية التالية للأعداد :

$$a = -(-a), \quad (٦,١)$$

$$a + b = b + a, \quad (٦,٢)$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c. \quad (٦,٣)$$

قانون التبادل

قانون الترافق

والثانية هي خاصية التبادل للجمع commutative property of addition ؛ أما الثالثة فهي خاصية الترافق للجمع associative property of addition .

وتوجد أيضاً طريقة مفيدة للنظر هندسياً إلى عملية الضرب - بدلالة المَطّ stretching والانكماش shrinking . فإجراء العملية $3 \times 4 = 12$ ، تحيّلُ خيطاً ممدوداً من نقطة الأصل حتى النقطة الموسومة بالعدد ٤ ؛ ثُمَّ مُطّ الخيط كي تضاعفَ طوله ثلاث مرّات triple its length ، بحيث يمتدّ من نقطة الأصل إلى النقطة الموسومة بالعدد ١٢ . كذلك ، لتنفيذ عملية الضرب $0,35 \times 10 = 3,5$ ، تحيّلُ خيطاً ممدوداً - في بادئ الأمر - من نقطة الأصل ١٠ وَحَدَاتٍ إلى اليمين ، ومن ثَمَّ مُقلّصاً إلى ٣٥ بالمئة من طوله الأصلي ، بحيث يبلغ

نكافيّ عمليّة الضرب عمليّتي المطّ والانكماش

٣,٥ وحدات فقط من نقطة الأصل . وهكذا ، فإن الضرب في عدد أكبر من ١ يُناظر عملية مط ، والضرب في عدد أصغر من ١ يناظر عملية انكماش .

وثمة خاصية شكلية formal property أخرى للأعداد ، هي خاصية التوزيع distributive property ، التي تتعلق بائتلاف الجمع والضرب . ويمكن كتابة قانون التوزيع جبرياً على الصورة :

قانون التوزيع

$$c(a + b) = ca + cb.$$

(٦,٤)

وتعلمنا خبرتنا اليومية مع الأعداد بأن قانون التوزيع هو « حقيقة بديهية » . أما بالنسبة للرياضي ، فإن هو إلا افتراض جراف ؛ بمعنى أنه إحدى المسلمات التعريفية للحساب العددي . وبما أنه يمكن تمثيل جمع وضرب الأعداد هندسياً ، فإنه بمقدورنا أن ندلل هندسياً على قانون التوزيع . مثلاً ، إذا جمعنا طول خيطين ، ومن ثم مططنا الطول الإجمالي بعامل معين ، حصلنا على نفس النتيجة كما لو مططنا أولاً كل خيط بالعامل المحدد ومن ثم جمعنا طوليهما الجديدين معاً .

والأعداد هي من الإلفة والواقعية - على ما يبدو - بحيث أنه لمن السهل أن ننسى وجودها كمفاهيم تجريدية . وأحد أسباب دراسة الحساب الهندسي إنما هو لتزويدنا بتشبيه مفيد بحساب المتجهات . وثمة سبب آخر هو تذكيرنا بالفرق الجوهرى بين المفهوم التجريدي وتمثله الهندسي ؛ وهذا فرق حقيقي برغم تناظرهما الواحد لوالحد . والواقع أن الفيزيائيين يفكرون بالأعداد بثلاث طرق متباينة . ومع أنهم (بمن فيهم مؤلف هذا الكتاب [ومترجاه أيضاً]) قد يخلطون أحياناً هذه الطرق المختلفة الثلاث كلامياً ، فمن المهم أن تُفصل ذهنياً بوضوح . فالأولى هي المفهوم التجريدي ؛ وهو كينونة رياضية تُعرف حقيقتها ووجودها بواسطة مسلمات الحساب . والثانية هي التمثيل الهندسي ، كنقطة على خط أو كمسافة من نقطة الأصل حتى تلك النقطة . والتمثيل الهندسي يجعل المفهوم التجريدي تصويرياً ؛ وهو مفيد لأن قواعد ائتلاف الأطوال على امتداد خط مستقيم يمكن أن تُجعل مُناظرة تماماً لقواعد ائتلاف الأعداد التجريدية . أما الطريقة الثالثة فهي العدد الفيزيائي ؛ وهو قياس لحجم أو كمية أحد المفاهيم القابلة للقياس .

ثلاث طرق للتفكير بالأعداد

١ . مفهوم تجريدي

٢ . تمثيل هندسي

٣ . قياس فيزيائي

وعادة ، حينما يُعزى عدد إلى مفهوم فيزيائي ، فإنه يعني أكثر من كون المفهوم مقداراً (أي قابلاً للقياس) ؛ إذ يعني أيضاً أن الكمية قيد الاهتمام تمثل لقواعد الحساب . فإذا قلنا إن شريحة لحم تزن ٤ باوند ، كانت هذه عبارة مفيدة لا شيء إلا لأنه من الثابت تجريبياً أن الأوزان تأتلف مثل الأعداد . فشريحة وزنها ٤ باوند وأخرى ٣ باوند تتران معاً ٧ باوند . ولولم يصح هذا - وليس هناك أي سبب بديهي لأن يكون هذا لازماً - لما تمكنا من إرفاق الأعداد بالوزن بصورة مُجدية . حينئذ ، لربما اقترن المفهوم الفيزيائي ، وزن ، بمفهوم رياضي آخر أكثر تجريداً

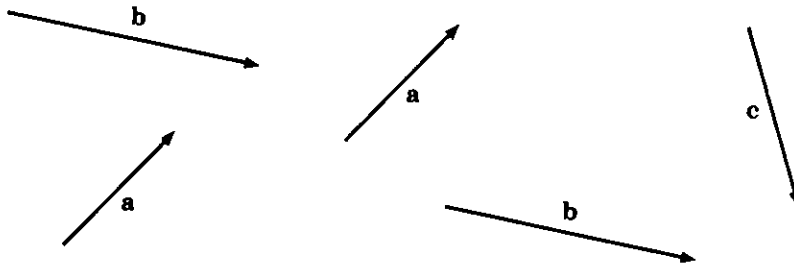
أي الكميات الفيزيائية تكون كميات عددية ؟ ... التجربة وخدّها تستطيع أن تُقرّر ذلك

من الأعداد . وهذا ما قد حدث فعلاً لبعض مفاهيم الفيزياء الحديثة ، التي يجب أن تُمثَّل بواسطة متجهات أو كينونات رياضية أخرى أكثر تعقيداً . ومع ذلك ، فإنَّ الجَمَّ الغفير من المفاهيم الفيزيائية يقاس بدلالة الأعداد لا لشيء إلاَّ لأنَّه وُجِدَ تجريبياً أنَّ الأعداد تفي بالغرض . وإنَّ عَزَوْ عدد إلى مفهوم فيزيائيٍّ إنما هو وضع مؤقت provisional المعنى تماماً الذي يكون بموجبه ناموس الطبيعة مؤقتاً ؛ إذ أنه يُستَساغ طالما أنه ناجحٌ وَخَلُو من التناقض contradiction .

٦,٢ المتجهات : الجَمْعُ والطَّرْحُ Vectors: Addition and Subtraction

يُعرَّفُ المتجهُ رياضياً بدلالة خواصّه التحويلية ؛ أي الطريقة التي يتغيّر بها عندما يتغيّر إطار الإسناد . وسنكتب عن هذه الفكرة بإسهاب في بند ٦,٥ . لكنّه من المناسب - باديّ ذي بدء - أن نُعَيِّنَ حساب المتجهات ، وذلك بأنَّ نستغلَّ تكافؤهُ لبعض قواعد الائتلاف الهندسي . فالمتجهُ هو كميّة ذات مقدار واتّجاه على حدّ سواء ، ويمكن تمثيله بقطعة خطيّة متجهة : هي عبارة عن سهمٍ arrow طوله ، بأية وَحْدَةٍ ملائمة ، يكون بمثابة مقدار المتجه ، واتّجاهه يكون اتّجاه المتجه (شكل ٦,٢) . وقد يكون المكان الذي يُعرَّفُ فيه اتّجاه المتجه مكاناً رياضياً خيالياً fictional ؛ كما قد يتسم بأيّ عدد من الأبعاد . إلاَّ أننا معنيون هنا فقط بالمتجهات في المكان الأقليديّ الثلاثيّ الأبعاد . ومثل هذه المتجهات تُدعى متجهات ثلاثيّة three-vectors . * (في تطبيقات فيزيائية عديدة ، لا يكون مهمّاً سوى اثنين من هذه الأبعاد الثلاثة .)

يُمَثَّلُ المتجهُ بواسطة سهم



شكل ٦,٢ : تُمثَّلُ المتجهاتُ بسهام . ولا يكون موضع السهم بذوي بال ؛ إذ لا يُهمُّ سوى المقدار والاتّجاه . ويُمثَّلُ السهمان المُعلَّمان بالحرف a نفس المتجه ؛ كما أنَّ السهمين المُعلَّمين بالحرف b هما أيضاً متكافئان .

وللـمتجهات ، كما للأعداد ، يكون من المهمّ أنْ نُميِّز ثلاث أفكار مستقلة : الكينونة الرياضيّة التجريدية ، والتّمثيل الهندسيّ الماديّ ، والكميّة الفيزيائية . فبالنسبة للأعداد ، يكون

ثلاث طرق للتّفكير بالمتجهات

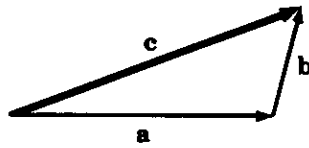
* كما سنُدخلُ المتجهاتَ الرباعيّةَ four-vectors لأوّل مرّة في بند ٢١,٥ .

١. كينونة تجريدية
٢. تمثيل هندسي
٣. كمية فيزيائية

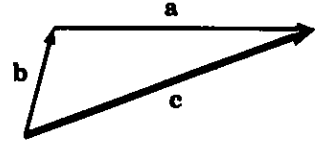
التمثيل الهندسي طريقاً لكن بالكاد ضرورياً. أما بالنسبة للمتجهات فإن التمثيل الهندسي يكاد يكون ضرورة. فلا يمكن التفكير بسهولة بالمتجهات وحساب المتجهات إلا بالاستعانة بالرسم التوضيحية السهمائية arrow diagrams. والكمية المتجهة هي كمية فيزيائية تتصرف مثل المتجه. وهذا يعني أنه ينبغي معالجة هذه الكمية رياضياً كمتجه في المعادلات التي تحكم سلوكها الفيزيائي. والسرجة، والقوة، والزخم، والزخم الزاوي هي كلها أمثلة على كميات متجهة. وتُدعى أحياناً مثل هذه الكميات نفسها بالمتجهات. إلا أنه من المفضل أن تُفرد كلمة «متجه» مثلها مثل كلمة «عدد»، للإشارة إلى الكينونة الرياضية؛ بينما ندعو المفهوم الفيزيائي (القوة، مثلاً)، الذي «يتصرف مثل» المتجه، بالكمية المتجهة.

وتمثل سهم ما متجهاً بنفس المعنى بالضبط الذي تمثل بمقتضاه إزاحة على امتداد المحور الحقيقي عدداً. فبين القواعد الشكلية لحساب المتجهات والقواعد الهندسية للرسم التوضيحية السهمائية يوجد تناظر واحد لواحد. مثلاً، يمكن تمثيل جمع متجهين برسمين سهمائين من النوع المبين في شكل ٦,٣. فبعد تحديد طوله واتجاهه، يوضع السهم الممثل representative للمتجه الأول جزافاً؛ بينما يوضع السهم التمثيلي الثاني بحيث يقع ذيله tail عند رأس head السهم الأول. حينئذ، فإن سهماً مرسوماً من ذيل السهم الأول إلى رأس الثاني يمثل المجموع وجبرياً، يكتب المجموع الاتجاهي على الصورة :

$$a + b = c. \quad (٦,٥)$$



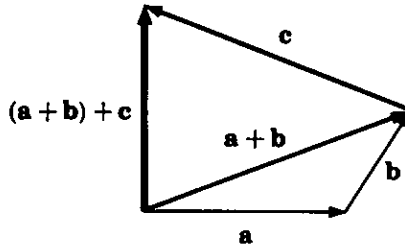
$$a + b = c$$



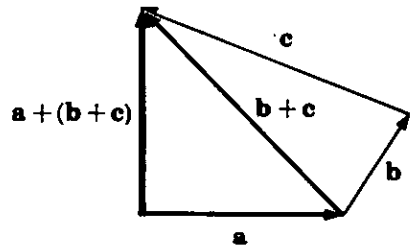
$$b + a = c$$

شكل ٦,٣ : جمع المتجهات. يبين هذان الرسمان التوضيحيان قانون التبادل لجمع المتجهات :

$$a + b = b + a.$$



$$(a + b) + c$$



$$a + (b + c)$$

شكل ٦,٤ : خاصية التوافق لجمع المتجهات، مُدلاً عليها هنا هندسياً : $(a + b) + c = a + (b + c)$.

وَيُسْتَخْدَمُ الْبُنْطُ الْأَسْوَدُ (الثَّخِينُ) boldface type - اصطلاحاً - للإشارة إلى المتجهات . أما في العمل المكتوب باليد handwritten work ، فَيُرْمَزُ إلى المتجهات عادةً بواسطة سِهَام (→) أو بواسطة خطٍّ مُتَمَوِّجٍ تَحْتَهَا wavy underlining (a) ؛ وهذا الأخير هو رمزُ عُمَالِ الْمُطَابِعِ لِلْأَسْوَدِ (الثَّخِينِ) . وَإِنَّهُ لَظَرُورِيٌّ أَنْ يَكُونَ لَنَا رِمَزٌ خَاصٌّ لِلْمَتَجَهَّاتِ ، لِأَنَّ لِلْمَعَادِلَاتِ الْعَدَدِيَّةِ وَالْمَعَادِلَاتِ الْإِتْجَاهِيَّةِ مَدْلُولَاتٍ مُخْتَلِفَةً تَمَاماً . وَنَسْتَعْمَلُ هُنَا عَلَى الدَّوَامِ الْبُنْطَ الْأَسْوَدَ لِلْكَمِّيَّاتِ الْمَتَجَهَّةِ ، وَالْبُنْطَ الْمَائِلَ italic type لِلْكَمِّيَّاتِ الْعَدَدِيَّةِ . فَإِذَا مَثَلُ مَتَجَهٍّ مَعْيْنٌ بِالرَّمْزِ F ، مَثَلُ مَقْدَارِهِ بِنَفْسِ الرَّمْزِ بِالْبُنْطِ الْمَائِلِ ، F ، أَوْ بِالرَّمْزِ الْأَسْوَدِ بَيْنَ قُضْيَيْنِ رَأْسَيْنِ ، |F| . وَيَصْلَحُ الرَّمْزُ الْأَخِيرُ كَمُذَكِّرٍ بَأَنَّ مَقْدَارَ الْمَتَجَهِّ يَكُونُ دَائِماً كَمِّيَّةً مُوجِبَةً .

وَكَمَا هُوَ مَبِينٌ فِي شَكْلِ ٦,٣ ، فَإِنَّ جَمْعَ الْمَتَجَهَّاتِ تَبَادُلِيٌّ :

$$a + b = b + a. \quad (٦,٦)$$

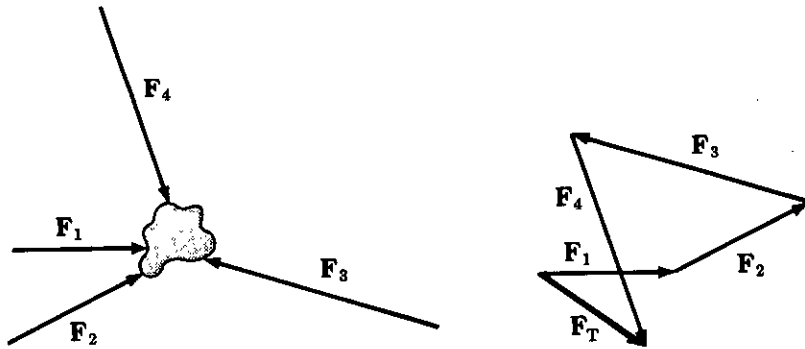
قانون التبادل

كَمَا تَكُونُ خَاصِيَّةُ التَّرَافُقِ لِلْجَمْعِ صَحِيحَةً أَيْضاً لِلْمَتَجَهَّاتِ :

$$(a + b) + c = a + (b + c). \quad (٦,٧)$$

قانون الترافق

وَنَدْلُلُ عَلَى هَذِهِ الْخَاصِيَّةِ هَنْدَسِيًّا فِي شَكْلِ ٦,٤ . وَبِفَضْلِ خَاصِيَّةِ التَّرَافُقِ ، فَإِنَّهُ يَحُوزُ حَذْفُ الْحَاصِرَتَيْنِ فِي جَمْعِ الْمَتَجَهَّاتِ ، كَمَا يُمْكِنُ أَنْ يُوسَّعَ الرَّسْمُ التَّوْضِيحِيُّ السَّهْمَانِيَّ لِيَشْمَلَ جَمْعَ أَيِّ عَدَدٍ مِنَ الْمَتَجَهَّاتِ . مَثَلًا ، يُمَثِّلُ شَكْلُ ٦,٥ جَمْعَ أَرْبَعِ قُوى ، مِمَّا يَنْتِجُ قُوَّةً إِجَالِيَّةً نَسَاوِي F_T .



شَكْلُ ٦,٥ : جِسْمٌ مُتَأَثِّرٌ بِأَرْبَعِ قُوى . وَالْقُوَّةُ الْإِجَالِيَّةُ نَسَاوِي الْجَمْعِ الْإِتْجَاهِي :

$$F_T = F_1 + F_2 + F_3 + F_4.$$



شكل ٦,٦ : سَهَانٌ يُمَثِّلَانِ مَتَجَهًا وَسَالِيَةً . فَيَكُونُ لَهَا طَوْلٌ وَاحِدٌ وَاتِّجَاهٌ مُضَادٌّ .



شكل ٦,٧ : طَرَحُ الْمَتَجَهَاتِ : يُعَرَّفُ $a - b$ بِأَنَّهُ $a + (-b)$. لَاحِظْ أَنَّ الْفَرْقَ بَيْنَ مَتَجَهَيْنِ قَدْ يَكُونُ لَهُ مَقْدَارٌ أَكْبَرُ مِنْ مَقْدَارِ أَيٍّ مِنْ الْمَتَجَهَيْنِ .

وَيُعَرَّفُ سَالِبُ الْمَتَجَهِ بِأَنَّهُ مَتَجَهٌ لَهُ نَفْسُ الْمَقْدَارِ وَاتِّجَاهٌ مُضَادٌّ (شكل ٦,٦) . وَوَضَحَ مِنْ هَذَا التَّعْرِيفِ أَنَّ سَالِبَ السَّالِبِ لِمَتَجَهٍ هُوَ الْمَتَجَهُ الْأَصْلِيُّ :

$$A = -(-A). \quad (٦,٨)$$

خواص أخرى تشاطرها المتجهات
مع الأعداد

كذلك ، يُعَرَّفُ طَرَحُ مَتَجَهٍ بِأَنَّهُ جَمْعُ الْمَتَجَهِ السَّالِبِ . وَنَدَّلُ عَلَى طَرَحِ الْمَتَجَهَاتِ ، الَّذِي يُمْكِنُ كِتَابَتُهُ عَلَى الصُّورَةِ

$$c = a - b = a + (-b), \quad (٦,٩)$$

في شكل ٦,٧ .

■ مثال ١ : مقدار القوة F_1 ٣ ن (نيوتن) ، ومقدار القوة F_2 ٤ ن . فما مقدار المجموع $F_T = F_1 + F_2$ ؟

لا يوجد لهذا السؤال - بصيغته الراهنة - أي جواب محدد ؛ إذ قد يكون للمجموع F_T أي مقدار من ١ ن إلى ٧ ن ، اعتماداً على الاتجاه النسبي للمتجهين F_1 و F_2 . وإنه لخطأ شائع أن نفترض أنه إذا كان $F_T = F_1 + F_2$ ، وجب على المقدارين أن يُجمعا أيضاً : أي أن $F_T = F_1 + F_2$. فعلى العموم ، لا يكون هذا صحيحاً .

لا داعي لأن يساوي $|F_1 + F_2|$

المقدار $F_1 + F_2$

■ مثال ٢ : تؤثر القوتان المشار إليهما في مثال ١ بنفس الاتجاه . فما المجموع F_T ؟

نستطيع أن نوردَ الجواب إلى حدٍّ ما بالكلمات وإلى حدٍّ آخر بالرموز . فالمجموع F_T هو متجه مواز للقوة F_1 ومقداره ٧ ن لماذا لا يكون صحيحاً أن نكتب $F_T = ٧$ ؟

■ مثال ٣ : رجلان على جانبيين متقابلين لسيارة يدفعان جُزئياً إلى الداخل و جُزئياً إلى الأمام ، بحيث يؤثر كل منهما بقوة ١٠٠ ن باتجاه يصنع زاوية ٤٥° مع المحور الطويل للسيارة ؛ كما تؤثر قوة احتكاكية frictional إلى الخلف rearward بمقدار ١٢٠ ن [شكل ٦,٨ (أ)]. فما القوة الكلية المؤثرة على السيارة ؟

بما أن القوة كمية متجهة ، فإننا نستطيع أن نجتمع القوى الثلاث بالاستعانة برسم توضيحي سَهْمَانِي ، كما في شكل ٦,٨ (ب). والترتيب الذي تُرسمُ بموجبه السهام الثلاثة غير مهم . ويُمثل مجموعها بواسطة سهم مواز لمحور السيارة ، بحيث يُناظر طولُه مقدراً يساوي نحواً من ٢١ ن . وكان بمقدورنا أن نحصل على هذا الجواب ببياناً لو أنجزنا الرسم بدقة أكبر . بيد أنه من الأفضل أن نستخدم علم المثلثات trigonometry ، كما هو مدلل عليه في شكل ٦,٩ . فكما يوضح هذا الشكل ،

$$|F_1 + F_2| = 2F_1 \cos (45 \text{ deg}) = 141.4 \text{ N.}$$

ويضاف إلى المتجه $F_1 + F_2$ المتجه المضاد لاتجاه F_r ، ذو المقدار ١٢٠ ن . فيكون المجموع متجهٌ مشيرٌ إلى الأمام ذو مقدار ٢١,٤ ن .

جمع ثلاثة متجهات :
علمُ المثلثات مفيدٌ هنا

■ مثال ٤ : اعتبر هذه المعضلة عن الحركة النسبية relative motion . يسير راكبٌ بسرعة ٥ قدم / ث داخل قطار متحرك إلى الأمام بسرعة ١٢ قدم / ث . فما سرجهة هذا الراكب بالنسبة إلى سطح الأرض ؟
يتحدد الجواب العام بالمعادلة الاتجاهية

$$v = v_p + v_r, \quad (6,10)$$

حيث v_p هي سرجهة الراكب بالنسبة إلى القطار و v_r سرجهة القطار بالنسبة إلى سطح الأرض . فإذا سار الراكب إلى الأمام [شكل ٦,١٠ (أ)] ، كان مقدار v_r ١٧ قدم / ث واتجاهها إلى الأمام . وإذا سار إلى الخلف [شكل ٦,١٠ (ب)] ، كان مقدار v_r ٧ قدم / ث واتجاهها إلى الأمام . أما إذا سار باتجاه متعامدٍ مع حركة القطار [شكل ٦,١٠ (ج)] ، فإن السهمين اللذين يمثلان v_p و v_r يكونان ضلعي مثلث قائم يكون وتره السهم الذي يمثل v . وبذلك ، فإن

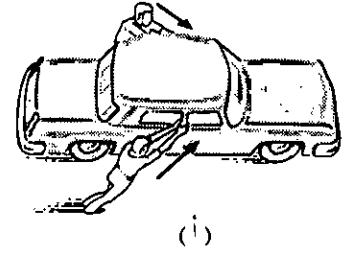
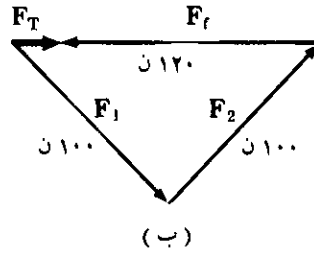
$$v = \sqrt{v_p^2 + v_r^2} = 13 \text{ ft/sec.}$$

كما يصنع المتجه v زاوية تقارب ٢٣° مع المتجه v_r .

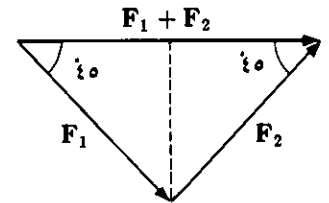
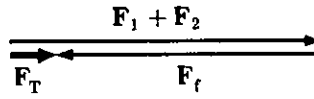
■ مثال ٥ : باستخدام قياسات الملاحة اللاسلكية radio navigation ، يُحدد ريان طائرة pilot أنه يتحرك نحو الشمال بالنسبة إلى الأرض بسرعة ١٢٠ ميلاً/س . سم هذه السرجة v . فهي تساوي مجموع سرجهة الطائرة بالنسبة إلى الهواء v_a ، وسرجة الهواء بالنسبة إلى سطح الأرض (أي سرجة الريح) v_w :

$$v = v_a + v_w.$$

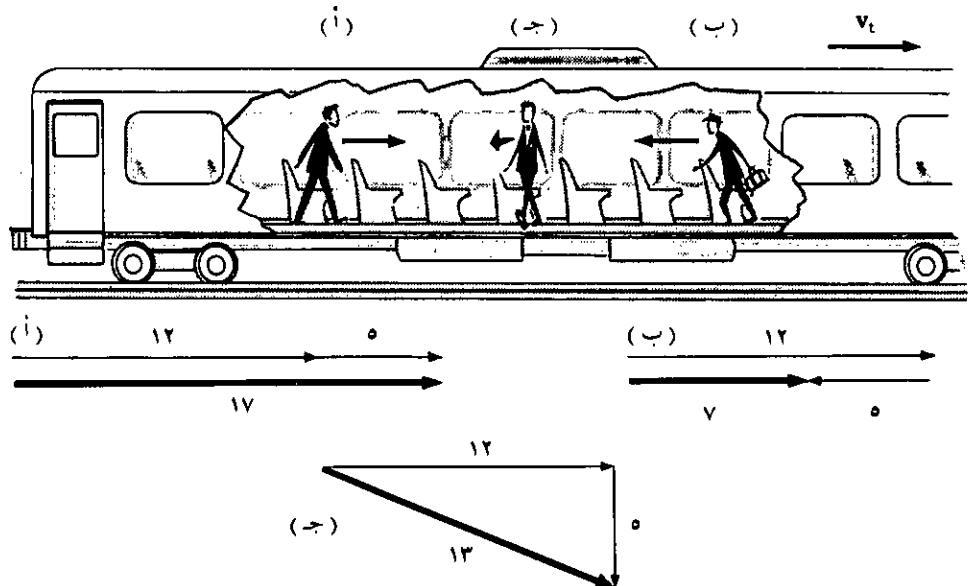
(٦,١١)



شكل ٦,٨ : يؤثر رجلان على السيارة بالقوتين F_1 و F_2 ، كما أن القوة الاحتكاكية هي F_f . وتساوي القوة الكلية المؤثرة على السيارة $F_T = F_1 + F_2 + F_f$.



شكل ٦,٩ : استخدام المثلثات لجمع متجهات القوى في مثال ٣ . فتجمع القوتان F_1 و F_2 أولاً ، ومن ثم يضاف مجموعهما بسهولة إلى F_f .



شكل ٦,١٠ : رسوم توضيحية اتجاهية لأمثلة على حركة نسبية . فيكون مقدار سرعته القطار v_t ١٢ قدم/ث ، ومقدار سرعته الركاب v_r نسبة إلى القطار ٥ قدم/ث . أمّا المجموع $v_t + v_r$ ، فهو سرعته الركاب نسبة إلى سطح الأرض .

كما يُحدَّد من بوصلته ومن مؤشر عداد السرعة الهوائية airspeed indicator أن v_a ذات مقدار ١٢٠ ميلاً/س وأنّها متّجهة بزاوية ٣٠ مع غرب الشّال west of north [شكل ٦,١١ (أ)]. فما سرّجهة الرّيح ؟

هذه معضلة عن طرح المتّجهات :

$$v_w = v - v_a . \quad (٦,١٢)$$

ونبيّن الرّسم التّوضيحي السّهانيّ في شكل ٦,١١ (ب) . فنستغلّ الحقيقة بأنّه يكون مثلثاً متساوي السّاقين isosceles ونكتب

مثلث الرّيح

$$\begin{aligned} v_w &= 2v \sin (15 \text{ deg}) \\ &= 2 \times 120 \text{ mile/hr} \times 0.259 \\ &= 62.2 \text{ mile/hr.} \end{aligned}$$

أما اتّجاه v_w فهو ١٥ شمال الشرق north of east .

■

٦,٣ ضرب متّجه في كميّة عدديّة Multiplication of a Vector by a Numeric

يُعرّف حاصل ضرب كميّة عدديّة α ومتّجه v (الذي يُكتب αv) بأنّه متّجه مقداره $|\alpha|v$ ، واتّجاهه مواز للمتّجه v إذا كانت α موجبة ، وموازي عكسياً antiparallel للمتّجه v إذا كانت α سالبة . ويمكن تصوير هذه العمليّة هندسياً كعمليّة مطّ أو انكماش لمتّجه بدون تغيير الخطّ الذي يؤثر على امتداده . مثلاً ، تعني المعادلة الاتّجاهيّة

$$b = 3a$$

أنّ المتّجه b له ثلاثة أمثال مقدار a ونفس اتّجاه a (شكل ٦,١٢) . كذلك ، إذا ارتبط زوج آخر من المتّجهات بالعلاقة

$$c = 0.25d,$$

فإنّ المتّجه d ، إذا ما تقلّص إلى رُبع مقداره بدون تغيير اتّجاهه ، يُعطي المتّجه c . والمعادلة

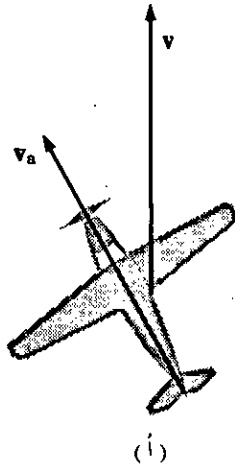
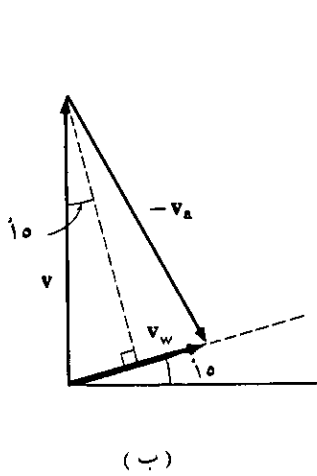
$$e = (-2)f$$

لها نفس المدلول كالمعادلة

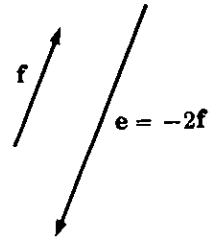
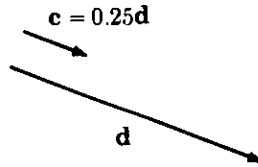
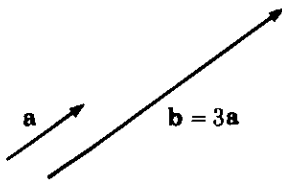
$$e = 2(-f).$$

فالمتّجه e ضعف مقدار f كما أنّه مضادّ الاتّجاه . ويمدّنا تعريف الزّخم بمثال فيزيائيّ بسيط على ضرب متّجه بكميّة عدديّة :

$$p = mv ; \quad (٦,١٣)$$



شكل ٦,١١ : تحديد سرّجة الرّيح .
 (أ) الكمّيّات المعلومة : السّرّجة نسبة إلى الأرض ،
 v ؛ والسّرّجة نسبة إلى الهواء ، v_a .
 (ب) رسم هندسيّ لإيجاد سرّجة الرّيح ،
 $v_w = v - v_a$.



شكل ٦,١٢ : إن ضرب متجه بكميّة عددية مكافئ لمط أو انكماش المتجه . وقد يكون المتجه الجديد مضاداً في الاتجاه ، إذا كانت الكميّة العددية سالبة ؛ كما قد يكون له وَحْدَةٌ قياس مختلفة ، إن لم تكن الكميّة العددية لأبعديّة .

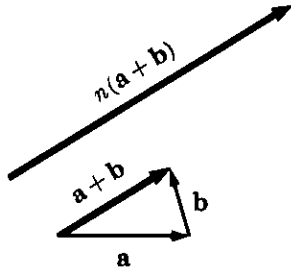
أي أنّ متجه السّرّجة v مضروباً في الكتلة القياسية m يُعطي متجه الزّخم p . لاحظ أنّه ليس ضرورياً للكميّة العددية الظّاهرة في مثل هذا الضرب أن تكون لأبعديّة ؛ حيث أنّ بُعدَي p و v مختلفان .

ويمكن أن تُؤتلف عمليّتا الجمع والضرب بواسطة كميّة عددية فتُعبّر عن قانون التّوزيع distributive law لحساب المتجهات :

قانون التّوزيع

$$n(a + b) = na + nb ; \quad (٦,١٤)$$

أي أنّ جمع متجهين ومن ثم ضرب المجموع في كميّة عددية يُعطي نفس النتيجة مثل ضرب المتجهين كلّ على حدة في الكميّة العددية قبل جمعها . ويمكن اعتبار قانون التّوزيع كمسلمة أساسية لحساب المتجهات ؛ غير أنّ صحته تنتج عن القواعد الهندسية لمعالجة المتجهات التي سبق لنا أن وضعناها . فيدّللُ الرّسم التّوضيحي السّهانيّ في شكل ٦,١٣ على قانون التّوزيع بطريقة بسيطة . كما يسري أيضاً قانون التّرافق للضرب ، الذي يُعبّر عنه بالعلاقة



شكل ٦,١٣ : قانون التوزيع
لحساب المتجهات . أنظر المعادلة
٦,١٤ .

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a. \quad (٦,١٥)$$

قانون الترافق

وَنُعَرِّفُ خاصِيَّتَا التَّرَافُقِ وَالتَّوْزِيعِ ، إِذَا مَا أَخَذْنَا مَعًا ، مَا يُدْعَى بِالْخَاصِيَّةِ الْخَطِيَّةِ لِلْمَتَّجِهَاتِ ،
الَّتِي يُعَبَّرُ عَنْهَا بِالْمَعَادِلَةِ

$$\alpha(\beta a + \gamma b) = (\alpha\beta)a + (\alpha\gamma)b. \quad (٦,١٦)$$

الخاصية الخطية

والحقيقة القائلة أَنَّ كُلَّ الْخَوَاصِّ الْخَبَرِيَّةِ الْعَامَّةِ لِلْمَتَّجِهَاتِ الَّتِي عَبَّرْنَا عَنْهَا حَتَّى الْآنَ تَكُونُ
مُطَابِقَةً لَخَوَاصِّ الْأَعْدَادِ إِنَّمَا تَعْنِي أَنَّ الْعَدِيدَ مِنْ - لَكِنْ لَيْسَ جَمِيعَ - الْقَوَاعِدِ الْمَأْلُوفَةِ لَجَبْرِ
الْأَعْدَادِ يَصَحُّ أَيْضًا لَجَبْرِ الْمَتَّجِهَاتِ .

٦,٤ مَتَّجِهُ الْمَوْضِعِ The Position Vector

مِنْ بَيْنَ الْكَمِّيَّاتِ الْمَتَّجِهَةِ الْفِيزِيَاءِيَّةِ ، يُعْتَبَرُ الْمَوْضِعُ وَاحِدًا مِنْ أَهْمِهَا . فَمَوْضِعُ جَسِيمٍ فِي
الْمَكَانِ (أَوْ - مَا دُمْنَا فِي هَذَا الصَّدَدِ - مَوْضِعُ أَيَّةِ نَقْطَةٍ ، سَوَاءً احْتَلَّهَا جَسِيمٌ أَوْ لَا) هُوَ كَمِيَّةٌ
مَتَّجِهَةٌ . وَيَكُونُ مَقْدَارُهُ هُوَ الْمَسَافَةُ بَيْنَ النَّقْطَةِ وَنَقْطَةِ أَصْلٍ مَخْتَارَةٍ جَزَافًا ، كَمَا أَنَّ اتِّجَاهَهُ يَكُونُ
اتِّجَاهَ النَّقْطَةِ مِنْ نَقْطَةِ الْأَصْلِ . وَمَتَّجِهُ الْمَوْضِعِ فَرِيدٌ مِنْ عِدَّةِ نَوَاحٍ . الْأَوَّلَى ، أَنَّ لِمَقْدَارِهِ - كَمَا
لَاتِّجَاهِهِ - مَغْزَى هَنْدَسِيًّا ، بِخِلَافِ مَعْظَمِ الْكَمِّيَّاتِ الْمَتَّجِهَةِ . وَالثَّانِيَّةُ ، أَنَّ تَعْرِيفَهُ ، بِخِلَافِ
مَعْظَمِ الْكَمِّيَّاتِ الْمَتَّجِهَةِ أَيْضًا ، يَعْتَمِدُ عَلَى اخْتِيَارِ نَقْطَةِ أَصْلٍ . أَمَّا النَّاحِيَةُ الثَّلَاثَةُ فَهِيَ ، كَمَا
سَنُبْحَثُ فِي الْبَنْدِ التَّالِيِ ، أَنَّهُ مَتَّجِهٌ مَعْيَارِيٌّ تُعَيِّنُنَا خَوَاصُّهُ عَلَى تَعْرِيفِ مَتَّجِهَاتٍ أُخْرَى . هَذَا ،
وَإِنَّ رَمْزًا مَأْلُوفًا لِمَتَّجِهِ الْمَوْضِعِ هُوَ r .

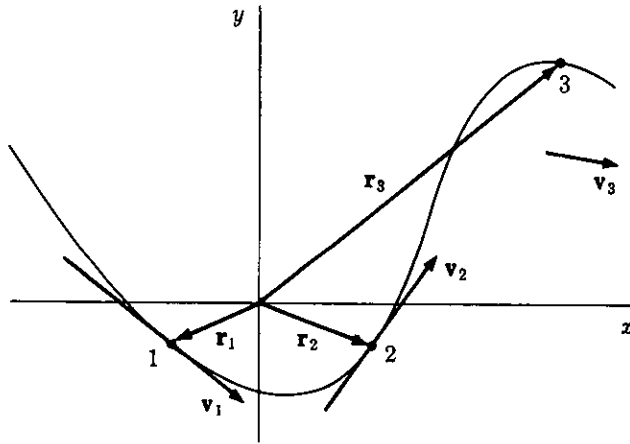
السَّمَاتُ الْخَاصَّةُ لِمَتَّجِهِ الْمَوْضِعِ

وَجُلُّ الْمَتَّجِهَاتِ ، بِمَا فِيهَا مَتَّجِهُ الْمَوْضِعِ ، تُعَرَّفُ عِنْدَ نَقْطَةٍ مَفْرَدَةٍ فِي الْمَكَانِ . وَتَحْجُبُ
هَذِهِ الْحَقِيقَةُ أحيانًا الْحَقِيقَةَ الْقَائِلَةَ أَنَّهُ يَتَعَيَّنُ عَلَى السَّهْمِ التَّمْثِيلِيِّ فِي رَسْمٍ تَوْضِيحِيٍّ أَنَّ يَمْتَدَّ خِلَالَ
مَسَافَةٍ مَتْنَاهِيَّةٍ . إِعْتَبِرْ ، مَثَلًا ، ثَلَاثَ قُوَى مَجْمُوعَهَا صِفْرٌ ، وَتَوَثَّرَ عِنْدَ نَقْطَةٍ . فَعِمْ أَنَّ الْمَتَّجِهَاتِ
مُعَرَّفَةٌ فَقَطْ عِنْدَ تِلْكَ النَّقْطَةِ ، فَإِنَّ الرِّسْمَ التَّوْضِيحِيَّ السَّهْلَانِيَّ الَّذِي يُمَثِّلُ مَجْمُوعَهَا (شَكْلُ
٦,١٤) يَكُونُ - بِالضَّرُورَةِ - مَمْتَدًّا . أَوْ اعْتَبِرْ الْكَتْرُونَا مُتَحَرِّكًا عَلَى امْتِدَادِ مَسَارٍ مَا فِي الْمَكَانِ

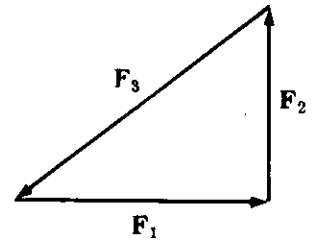
يُعَرَّفُ مَتَّجِهُ الْمَوْضِعِ ، مِثْلُهُ مِثْلُ
جُلِّ الْمَتَّجِهَاتِ ، عِنْدَ نَقْطَةٍ

(شكل ٦,١٥). فتكون سرجهته كمية متجهة ، ويمكن تمثيلها عند أية لحظة بواسطة سهم . ويشير هذا السهم ، بغض النظر عن طوله أو وضعه placement ، إلى نقطة مفردة على المسار .

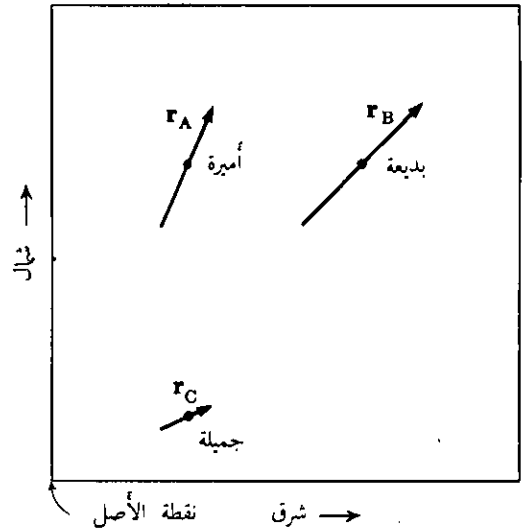
وأنه لعرف شائع ، كما هو مبين في شكل ٦,١٥ ، أن نرسم السهم التمثيلي لمتجه موضع من نقطة الأصل إلى النقطة المعنية . وغالباً ما يكون هذا ملائماً ، حيث يضمن الحصول على الاتجاه الصائب والطول النسبي للسهم ؛ بيد أنه لمن المهم أن نتذكر أن السهم لا يؤثر إلا على نقطة مفردة ، وأن وضعه الفعلي في الرسم ليس مهماً . فمتجه الموضع لنقطة هو مختلف تماماً عن خط يصل نقطة الأصل بالنقطة . ونذكر في شكل ٦,١٦ على مثال آخر على متجهات



شكل ٦,١٥ : مسار إلكترون في المكان ، وتمثيلات لمتجهات الموضع ومتجهات السرجة عند ثلاث نقاط على امتداد المسار .



شكل ٦,١٤ : قوى متوازنة مؤثرة على جسيم . وبالرغم من الامتداد المكاني للرسم التوضيحي ، فإن القوى جميعها تؤثر عند نقطة مفردة .



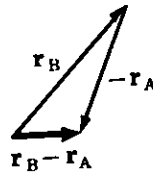
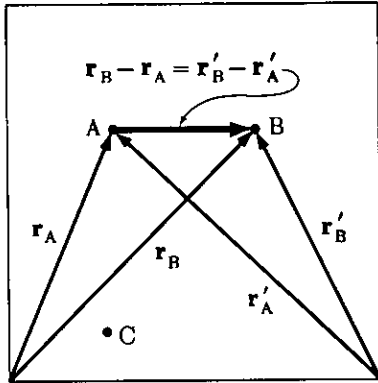
شكل ٦,١٦ : متجهات موضع . تمثل السهام الثلاثة مواضع أميرة وبديعة وجميلة في إطار إسناد تقع فيه نقطة الأصل عند الزاوية الجنوبية الغربية من الغرفة .

الموضع ... تقف أميرة وبديعة وجميلة عند النقاط A و B و C في غرفة مربعة جدرانها متجهة على امتداد الشمال - جنوب north-south والشرق - غرب east-west . فباختيار الزاوية الجنوبية الغربية من الغرفة كنقطة الأصل ، فإننا ندعو متجهات الموضع الثلاثة $\mathbf{r}_A$ و $\mathbf{r}_B$ و $\mathbf{r}_C$ ، ونبين سهامها التمثيلية في الشكل ، بحيث نتعمد اختيار السهام - هذه المرة - أقصر من بُعد نقطة الأصل عن النقاط A و B و C .

□ متجه الإزاحة Displacement Vector

يُدعى الفرق بين متجهي موضع متجه إزاحة . وهذا هو متجه الموضع لإحدى النقطتين بالنسبة إلى النقطة الأخرى ، بدلاً من نقطة الأصل . وعلى ذلك ، فإن $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ هو متجه الموضع لبديعة بالنسبة إلى أميرة (شكل ٦،١٧) . كما قد يُدعى أيضاً بالإزاحة من A إلى B . وكما هو مبين في شكل ٦،١٨ ، يكون متجه الإزاحة مستقلاً عن اختيار نقطة الأصل . وكثيراً ما تظهر متجهات الإزاحة ، في الفيزياء ، كتغير في موضع جسيم من زمن واحد إلى آخر . فنستطيع الكتابة عندئذٍ

لا يعتمد متجه الإزاحة على نقطة الأصل



شكل ٦،١٧ : رسم هندسي لإيجاد متجه الإزاحة $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$

شكل ٦،١٨ : تتغير متجهات الموضع بتغير نقطة الأصل - في هذا المثال ، $\mathbf{r}_A$ إلى $\mathbf{r}'_A$ و $\mathbf{r}_B$ إلى $\mathbf{r}'_B$ - لكن متجهات الإزاحة لا تتغير : $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \mathbf{r}'_B - \mathbf{r}'_A$

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1). \quad (٦،١٧)$$

كذلك ، كثيراً ما يُستخدم الرمز s أو Δs لمتجه الإزاحة .

٦،٥ المركبات Components

كَيْمَا نَعْرِفَ متجه الموضع ، من الضروري أن نختار نقطة أصل اعتباطية ، قد تقع عند أية نقطة مناسبة . وغالباً ما يكون ملائماً إلى حد بعيد عند دراسة المتجهات ، رغم عدم ضرورته ،

الإحداثيات : ليست ضرورية
لكنها ملائمة لدراسة المتجهات

أن نختار أيضاً فئةً اعتباطيةً من اتجاهات الإسناد ؛ أي أن نختار إطار إسناد ونظام إحداثيات .
وسنحصر اهتمامنا في أنظمة الإحداثيات الديكارتية اليمينية التي تُمَيِّزُ بمحاور x و y و z .
فيمكن كتابة أي متجه كمجموع متجهات موازية للمحاور :

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} . \quad (6,18)$$

وهذه العملية ، التي تُدعى تحليل resolution متجه إلى مركباته ، مدلل عليها لمتجه في مستوى في شكل ٦,١٩ . وثمة تحليل آخر يكون ملائماً أيضاً ، يكتب بمقتضاه كل من المتجهات ذات المركبتين أو المركبات الثلاثة كحاصل ضرب كمية عددية وأخرى متجهة طولها الوحدة .
ومتجهات الوحدة unit vectors هذه ، $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ ، الموازية للمحاور x و y و z ، على التوالي ، مبيّنة في شكل ٦,٢٠ . ويمكن كتابة متجه $\mathbf{a}$ ، بدلالة متجهات الوحدة ، على الصورة :

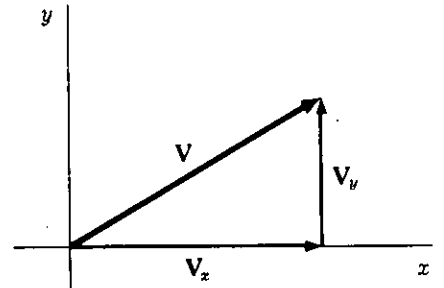
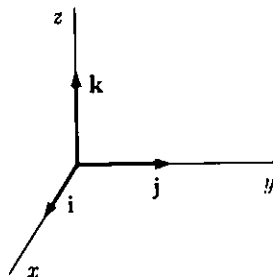
متجهات الوحدة

تحليل متجه إلى مركبات

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} . \quad (6,19)$$

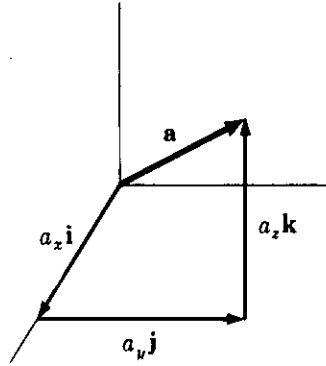
وقد تكون الكميات العددية a_x و a_y و a_z موجبة أو سالبة (أو صفراً) . وإن هذه الكميات العددية هي التي تُدعى عادةً بمركبات المتجه . وهندسياً ، يساوي مقدار المركبة طول مسقط projection متجه على محور (شكل ٦,٢١) . ويمكن التعبير عن هذا المسقط كمقدار المتجه مضروباً في جيب تمام الزاوية بين المتجه والمحور ؛ مثلاً

$$a_x = a \cos \theta_x . \quad (6,20)$$

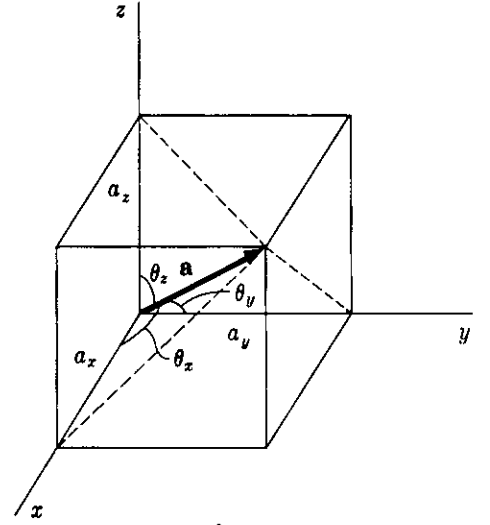


شكل ٦,٢٠ : متجهات الوحدة ، $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$.

شكل ٦,١٩ : المركبات . يُعبّر عن متجه $\mathbf{V}$ كمجموع
مكون من متجه V_x مواز لمحور x ومتجه V_y مواز
محور y .

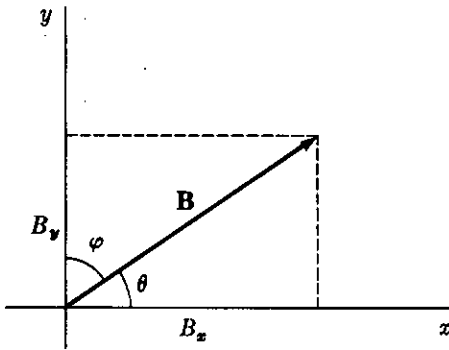


(ب)



(أ)

شكل ٦,٢١ : (أ) مركبات متجه هي مقادير مساقطه
على محاور x و y و z . (ب) يمكن كتابة متجه
كمجموع ثلاثة متجهات متعامدة :
 $a = a_x i + a_y j + a_z k$.



شكل ٦,٢٢ : مركبات في بُعْدَيْن :

$$B_y = B \cos \varphi = B \sin \theta \text{ , } B_x = B \cos \theta$$

كما نستطيع الكتابة في بُعْدَيْن (شكل ٦,٢٢)

$$B_x = B \cos \theta, \quad (٦,٢١)$$

$$B_y = B \cos \varphi. \quad (٦,٢٢)$$

إذا كانت θ الزاوية بين B ومحور x ، وإذا كانت φ الزاوية بين B ومحور y . أو ، بطريقة
بديلة ، يمكن كتابة هذا الزوج من المعادلات على الصورة :

$$B_x = B \cos \theta, \quad (٦,٢٣)$$

$$B_y = B \sin \theta. \quad (٦,٢٤)$$

وبتطبيق نظرية فيثاغورس في ثلاثة أبعاد ، نجد أنَّ العلاقة بين مقدار متجه ومركباته هي

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (٦,٢٥)$$

معادلات للمركبات

وغالبا ما تُسهّلُ العملياتُ الاتجاهيةُ باستخدام المركّبات . مثلاً ، في مجموع اتجاهي ،
يمكن جمع المركّبات المتناظرة على حِدّةٍ ممّا يُحيلُ المجموع الاتجاهي إلى مجاميعٍ عدديةٍ . فإذا
كان $c = a + b$ ، نجد أنّ

$$c_x = a_x + b_x , \quad (6,26)$$

$$c_y = a_y + b_y , \quad (6,27)$$

$$c_z = a_z + b_z . \quad (6,28)$$

معادلة اتجاهية واحدة تُغطي ثلاث
معادلات للمركّبات

ولإثبات هذه النتائج ، أكتب المجموع الاتجاهي بصورة صريحة explicitly :

$$a + b = (a_x i + a_y j + a_z k) + (b_x i + b_y j + b_z k) . \quad (6,29)$$

ونظراً لخاصية الترافق للجمع ، يمكن إزالة الحاصرات في المعادلة ٦,٢٩ . عندئذٍ ، تمكّننا
خاصية التوزيع من أن نكتب $(a_x + b_x)i = a_x i + b_x i$ ، وهكذا دواليك ؛ أو

$$c = (a_x + b_x)i + (a_y + b_y)j + (a_z + b_z)k ; \quad (6,30)$$

وهذه معادلة مكافئة للمعادلات ٦,٢٦ - ٦,٢٨ .

وإذا كان $e = -f$ ، غيّرت كلّ المركّبات إشارتها :

$$e_x = -f_x , \quad (6,31)$$

$$e_y = -f_y , \quad (6,32)$$

$$e_z = -f_z . \quad (6,33)$$

كذلك ، يمكن التعبير ببساطة بدلالة المركّبات عن المعادلة الاتجاهية $g = \alpha h$ ، التي تنطوي على
ضرب متجه بكمية عددية :

$$g_x = \alpha h_x , \quad (6,34)$$

$$g_y = \alpha h_y , \quad (6,35)$$

$$g_z = \alpha h_z . \quad (6,36)$$

ومع أنّ هذه المعادلات تبدو بديهية ، فإنّها لتقتضي برهاناً ، نتركه كمسألة للقارئ .

أما مركبات متجه الموضع للنقطة ، فهي مُجرّد الإحداثيات الديكارتية للنقطة :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (٦,٣٧)$$

مركبات متجه الموضع

حيثُذ ، يمكن التعبير عن متجه إزاحة ، $\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ، على صورة مركبات بواسطة المعادلات

$$s_x = x_2 - x_1, \quad (٦,٣٨)$$

$$s_y = y_2 - y_1, \quad (٦,٣٩)$$

مركبات متجه الإزاحة

$$s_z = z_2 - z_1. \quad (٦,٤٠)$$

ومركبات الإزاحة هذه مستقلة عن اختيار نقطة الأصل ، بشرط أن تُثبت اتجاهات الإسناد .

■ مثال ١ : في شكل ٦,١٦ ، يكون موضع أميرة ١٠,٩ قدم من نقطة الأصل ، كما يصنع متجه موضعها زاوية ٦٦,٥ مع الاتجاه الشرقي . فما مركبات متجه موضعها ؟

اختر محور x ليشير نحو الشرق ومحور y ليشير نحو الشمال . ولتبسيط الرموز ، أكتب عندئذٍ ، $(r_A)_x = x_A$ و $(r_A)_y = y_A$.

$$x_A = r_A \cos (66.5 \text{ deg}) = 10.9 \text{ ft} \times 0.399 = 4.35 \text{ ft},$$

$$y_A = r_A \cos (23.5 \text{ deg}) = 10.9 \text{ ft} \times 0.917 = 10.0 \text{ ft}.$$

و بمقدورنا الحصول على النتيجة الثانية أيضاً من العلاقة $y_A = r_A \sin (66.5 \text{ deg})$. ■

■ مثال ٢ : مركبتا متجه الموضع لبديعة هما $x_B = y_B = 10.0 \text{ ft}$. فما مسافة بديعة من نقطة الأصل ، وما الزاوية التي يصنعها متجه موضعها بالنسبة إلى محور x (المتجه شرقاً) ؟

من المعادلة ٦,٢٥ ، يتحدّد مقدار متجه موضعها بالعلاقة

$$r_B = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = \sqrt{200 \text{ ft}^2} = 14.14 \text{ ft}.$$

ومن المعادلة ٦,٢٠ ، يتحدّد جيب تمام الزاوية بين هذا المتجه ومحور x بالعلاقة

$$\cos \theta = \frac{x_B}{r_B} = \frac{10.0}{14.14} = 0.707,$$

التي تُعطي $\theta = 45 \text{ deg} = \frac{\pi}{4}$. ■

■ مثال ٣ : ما هو متجه الإزاحة من أميرة إلى بديعة ؟

هذا السؤال مُجَابُ عنه بيانياً في شكل ٦,١٧. وَجُجَابُ عنه ببساطة ودقة أكبر بدلالة المركبات ... عَرَّفْ $s = r_B - r_A$. حينئذٍ ،

$$s_x = x_B - x_A = 10.0 \text{ ft} - 4.35 \text{ ft} = 5.65 \text{ ft},$$

$$s_y = y_B - y_A = 10.0 \text{ ft} - 10.0 \text{ ft} = 0.$$

■ مثال ٤ : إلكترون منطلق باتجاه بروتون ساكن يتحرك على امتداد محور x بزخم $p_1 = 3.0 \times 10^{-10} \text{ كغ م / ث}$ (شكل ٦,٢٣). وينشأ الإلكترون عن التصادم بزخم p_3 متجه على امتداد محور y ؛ كما يبين القياس أن مقدار زخمه لا يتغير : $p_3 = p_1$. فما الزخم النهائي p_4 للبروتون ؟

رياضياً ، يمكننا صياغة هذه المسألة بالطريقة الآتية :

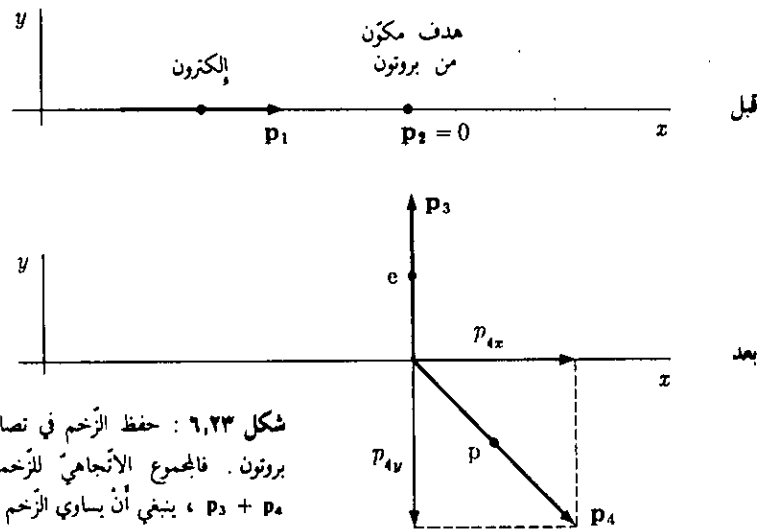
$$p_1 = p_i, \quad p_2 = 0,$$

$$p_3 = p_j, \quad p_4 = ?,$$

حيث $p = 3.0 \times 10^{-10} \text{ كغ م / ث}$. ونحصل على الجواب باستعمال المعادلة الاتجاهية لحفظ الزخم ،

حفظ الزخم : قانون اتجاهي

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4. \quad (٦,٤١)$$



شكل ٦,٢٣ : حفظ الزخم في تصادم إلكترون مع بروتون . فالجَمْعُ الاتجاهي للزخمين النهائيين ، $p_3 + p_4$ ، ينبغي أن يساوي الزخم الابتدائي p_1 .

وبما أن متجه الزخم الكلي على اليسار مُساوٍ لمتجه الزخم الكلي على اليمين ، فيمكن أن تُساوى مركباتها أيضاً :

• في الواقع $p_1 < p_3$ ؛ لكن الفرق يكون أقل من ٠,١ بالمئة .

$$p_{1x} + p_{2x} = p_{3x} + p_{4x} \quad (6,42)$$

$$p_{1y} + p_{2y} = p_{3y} + p_{4y} \quad (6,43)$$

فالمعادلة الاتجاهية تكافئ دائماً معادلتين أو ثلاث معادلات للمركبات . وإعادة كتابة المعادلة ٦,٤٢ تُعطي

$$p + 0 = 0 + p_{4x} ;$$

كما نحصل من المعادلة ٦,٤٣ على

$$0 + 0 = p + p_{4y} .$$

ونحلّ هاتان المعادلتان بسهولة لتُعطينا

$$p_{4x} = p = 3.0 \times 10^{-24} \text{ kg m/sec},$$

$$p_{4y} = -p = -3.0 \times 10^{-24} \text{ kg m/sec}.$$

ويتبع من ذلك أن اتجاه p_4 يصنع زاوية 45° مع محور x ؛ كما يكون مقداره

$$p_4 = \sqrt{p^2 + p^2} = 4.24 \times 10^{-24} \text{ kg m/sec}.$$

هذا ، ويُطبّق تحليل حفظ الزخم على هذا الغرار على مسارات الجسيمات الأولية في غُرَف الفقايع ؛ كما يُساعد على إثبات وجود جسيمات مُعادلة غير مرئية . ■

★ تحويل المركبات Transformation of Components

إن إحدى حسنات المعادلة الاتجاهية من قبيل $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ هي أنها لا تستند إلى أي نظام إحداثي معين ، كما أنها تسري في أي نظام إحداثي . وككثيرة تجريدية ، يكون المتجه $\mathbf{a}$ مستقلاً عن الإحداثيات . لكن ، لإعطائه تعبيراً مادياً ، ينبغي أن نعرف اتجاهه نسبة إلى محاور مختارة أو أن نُحدّد مركباته . وإن المركبات لتعتمد على اختيار الإحداثيات اعتبر ، على وجه الخصوص ، تأثير دوران إحداثيات ديكارتية مستوية على مركبات متجه موضع . وبين شكل ٦,٢٤ (أ) متجه موضع $\mathbf{r}_1$ ومركبتيه x_1 و y_1 ، استناداً إلى نظام إحداثي معين xy . فبالنسبة إلى نظام إحداثي مختلف $x'y'$ [شكل ٦,٢٤ (ب)] ، يكون لنفس المتجه $\mathbf{r}_1$ مركبتان مختلفتان ، x'_1 و y'_1 . وعلى ذلك ، فإننا نستطيع كتابة تعبيرين لنفس المتجه :

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}, \quad (6,44)$$

$$\mathbf{r}_1 = x'_1 \mathbf{i}' + y'_1 \mathbf{j}'. \quad (6,45)$$

ونتركها كمسألة للقارئ أن يبرهن أنه إذا أُدير النظام الإحداثي $x'y'$ عبر زاوية θ بالنسبة إلى النظام الإحداثي xy ، ارتبطت فئتا المركبات بالعلاقين

$$x'_1 = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta, \quad (٦,٤٦)$$

معادلتان تحويليتان

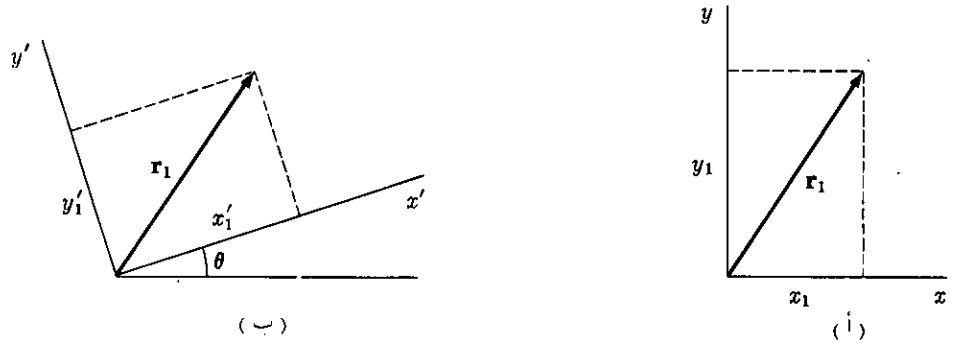
$$y'_1 = -x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta. \quad (٦,٤٧)$$

وتكون هاتان المعادلتان معاً ما يُدعى تحويلاً (من المركبتين x_1, y_1 إلى المركبتين x'_1, y'_1). وشكلياً ، يُعرّف المتجه بدلالة خواصّه التحويلية . ويُعتبر متجه الموضع بمثابة المتجه التمثيلي المعياري . فأيّة كمية أخرى ذات مركبات تتحول بنفس الطريقة هي ، بالتعريف ، متجه أيضاً . مثلاً ، نبيّن في شكل ٦,٢٥ متجه قوّة F : فنكون مركّباته في إطار الإسناد الأول F_x, F_y وفي إطار الإسناد الثاني F'_x, F'_y . وبما أنّ F متجه ، فإنّ هذه المركبات ترتبط بمعادلتين تماثلان تماماً للمعادلتين ٦,٤٦ و ٦,٤٧ :

$$F'_x = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta, \quad (٦,٤٨)$$

$$F'_y = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta. \quad (٦,٤٩)$$

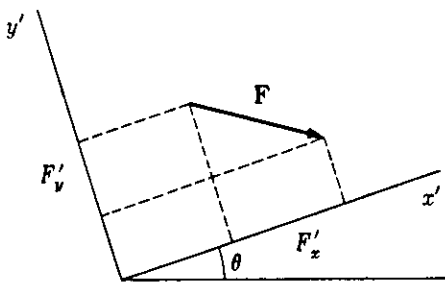
أما هندسياً ، فإنّ الكميّة المتجهيّة هي كميّة ذات مقدار واتّجاه في المكان ؛ ولا هذه الخاصيّة ولا تلك تتغيّر بتغيّر الإحداثيات .



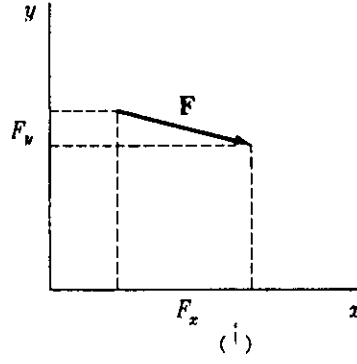
شكل ٦,٢٤ : ناعتمد مركّبات متجه على اختيار نظام الإحداثيات . فللمتجه r_1 المركبتان x_1 و y_1 بالنسبة إلى نظام إحداثي واحد والمركبتان x'_1 و y'_1 بالنسبة إلى آخر .

٦,٦ توافق المتجهات Vectorial Consistency

علاوة على توافق الوحدات والأبعاد ، ينبغي أن تتسم معادلات الفيزياء بتوافق المتجهات حتى تكون مفيدة على وجه العموم . وبتعابير فنيّة دقيقة ، يعني هذا أن كلا طرفي معادلة ، أو أن الحدود المضافة معاً في معادلة ، يجب أن يكون لها نفس الخواص التحويلية إذا تغيّر إطار



(ب)



(أ)

شكل ٦,٢٥ : تحويل المركبات . ترتبط المركبتان F'_x و F'_y بالمركبتين F_x و F_y بواسطة المعادلتين ٦,٤٨ و ٦,٤٩ . وهاتان مُطابقتان شكلاً للمعادلتين ٦,٤٦ و ٦,٤٧ ، اللتين تُحوّلان مركبتين من جهة موضع . ويمكن تعريف المنح ككثيوتية تتحول مركباتها بهذه الطريقة . ولا يتأثر السهم التنبئي لمنح بدوران محاور الإحداثيات .

الإسناد . بعبارة أبسط ، لا يمكن أن تُضاف المتجهات إلا للمتجهات ولا أن تُساوى إلا مع المتجهات . كذلك ، يمكن إضافة الكميات القياسية فقط للكميات القياسية ومساواتها فقط مع الكميات القياسية . وما قانون نيوتن الثاني إلا مثال على معادلة متسمة بتوافق المتجهات :

$$F = ma.$$

فكل طرف هو كمية متجهة . وبالمثل ، تتسم صيغة الطاقة الحركية ،

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

بتوافق المتجهات ؛ حيث أن كل طرف هو كمية قياسية . وترودنا المعادلة ٦,٤١ ، التي تعبر عن قانون حفظ الزخم ، بمثال آخر على معادلة ذات توافق اتجاهي .

ولعل أهم شيء يجب تذكره عن معادلة اتجاهية على الصورة

$$V_1 = V_2$$

هو أن كلتا السمتين الجوهريتين للمتجهات ، مقاديرها واتجاهاتها ، هما متساويتان . وبذلك ، كانت المعادلة الاتجاهية عبارة أقوى من المعادلة القياسية ؛ إذ تكون الأولى بمثابة بضع متساويات equalities متباينة ملفوفة في رزمة واحدة . ويمكن التذليل على هذه الحقيقة بأبسط صورة بواسطة الاستعانة بالمركبات ، كما في المعادلات ٦,٢٦ - ٦,٢٨ . ففي بُعدين ، يعني تساوي متجهين أن لهما مركبتين x متساويتين ؛ كما يعني ، بصورة مستقلة ، أن لهما مركبتين y متساويتين . أما في ثلاثة أبعاد ، فتكون المعادلة الاتجاهية مكافئة لثلاث معادلات مختلفة :

$$V_{1x} = V_{2x}, \quad (٦,٥٠)$$

$$V_{1y} = V_{2y}, \quad (٦,٥١)$$

$$V_{1z} = V_{2z}. \quad (٦,٥٢)$$

المعادلة الاتجاهية هي عبارة عن معادلتين أو ثلاث في معادلة واحدة

وتتسم هذه المعادلات بنوع خاص من توافق المتجهات ؛ حيث أنَّ المركبة V_{1x} هي كمية عددية ، أي ليست كمية قياسية ولا متجهة . لكن ، إذا أُدير إطار الإسناد ، فإن V_{1x} و V_{2x} تتغيران بنفس العامل وتظلان متساويتين .

٦,٧ حاصل الضرب القياسي The Scalar Product

مع أنَّ الأعداد تُضربُ بطريقةٍ واحدةٍ فقط ، فإنَّ ثمةَ عدَّةَ طرقٍ لتعريف ضرب المتجهات . وهناك حاصلًا ضربَ يتمتعان بأهمية خاصة في الفيزياء هما : حاصل الضرب القياسي ، الذي نعتبره في هذا البند ، وحاصل الضرب الاتجاهي ، الذي نعتبره في بند ٦,٨ . فهندسيًا ، يُعرَّف حاصل الضرب القياسي ، الذي يُكتب $a \cdot b$ ، بأنه حاصل ضرب مقدارَي المتجهين وجب تمام الزاوية المحصورة بينهما (شكل ٦,٢٦) :

حاصل الضرب القياسي هو كمية قياسية

$$a \cdot b = ab \cos \theta. \quad (٦,٥٣)$$

وبما أنَّ أياً من العوامل الثلاثة على اليمين لا يعتمد على اختيار الإحداثيات ، يكون حاصل الضرب هذا كمية قياسية ؛ بمعنى أنَّ مقداره لا يتغير بتغير الإحداثيات . وواضح من التعريف أنَّ حاصل الضرب هذا تبادلي :

خاصة التبادل

$$a \cdot b = b \cdot a. \quad (٦,٥٤)$$

كما أنَّ حاصل الضرب القياسي لمتجه في نفسه هو مربع مقدار المتجه :

$$a \cdot a = a^2. \quad (٦,٥٥)$$

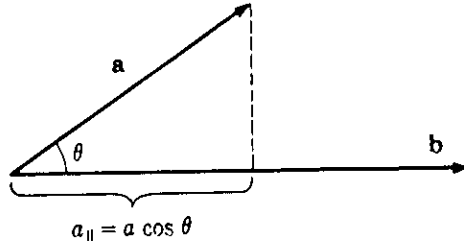
كذلك ، يكون حاصل الضرب القياسي لمتجهين متعامدين صفرًا . مثلاً ، متجهات الوحدة لها حواصل الضرب القياسية الآتية :

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1; \quad (٦,٥٦)$$

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0. \quad (٦,٥٧)$$

لاحظ في المعادلة ٦,٥٣ وشكل ٦,٢٦ أنَّ الاثنالاف $a \cos \theta$ هو مركبة المتجه a على امتداد اتجاه b . فإذا دعونا هذه المركبة $a_{\parallel}$ (التي تعني مركبة a الموازية للمتجه b) ، كان بمقدورنا أنَّ نكتب

$$a \cdot b = a_{\parallel} b. \quad (٦,٥٨)$$



شكل ٦,٢٦ : يُعرَّف حاصل الضرب القياسي بالعلاقة $a \cdot b = ab \cos \theta$. وهو يساوي أيضاً مركبة a الموازية للمتجه b ($a_{\parallel} = a \cos \theta$) مضروبة في b .

وعلى نفس المنوال ، بتعريف $b_{\parallel} = b \cos \theta$ ، يمكن كتابة حاصل الضرب هذا على الصورة:

$$a \cdot b = ab_{\parallel}. \quad (٦,٥٩)$$

ويُسم حاصل الضرب القياسي بالخاصية الخطية المعبر عنها بالعلاقة

$$c \cdot (\alpha a + \beta b) = \alpha c \cdot a + \beta c \cdot b. \quad (٦,٦٠)$$

الخاصية الخطية

ونستطيع أن نستغل هذه الخاصية بغية التعبير عن حاصل الضرب القياسي بدلالة المركبات .
فنكتب أولاً

$$a \cdot b = (a_x i + a_y j + a_z k) \cdot (b_x i + b_y j + b_z k).$$

ونظراً للخاصية الخطية ، بمقدورنا أن نَفكّ expand حاصل الضرب هذا وفق القواعد الجبرية المعتادة . فنتلاشى الحدود terms المحتوية على $i \cdot j$ و $i \cdot k$ و $j \cdot k$ (المعادلة ٦,٥٧) ؛ بينما تحتوي الحدود المتبقية على $i \cdot i$ و $j \cdot j$ و $k \cdot k$ ، التي يساوي كل منها ١ (المعادلة ٦,٥٩) . ونتيجة لذلك ، يُبسّط حاصل الضرب ليصبح

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (٦,٦١)$$

تعبير بدلالة المركبات

وغالباً ما تكون هذه صورة مفيدة لحاصل الضرب القياسي .

٦,٨ حاصل الضرب الاتجاهي The Vector Product

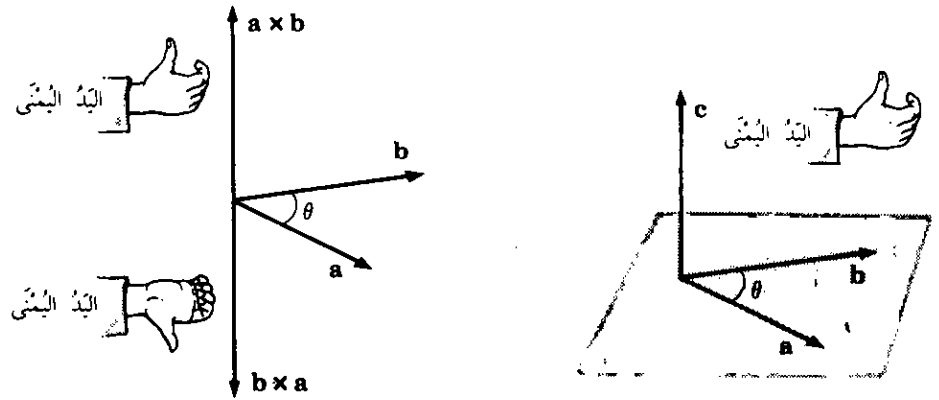
ابتداءً بمتجهين ، يمكن تكوين متجه آخر مُتعامد مع المستوى الذي يحوي المتجهين الأولين . ويكتب حاصل الضرب الاتجاهي هذا ، أو حاصل الضرب التّصالبي (المتصالب) cross product [نسبةً إلى شارة الصليب (x) cross] ، على الصورة :

$$c = a \times b. \quad (٦,٦٢)$$

وَيُعَرَّفُ اتِّجَاهُ c ، المتعامد مع كلا a و b ، بواسطة قاعدة اليد اليمنى (شكل ٦,٢٧). فإذا اتَّجَهَتْ أصابعُ اليدِ اليمنى أولاً على امتداد a ومن ثَمَّ قُوسَتْ لَتَتَّجِهَ على امتداد b (عَبْرَ الزَّاوِيَةِ الصُّغْرَى بَيْنَ a و b) ، فَإِنَّ الإِبْهَامَ الأيمنَ يُشِيرُ إِلَى اتِّجَاهِ c . كما يَتَحَدَّدُ مقدار c بالعلاقة

$$c = ab \sin \theta, \quad (٦,٦٣)$$

حيث θ هي الزَّاوِيَةُ الصُّغْرَى المحصورة بين a و b . لَاحِظْ أَنَّ حَاصِلَ الضَّرْبِ الاتِّجَاهِيِّ لِمَتَّجِهَيْنِ متوازيين هو صفر . وبما أَنَّ θ تقع بين صفر و π ، يكون $\sin \theta \geq 0$ ، فتعطي الصَّيْغَةُ ٦,٦٣ - بصورة صحيحة - مقداراً موجباً (أو صفرأ) للمتجه c . وَكُونُ الكَمِّيَّةِ c المَعْرُوفَةِ على هذا النَحْوِ هي مَتَّجِهَةٌ بالفعل إِنَّمَا نَذْكُرْهُ بَدُونِ بُرْهَانٍ . والواقع أَنَّهَا تَخْتَلِفُ عَنِ a و b بناحية واحدة دقيقة لكنْ هَامَةٌ ؛ وسنفسِّرُ هذا الاختلافَ فِي خَتَامِ هذا البَنْدِ .



شكل ٦,٢٨ : حاصل الضرب الاتجاهي هو لا تبادلي . فواضح من قاعدة اليد اليمنى أَنَّ $a \times b$ و $b \times a$ متضادان اتجاهًا .

شكل ٦,٢٧ : حاصل الضرب الاتجاهي ، $c = a \times b$. يكون المتجه c متعامداً مع المستوى المحنوي على a و b ، حيث يُعَرَّفُ اتِّجَاهُهُ بواسطة قاعدة اليد اليمنى . كما يكون مقدار c : $ab \sin \theta$.

وَيَتَحَدَّدُ التَّعْرِيفُ الجبري لحاصل الضرب الاتجاهي ، بدلالة المركبات ، كما يلي :

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad (٦,٦٤)$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad (٦,٦٥)$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x. \quad (٦,٦٦)$$

تعريف حاصل الضرب الاتجاهي
بدلالة المركبات

ونترك أمر تكافؤ المعادلتين ٦,٦٣ و ٦,٦٦ لمتجهين a و b واقعين في مستوى xy كمسألة للقاري. ونكمن أداة مساعدة للذاكرة، وعلى قدر من الفائدة، في تعريف المركبات المعبر عنه كمحدد رمزية symbolic determinant :

$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (٦,٦٧)$$

يمكن التعبير عن حاصل الضرب الاتجاهي على صورة محددة

ويبين حساب هذه المحددة، باستخدام متجهات الوحدة كعوامل مشتركة co-factors، أنها مكافئة للمعادلات ٦,٦٤ - ٦,٦٦.

ويتسم حاصل الضرب الاتجاهي بخاصية خطية :

$$c \times (\alpha a + \beta b) = \alpha c \times a + \beta c \times b. \quad (٦,٦٨)$$

خاصية خطية

إلا أنه ليس تبادلياً؛ بل يكون

$$a \times b = -b \times a; \quad (٦,٦٩)$$

الخاصية اللاتبادلية

فيقال إن حاصل الضرب الاتجاهي هو لاتبادلي. وتتبع هذه الخاصية من التعاريف الجبرية، أي المعادلات ٦,٦٤ - ٦,٦٦ أو المعادلة ٦,٦٧. كما تتبع أيضاً للتو من التعريف الهندسي، كما هو مبين في شكل ٦,٢٨. وعلى ذلك، فمن المهم أن نحتفظ بترتيب العوامل في حواصل الضرب الاتجاهية. وبما أن عمليات لاتبادلية أخرى تعين في الفيزياء المتقدمة، فمن الحكمة أن نكون العادة العامة بالاحتفاظ بترتيب العوامل في التعبيرات الاتجاهية حتى عندما لا يكون ذلك ضرورياً (كما في المعادلة ٦,٦٠).

ويمكن تركيب الصنفين، اللذين عرفناهما لتونا من حواصل الضرب، على نحو هرمي pyramided، بحيث يُعطيان حواصل ضرب أعقد، مثل $a \cdot (b \times c)$ و $a \times (b \times c)$. ونحن نذكر هذا الأخير كي نعرض مثلاً على إخفاق خاصية الترافق للضرب؛ إذ يكون التعبيران $a \times (b \times c)$ و $(a \times b) \times c$ غير متساويين. مثلاً، $i \times (i \times j) = -j$ ؛ في حين أن $(i \times i) \times j = 0$. أما ما يُدعى بحاصل الضرب المختلط mixed product، $a \cdot (b \times c)$ ، فله مدلول بسيط إذا كانت a و b و c كلها متجهات إزاحة: حيث تساوي الكمية القياسية $s_1 \cdot (s_2 \times s_3)$ حجم متوازي سطوح parallelepiped، تُعرف أضلاعه edges الثلاثة بواسطة المتجهات s_1 و s_2 و s_3 المنبثقة عن نقطة (شكل ٦,٢٩).

حاصل الضرب الثلاثي

$$a \times (b \times c)$$

حاصل الضرب المختلط

$$a \cdot (b \times c)$$

على العموم، يُدعى حاصل الضرب الذي يتضمن ثلاثة متجهات بحاصل ضرب ثلاثي triple product. وتنت هذا الحاصل بكلمة «اتجاهي» إذا كان الناتج متجهاً $[a \times (b \times c)]$ ، وبكلمة «قياسي» إذا كان الناتج كمية قياسية $[a \cdot (b \times c)]$ ؛ كما يُدعى هذا الأخير أحياناً بحاصل الضرب المختلط (أنظر المتن).

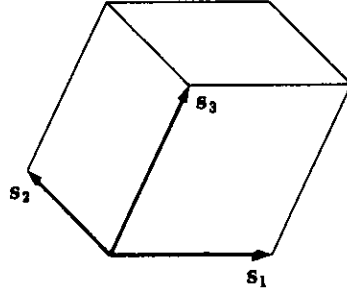
(المشرف)

■ مثال ١ : متجه الموضع لجسيم هو

$$\mathbf{r} = 6\mathbf{i} \text{ m}, \quad (٦,٧٠)$$

ومتجه سرجهته (شكل ٦,٣٠) هو

$$\mathbf{v} = (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \text{ m/sec}. \quad (٦,٧١)$$



شكل ٦,٢٩ : إن حاصل الضرب المختلط ، للثلاثة متجهات إزاحة ، $(\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3) \cdot \mathbf{s}_1$ ، هو مساو مقداراً لحجم متوازي سطوح تُعرّف أضلاعه بالمتجهات $\mathbf{s}_1$ و $\mathbf{s}_2$ و $\mathbf{s}_3$. (إذا كانت $\mathbf{s}_1$ و $\mathbf{s}_2$ و $\mathbf{s}_3$ مرتبة ترتيباً مبينياً ، كما في هذا الرسم التوضيحي ، فإن حاصل الضرب المختلط يساوي الحجم . أما إذا كانت مرتبة ترتيباً يسارياً ، فإنه يساوي سالب الحجم .)

شكل ٦,٣٠ : متجه الموضع ومتجه السرجة لجسيم .

فما كل من خواص الضرب التالية ؟

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{هـ})$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \quad (\text{أ})$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (\text{و})$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (\text{ز})$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r} \quad (\text{ج})$$

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (\text{ح})$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v} \quad (\text{د})$$

(أ) و (ب) . حاصل الضرب القياسي لمتجه مع نفسه هو مربع مقدار المتجه . وعلى ذلك ، يكون $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 = 36 \text{ m}^2$ ، و

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (9 + 25) \text{ m}^2/\text{sec}^2 = 34 \text{ m}^2/\text{sec}^2.$$

(ج) و(د). بما أن الزاوية المحصورة بين متجه ونفسه هي صفر، يكون $\sin \theta = 0$ ، وبالتالي $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$.

(هـ) و(و). إن التعاريف بدلالة المركبات لهما الأسهل تطبيقاً . (ونترك كتمرين للقارئ أمر التحقق من أن التعاريف الهندسية تغطي نفس النتائج). فيكون حاصل الضرب القياسي $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = xv_x + yv_y = 18 \text{ m}^2/\text{sec}$ ، كذلك ، بما أن $z = v_z = 0$ ، تبين المعادلتان ٦,٦٤ و ٦,٦٥ أن مركبتَي x و y للمتجه $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ بتلاشيان. أما مركبة z ، فهي $xv_y - yv_x = 30 \text{ m}^2/\text{sec}$. وبذلك ، بوسعنا أن نكتب

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 30\mathbf{k} \text{ m}^2/\text{sec}.$$

فالأتجاه ، الموازي لمحور z ، يؤكد أن $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ متعامد مع المستوى المحتوي على $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ ؛ كما أن الاتجاه على امتداد محور z الموجب يُحقق مُتَطَلَّبَ قاعدة اليد اليمنى .

(ز). بما أن $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ متعامدان ، يكون $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0$.

(ح). يُبين تطبيق قاعدة اليد اليمنى أن $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ ينبغي أن يتجه على امتداد محور y السالب . وبما أن $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ متعامدان ، فإن $\sin \theta = 1$ ؛ وبالتالي يكون مقدار حاصل الضرب الثلاثي هذا $|\mathbf{r}| |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = 180 \text{ m}^3/\text{sec}$. وبكتابته كمعادلة اتجاهية ، يكون الجواب

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = -180\mathbf{j} \text{ m}^3/\text{sec}.$$

* المتجهات القطبية والمتجهات المحورية Polar Vectors and Axial Vectors

يُدعى متجه الموضع وسائر المتجهات الأخرى ذات الخواص التحويلية المماثلة بمتجهات قطبية . فالسرعة ، والتسارع ، والقوة ، والزخم هي أمثلة على كميات متجهة قطبية . أما حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين قطبيين ، فيُدعى متجهاً محورياً . فالزخم الزاوي هو مثال على كمية متجهة محورية . ويختلف المتجه المحوري عن المتجه القطبي بناحية واحدة فقط هي أنه : إذا قُلبت reversed محاور نظام إحداثي ديكارتي ، x إلى $-x$ ، و y إلى $-y$ ، و z إلى $-z$ ، فإن كل مركبات المتجه القطبي تُغيّر إشارتها ؛ في حين أن كل مركبات المتجه المحوري تظل ثابتة . (مثلاً ، إذا كان $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ، فإن انقلاب reversal كلا $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ يترك $\mathbf{c}$ ثابتاً .) ويُسمى مثل انقلاب الإحداثيات هذا بارتكاس (أو تعاكس) inversion النظام الإحداثي . وهو يختلف عن أي دوران أو ائتلاف دورانات ؛ حيث أنه يغيّر نظاماً يمينياً إلى نظام يساري . فالمتجهات القطبية والمتجهات المحورية تتسم بخواص متماثلة بالنسبة إلى الدوران ، وخواص متضادة بالنسبة إلى الارتكاس .*

تُميّز المتجهات القطبية والمتجهات المحورية بواسطة خواصها الارتكاسية

يغيّر الارتكاس ، التفاف ، النظام الإحداثي

* ملاحظة على تسمية المصطلحات nomenclature : تُسمى المتجهات القطبية أحياناً بمتجهات ؛ بينما يُدعى المتجهات المحورية أحياناً بمتجهات كاذبة (زائفة) pseudovectors . أما في هذا الكتاب ، فتعني كلمة «متجه» ، وخُذها إما متجهاً قطبياً أو متجهاً محورياً ؛ إذ ليس من المهم ، لأغراض عديدة ، أن تُميّز بينهما .

وقد يدخل المتجه المحوري هو ذاته في حاصل ضرب اتجاهي . فيكون حاصل الضرب الاتجاهي لمتجه محوري ومتجه قطبي متجهاً قطبياً . فما حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين محوريين ؟

كذلك ، مثله مثل حاصل الضرب القياسي لمتجهين قطبيين ، يكون حاصل الضرب القياسي لمتجهين محوريين كمية حقيقية true scalar ؛ أي كمية عددية لا تتغير بواسطة أي تحويل للنظام الإحداثي ، بما فيه الارتكاس . غير أن حاصل الضرب القياسي لمتجه قطبي ومتجه محوري هوشيء مختلف نوعاً . فهو يدعى كمية قياسية كاذبة (زائفة) pseudoscalar . وهذه كمية عددية لا تتغير بدوران الإحداثيات ؛ لكن إشارتها تتغير بارتكاس الإحداثيات .

تعريف الكمية القياسية الكاذبة

وإحدى النتائج الهامة المترتبة على هذا التمييز بين المتجهات القطبية والمتجهات المحورية ، وبين الكميات القياسية والكميات القياسية الكاذبة ، هي توسيع فكرة توافق المتجهات . في طول الفيزياء الكلاسيكية وعرضها ، إذا كان أحد طرفي معادلة متجهاً قطبياً ، كان الطرف الآخر متجهاً قطبياً أيضاً . وعلى نفس الغرار ، تساوى المتجهات المحورية فقط مع المتجهات المحورية ، والكميات القياسية فقط مع الكميات القياسية ، والكميات القياسية الكاذبة فقط مع الكميات القياسية الكاذبة .

نعم توافق المتجهات

■ مثال ٢ : مِيز الطبيعة الاتجاهية أو القياسية لكل من الكميات الثماني المدرجة في مثال ١ على صفحة ٢٣٥ .

بمقدورنا أن نستهل الإجابة بالحقيقة القائلة إن كلا r و v متجه قطبي .

(أ) و (ب) . حاصل الضرب $r \cdot r$ و $v \cdot v$ هما كميتان قاسيتان حقيقتان . فتحت تأثير عملية ارتكاس ، يُغيّر كلا العاملين إشارتهما ، وبالتالي لا يتغير حاصل الضرب .

(ج) و (د) . يكون حاصل الضرب $r \times r$ و $v \times v$ متجهين محوريين ، إن لم يكونا صفراً .

(هـ) و (و) . لأسباب نوهنا بها آنفاً ، يكون $r \cdot v$ كمية قياسية ، كما يكون $r \times v$ متجهاً محورياً .

(ز) . بما أن $r \cdot (r \times v)$ هو حاصل الضرب القياسي لمتجه قطبي ومتجه محوري ، فيجب أن يكون كمية قياسية كاذبة .

(ح) . حاصل الضرب الثلاثي $r \times (r \times v)$ هو حاصل الضرب التصادمي لمتجه قطبي ومتجه محوري ؛ وبذلك يكون متجهاً قطبياً .

■

٦,٩ المتجهات المتغيرة مع الزمن : مشتقة المتجه

Vectors Changing in Time: The Derivative of a Vector

يُعنى شطراً كبيراً من الفيزياء بالحركة والتغير. وعلى ذلك ، فإن معدل التغير هو فكرة حاسمة للكميات القياسية والمتجهات على حد سواء. ففي بادئ الأمر ، تذكر كيف نعالج الكميات القياسية المتغيرة... لتكن $m(t)$ كتلة صاروخ متسارع ؛ وهي دالة قياسية. فيكتب تغير الكتلة من الزمن t_1 إلى الزمن t_2 على الصورة :

$$\Delta m = m(t_2) - m(t_1). \quad (٦,٧٢)$$

ويكون متوسط معدل تغير m أثناء الفترة الزمنية $t_2 - t_1$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m(t_2) - m(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (٦,٧٣)$$

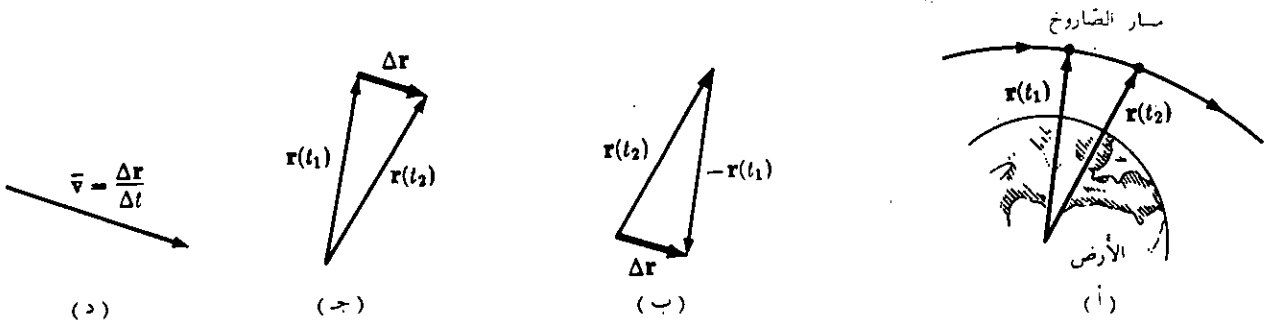
أما معدل التغير عند الزمن t_1 ، فهو المشتقة

$$\frac{dm}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t_1 + \Delta t) - m(t_1)}{\Delta t}. \quad (٦,٧٤)$$

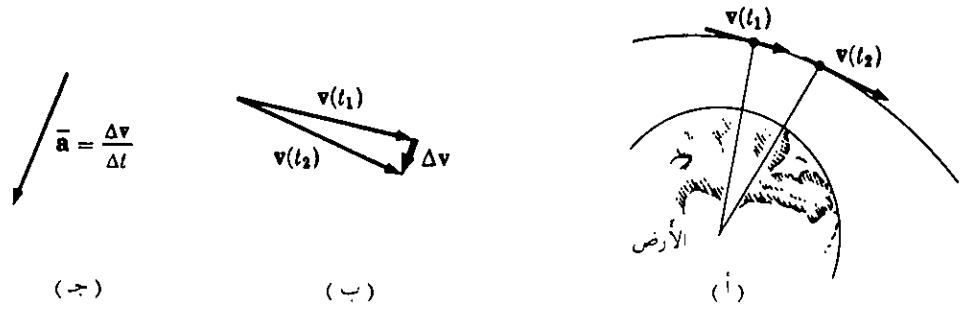
معدل تغير كمية قياسية

وتنطبق صيغ مشابهة تماماً على الكميات المتجهة. مثلاً ، إذا رمزنا $\mathbf{r}(t)$ إلى موضع الصاروخ ، الذي هو دالة في الزمن ، تحدّد تغير الموضع من الزمن t_1 إلى الزمن t_2 بالمعادلة ٦,١٧ ، التي هي عبارة عن تعريف ينطوي فقط على طرح متجه من آخر (شكل ٦,٣١). كما يكون متوسط معدل تغير الموضع أثناء الفترة الزمنية $t_2 - t_1$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{\Delta t}. \quad (٦,٧٥)$$



شكل ٦,٣١ : (أ) يكون لصاروخ متجه الموضع $\mathbf{r}(t_1)$ و $\mathbf{r}(t_2)$ عند الزمنين t_1 و t_2 . (ب) يُعرف رسم هندسي إزاحة الصاروخ : $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$. (ج) يبين رسم توضيحي سهماني مُمائل الموضع اللاحق كمجموع مكون من الموضع السابق والإزاحة : $\mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}(t_1) + \Delta \mathbf{r}$. (د) يُغطي ضرب $\Delta \mathbf{r}$ في العامل $1/\Delta t$ متوسط السُرعة في هذه الفترة ، $\bar{\mathbf{v}}$. وفي النهاية التي يقترب فيها Δt و $\Delta \mathbf{r}$ من الصفر ، يؤول هذا المتوسط إلى السُرعة اللحظية ، $d\mathbf{r}/dt$.



شكل ٦,٣٢ : (أ) يكون لصاروخ السرجهتان $v(t_1)$ و $v(t_2)$ عند الزمنين t_1 و t_2 . (ب) يُعرَّفُ تغير سرجهته بالعلاقة $\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$. ويمثل الرسم التوضيحي السهائي عملية جمع المتجهات ، $v(t_2) = v(t_1) + \Delta v$. (ج) يُعطى ضرب Δv بالعامل $1/\Delta t$ متوسط التسارع في هذه الفترة ، $\bar{a}$. وفي النهاية التي يقترب فيها Δt و Δv من الصفر ، يؤول هذا المتوسط إلى التسارع اللحظي ، $a = dv/dt = d^2r/dt^2$.

وتُعرَّفُ مشتقة متجه الموضع بأنها نهاية خارج القسمة هذا عندما يقترب Δt من الصفر :

معادل تغير كمية متجهة

$$\frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t_1 + \Delta t) - r(t_1)}{\Delta t} . \quad (٦,٧٦)$$

كما تُعرَّفُ مشتقات متجهات أخرى بطريقة مماثلة . لاحظ في المعادلتين ٦,٧٥ و ٦,٧٦ أن القسمة على Δt هي نفسها مثل الضرب في الكمية العددية $(1/\Delta t)$ ؛ وهذه عملية سبق لنا أن عرفناها .

فمشتقة الموضع تُعرَّفُ السرجة :

تعريف السرجة

$$v = \frac{dr}{dt} . \quad (٦,٧٧)$$

ومشتقة متجه السرجة تُعرَّفُ - بدورها - التسارع (شكل ٦,٣٢) :

تعريف التسارع

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} . \quad (٦,٧٨)$$

وهذه تعاريف أساسية لكنياتيك المتجهات . لاحظ تشابهها الوثيق في المظهر مع تعاريف الحركة الأحادية البعد ، التي وردت في بند ٥,٧ .

وبما أن المتجه موسوم بمقدار واتجاه ، فإن تغييراً في أي من هاتين الخاصيتين (أو في كليهما) يُشكِّلُ تغييراً في المتجه . وأبسط تغيير ، ذلك الذي يشبه التغيير في كمية عددية ، هو تغيير في المقدار فحسب . فقد يزيد الكترون في مسارع خطي سرعته من 1.0×10^8 م/ث إلى 1.5×10^8 م/ث بدون تغيير اتجاهه . عندئذٍ ، يكون التغيير في سرجهته متجهاً بنفس اتجاه السرجة ، وإذا مقدار 0.5×10^8 م/ث (شكل ٦,٣٣) . من ناحية أخرى ، قد يُغيَّرُ بروتون في مسارع دائري سرجهته من 1.0×10^8 م/ث شرقاً إلى 1.0×10^8 م/ث شمالاً

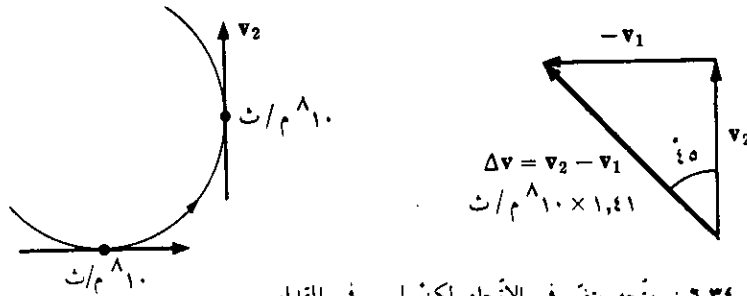
مثال : تغير المقدار فقط

مثال آخر : تغيير الاتجاه فقط

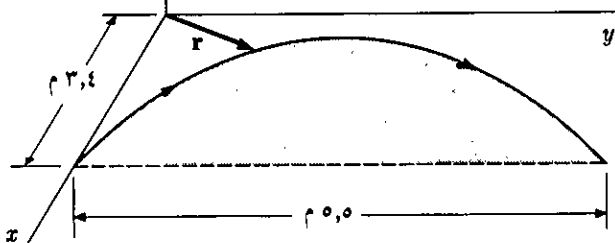
(شكل ٦,٣٤) - مما يشكّل تغييراً في الاتجاه بدون تغيير المقدار. ففي تلك الحالة ، يكون مقدار التغيير في السّرجة ، Δv ، $1,41 \times 10^8$ م/ث ، كما يكون اتجاهه غريباً شاملياً .

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{v_1} & \xrightarrow{v_2} & \xrightarrow{\Delta v = v_2 - v_1} \\ 10^8 \text{ م/ث} & 1,5 \times 10^8 \text{ م/ث} & 0,5 \times 10^8 \text{ م/ث} \end{array}$$

شكل ٦,٣٣ : متجه يتغير مقداراً لكن ليس اتجاهه .



شكل ٦,٣٤ : متجه يتغير في الاتجاه لكن ليس في المقدار.



شكل ٦,٣٥ : مسار كرة قاعدةٍ مقذوفة ، كما نعرّفه المعادلة ٦,٨٠ .

ونستنتج هذا بياناً في شكل ٦,٣٤ . وللحصول على النتيجة جبرياً ، دَعْ محورَ x يُشيرُ شرقاً ومحورَ y يشيرُ شمالاً . حيثُ نذكرُ ، تكون $v_1 = 1.0 \times 10^8 \text{ i m/sec}$ ، و $v_2 = 1.0 \times 10^8 \text{ j m/sec}$ ؛ كما تكون

$$\Delta v = v_2 - v_1 = (1.0 \times 10^8 \text{ j} - 1.0 \times 10^8 \text{ i}) \text{ m/sec.}$$

وفي نوااميس الطبيعة ، تكون تغيّرات الاتجاه بنفس الأهميّة كتغيّرات المقدار . لاحظْ في المثال المبين في شكل ٦,٣٤ أنّه حتّى عندما لا يخضع مقدار متجه لأيّ تغيير ، فقد يتأثر المتجه ذاته ، عن طريق تغيير الاتجاه ، بتغيير ذي مقدار كبير .

وتسمّ مشتقة كميّة عددية بالنسبة إلى الزمن بمُدلول بيانيّ بسيط . فما هي إلّا ميل المنحنى الناتج عن رسم الكميّة بيانياً كدالة في الزمن . ولا يوجد لمشتقة كميّة متجهة مثل هذا التّأويل البيانيّ البسيط . غير أنّه يمكن مُفاضلة مركّبات متجه كلٍّ على حِدّة ، حيث يتصرّف كلٌّ منها ككميّة عددية . فإذا عبّر عن متجه v بدلالة مركّباته

$$v = v_x i + v_y j + v_z k,$$

أمكن كتابة معدل تغير v على الصورة :

مشقة متجه بدلالة مركباته

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_x}{dt} i + \frac{dV_y}{dt} j + \frac{dV_z}{dt} k. \quad (٦,٧٩)$$

■ مثال : نظام إحداثي ، محورا x و y فيه أفقيان بينما يتجه محور z رأسياً إلى أعلى ، يتحدد فيه متجه الموضع لكرة قاعدة (بيسبول) مقذوفة (شكل ٦,٣٥) بالعلاقة

$$r = 3.4i + 5.5tj + (4.9t - 4.9t^2)k, \quad (٦,٨٠)$$

حيث يُعبّر عن r بالأمتار وعن t بالثواني . فما سرجهة وتسارع الكرة ؟

تزوّدنا مُفاضلة المركبات المباشرة بالأجوبة :

$$v = \frac{dr}{dt} = 5.5j + (4.9 - 9.8t)k, \quad (٦,٨١)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -9.8k, \quad (٦,٨٢)$$

حيث تكون وُحدة v م/ث وُحدة a م/ث^٢ . والتسارع هنا ثابت ومتجه رأسياً إلى أسفل .

٦,١٠ الحركة المنتظمة في دائرة Uniform Motion in a Circle

ثمة مثال فيزيائي ذو أهمية عملية كبيرة ، يُدللُ - بصورة رائعة - على سلطان كينماتيكا المتجهات ، ألا وهو الحركة المنتظمة لجسيم في دائرة . ونُصادفُ الحركة الدائرية ، أو شبه الدائرية nearly circular ، في ميادين عديدة في الطبيعة - حجر مثبت بنهاية حبل ويُلَوَّح في الهواء ؛ بروتون في مسار دائري ؛ الأرض في مدارها حول الشمس . ونخصّص الحديث هنا على الحركة الدائرية المنتظمة ، فنحص الكميات المتجهة الثلاث : الموضع ، والسرجهة ، والتسارع .

إعتبر جسيماً متحركاً بسرعة ثابتة v عكس عقربي الساعة counterclockwise حول دائرة نصف قطرها r (شكل ٦,٣٦) . للملاءمة ، نختار نقطة الأصل بحيث تقع عند مركز الدائرة ، كما ندع السهم الذي يمثل r يتجه على امتداد خط نصف قطري radial ابتداءً من نقطة الأصل وحتى نقطة على الدائرة . فواضح أن r له مقدار ثابت . وهو يدور بمعدل ثابت بسرعة زاوية ω نتحدّد بالعلاقة

$$\omega = \frac{v}{r} \quad (٦,٨٣)$$

(أنظر المعادلة ٥,٢٢) . ونكتب متجه الموضع على الصورة :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ &= r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (٦,٨٤)$$

حيث θ هي الزاوية القطبية المبينة في شكل ٦,٣٦ (وحيث استعملنا المعادلتين ٥,١ و ٥,٢). فإذا اخترنا صفر الزمن بحيث أن $\theta = 0$ صفرًا عندما يكون $r = 1$ صفرًا، حصلنا، من المعادلة ٥,٢٥، على

$$\theta = \omega t. \quad (٦,٨٥)$$

عندئذٍ، يمكن كتابة متجه الموضع، كدالة في الزمن، على الصورة :

$$\mathbf{r} = r \cos \omega t \mathbf{i} + r \sin \omega t \mathbf{j}. \quad (٦,٨٦)$$

متجه الموضع

وتصف هذه الصيغة الهامة متجهًا ذا مقدار ثابت يدور بمعدل منتظم.

والسرعة هي المشتقة الزمنية للموضع. ففاضلة المعادلة ٦,٨٦ تُعطي (إذا ما تذكرنا أن r و ω ثابتان)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -r\omega \sin \omega t \mathbf{i} + r\omega \cos \omega t \mathbf{j}. \quad (٦,٨٧)$$

فأضِلْ ذلك لنحصل على متجه السرعة

وبما أننا نتعامل مع حركة دائرية منتظمة، فإننا نعلم أن $\mathbf{v}$ ينبغي أن تكون متجهًا ذا مقدار ثابت، ومماسًا للدائرة، ويدور بمعدل ثابت. دعنا نتحقق من صحة هذه الخواص بصورة صريحة. فلمراجعة مقدار $\mathbf{v}$ ، نستطيع تكوين حاصل الضرب القياسي $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= r^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + r^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \\ &= r^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = r^2 \omega^2. \end{aligned} \quad (٦,٨٨)$$

وعلى ذلك، فإن مقدار $\mathbf{v}$ هو الثابت $r\omega$ ، الذي يتفق مع المعادلة ٦,٨٣. الآن، كون حاصل الضرب القياسي $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$:

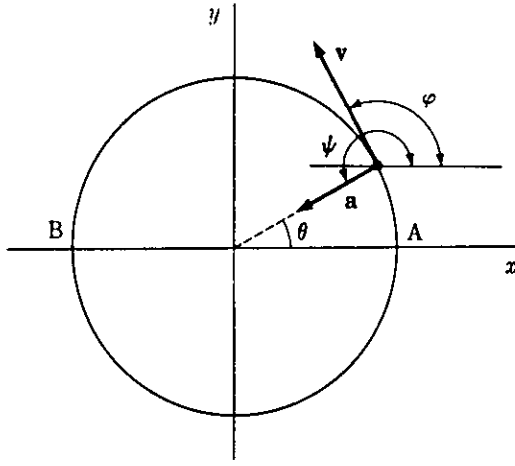
خواص متجه السرعة

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = -r^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t + r^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t = 0. \quad (٦,٨٩)$$

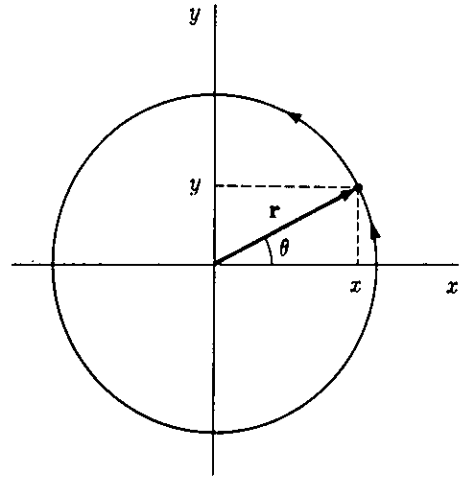
فيما أن حاصل الضرب هذا يتلاشى، فإنه يتعين على $\mathbf{v}$ أن تكون متعامدةً مع $\mathbf{r}$ ، وبالتالي مماسةً للدائرة. ويمكن تحديد الزاوية φ التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع محور x من صيغتي الإسقاط

$$v_x = v \cos \varphi, \quad (٦,٩٠)$$

$$v_y = v \sin \varphi. \quad (٦,٩١)$$



شكل ٦,٣٧ : السّرجة والتّسارع في حركة دائرية منتظمة . تحدّد الزّاوية φ المحصورة بين v ومحور x بالعلاقة $\varphi = \frac{1}{2}\pi + \theta = \frac{1}{2}\pi + \omega t$ ؛ بينما تحدّد الزّاوية ψ بين a ومحور x بالعلاقة $\psi = \pi + \theta = \pi + \omega t$



شكل ٦,٣٦ : تمثيل منجّه الموضع لجسيم متحرّك بانتظام في دائرة باختيار مناسب لصفر الزّمن ، يمكن كتابة الزّاوية θ المحصورة بين r ومحور x على الصّورة $\theta = \omega t$ ؛ كما تحدّد السّرعة بالعلاقة $v = r\omega$

إعتبرْ أولى هاتين المعادلتين . فيمكن إعادة كتابتها على الصّورة :

$$-r\omega \sin \omega t = v \cos \varphi.$$

وبما أنّ $v = r\omega$ ، يكون هذا مكافئاً للمعادلة

$$\cos \varphi = -\sin \omega t. \quad (٦,٩٢)$$

وتمثل لهذه المعادلة زاويتان متميزتان فيزيائياً φ هما : $\varphi = \frac{1}{2}\pi + \omega t$ و $\varphi = -\frac{1}{2}\pi - \omega t$ (أمّا الزوايا الأخرى التي تمثل لهذه المعادلة فتختلف عن واحدة من هاتين الزاويتين بالمقدار 2π ولا تكون متميزة فيزيائياً). ونتركها كمسألة للقارئ أن يبرهن ، باستخدام كلتا المعادلتين ٦,٩٠ و ٦,٩١ ، أن الحلّ الصحيح هو

$$\varphi = \frac{1}{2}\pi + \omega t. \quad (٦,٩٣)$$

وهذا يعني أنّ v تتّجه عكس عقربي السّاعة حول الدّائرة (شكل ٦,٣٧) ، وأنّها تدور بالمعدل الثّابت ω ؛ حيث أنّ

تدور v بالمعدل ω مس/ث

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (٦,٩٤)$$

وللحصول على التّسارع ، نُفاضِلُ المعادلة ٦,٨٧ بالنّسبة إلى الزّمن :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -r\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - r\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j}. \quad (٦,٩٥)$$

فأصل مرة ثانية للحصول على متجه التسارع

وتؤدي مقارنة هذه النتيجة مع المعادلة ٦,٨٦ للمتجه $\mathbf{r}$ - على الفور - إلى تعبير بسيط للغاية للتسارع $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}. \quad (٦,٩٦)$$

فالتسارع له مقدار ثابت

$$a = \omega^2 r \quad (٦,٩٧)$$

ويتجه نحو مركز الدائرة؛ أي أنه مواز عكسياً لمتجه الموضع $\mathbf{r}$. وبما أن $\omega = v/r$ ، نستطيع أن نكتب أيضاً

تعبيران للتسارع المركزي الجاذب

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (٦,٩٨)$$

ويدعى التسارع المتجه نحو مركز ثابت، كما في هذا المثال، بتسارع مركزي جاذب. centripetal acceleration

■ مثال ١: ما هو تسارع الأرض المركزي الجاذب (إذا قربنا حركتها كأنها دائرية)؟

بتعويض مُعطيات ملحق ٣ في المعادلة ٦,٩٨، نجد أن

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(2.98 \times 10^4 \text{ m/sec})^2}{1.496 \times 10^{11} \text{ m}} = 5.94 \times 10^{-3} \text{ m/sec}^2, \quad (٦,٩٩)$$

وهذه كمية صغيرة بالمقارنة مع تسارع السقوط الحر على سطح الأرض؛ حيث تكون نسبة هذين التسارعين

$$\frac{a}{g} = \frac{5.94 \times 10^{-3} \text{ m/sec}^2}{9.80 \text{ m/sec}^2} = 6.06 \times 10^{-4}.$$

■ مثال ٢: في الحركة الدائرية المنتظمة، ما السرعة المتوسطة والسرعة المتوسطة أثناء نصف دورة؟

† جَبَدَ الشيءَ: جَذَبَهُ؛ وَاجْتَبَدَهُ: اجْتَذَبَهُ؛ وَانْجَبَدَ: انْجَذَبَ (أنظر معاجم اللغة). وقد اخترنا كلمة «جاذب» في هذا السياق، بدلاً من «جاذب»، كي نُقرِّد هذه الأخيرة لظاهرة الجاذبية.

(المشرف)

إعتبر، على وجه الخصوص، الفترة θ صفراً إلى π ، أو t صفراً إلى π/ω (تذكر أن الدورة الكاملة هي $T=2\pi/\omega$). فبما أن السرعة ثابتة، تكون السرعة المتوسطة نفس الشيء مثل السرعة اللحظية، v . كذلك، للحصول على السرجة المتوسطة، نستخدم المعادلة ٦,٧٥. فالتغير في الموضع هو

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\pi/\omega) - \mathbf{r}(0) \\ &= -ri - ri = -2ri.\end{aligned}$$

والتغير في الزمن هو $\Delta t = \pi/\omega$. وعلى ذلك، يكون خارج القسمة، الذي هو السرجة المتوسطة،

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = -\frac{2}{\pi} \omega ri.$$

وبما أن $v = \omega r$ ، يمكن كتابة هذا ببساطة أكثر على الصورة:

$$\bar{\mathbf{v}} = -\frac{2}{\pi} vi.$$

وهذه السرجة المتوسطة تتجه عبر الدائرة (من A إلى B في شكل ٦,٣٧) ويكون مقدارها $(2/\pi)v$ ، أو حوالي $0.637v$. لاحظ أنه سيكون من الخطأ تماماً أن نكتب $\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}[v(\pi/\omega) + v(0)]$. فلماذا؟ ■

٦,١١ تفاضل وتكامل المتجهات Vector Calculus

نلخص في هذا البند، بدون برهان، بضع صيغ هامة لتفاضل وتكامل المتجهات والحقيقة أن البراهين، التي تتبع من التعريف الأساسي للمشتقة، ليست صعبة. ونسوق اثنين منها ضمن المسائل. ولأغراض تدليلية، نكتب المشتقات هنا بالنسبة إلى الزمن t ؛ لكن الصيغ تصلح للتفاضل بالنسبة إلى أية متغيرات عددية أخرى.

إن التفاضل عملية خطية، كما هو معبر عنه بالمعادلة

$$\frac{d}{dt}(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \beta \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \quad (٦,١٠٠)$$

حيث α و β ثابتان. كما تحدّد مشتقة حاصل ضرب كمية عددية وكمية متجهة بالعلاقة

$$\frac{d}{dt}(f\mathbf{V}) = \frac{df}{dt}\mathbf{V} + f\frac{d\mathbf{V}}{dt}, \quad (٦,١٠١)$$

التي تشبه تماماً الصيغة المناظرة لمشتقة حاصل ضرب كميتين عدديتين. ويتبع من المعادلتين ٦,١٠٠ و ٦,١٠١ المعادلة ٦,٧٩، التي تُعبر عن مشتقة متجه بدلالة المركبات. كذلك،

توجد لحاصل ضرب القياسي والاتجاهي - على حد سواء - قواعد بسيطة للتفاضل . وهذه هي :

$$\frac{d}{dt} (a \cdot b) = \frac{da}{dt} \cdot b + a \cdot \frac{db}{dt} , \quad (٦,١٠٢)$$

$$\frac{d}{dt} (a \times b) = \frac{da}{dt} \times b + a \times \frac{db}{dt} . \quad (٦,١٠٣)$$

وفي الصيغة الأخيرة ، يكون ترتيب العوامل مهماً . وهذه إن هي إلا عينة صغيرة sampling من المعادلات العديدة لتفاضل وتكامل المتجهات . وسنقدم في هذا الكتاب حفة أخرى هامة في مواضع لاحقة عندما تقتضيها التطبيقات الفيزيائية . كما يتضمن ملحق ٦ خلاصة لمثل هذه الصيغ .

خلاصة الأفكار والتعاريف

- الكمية العددية هي كمية ذات مقدار فحسب ، وتمثل بواسطة عدد (مثلاً ، مركبة متجه) .
- تتحدد مركبة متجه بالعلاقة $V_x = V \cos \theta$ ، حيث θ هي الزاوية المحصورة بين V ومحور x .
- الكمية القياسية هي كمية عددية مستقلة عن النظام الإحداثي (مثلاً ، الكتلة) .
- يمكن أن تساوى الكميات القياسية مع الكميات القياسية فقط وأن تضاف إلى الكميات القياسية فقط . كما لا يمكن أن تساوى المتجهات إلا مع المتجهات ولا أن تضاف إلا إلى المتجهات .
- المتجه هو كمية ذات مقدار واتجاه ، تتحول مركباته من نظام إحداثي واحد إلى آخر على نفس المنوال مثل مركبات متجه الموضع .
- يُعرّف حاصل الضرب القياسي هندسياً بالعلاقة $a \cdot b = ab \cos \theta$ ؛ وجبرياً ، بدلالة المركبات ، $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.
- متجه الموضع هو المتجه النموذجي . وتُعرف خواصه ماهية المتجه .
- يمكن تصور الأعداد والمتجهات (١) كمفاهيم تجريدية ؛ (٢) كتمثيلات هندسية ؛ و (٣) ككميات فيزيائية .
- يُعرّف حاصل الضرب الاتجاهي هندسياً بواسطة قاعدة اليد اليمنى والمعادلة $|a \times b| = ab \sin \theta$ ؛ وجبرياً ، بدلالة المركبات ، $c_x = a_y b_z - a_z b_y$ ، $c_y = a_z b_x - a_x b_z$ ، $c_z = a_x b_y - a_y b_x$.
- يمكن تمثيل المتجهات بواسطة سهام ، وحساب المتجهات بواسطة رسوم توضيحية سهّانية .
- يُكتب متجه على الصورة v ؛ كما يكتب مقداره $|v|$ ، أو v ، وتكتب مركباته V_x ، V_y ، V_z .

□ يمثل جمع المتجهات

$$، a + b = b + a ،$$

$$، (a + b) + c = a + (b + c) ،$$

□ يمثل ضرب متجه في كمية عددية

$$، n(a + b) = na + nb ،$$

$$، \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a ،$$

$$، \alpha(\beta a + \gamma b) = (\alpha\beta)a + (\alpha\gamma)b ،$$

□ يمثل حاصل الضرب القياسي

$$، a \cdot b = b \cdot a ،$$

$$، c \cdot (\alpha a + \beta b) = \alpha c \cdot a + \beta c \cdot b ،$$

□ يمثل حاصل الضرب الاتجاهي

$$، a \times b = -b \times a ،$$

ولخاصية خطية

$$، c \times (\alpha a + \beta b) = \alpha c \times a + \beta c \times b$$

□ المتجه القطبي هو متجه يتصرف تماماً مثل متجه الموضع .

□ المتجه المحوري هو متجه يتصرف مثل متجه الموضع عند دوران نظام الإحداثيات ؛ لكنه يتصرف عكسه عند

ارتكاس نظام الإحداثيات .

□ الكمية القياسية الكاذبة هي كمية عددية لا تتغير بدوران

نظام الإحداثيات ؛ لكن إشارتها تتغير بارتكاس نظام الإحداثيات .

□ تُعرف مشتقة متجه بأنها نهاية خارج قسمة ، على نفس

الفرار تماماً مثل تعريف مشتقة كمية عددية .

□ تُعرف السرعة بالعلاقة $v = dr/dt$.

□ يُعرف التسارع بالعلاقة $a = dv/dt = d^2r/dt^2$.

□ المشتقة هي عامل (مؤثر) operator خطي ، يتسم بالخاصية

$$\frac{d}{dt} V = \frac{dV_x}{dt} i + \frac{dV_y}{dt} j + \frac{dV_z}{dt} k .$$

□ يصف متجه الموضع ،

$$، r = r \cos \omega t i + r \sin \omega t j$$

حركة منتظمة في دائرة .

□ التسارع المركزي الجاذب ، لحركة منتظمة في دائرة ، له

مقدار يتحدد بالعلاقة

$$، a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

أسئلة

بند ٦،١

س ٦،١ أي من الكميات التالية يكون كميات عددية ، وأيها كميات متجهة ، وأيها لا هذه ولا تلك :
(أ) سرجهة ؛ (ب) مال ؛ (ج) زخم ؛ (د) كتلة ؛ (هـ) شكل ؛ (و) لون ؛
(ز) قوة ؛ (ح) عمر ؟

س ٦،٢ أي من الكميات التالية يكون كميات قياسية ، وأيها كميات عددية لكن ليست قياسية :
(أ) مركبة x لمتجه موضع ؛ (ب) كتلة ؛ (ج) سرعة ؛ (د) درجة حرارة ؛ (هـ) خط
عرض ؟

س ٦،٣ هل ثمة من سبب لماذا يتوجب على الخط الذي يمثل أعداداً حقيقية (شكل ٦،١) أن يكون خطاً مستقيماً ؟ فسر .

س ٦,٤ سَمَّ فِتَّةً من عَمَلِيَّات فيزيائيَّة (أو إِجْرَاءات عَمَلِيَّة) تُمَثِّل لخاصَّية تَرافِق شَبِيهة بِخاصَّية التَرافِق للأَعْدَاد (المعادلة ٦,٣). سَمَّ فِتَّةً عَمَلِيَّات لا تُمَثِّل لخاصَّية تَرافِق.

بند ٦,٢

س ٦,٥ يُسَاوِي مجموع مَتَجِهَيْن صَفْراً. فكيف يَنبَغِي أَنْ يَرْتَبِطَا معاً؟

س ٦,٦ يُسَاوِي مجموع ثلاثة مَتَجِهَات صَفْراً : $A + B + C = 0$. إِذَا كَانَ A و B ذَوِي مَقْدَارٍ مُتَسَاوٍ ($A = B$) ، فَمَا القِيَمَةُ العَظْمَى للمَقْدَارِ C ؟ وما قِيَمَةُ C الصُّغْرَى ؟

س ٦,٧ عَرَّفِ المَتَجَّةَ الصُّفْرِيَّ zero vector (الذي يُدْعَى أحياناً بِمَتَجِّ الانعدام null vector). أَذُلْ بِحِجَّةٍ نَبِيْن أَنْ المَتَجَّةَ الصُّفْرِيَّ مُتَمَيِّزٌ عَنِ العَدَدِ صَفْرٍ.

س ٦,٨ هل يَمُكِن أَنْ يَكُونَ مجموع مَتَجِهَيْن كَمِّيَّةً قِياسِيَّةً ؟ وهل يَمُكِن أَنْ يَكُونَ كَمِّيَّةً عَدَدِيَّةً ؟

س ٦,٩ إِذَا كَانَ $c = a - b$ ، فَأَيُّ مِنَ العَلَاقات التَّالِيَةِ بَيْنَ المَقَادِيرِ يَمُكِن تَحْقِيقُهُ بِوَاسِطَةِ اخْتِيَارَاتٍ مُنَاسِبَةٍ لِلْمَتَجِهَيْنِ a و b : (أ) $c = a - b$ ؛ (ب) $c = a + b$ ؛ (ج) $c > a$ و $c > b$ ؛ (د) $c < a$ و $c < b$ ؛ و (هـ) $c < a - b$ ؟

س ٦,١٠ يَبِينُ مُسْتَحَلَبُ فُوتُوغْرَافِيٍّ اِضْمَحْلَالَ جَسِيمٍ لَأَمْسُفَرٍ سَاكِنٍ. وَيَنْبَغِي عَنِ نَقْطَةِ اِضْمَحْلَالَ مَسَارِ جَسِيمَيْنِ مَشْحُوذَيْنِ ، تَكُونُ الزَّاوِيَةُ المَحْصُورَةُ بَيْنَهُمَا 130° . فَهَلْ نَتِجُ أَيْضاً جَسِيمٍ مُتَعَادِلٍ فِي هَذَا اِضْمَحْلَالَ ؟ لِمَاذَا ؟ وهل مِنَ المُمْكَنِ أَنْ يَكُونَ قَدْ نَتِجَ جَسِيمَانِ مُتَعَادِلَانِ ؟

س ٦,١١ رَاجِعْ قَامُوساً بِصَدَدِ مَعَانِي كَلِمَةِ « مَتَجَّة » خِلَافَ المَعْنَى المُسْتَعْمَلِ فِي هَذَا البَابِ. هل تَوْجَدُ آيَةُ صِلَةٍ بَيْنَ « نَاقِلٍ » أُحْيَائِيٍّ biological vector وَمَتَجَّةٍ فيزيائيٍّ physical vector ؟

س ٦,١٢ هل تَخْتَلِفُ نَتِيجَةُ ضَرْبِ المَتَجَّةِ الصُّفْرِيَّ فِي عَدَدٍ مُتَّاهٍ عَنِ نَتِيجَةِ ضَرْبِ مَتَجَّةٍ مُتَّاهٍ فِي صَفْرٍ ؟ لِمَ أَوْ لِمَ لَا ؟

بند ٦,٣

س ٦,١٣ لو كَانَ للجَسِيمِ كَتْلَةٌ سَالِبَةٌ ، فكيف كَانَتِ سَرْتَبِطُ سَرِجَتِهِ وَزَخْمُهُ معاً ؟

س ٦,١٤ هل يَمُكِنُ قِسْمَةُ مَتَجَّةٍ عَلَى كَمِّيَّةٍ عَدَدِيَّةٍ ؟ (٢) وهل يَمُكِنُ إِضَافَةُ مَتَجَّةٍ إِلَى كَمِّيَّةٍ عَدَدِيَّةٍ ؟

س ٦,١٥ كُرَةٌ مَقْدُوفَةٌ مِنْ نَقْطَةِ O (التي اخْتِيرَتْ كَنَقْطَةِ أَصْلٍ) تَتَبَعُ قَوْساً مُكَافِئاً parabolic arc . (١) فَهَلْ يَتَغَيَّرُ مَتَجَّةُ سَرِجَتِهَا بِالمَقْدَارِ فَقْطً ، أَمْ بِالاتِّجَاهِ فَقْطً ، أَمْ بِكِلَا المَقْدَارِ والاتِّجَاهِ ؟ (٢) أَجِبْ عَنْ نَفْسِ السُّؤَالِ لِمَتَجَّةٍ مَوْضِعُهَا .

بند ٦,٤

س ٦,١٦ يَتَحَرَّكُ جَسْمٌ بِسَرْعَةٍ ثَابِتَةٍ v . عُلِّلْ لِمَاذَا قَدْ يَكُونُ لِمَقْدَارِ إِزَاحَتِهِ فِي زَمَنِ مَعْيَنٍ ، مَقْسُوماً عَلَى الزَّمَنِ ، آيَةُ قِيَمَةٍ مِنْ صَفْرِ إِلَى v ، لَكِنْ لَا يَمُكِنُ أَنْ يَكُونَ هَذَا أَقْلَ مِنْ صَفْرٍ أَوْ أَكْبَرَ مِنْ v .

س ٦,١٧ نَقُولُ غَالِباً ، مِنْ بَابِ اِخْتِصَارٍ ، إِنَّ « الإِزَاحَةَ » هِيَ مَتَجَّةٌ ؛ أَوْ نَشِيرُ إِلَى « مَتَجَّةِ الإِزَاحَةِ ». لَكِنْ مِنْ مَنظُورِ فَنِّيٍّ مُخْتَصٍّ ، يَكُونُ أَكْثَرُ دَقَّةً أَنْ نَقُولَ إِنَّ « الإِزَاحَةَ » هِيَ كَمِّيَّةٌ تَتَصَرَّفُ كَمَتَجَّةٍ .

فَسِّرَ الْفَرْقَ بَيْنَ هَاتَيْنِ الصِّبَغَتَيْنِ لِلْوَصْفِ . (ملاحظة : تكون الصِّبَاغة phraseology الأولى مباحة بشرط أن ندرك أنها اختزال shorthand للصِّبَاغة الثانية .)

س ٦,١٨ لأيّ متجه تكون المركبة نفس الشيء مثل الإحداثي؟ بند ٦,٥

س ٦,١٩ (١) عندما يُدار نظام إحداثي ، ما هي سمات المتجه التي تتغير؟ وأي سمات لا تتغير؟ (٢) أي من سمات الكمية القياسية يتغير بدوران الإحداثيات؟ وأي سمات لا تتغير؟

س ٦,٢٠ أورد مثلاً على كمية عددية تعتمد قيمتها على اختيار الإحداثيات .

س ٦,٢١ فسر بأي معنى تحتوي معادلة اتجاهية على معلومات أكثر من معادلة قياسية . بند ٦,٦

س ٦,٢٢ الطاقة الحركية هي كمية قياسية . فهل من الممكن أن تكون صورة أخرى للطاقة كمية متجهة؟ لم أو لم لا؟

س ٦,٢٣ لماذا يكون توافق المتجهات من مستلزمات معادلات الفيزياء؟ أورد مثلاً على معادلة يُعوزها التوافق ، وفسر لماذا لا يمكن أن تكون صحيحة .

س ٦,٢٤ عزم الدوران (أو التدوير) torque هو كمية يُعرفها حاصل ضرب اتجاهي: $T = r \times F$ ، حيث r متجه موضع و F قوة . فهل عزم الدوران كمية متجهة قطبية أم كمية متجهة محورية؟ بند ٦,٨

س ٦,٢٥ هل يكون حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين محوريين متجهاً قطبياً ، أم متجهاً محورياً ، أم لا هذا ولا ذاك؟ أعط سبباً لإجابتك .

س ٦,٢٦ هل يكون حاصل الضرب القياسي للقوة والإزاحة كمية قياسية حقيقية ، أم كمية قياسية كاذبة؟

س ٦,٢٧ في سيارة تكون ساكنة في بادئ الأمر ، هب أنك تغير ناقل الحركة إلى وضع ارتدادي shift into reverse ، بحيث تعود إلى الوراء مسافة قصيرة ، ثم تشرع بالحركة إلى الأمام ، ومن ثم حول منعطف إلى اليسار . حدد اتجاه التسارع إبان كل جزء من هذه الحركة . بند ٦,٩

س ٦,٢٨ عُدّد ستة أمثلة على حركة تُقَرَّبُ إلى حد بعيد كحركة منتظمة في دائرة (أو قوس دائرة) . بند ٦,١٠

س ٦,٢٩ ما اتجاه معدل تغير متجه التسارع للحركة المنتظمة لجسيم حول دائرة؟

س ٦,٣٠ إن مضاعفة سرعة الحركة حول دائرة تزيد التسارع المركزي الجأبد بأربعة أضعاف . فسر بكلمات مناسبة لماذا يتزايد معدل تغير السرجة بعامل قدره ٤ عندما يزيد مقدار السرجة بعامل قدره ٢ .

س ٦,٣١ إن مضاعفة نصف قطر الحركة الدائرية عند سرعة ثابتة تُنزل التسارع المركزي الجأبد إلى النصف . علّل بكلمات مناسبة لماذا يتناقض معدل تغير السرجة بعامل ٢ حين يزيد نصف القطر بعامل ٢ .

تمارين

ت ٦,١ أرسّم رسوماً تخطيطية « للحساب الهندسي » للعمليات الآتية : (أ) $v + 3$ ؛ (ب) $v - 3$ ؛ بند ٦,١

(ج) $3 + 0.5 - 0.5$ ؛ و (د) $1 - 2 - 3 - 4 - 5$.

ت ٦,٢ تؤثر ثلاث قوى مجموعها صفر على جسم . فتتجه إحداها شرقاً ويكون مقدارها ٣ ن ؛ بينما تتجه قوة أخرى شمالاً ويكون مقدارها ٥,٢ ن . فما اتجاه ومقدار القوة الثالثة ؟

بند ٦,٢

ت ٦,٣ (١) يكون لكل من متجهين مقدار الوحدّة . أوجد مقدار مجموعها (أ) عندما يتجهان بالتوازي ؛ (ب) عندما يتجهان عكسياً ؛ و (ج) عندما يتجه أحدهما بزاوية قائمة مع الآخر . (٢) ماذا ينبغي أن يكون اتجاهها النسبي كي يكون لمجموعها أيضاً مقدار الوحدّة ؟ مع كل من أجوبتك الأربعة ، أرسم - بصورة تخطيطيّة - رسماً سهمانيّاً اتجاهياً vector arrow diagram .

ت ٦,٤ هب أنك تقود سيارتك شمالاً في شارع بمدينة بسرعة ثابتة مقدارها ١٠ م / ث . فنبطي حول زاوية تساوي ٩٠ إلى اليمين وتتسارع لتبلغ ثانية سرعة ثابتة مقدارها ١٠ م / ث . فما محصلة التغير في متجه سرجهتك ؟

ت ٦,٥ ربان تطير طائرته بسرعة ١٠٠ ميل / س ، يرغب في الطيران شمالاً في يوم تهب فيه الرياح بسرعة ٥٠ ميلاً / س من الغرب . (١) بأي اتجاه ينبغي أن يوجه طائرته ؟ (٢) وما سرعته على سطح الأرض ؟ أرسم رسماً اتجاهياً يبين السرجة بالنسبة إلى الأرض كمجموع السرجة بالنسبة إلى الهواء زائد سرجة الهواء .

ت ٦,٦ طائرة سرعتها ٣٠٠ ميل / س بالنسبة إلى الهواء airspeed ، تحفظ «بترويسة» heading شمالية شرقية (أي أن مقدّم nose الطائرة يتجه مباشرة شمالاً شرقاً) . وتهب الرياح من الشمال بسرعة ١٠٠ ميل / س . أوجد بيانياً المتجه الذي يحدّد سرجة الطائرة على سطح الأرض . ما سرعتها الأرضية التقريبية ، كما يحدّدوها القياس بمسطرة ؟

ت ٦,٧ يسافر قطار سكة حديدية railroad train شرقاً بسرعة ١٠ م / ث . يقذف غلام مسافر على القطار كرة قاعدة مباشرة من النافذة نحو الجنوب بسرعة ٢٠ م / ث نسبة إلى القطار ، فيلتقطها رجل واقف على سطح الأرض . من أي اتجاه وبأي سرعة يراها آتية ؟

ت ٦,٨ لا يمكن أن يساوى مجموع مقداري متجهين مع مقدار مجموعها في الدائرة أدناه ،

$$|F_1 + F_2| \quad \bigcirc \quad |F_1| + |F_2|$$

أدرج insert الرمز الرياضي المناسب ($>$ ، $\geq$ ، $<$ ، $\leq$ ، أو $=$) ، وعلّل سبب اختيارك .

ت ٦,٩ إنتي آية ثلاثة أعداد α و β و γ ، وأي متجهين a و b . بالاستعانة برسوم سهمانية ملائمة ، بين أن هذه الكميات تمثل للخاصية الخطية المعبر عنها بالمعادلة ٦,١٦ .

بند ٦,٣

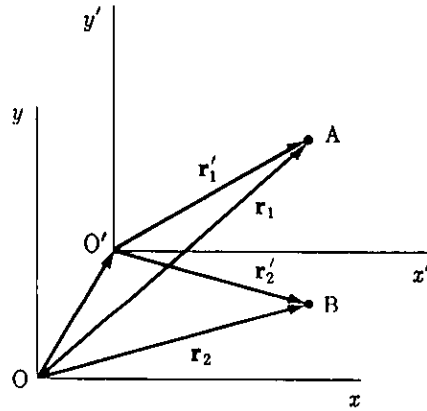
ت ٦,١٠ اعتبر متجهين a و b . باستخدام جبر المتجهات ، أكتب التعبير $6(a + b) - (10a - b) + 3(b - 2a)$ بدلالة المتجه $b - a$ وحده . دّل بيانياً على صحة نتيجتك إذا كان a متجهاً طوله الوحدّة وبشير شرقاً ، وإذا كان b متجهاً طوله الوحدّة ويتجه شمالاً .

ت ٦,١١ ابتداءً من نقطة أصل معينة ، يسير رجل ٤ م شمالاً ، ثم ١٢ م شرقاً ، ومن ثم ٩ م جنوباً . أرسم رسماً دقيقاً إلى حدّ معقول لرحلته . (١) ما متجه موضعه النهائي ؟ (٢) وما محصلة متجه إزاحته ؟

بند ٦,٤

ت ٦,١٢ اختر - كنقطة أصل الغرفة التي تضم أميرة ، وبديعة ، وجميلة - الزاوية الشألية الغربية بدلاً من الزاوية الجنوبية الغربية ، وأعد رسم شكل ٦,١٦ وفقاً لذلك . في رسم تخطيطي دقيق ، بين - على وجه التقريب - أن متجه الإزاحة ، $r_B - r_A$ ، يظل نفس الشيء كما هو مبين في شكل ٦,١٧ .

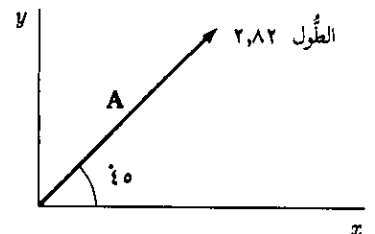
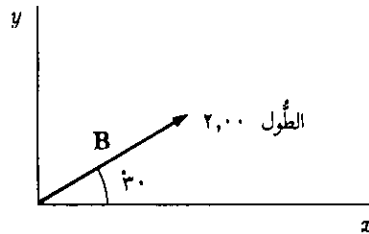
ت ٦,١٣ في الشكل المرفق [شكل ٦,٣٨] ، يكون لنقطة A متجه الموضع r_1 في إطار إسناد واحد ومتجه الموضع r'_1 في إطار إسناد آخر ؛ كما يكون لنقطة B متجه الموضع r_2 و r'_2 في هذين الإطارين . (١) أربط r_1 مع r'_1 و r_2 مع r'_2 . (٢) بين جبرياً أن $r_2 - r_1 = r'_2 - r'_1$ ؛ وهذه حقيقة واضحة هندسياً في هذا الشكل أو في شكل ٦,١٨ . وهي تثبت أن متجه الإزاحة مستقل عن اختيار نقطة الأصل .



شكل ٦,٣٨ : تمرين ٦,١٣ .

ت ٦,١٤ يبلغ قياس عقرب الدقائق لساعة ١٠ سراً من محوره حتى أسلته tip . فما متجه الإزاحة لأسلته (أ) من إشارة ربع الساعة إلى نصف الساعة ؛ (ب) في نصف الساعة التالي ؛ و (ج) في الساعة التالية ؟

ت ٦,١٥ اعتبر زوج المتجهات المبين في الشكل أدناه [شكل ٦,٣٩] . (١) حدد مركبات A و B . (٢) أوجد المجموع $A + B$. (٣) أوجد الفرق $A - B$.



شكل ٦,٣٩ : تمرين ٦,١٥

ت ٦,١٦ اعتبر زوج المتجهات A و B في التمرين السابق . (١) أرسم رسماً تخطيطياً للمجموع الاتجاهي لكل من $D = 0.5A + 4B$ و $C = 2A + 3B$. (لا داعي لأن يكون الرسم دقيقاً .) (٢) استخدم المركبات لإيجاد المتجهين C و D . (٣) هل يمكن أن تضرب المتجهين A و B في الكميتين القياسيتين α و β بحيث يساوي المجموع $\alpha A + \beta B$ صفراً ؟ إن صح ذلك ، فما قيمتا α و β ؟

ت ٦,١٧ تؤثر ثلاث قوى على جسم ما . ويكون مقدار كل قوة ١٠ ن ، كما تكون الاتجاهات التي تؤثر بها القوى نحو الشرق ، والشمال ، والشمال الشرقي . اختر محور x في الاتجاه الشرقي ومحور y في الاتجاه الشمالي . (١) اكتب مركبتين x و y لكل قوة . (٢) اكتب مركبتين x و y لمجموع القوى الثلاث . (٣) ما مقدار المجموع ، وما اتجاهه ؟

ت ٦,١٨ حل تمرين ٦,٦ باستخدام المركبات ؛ أي عيّن مركبتين الشرق (x) والشمال (y) للسرعة على سطح الأرض .

ت ٦,١٩ (١) أي من المتجهات التالية متساوٍ ؟ أيها ذو مقدار متساوٍ ؟ أيها ذو نفس الاتجاه ؟ وأيها ذو اتجاه مضاد ؟

$$\begin{array}{lll} \text{A: } A_x = 2, & A_y = 4, & A_z = -3; \\ \text{B: } B_x = 4, & B_y = 3, & B_z = 2; \\ \text{C: } C_x = 4, & C_y = -8, & C_z = 6; \\ \text{D: } D_x = 6, & D_y = 12, & D_z = -9; \\ \text{E: } E_x = -8, & E_y = -6, & E_z = -4. \end{array}$$

(٢) عبّر عن مجموع هذه المتجهات الخمسة على صورة مركبات . (٣) أيها ذو مقدار أكبر : $E + C$ أو $D - B$ ؟

ت ٦,٢٠ متجه موضع r ، واقع في مستوى xy ، يصنع زاوية α مع محور x . عبّر عن مركبتيه x و y بدلالة r و α ؛ ثم بين ، بعبارة التحقّق من صحة جوابك ، أنّ صيغتيك تمثلان للعلاقة

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

ت ٦,٢١ في الواقع أنّ مقدار زخم الإلكترون المرتدّ recoiling في شكل ٦,٢٣ هو أقلّ بقليل منه للإلكترون الساقط incident . (١) فهل مقدار زخم البروتون هو - في الواقع - أقلّ بقليل أم أكبر بقليل من القيمة المحسوبة أدنى المعادلة ٦,٤٣ ؟ (٢) وهل يصنع مسار البروتون المرتدّ - في واقع الامر - زاوية مع محور x أقلّ قليلاً أم أكبر قليلاً من ٤٥° ؟

ت ٦,٢٢ إذا أُديرَ نظام إحداثيات ديكارتيّ مستويّ عبّرَ زاوية θ ، تحولت مركبتا متجه موضع بموجب المعادلتين ٦,٤٦ و ٦,٤٧ . من هاتين المعادلتين ، برهن أنّ

$$x_1'^2 + y_1'^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

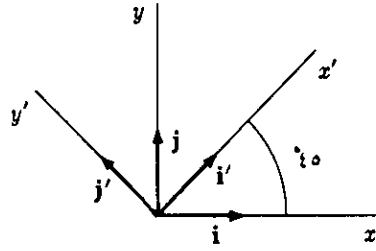
وما هذا إلا مثال بسيط على مبدأ لا تغيّر invariance principle . فقدار المتجه لا يتغيّر تحت تأثير الدوران .

ت ٦,٢٣ إذا تأثرت السيارة الميّنة في شكل ٦,٨ بإزاحة s ذات مقدار ١٥ م إلى الأمام مباشرة ، فما حواصل الضرب القياسية (أ) $F_1 \cdot s$ ؛ (ب) $F_2 \cdot s$ ؛ و (ج) $(F_1 + F_2 + F_3) \cdot s$ ؟ إشمِلْ وَحْدَةَ القياس .

بند ٦,٧

ت ٦,٢٤ أُديرَ نظام إحداثيّ ديكارتيّ ، في مستوى ، عبّرَ زاوية ٤٥° بالنسبة إلى نظام آخر ، كما هو مبين في الشكل أدناه [شكل ٦,٤٠] . أوجد حواصل الضرب القياسية

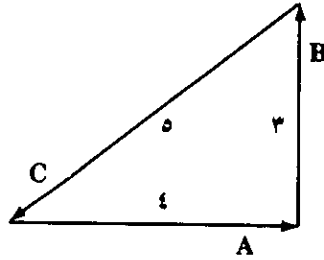
$$i \cdot i', j \cdot j', k \cdot k', \text{ و } j \cdot i'$$



شكل ٦,٤٠ : تمرين ٦,٢٤ .

ت ٦,٢٥ استخدم تعريفي حاصل الضرب القياسي ، الهندسي والجبري على حد سواء ، كي تبين أنه يمكن كتابة مقدار متجه a على الصورة $|a| = \sqrt{a \cdot a}$.

ت ٦,٢٦ بساوي مجموع ثلاثة متجهات صفراً ، كما هو مبين في الشكل المرفق [شكل ٦,٤١] . أوجد حواصل الضرب القياسية (أ) $A \cdot B$ ؛ (ب) $B \cdot C$ ؛ و (ج) $C \cdot A$.



شكل ٦,٤١ : تمرين ٦,٢٦ .

ت ٦,٢٧ للمتجهات المبينة في التمرين السابق ، أوجد حواصل الضرب الاتجاهية (أ) $A \times B$ ؛ (ب) $B \times C$ ؛ (ج) $C \times A$ ؛ و (د) $B \times A$. (إعتبر أن المستوى الذي يقع فيه الشكل هو مستوى xy .)

ت ٦,٢٨ لمتجهات تمرين ٦,٢٦ ، أوجد (أ) $A \cdot (B \times C)$ ؛ (ب) $A \times (B \times C)$ ؛ و (ج) $(A \times B) \times C$.

ت ٦,٢٩ أوجد حاصل الضرب القياسي والاتجاهي للمتجهين المبينين في تمرين ٦,١٥ .

ت ٦,٣٠ (١) أوجد حواصل الضرب الاتجاهية التالية لمتجهات الوحدة : (أ) $i \times i$ ؛ (ب) $i \times j$ ؛ (ج) $j \times i$ ؛ (د) $i \times k$ ؛ و (هـ) $k \times i$. (٢) فسّر كيف يمكن استخدام حاصل ضرب اتجاهي لمتجهات الوحدة لتعريف نظام إحداثيات ديكارتي مبني .

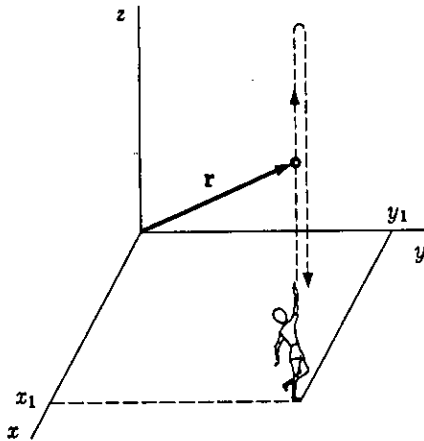
ت ٦,٣١ أوجد حواصل الضرب الآتية لمتجهات الوحدة : (أ) $i \times (j \times k)$ ؛ (ب) $k \times (k \times j)$ ؛ (ج) $(k \times k) \times j$ ؛ (د) $i \cdot (j \times k)$ ؛ و (هـ) $i \cdot (i \times j)$.

ت ٦,٣٢ تحدد المعادلتان ٦,٧٠ و ٦,٧١ زوجاً مكوناً من متجهين مختارين جرافاً r و v . (١) أوجد المقدارين r و v . (٢) أوجد الزاوية المحصورة بين r و v . (٣) استخدم التعريفين الهندسيين لحاصل الضرب القياسي والاتجاهي لإيجاد $r \cdot v$ و $r \times v$ (ترد الأجوبة ، التي حصلنا عليها باستخدام المركبات ، على صفحة ٢٣٦) .

بند ٦,٩

ت ٦,٣٣ يتحدد متجه الموضع لكرة قاعدة مقذوفة بالمعادلة ٦,٨٠ . (١) أين تكون الكرة عند $t = 0$ صفرًا؟
(٢) عند أي زمن ($t > 0$) تبلغ الكرة مستوى xy ؟ (٣) عند أي زمن تبلغ الكرة ارتفاعها الأقصى؟ وأين تكون عند هذا الزمن؟

ت ٦,٣٤ رجل واقف في مستوى xy عند النقطة الثابتة x_1, y_1 يقذف كرة رأسياً إلى أعلى (أنظر شكل ٦,٤٢). (١) أكتب تعبيراً لمتجه موضع الكرة r كدالة في الزمن. (٢) فأصل هذا التعبير للحصول على صيغ اتجاهية للسرعة v والتسارع a .



شكل ٦,٤٢ : تمرين ٦,٣٤ .

ت ٦,٣٥ (١) من المعادلة $r = r \cos \theta i + r \sin \theta j$ (المعادلة ٦,٨٤)، تحقق من أن $r \cdot r = r^2$.
(٢) لأي نوع من الحركة - خلاف الحركة المنتظمة في دائرة - قد يكون هذا التعبير مفيداً لمتجه الموضع r ؟

بند ٦,١٠

ت ٦,٣٦ يتحرك جسيم في دائرة نصف قطرها ٣ م بسرعة زاوية ثابتة تساوي ٢ مسر/ث. (١) أكتب تعبيراً لمتجه موضع الجسيم، $r(t)$ ، على افتراض أن مركز مساره الدائري يقع عند نقطة الأصل.
(٢) أكتب تعبيراً لمتجه سرعته.

ت ٦,٣٧ تقوم سيارة سباق بانعطاف نصف قطره ٢٠٠ م بسرعة ٤٠ م/ث (حوالي ٩٠ ميلاً/س). فما تسارعها المتجه نحو المركز inward acceleration؟ هل هذا معقول؟ لماذا؟

ت ٦,٣٨ يتحرك قمر صناعي أرضي في دائرة محيطها 8×10^7 م بدورة تساوي $1,44 \times 10^4$ ث. (١) فما مقدار تسارعه؟ وكيف يقارن هذا مع تسارع الجاذبية على سطح الأرض؟ (٢) كي تبين نفسك على تصور لخصائص هذا القمر، احسب ارتفاعه altitude فوق سطح الأرض بالأميال ودورته بالدقائق.

ت ٦,٣٩ تطير طائرة في دائرة أفقية. وتكون سرعتها ١٠٠ م/ث (حوالي ٢٢٠ ميلاً/ث). فإذا كان تسارعها نحو مركز الدائرة يساوي g (٩,٨ م/ث^٢)، فما نصف قطر الدائرة؟ غير عن إجابتك بالأمطار والأميال.

فرع اختياري: ما هي (أو ماذا يجب أن تكون) زاوية الميلان angle of bank للطائرة؟

ت ٦,٤٠ استعمل المعادلتين ٦,٨٧ و ٦,٩٥ لبيان أن للحركة الدائرية المنتظمة : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$. هل يبرهن هذا أن $\mathbf{a}$ متجه نحو مركز الدائرة ، إذا كان معلوماً أن $\mathbf{v}$ مُماسّة للدائرة ؟

ت ٦,٤١ بين أن مقدارَي التسارع والسرعة ، للحركة الدائرية المنتظمة ، يرتبطان معاً بالعلاقة $a = \omega v$.

ت ٦,٤٢ يتحرك جسيم في دائرة ذات نصف قطر ثابت r بتسارع زاوي ثابت ، بحيث تتحدد الزاوية θ (شكل ٦,٣٦) بالعلاقة $\theta = \frac{1}{2} \omega^2 t^2$. اكتب تعابير اتجاهية لمتجه موضعه $\mathbf{r}$ وسرعته $\mathbf{v}$. باستخدام التعبير للمتجه $\mathbf{v}$ ، تحقق من أن سرعة الجسيم هي $v = r\omega$.

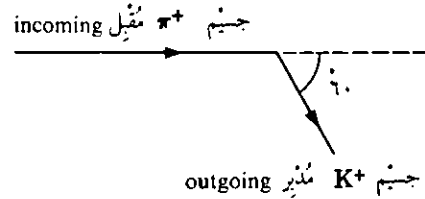
ت ٦,٤٣ يتسم صاروخُ بكثلة متغيرة ، $m(t)$ ، وسرعة متغيرة ، $\mathbf{v}(t)$ ، سواء بسواء . (١) فما معدل التغير الزمني لزمخمه ، $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ؟ (٢) إبان فترة زمنية معينة ، يكون زخم الصاروخ ثابتاً . فإذا نستطيع أن نقول عن مقدار واتجاه تسارع الصاروخ ، في غضون هذا الزمن ؟

مسائل

م ٦,١ برهن أنه ، إذا كان مجموع ثلاثة متجهات صفراً ، وجب أن تقع في نفس المستوى . $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$

م ٦,٢ رجل يسبح بسرعة ١ ميل/س ، يود عبور جدول يتدفق تياره بسرعة ٠,٥ ميل/س . (١) بأي اتجاه يجب أن يسبح كي يبلغ نقطة تقع مباشرةً مقابل نقطة بدايته عبر الجدول ؟ (٢) بأي اتجاه يجب أن يسبح كي يُخفّض زمن عبوره إلى الحد الأدنى minimize ؟ (٣) في كل من هاتين الحاليتين ، ما سرعته في إطار إسناد مثبت على الأرض ؟ (٤) في كل حالة ، ما سرعته في إطار إسناد متحرك مع التيار؟ إشمّل رسوماً اتجاهيةً مع إجاباتك .

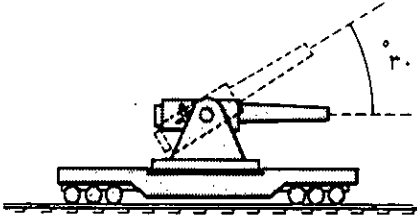
م ٦,٣ يرتطم بليون موجب ببيوترون في نواة ، فيخلق جسيم لآندا المتعادل وكيوناً موجباً : $\pi^+ + n \rightarrow \Lambda^0 + K^+$. ويرى مساران في غرفة فقاقيع ، كما في الشكل أدناه [شكل ٦,٤٣] ؛ حيث يُحدّد مقدار زخم K^+ بأنه نصف مقدار زخم π^+ . فعلى امتداد أي اتجاه لا بد وأن انطلق جسيم Λ^0 غير المرئي ؟



شكل ٦,٤٣ : مسألة ٦,٣ .

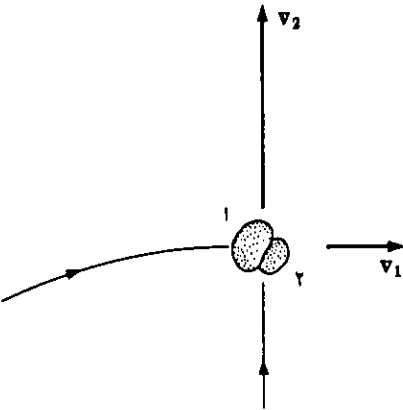
م ٦,٤ بصطدم بروتون متجه شرقاً بروتون ساكن . وبعد الاصطدام ، ينطلق أحد البروتونين شمالاً شرقاً ، بينما ينطلق الآخر جنوباً شرقاً ، بحيث يصنع مسار كل منهما زاوية ٤٥° مع اتجاه حركة البروتون المقذوف أصلاً . استخدم الخصيصة الاتجاهية للزخم وقانون حفظ الزخم لتثبت أنه ينبغي أن يكون مقدارا الزخمين النهائيين متساويين . (لا ريب في أن رسماً توضيحياً سيكون مفيداً هنا .)

٦,٥ م مِدْفَعُ بعيدُ المَدَى long-range cannon مَنصُوبٌ mounted على شاحنة سَكَّة حديدية مسطّحة railway flatcar (أنظر شكل ٦,٤٤ أَدناه). يكون لكلُّ من قذائفه shells كتلة ٣٠٠ كـرغ وسرّجته فُوهية muzzle velocity مقدارها ٣١٠ م/ث ؛ كما تكون الكتلة الإجمالية للشاحنة المسطّحة مع المِدْفَع ٤ × ١٠ كـرغ. (١) إذا أُطلق المِدْفَعُ أفقيّاً على امتداد المسار ، فما سرعة الارتداد للشاحنة ؟ (٢) إذا رُفِعَت elevated مأسورته barrel ٣٠ فوق المستوى الأفقي ، فماذا تكون سرعة الارتداد للشاحنة بعد إطلاق المِدْفَع ؟



شكل ٦,٤٤ : مسألة ٦,٥ .

٦,٦ م تصطدم كرتا معجون putty في وسط الهواء midair وتلتصقان stick معاً (أنظر شكل ٦,٤٥). عند لحظة اصطدامهما ، تكون كرة ١ ، ذات الكتلة $m_1 = ١$ كـرغ ، متحركة أفقيّاً بسرعة $v_1 = ٣$ م/ث ؛ بينما تكون كرة ٢ ، ذات الكتلة $m_2 = ٠,٥$ كـرغ ، متحركة رأسيّاً بسرعة $v_2 = ٨$ م/ث . فما سرّجة كتلة المعجون (مقداراً واتّجاهاً) بعد الاصطدام مباشرة ؟



شكل ٦,٤٥ : مسألة ٦,٦ .

٦,٧ م بَرَهْنْ بدقّة الصَّيغَ ٦,٣٤-٦,٣٦ لضرب مركّبات متّجه في كميّة عددية . إستخدم ، كمسلمات ، خواصّاً اتّجاهيةً أساسيةً ، مثل الخاصّة الخطيّة ، واذكر أيّ خواصّ من هذا القبيل تستعمل في برهانك .

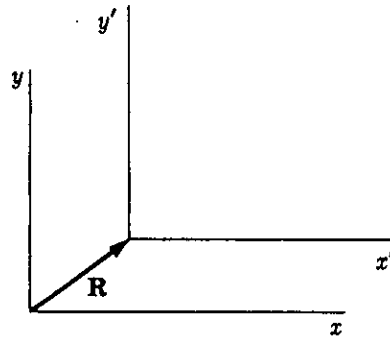
ضرب متّجه في كميّة عددية

٦,٨ م يبيّن شكل ٦,٢٤ متّجهاً r_1 استناداً إلى فئتين من المحاور . أثبت أنّ المركّبات ترتبط معاً بواسطة المعادلتين ٦,٤٦ و ٦,٤٧ . (لاحظ أنّ الزاوية θ في هاتين المعادلتين وفي شكل ٦,٢٤ تختلف عن الزاوية θ في المعادلتين ٦,٢٣ و ٦,٢٤) . (إقترح : أطلقْ إسماً على الزاوية المحصورة بين r_1 ومحور x ، وطبّقْ منطقاً مُثَلَّثَاتِيّاً trigonometric reasoning على الرّسمين التوضيحيّين في شكل ٦,٢٤) .

دوران المحاور

م ٦,٩ باستخدام الرسمين التوضيحيين في شكل ٦,٢٥ ، برهن أن مركبات متجه تحوّل بموجب المعادلتين ٦,٤٨ و ٦,٤٩ . أي افترض فيزيائي أساسي بشكل ضمني ركيزة برهانك ؟ (إقتراح : حل مسألة ٦,٨ قبل محاولة هذه المسألة .)

م ٦,١٠ يُزاح إطارا إسناد ديكارتيان في مستوى عن بعضها البعض بدون تدوير محاورهما (أنظر شكل ٦,٤٦) . فيكون لنقطة معينة P الإحداثيان x, y في أحد هذين الإطارين ، والإحداثيان x', y' في الإطار الآخر . اشتق معادلتين تحويليتين ، شبيهتين بالمعادلتين ٦,٤٦ و ٦,٤٧ ، تربطان فتي الإحداثيات . لاحظ أنه ، بدلاً من البارامتر parameter الواحد t . الوارد في المعادلتين ٦,٤٦ و ٦,٤٧ ، يجب أن يظهر بارامتران في المعادلتين الجديدتين . فما هما ؟



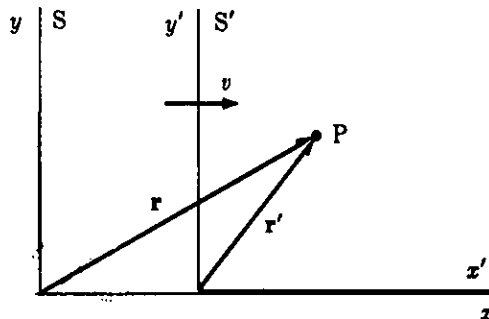
شكل ٦,٤٦ : مسألة ٦,١٠ .

م ٦,١١ متجه الموضع لنقطة P في إطار إسناد S ، ذي محوري x و y ، هو $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ، في حين أن متجه الموضع لنفس النقطة في إطار إسناد S' ، ذي محوري x' و y' ، هو $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}'$. وتوجه المحاور كما هو مبين في شكل ٦,٤٧ ؛ كما أن إطار S' يتحرك نسبة إلى إطار S باتجاه x الموجب بسرعة v . (١) علّل لماذا يكون $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$ و $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$. (٢) بين أن إحداثيات P في الإطارين ترتبط معاً بواسطة العلاقتين

$$x' = x - vt + a,$$

$$y' = y,$$

حيث t هو الزمن هاتان المعادلتان هما مثال على ما يُدعى بتحويل غاليلي Galilean transformation [نسبة إلى غاليليو غاليلي] . (٣) ما أهمية الثابت a ؟ (٤) لماذا تُسري هاتان المعادلتان التحويليتان حتى إذا كانت النقطة P ذاتها متحركة بطريقة اعتباطية ؟



شكل ٦,٤٧ : مسألة ٦,١١ .

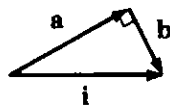
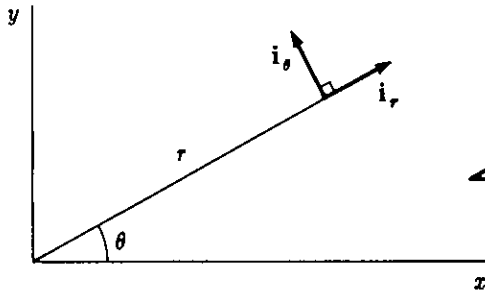
مركبات قطبية

م ٦,١٢ يمكن تعريف متجهي الوحدة i_r و i_θ بُعَيْة استعمالهما مع الإحداثيات القطبية (أنظر شكل ٦,٤٨).
أثبت أن متجهي الوحدة هذين يرتبطان بمتجهي الوحدة الديكارتيين بالمعادلتين

$$i = i_r \cos \theta - i_\theta \sin \theta,$$

$$j = i_r \sin \theta + i_\theta \cos \theta.$$

(إقترح : إعتبر الرسم التوضيحي السهمانيّ لجمع المتجهات $a + b = i$ ، حيث a متجه مواز للمتجه i_r ، وحيث b متجه مواز عكسياً للمتجه i_θ . كم يجب أن يكون مقدار a و b ؟)



شكل ٦,٤٨ : مسألة ٦,١٢ .

م ٦,١٣ يُعبّر عن نفس المتجه ، في الإحداثيات الديكارتية والقطبية ، بالمعادلتين

$$V = V_x i + V_y j,$$

$$V = V_r i_r + V_\theta i_\theta.$$

إستخدم نتائج المسألة السابقة كي تُبين أن

$$V_r = V_x \cos \theta + V_y \sin \theta,$$

$$V_\theta = -V_x \sin \theta + V_y \cos \theta.$$

م ٦,١٤ باستخدام تعريف حاصل الضرب القياسي ، المعادلة ٦,٥٣ ، أثبت أن $\alpha(c \cdot a) = c \cdot (\alpha a)$. أي حقائق أخرى عن المتجهات تلزم للبرهان ؟

حاصل الضرب القياسي

م ٦,١٥ بالاستعانة بالمعادلتين ٦,٤٨ و ٦,٤٩ ، دّل على أن $a_x b_x + a_y b_y$ ، أي حاصل الضرب القياسي لمتجهين a و b في مستوى ، يُساوي $a'_x b'_x + a'_y b'_y$ ، حيث تستند المركبات المرموز إليها بالإشارة (') primed components إلى نظام إحداثي مُدار عتبر زاوية θ بالنسبة إلى نظام إحداثي غير مرموز إليه بهذه الإشارة unprimed . ما دلالة هذا التساوي ؟

م ٦,١٦ باستعمال الخاصية الخطية لحاصل الضرب الاتجاهي (المعادلة ٦,٦٨) وخواص متجهات الوحدة ، اشتق مركبات $a \times b$ (المعادلات ٦,٦٤ - ٦,٦٦) من التعبير

حاصل الضرب الاتجاهي

$$(a_x i + a_y j + a_z k) \times (b_x i + b_y j + b_z k).$$

م ٦,١٧ إعتبر متجهين a و b في مستوى xy ، كما هو مبين أدناه [شكل ٦,٤٩] ، ذوي مركبات

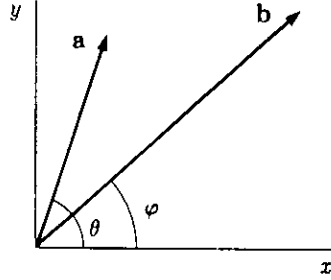
$$a_x = a \cos \theta, \quad b_x = b \cos \varphi,$$

$$a_y = a \sin \theta, \quad b_y = b \sin \varphi.$$

باستخدام المثلثات ، أثبت أن

$$a_x b_y - a_y b_x = -ab \sin (\theta - \varphi) ;$$

وهذه متساوية تستلزمها المعادلتان ٦,٦٣ و ٦,٦٦ وقاعدة اليد اليمنى .



شكل ٦,٤٩ : مسألة ٦,١٧ .

م ٦,١٨ برهن أن $|s_1 \times s_2|$ هي مساحة متوازي أضلاع parallelogram ذي ضلعين sides يُعرّفها متجهها الإزاحة s_1 و s_2 .

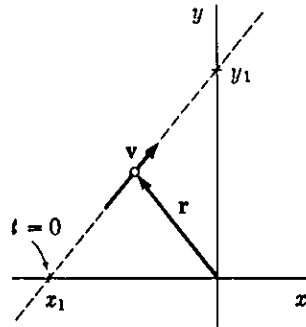
م ٦,١٩ يقع متجهان a و b في مستوى . وفي نظام إحداثي يُعرّفه محورا xy ، يكون لهما مركبات a_x, a_y و b_x, b_y . أما في نظام إحداثي مُدار ومُعرّف بمحوري x', y' (شكل ٦,٢٤) ، فيكون لهما مركبات a'_x, a'_y و b'_x, b'_y . (١) بالاستعانة بالمعادلتين ٦,٤٨ و ٦,٤٩ ، بين أن

$$a_x b_y - a_y b_x = a'_x b'_y - a'_y b'_x .$$

(٢) ما دلالة هذه المتساوية ؟

كثباتيك المتجهات

م ٦,٢٠ كرة متحركة بسرجهة ثابتة v تقطع محور x عند $x = x_1$ في الزمن t = صفر (أنظر شكل ٦,٥٠) . وفي وقت لاحق ، تقطع محور y عند $y = y_1$. (١) أكتب تعبيراً لمتجه موضعها r كدالة في الزمن . (٢) فاضل هذا التعبير للتحقق من أن سرجهتها ثابتة . (٣) اقترح نظاماً إحداثياً x', y' يكون فيه وصف هذه الحركة أبسط ، واكتب صيغاً للمتجهين r و v في هذا النظام .



شكل ٦,٥٠ : مسألة ٦,٢٠ .

م ٦,٢١ متجه موضع لجسم متحرك في مستوى xy هو

$$\mathbf{r} = v_0 t \mathbf{i} + a_0 e^{bt} \mathbf{j} .$$

- (١) أوجد متجه سرجهته وسرعته كدالة في الزمن .
 (٢) أوجد تسارعه كدالة في الزمن ، وكدالة في إحداثي y .
 (٣) أرسم رسماً تخطيطياً لمساره في مستوى xy .

م ٦,٢٢ تسارع جسيم متحرك في مستوى xy هو

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_0 \mathbf{i} - a_0 \mathbf{j}).$$

كما يتحدد موضعه وسرجهته ، عند $t = 0$ صفراً ، بالعلاقين

$$\mathbf{r}(0) = 0,$$

$$\mathbf{v}(0) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

- (١) عبر عن موضعه وسرجهته كدالتين في الزمن . (٢) أرسم رسماً تخطيطياً لمساره في مستوى xy .
 أي نوع من المنحنى يكون هذا ؟

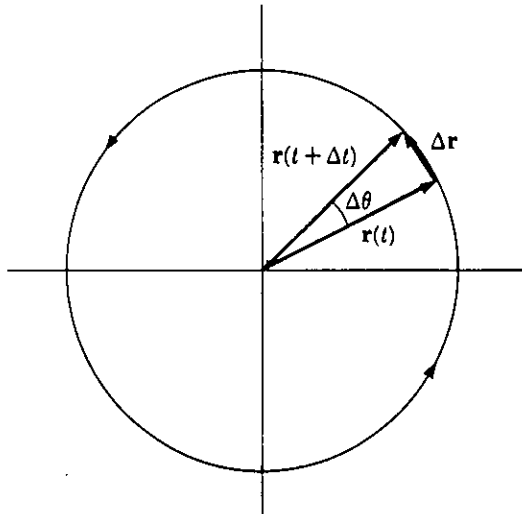
م ٦,٢٣ للحركة الدائرية المنتظمة ، يكون $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$ (المعادلة ٦,٨٩) ، مما يثبت أن السرجة $\mathbf{v}$ مماسة للدائرة . استخدم معادلات من بند ٦,١٠ ، وبصورة خاصة المعادلتين ٦,٩٠ و ٦,٩١ ، كي تبهرن أن $\mathbf{v}$ تتجه عكس عقربتي الساعة حول الدائرة .

الحركة المنتظمة في دائرة

م ٦,٢٤ اعتبر نهجاً هندسياً لتحليل الحركة الدائرية المنتظمة . (١) للفترة الميَّنة في الرسم التوضيحي أدناه [شكل ٦,٥١] ، حيث $\Delta \theta = \omega \Delta t = v \Delta t / r$ ، بين أن مقدار السرجة المتوسطة يتحدد بالعلاقة

$$|\bar{\mathbf{v}}| = \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \frac{2v \sin (\Delta \theta / 2)}{\Delta \theta},$$

وأن $|\bar{\mathbf{v}}| = v$ في النهاية التي يكون فيها $\Delta \theta$ صغيراً . (٢) أرسم رسماً هندسياً مماثلاً لكي نحسب $|\bar{\mathbf{a}}| = |\Delta \mathbf{v} / \Delta t|$ لنفس الفترة ، وبين أن $|\bar{\mathbf{a}}| = v^2 / r$ في النهاية التي يكون فيها $\Delta \theta$ صغيراً . علق على أية حسّات أو سيّئات تراها في طريقة التحليل هذه ، بالمقارنة مع طريقة بند ٦,١٠ ، التي تستخدم مركّبات .



شكل ٦,٥١ : مسألة ٦,٢٤ .

مدار غير دائري

م ٦,٢٥ يتحدد متجه الموضع لجسيم متحرك بالعلاقة $r = a \cos \omega t i + b \sin \omega t j$ ، حيث a و b ثابتان غير متساويين . (١) أوجد تعبير لسرعة ونسار الجسيم . (٢) ما اتجاه التسارع ؟ بين أنه يمكن كتابة مقداره كدالة بسيطة في r . (٣) أوجد معادلة للمدار orbit equation تنطوي على x و y لكن ليس t .

تفاضل وتكامل المتجهات

م ٦,٢٦ برهن قاعدة تفاضل وتكامل المتجهات

$$\frac{d}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{dV}{dt}.$$

استعمل التعريف الأساسي لمشتقة متجه ، المعادلة ٦,٧٦ . (إقتراح : إرجع إلى اشتقاق مشابه ورد على صفحة ١٣٧ - ١٣٨).

م ٦,٢٧ أثبت قاعدة تفاضل وتكامل المتجهات

$$\frac{d}{dt}(a \cdot b) = \frac{da}{dt} \cdot b + a \cdot \frac{db}{dt}.$$

(إقتراح : أتمم برهان مسألة ٦,٢٦ قبل محاولة هذه .)

م ٦,٢٨ (١) باستخدام تعريف التكامل كنهاية مجموع ، بين أن

$$\int_a^b [f(t)i + g(t)j] dt = \left[\int_a^b f(t) dt \right] i + \left[\int_a^b g(t) dt \right] j.$$

(٢) ما مركبات المتجه D ، المعروف بالصيغة

$$D = \int_a^b F(x) dx?$$

الأعداد المركبة والمتجهات

م ٦,٢٩ ناقش الصلة بين الأعداد المركبة complex numbers والمتجهات في مستوى . أي من عمليات الأعداد المركبة ، هذا إن صح أي منها ، يناظر العمليات الاتجاهية (١) للجمع ؟ (ب) للطرح ؟ (ج) لحاصل الضرب القياسي ؟ (د) لحاصل الضرب الاتجاهي ؟



الجزء الثالث
PART THREE

الميكانيكا
Mechanics

٧. القوة والحركة

قانونا نيوتن الأول والثاني

Force and Motion:

Newton's First and Second Laws

فيما تقدّم من فصول ، عرضنا العديد من مفاهيم وأفكار الميكانيكا وبعض قوانينها - قوانين الحفظ . وإن مهمة هذا الجزء من الكتاب أن يشحّد تعريف بعض المفاهيم الميكانيكية ، وأن يَحْثِدَ المفاهيم والقوانين ضمن البيان المتناسك coherent الذي ندعوه بنظرية الميكانيكا ، كما وأن يُطبّق هذه النظرية وقوانينها على وصف وتعليل أنواع متباينة من الحركة .

٧,١ الحركة بدون قوة ؛ قانون نيوتن الأول Motion Without Force; Newton's First Law

إنها لملاحظة مألوفة أن جعلَ جسم يتحرك أفقياً على الأرض يقتضي التأثير عليه بطريقة ما - كأن ندفعه ، أو نسحبه ، أو ندسّره (أي ندفعه دفعا شديداً) propel ميكانيكياً . فعندما يُزال أو يُبطل أثر أيها كان يُسبب الحركة ، يسكن الجسم . وقد حدثت هذه الحقيقة أرسطو ومن أتى بعده من العلماء على أن يفترضوا أن الحركة الأفقية تتطلب دسراً propulsion متواتراً . مثلاً ، اعتقد أرسطو أن الهواء يُؤثر على سهم طائر فيدسّره إلى الأمام . وكان غاليليو ، في بواكير القرن السابع عشر ، أول من رأى الخطأ في هذا التفكير ؛ إذ أدرك أنه ، لو أمكن إزالة قوى الاحتكاك ، لاستطاع جسم أن يتزلق slide مدى غير محدود فوق سطح أملس smooth surface بدون أن يُبطىء . كما عمّم نيوتن هذه الفكرة على الكون ككل ؛ فكتب يقول ، على صورة قانونه الأول : « يظل كل جسم على حالته من السكون ، أو من الحركة المنتظمة بخط مستقيم ، ما لم يُكره على تغيير تلك الحالة بواسطة قوى مؤثرة عليه . » وبالتعبير عليه رياضياً ، ينص قانون نيوتن الأول على أن

$$\text{if } F = 0 \quad \text{then} \quad a = 0 ; \quad (٧,١)$$

أي أن قوة صفرية تستلزم تسارعاً صفرياً (أو ، بصورة مكافئة ، سرجهة ثابتة) . وقد كان هذا

قانون نيوتن الأول

القانون ذا أهمية تاريخية كبرى ؛ حيث بين ضرورة إيجاد تفسير ميكانيكي لحركة القمر والكواكب . فبما أن هذه الأجسام تعاني تسارعاً ، وجب أن تؤثر عليها قوى .

كذلك يمكن تطبيق قانون نيوتن الأول على الأجسام الأرضية . فإذا كان مجموع قوتين أو أكثر مؤثرتين على جسم صفرًا ، تحرك الجسم بدرجة ثابتة . والعكس بالعكس : إذا لوحظ أن جسمًا يتحرك بدون تسارع ، وجب أن تكون محصلة القوة المؤثرة عليه صفرًا . بيد أن هذا القانون يكون ذا دلالة خاصة عندما يطبق على جسم معزول isolated ... تخيل نيزكًا meteorite في الفضاء الخالي بمنأى عن كل التأثيرات الخارجية [شكل ٧،١ (أ)] ؛ فهو يتحرك بدرجة ثابتة . والواقع أن قانون نيوتن الأول يعرف أي نوع من الحركة يكون حركة « طبيعية » أو غير مضطربة ، وذلك بأن يُعَيَّن كيف يتحرك الجسم إذا كان حرًا من كل التأثيرات الخارجية ؛ حيث يحدد delimits ، بهذه الطريقة ، نوع الحركة الذي يقتضي تحليلًا إضافيًا . فالمركة الأفقية الثابتة لسرجة سهم (عندما يكون الاحتكاك مهملاً) تناظر حركة حرة ولا تتطلب أي تفسير بدلالة القوة ؛ بينما يبين تسارع القمر نحو الأرض أن القمر ليس حرًا ، فنلزم قوة لتفسير حركته .

وهو يُعرف الحركة الطبيعية ،
للأجسام المعزولة

وثمة سبب آخر لتطبيق قانون نيوتن الأول على جسم معزول هو أن هذا القانون يستحوذ عندئذ على معنى بدون ضرورة تعريف القوة . فنحن نستطيع تعريف غياب القوة بواسطة حقيقة الانعزال . وإن عبارة حديثة لقانون نيوتن الأول هي : يتحرك جسم معزول حرًا من التأثيرات الخارجية بدرجة ثابتة . فعلى هذه الصورة ، لا يشير القانون إلى القوة ، ويكون - في الحقيقة - ساري المفعول حتى في مبادئ لا ينطبق عليها قانونا نيوتن الثاني والثالث (المعنيين بالقوة) . مثلاً ، لا يتبع جسم أولي قوانين الميكانيكا الكلاسيكية عندما يتفاعل . ومع ذلك ، حينما يكون حرًا من التفاعل ، فهو يتحرك بدرجة ثابتة ، طبقاً لقانون نيوتن الأول .^٥ واستناداً إلى معرفتنا الحالية ، فإن قانون نيوتن الأول للأجسام المعزولة إنما يسري على نطاق كوني

قانون نيوتن الأول بدون ذكر القوة

يكون ساري المفعول حتى خارج
نطاق الميكانيكا الكلاسيكية

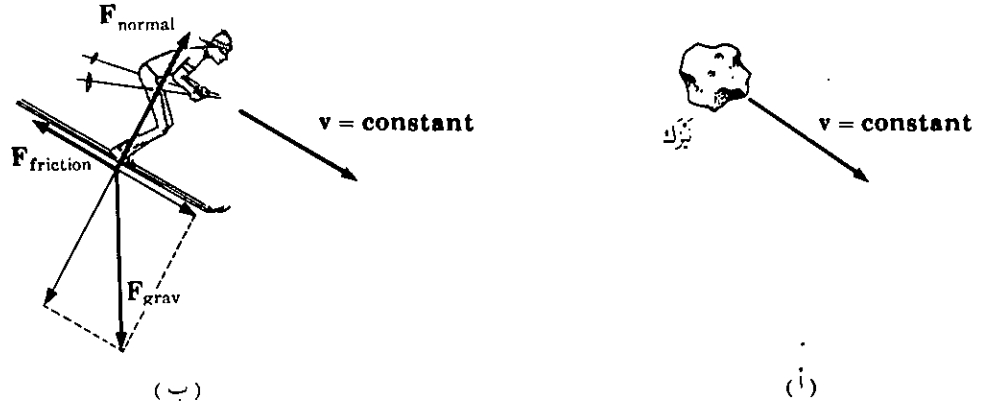
†. universally valid

وبما أن خبرتنا المألوفة بالحركة تُكَيِّفُنَا conditions us لأن نفكر بدلالة تعابير أرسطوطالية Aristotelian أكثر من تعابير نيوتونية Newtonian ، فإن تطبيق قانون نيوتن الأول على أوضاع عادية قد يكون أحياناً مشوشاً ، بالرغم من بساطة هذا القانون الكُبْرَى . مثلاً ، بإمكاننا أن نسأل عما إذا كانت هناك أية قوة تؤثر على امرئ يتزلج skier أسفل مُنْحَدَر downhill بدرجة ثابتة . فترعنا الطبيعية هي لأن نردّ بالإيجاب : إنه يجذب إلى أسفل بسبب الجاذبية . لكن ، في الحقيقة ، لا تؤثر أية محصلة قوة على المتزلج ؛ فيجب أن تبطل قوة الاحتكاك تماماً مفعول مركبة

٥ . بالقرب من الأرض لا يستطيع جسم أولي أن يكون حرًا ، بحق وحقيق ، حيث أنه يتسارع بسبب الجاذبية . غير أن سرعته تكون عادة من الضخامة بحيث أن التغير في سرعته الناجم عن الجاذبية يكون مهملاً (انظر تمرين ٧،٤٥) .

† يرتبط هذا بتجانس المكان ، انظر بند ٤،٨ .

قوة الجاذبية الموازية للمنحدر، كما ينبغي أيضاً أن تلغي القوى المتعامدة مع المنحدر مفعول بعضها البعض [شكل ٧,١ (ب)].



شكل ٧,١ : حركة بدون قوة . (أ) جسم معزول ، حر من كل التأثيرات الخارجية ، يتحرك بسرعة ثابتة . (ب) نظام غير معزول يتحرك أيضاً بسرعة ثابتة إذا كان مجموع القوى المؤثرة عليه صفراً .

□ أطر الإسناد القصورية Inertial Frames of Reference

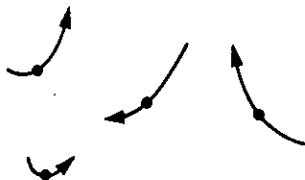
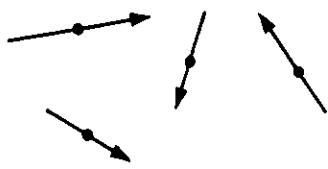
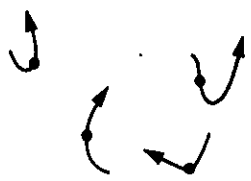
تظل نقطتان هامتان بحاجة للمناقشة بصدد قانون نيوتن الأول . إحداها هي تعميمه للأنظمة المعزولة التي قد تقوم أجزاؤها الداخلية بحركات معقدة ؛ وَلَسَوْفَ نعالج هذا في بند ٨,٥ . أما الأخرى فهي الدور الذي يلعبه في تعريف أطر الإسناد القصورية ؛ حيث يعتمد تسارع جسم على إطار إسناد المراقب observer . فيبدو جسم ساكن لمراقب مُتسارع وكأنه يتسارع ؛ بينما يكون جسم مُتسارع ، نسبة إلى مراقب يُرافقه ، ساكناً . وتعني هذه الحقائق أن الأجسام المعزولة تكون غير مُتسارعة بالنسبة لبعض المراقبين فقط . وتُدعى أطر إسناد هؤلاء المراقبين بأطر إسناد قصورية . في هذه الأطر القصورية فحسب يكون قانونا نيوتن الأول والثاني ساري المفعول . وعلى ذلك ، ينبغي أن يُفهم « سريان المفعول على نطاق كوني » لقانون نيوتن الأول ، الذي أشرنا إليه آنفاً ، على أنه يعني سريان المفعول لكل الأجسام ، وكل مقاييس الحجم ، وكل السرجيات ؛ لكنه مقصور على أطر إسناد معينة .

تعريف الإطار القصوري

يُعرف قانون نيوتن الأول الأطر القصورية

كما يكون قانوناً ذا معنى في الأطر القصورية

والحقيقة أن قانون نيوتن الأول يلعب دوراً مزدوجاً dual في الفيزياء . فهو يزودنا في نفس الوقت بالضبط بتعريف لإطار إسناد قصوري وبتعبير هام عن الطبيعة . ويمكن تقدير هذا الدور المزدوج بصياغة القانون بالطريقة التالية : في إطار الإسناد الذي يكون فيه جسم حر واحد غير مُتسارع ، تكون فيه كل الأجسام الحرة الأخرى غير متسارعة أيضاً . فالنصف الأول من هذه العبارة يُعرف إطاراً قصورياً ؛ بينما يُعبرُ النصف الثاني عن قانون الحركة القصورية (غير المضطربة) . فأطر الإسناد القصورية هي تلك التي تتحرك فيها أنظمة معزولة بأبسط طريقة ممكنة (شكل ٧,٢) . ونسوق نقاشاً إضافياً عن أطر الإسناد في بند ٧,١٠ .

إطار مُتَسَارِع	إطار قُصُوري	مجموعة أ : فئة مكونة من جسيمات حرة من التأثيرات الخارجية
		
		مجموعة ب : فئة مكونة من جسيمات متفاعلة ، كلٌّ منها خاضع لتأثيرات خارجية
في حالة سكون •		جسيم ج : جسيم تؤثر عليه قوة خارجية

شكل ٧,٢ : حركة جسيمات في إطارَي إسناد . ففي إطار قُصُوري (اليمين) ، تتحرك كلُّ الأجسام الحرة من التأثيرات الخارجية بدرجة ثابتة . أمّا في إطار مُتَسَارِع (اليسار) ، فقد تُبَسِّطُ حركة جسم معين ، مثل جسيم ج ، إلى حد بعيد ؛ إلّا أنّ كلّ الحركات الأخرى تقريباً تظهر متسارعة ، بما فيها حركة الجسيمات الحرة (مجموعة أ) .

٧,٢ مفهوم القوة The Concept of Force

في الاستعمال العادي غير المختصّ nontechnical usage ، يكون جائزاً أنّ نتكلّم عن قوّة كلمات مؤلّف ، أو قوّة شخصية إنسان ، أو قوّة جُنْد troops يُقيمون في الخارج . كذلك ، قد نقرأ أنّ انفجاراً ذريّاً يحدثُ بقوّة هائلة (حيث تُعني الطاقة) ، أو أنّ حذّافه (دولاب موازنة) flywheel تغزلُ spins بقوّة كبيرة (حيث يُعني الزخم الزاوي) ؛ وهذان مثالان على استعمال علمي خاطي . فالقوّة في الفيزياء لها مدلول مُفَرَّد ومعيّن - وبسيط نوعاً - تماماً كما يجب إن كان لا بدّ وأن تكون مفهوماً مقدارياً مفيداً ؛ إذ يأخذ الفيزيائي واحدًا من مدلولات القوّة العادية الأكثر شيوعاً ، مثل دفع push أو سحب pull ، ويشحذه حتى يغدو تعريفاً دقيقاً لدرجة كافية لأنّ يشكّل أساساً للقياس .

مكرة القوّة : دفع أو سحب

وبما أن تسارعاً صفرياً يستلزم ، وفقاً لقانون نيوتن الأول ، قوةً صفرياً ، فإنه يتبع من ذلك أن تسارعاً لاصفرياً يجب أن يدلّ على وجود قوة لاصفرياً . وعلى ذلك ، فبمقدورنا استخدام التسارع لتعريف القوة . وتُعرف الوحدة الدولية (SI) للقوة ، النيوتن (N) ، بهذه الطريقة . فهي القوة اللازمة لمنح impart تسارع مقداره ١ م/ث^٢ إلى كتلة ١ كـرغ .^{*} ويُعبّر عنها بدلالة الوحدات الأساسية (إذا ما كررنا المعادلة ٢,٣) بالعلاقة

إحدى الطرق لتعريف القوة : تسارع كتلة معيارية

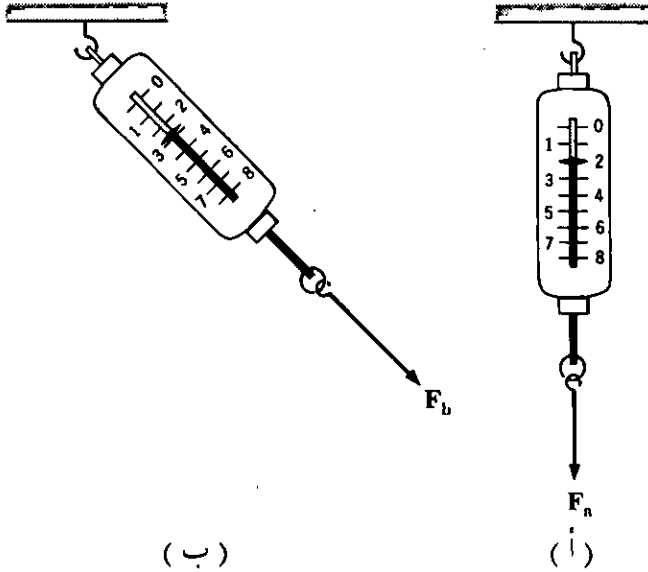
وحدة القوة

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/sec}^2 \quad (٧,٢)$$

وقد ظهر في النهاية أن هذه وحدة جاهزة ملائمة للقوة . وهي تساوي وزن كتلة ١٠٢ غ على سطح الأرض . فبرفع كتاب كتلته ٢ كـرغ ، فإنك تبذل exert قوة تقارب ٢٠ ن . كما أن رجلاً وزنه ١٥٠ باونداً يزن نحواً من ٦٧٠ ن .

ومع أننا تبيننا على الفور وحدة القوة هذه ، فإننا نفضل أن نعرف مفهوم القوة ، على الأقل مؤقتاً provisionally ، بالاستناد إلى قياس ساكن (استاتي) static ؛ إذ علاوة على إحداث تسارع ، نستطيع القوى أن تُغيّر شكل أو مقياس جسم ما . فبالون الأطفال toy balloon ،

تأثيران للقوة



شكل ٧,٣ : تعريف عملياً للقوة ... إن الزنبرك (النابض) الذي يمثل لقانون هوك هو ذلك الذي تُسبّب فيه تزايدت متساوية من القوة تزايدت متساوية من استطالة الزنبرك . ويبين الزنبران التوضيحيان أن الزنبرك يستطيع ، من حيث المبدأ ، أن يُعرف ويُقيس القوة ككمية متجهة ، لها اتجاه بالإضافة إلى مقدار .

الذي يخضع لزوج من القوى بين يدي شخص يتغير شكله . واللوح الخشبي wooden plank المسنود عند طرفيه يجذب إلى أسفل بواسطة قوة الجاذبية وينحني على شكل قوس bow . كذلك يتغير شكل وسادة pillow لينة وفقاً للقوى المؤثرة عليها . وتنحني شجرة من قوة الريح . كما يستطيل is elongated زنبرك (نابض) spring عندما يُسحب ، وينضغط is compressed عندما يُضغط .

وكون هذا تعريفاً مفيداً ، فضلاً عن كونه ممكناً ، إننا نعتمد على وجود قانون نيوتن الثاني ، الذي سنبحثه في البند التالي .

ويمكننا أن نسمي هذا الصنف العام من تأثيرات القوة تشوهاً deformation. فلا يوجد أي جسم يكون من الجساسة rigidity بحيث لا يخضع - على الأقل - لتشويه طفيف حين تؤثر عليه قوى خارجية .

... تأثير القوة المشوّهة deforming هذا يمكن استخدامه لتعريف القوة . تخيل زنبركاً معيارياً standard حسن التصميم يكون بمقدور استطالته أن تزودنا - عند شدّه - بمقياس للقوة (شكل ٧,٣) . فثبت أحد طرفي الزنبرك في موضعه (مما يقتضي بعض القوة ؛ لكنها ليست القوة موضع الاهتمام) ؛ بينما تطبق القوة المُنوي قياسها على الطرف الآخر للزنبرك . وقد نُقرّر تسمية القوة المطلوبة لإطالة الزنبرك مسافة ١ سـم بوحدة القوة . فقوتان على هذا الغرار ، تساوي كل منهما ١ وحدة وتؤثران في نفس الاتجاه ، إنا تزودنا بقوة مقدارها ٢ وحدة . كذلك ، إذا كان مجموع قوتين متساويتين ومتوازيتين ١ وحدة ، ساوت كل منهما ٠,٥ وحدة . وبائتلافات من هذا القبيل ، يمكن - من حيث المبدأ - أن نربط أية قوة مجهولة بوحدة القوة واستطالة extension الزنبرك المختارة . وإذا صادف أن اتسم الزنبرك بالخاصية المناسبة الفائلة إن استطالته تناسب مع القوة المؤثرة ، كان أداة عملية ومفيدة لقياس القوة ، وليس مجرد مُعرف للقوة من حيث المبدأ . عندئذٍ ستقيس ، مثلاً ، استطالة ٢,٥ سـم قوة مقدارها ٢,٥ وحدة ؛ كما ستقيس استطالة ٠,٧٨ سـم قوة مقدارها ٠,٧٨ وحدة ؛ وهلم جرا . ويقال إن مثل هذه الزنبركات ، التي يمكن صنعها - في الواقع - لدرجة عالية من الدقة ، تمثل لقانون هوك Hooke's law ، الذي ينص على أن التشويه يتناسب مع القوة .

طريقة أخرى لتعريف القوة :
استطالة زنبرك معياري

تمثل الزنبركات المثالية ideal
لقانون هوك

وبما أن القوة كمية متجهة ، وجب أن يتضمن تعريفها هذه الحقيقة . وهذا يعني أولاً أن للقوة اتجاهاً بالإضافة إلى مقدار ؛ ويمكن شمل كلتا الخاصيتين في تعريف الزنبرك (شكل ٧,٣) . بيد أن الطبيعة الاتجاهية للقوة تعني أكثر من ذلك ؛ إذ تعني أن قوتين أو أكثر يجب أن ياتلفا فيزيائياً بنفس الطريقة تماماً التي تأتلف بها المتجهات رياضياً . وكما هو مدلل عليه في شكل ٧,٤ ، فإنه يمكن استخدام الزنبرك المعياري يُسر لاختبار قوانين الائتلاف لعدة قوى بغية التحقق من صفاتها الاتجاهية . مثلاً ، يمكن التحقق من أن قوتين متساويتين مقداراً ومتعامدتين اتجاهاً تؤثران بقوة إجمالية اتجاهاً يتوسط اتجاھي القوتين المتولفتين ، ويكون مقدارها ٤١ بالمئة أكبر من مقدار كل قوة متولفة . كما يمكن التحقق من أن قوتين متساويتين مقداراً ومتضادتين اتجاهاً لا تؤثران بأية محصلة قوة على الزنبرك .

القوة هي كمية متجهة

■ مثال ١ : نستقر كتلة block وزنها ١٤ ن في حالة سكون على لوح يميل بزاوية ٣٠° على الاتجاه الأفقي (شكل ٧,٥) . فما قوة الاحتكاك التي تؤثر على الكتلة ؟

بما أن الكتلة غير متسارعة ، فإنها لا تتأثر بأية محصلة قوة . وعلى ذلك ، يمكننا الكتابة

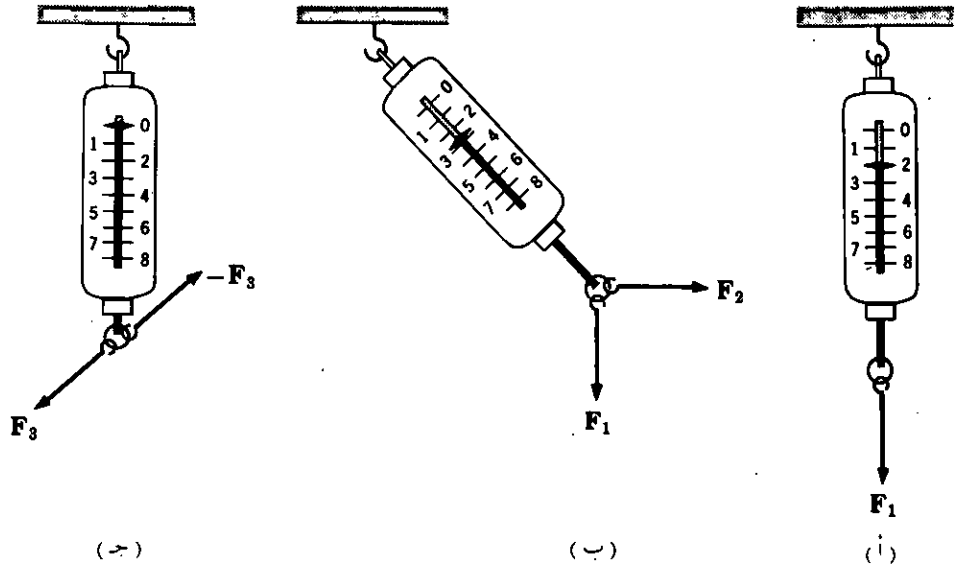
قوة صفرية إذا كانت $v = 0$

$$W + F + N = 0,$$

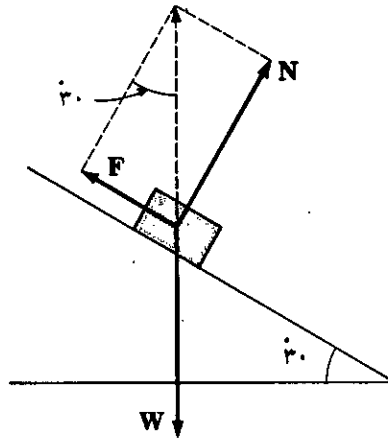
(٧,٣)

حيث W هو الوزن ، F قوة الاحتكاك المتجهة بموازاة اللوح ، و N القوة التي يؤثر بها اللوح عمودياً على سطحه . وبما أن $F + N = -W$ ، فإن طول السهم الرأسى المتقطع في شكل ٧,٥ يكون W ؛ كما تكون

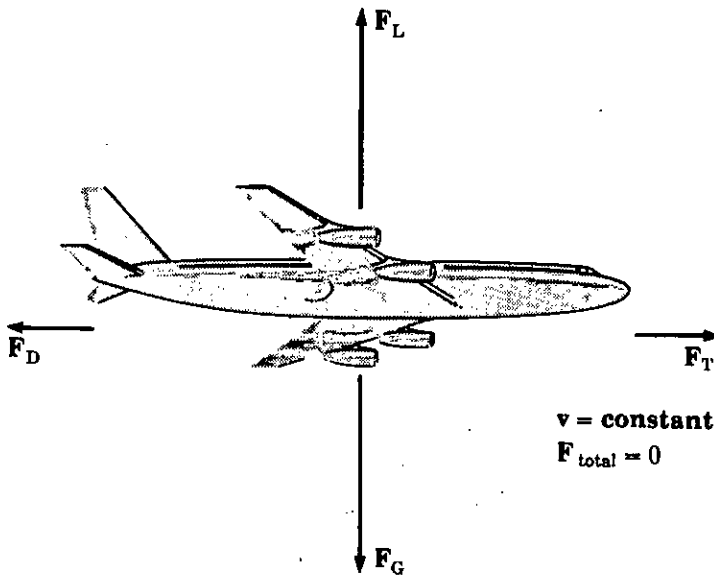
$$F = W \sin (30 \text{ deg}).$$



شكل ٧,٤ : إختيار مباشر لطبيعة القوة الاتجاهية . (أ) يكون لقوة F_1 ، التي تؤثر وحدها ، المقدار ٢ على هذا المقياس . (ب) قوتان F_1 و F_2 ، متساويتان مقداراً ومتعامدتان اتجاههما ، نحددان قوة اتجاههما بنسب اتجاهيهما ومقدارهما بساوي ٢,٨ . (ج) قوتان متساويتان مقداراً ومتضادتان اتجاههما يكون مجموعها صفراً .



شكل ٧,٥ : كتلة ساكنة على لوح مائل . وتكون القوة الإجابية المؤثرة عليها صفراً .



شكل ٧.٦ : طائرة تتحرك بسرّجهة ثابتة . ويقتضي تلاشي القوة الكليّة المؤثرة عليها أن تلاشى مركّبات x و y كلّ على حدة .

وبتعويض $W = 14$ ن و $(30) = 0.5$ ، نحصل على

$$N = F$$

... إذا أميل اللّوح بزواوية أكبر ، لكن ليست كافية لجعل الكتلة تنزلق ، فهل ستتغير F بالمقدار ؟ بالاتّجاه ؟

■ مثال ٢ : تُطوّفُ طائرة بسرّجهة ثابتة . وتتأثر بقوة جاذبيّة ، F_G ، متّجهة إلى أسفل وبقوة انجرار drag force ، F_D ، متّجهة إلى الخلف . فما قوتا الرّفْع lift ، F_L ، والدّفع thrust ، F_T ، المؤثّرتان عليها (أنظر شكل ٧.٦) ؟

مرّة ثانية ، نحن نعلم - من قانون نيوتن الأوّل - أنّ القوة الكليّة يجب أن تلاشى :

$$F_G + F_D + F_L + F_T = 0. \quad (٧,٤)$$

فَرّة صفرية إذا كانت $v =$ متّجهها ثابتاً

وحيث أنّ هذه معادلة اتّجاهيّة ، فإمكاننا إيجاد مقدارين مجهولين ، F_L و F_T ، منها . فإذا جعلنا متّجه الوحدّة i يشير إلى الأمام وجعلنا متّجه الوحدّة j يشير إلى أعلى ، غدت هذه المعادلة

$$(F_T - F_D)i + (F_L - F_G)j = 0.$$

وإذا تلاشى متّجه ، تلاشت كلتا مركّبتيه . وبذلك ، يكون

$$F_T = F_D,$$

$$F_L = F_G.$$

ينبغي أن يكون تسارع الجسم دالة في محصلة القوة المؤثرة عليه ؛ كما قد يعتمد - من حيث المبدأ - على السرجة أو متغيرات أخرى أيضاً . والحقيقة أن التجارب تبين أن العلاقة بين التسارع والقوة هي أبسط علاقة يمكن تصورها ؛ إذ تكون تناسباً طردياً :

$$a \sim F. \quad (٧,٥)$$

لاحظ أن هذا تناسب اتجاهي . فالتسارع يكون دائماً في اتجاه محصلة القوة ، بغض النظر عن اتجاه السرجة . مثلاً ، في الحركة الدائرية المنتظمة uniform circular motion ، تكون السرجة مماسة للدائرة ؛ فيتجه التسارع ، وبالتالي القوة ، إلى الداخل نحو مركز الدائرة . ولتعزيز نقطة سبق لنا أن ذكرناها ، فنحن نضيف أيضاً أن هذا التناسب لا يستلزم أية صلة سببية causal connection بين القوة والتسارع ؛ إذ يكون عادةً طبيعياً إلى حد ما (كما أنه لا يضيرنا في شيء) أن نفكر بالقوة كأنها السبب ، والتسارع كأنه النتيجة . كذلك ، يكون من الصحيح منطقياً - سواء بسواء - أن نقول إن التسارع يُسبب القوة ؛ بل الحقيقة أنه لَمِنْ الأسهل أحياناً أن نفكر بهذه الطريقة . فبوسعنا القول ، مثلاً ، إن تسارع سيارة إلى الأمام « يجعلنا » نشعر بقوة إضافية آتية من خلف المقعد . وأياً كان الأمر ، فإن الصيغة ٧,٥ - بوصفها أحد نوااميس الطبيعة - تنص فقط على أن القوة والتسارع يردان دائماً معاً بطريقة معينة .

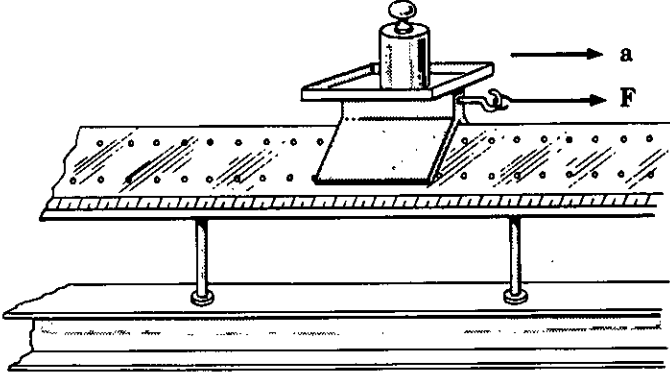
ويمكن دراسة خواص الحركة المتسارعة - بصورة مناسبة - في المختبر ، وذلك باستخدام أدوات apparatus مثل تلك المصوّرة في شكل ٧,٧ تنطلق عربة على مسار أفقي باحتكاك ضئيل جداً ؛ ويمكن وضع أوزان على العربة ذات مقادير متباينة . فتجرب العربة وأوزانها على امتداد المسار بقوة معلومة ، ويُقاس التسارع . وبما أنه لا توجد أية مركبة رأسية للتسارع ، فليس ثمة من محصلة مركبة رأسية للقوة ، ولسنا بحاجة لاعتبار سوى القوة المؤثرة أفقياً . والنتيجة الأولى لمثل هذه التجربة هي أن قوة ثابتة تُحدث تسارعاً ثابتاً . أما النتيجة الثانية ، فهي أنه إذا حُمِلَت loaded العربة بطريقة معينة ، كان تسارعها متناسباً مع القوة المؤثرة . وثبت هاتان النتيجةتان صحة التناسب في الصيغة ٧,٥ .

وبما أنه بالإمكان قياس كلا F و a ، فإننا نستطيع تحديد ثابت التناسب الذي يربطها معاً . فلأية حمولة loading معينة للعربة ، توصف الحركة بالمعادلة :

$$F = ma. \quad (٧,٦)$$

وهذا هو قانون نيوتن الثاني .^٥ وسنبحث لزوماته implications للحركة عموماً في بنود لاحقة . أما هنا ، فيعينا الدور الذي يلعبه في تحديد المفاهيم الأساسية للميكانيكا .

ويُدعى ثابت التناسب في المعادلة ٧,٦ كتلة قُصور (أو - ببساطة - كتلة) الجسم قَد الدراسة ؛ وهو في هذه الحالة العربة زائد حمولتها . وواضح ، من المعادلة ٧,٦ ، أن بُعد الكتلة وهو يُعرف كتلة القُصور



شكل ٧,٧ : ترتيب تجريبي للتحقق من صحة قانون نيوتن الثاني ولقياس كتلة القصور . فإن عربة وحمولتها ، مسودتين على مجرى هوائي عديم الاحتكاك تقريباً ، تستجيان بتسارع ثابت a لقوة ثابتة F .

يجب أن يكون [قوة $\times$ (زمن)^٢ / طول] . كما أن العلاقة المناظرة بين الوحدّات تتحدّد ، بدلالة الوحدّات الدوليّة (SI) ، بالمعادلة ٧,٢ .

وإذا كان للمعادلة ٧,٦ أن تتسم بتوافق المتجهات ، فنحن نتوقع أن تكون الكتلة كمية قياسية . غير أن الطبيعة القياسية للكتلة تقتضي إثباتاً تجريبياً .^٦ وهنا نجد ، أولاً ، أن الكتل المحددة تجريبياً تكون مستقلة عن اتجاه الحركة ومستقلة عن الأنظمة الإحداثيّة لتعريف الحركة . وثانياً ، أن الكتل تأتلف طبقاً لقوانين الحساب العددي . هبْ ، مثلاً ، أنه يتمّ التحقق عن طريق تجارب التسارع من أن كتلة العربة غير المحمّلة هي ٠,٢ كـرغ ، وأن كتلة العربة مع حمولة A هي ٠,٥ كـرغ ، كما أن كتلة العربة مع حمولة B هي ٠,٧ كـرغ . فإذا استعملنا الحرف C للإشارة إلى العربة ، حصلنا على

حقيقة تجريبية : الكتلة هي كمية قياسية

$$m(C) = 0.2 \text{ kg,}$$

$$m(C + A) = 0.5 \text{ kg,}$$

$$m(C + B) = 0.7 \text{ kg.}$$

^٥ لقد صاغ نيوتن نفسه قانونه الثاني بصورة مختلفة ، رغم كَوْن فحواها مكافئاً للمعادلة ٧,٦ . ونحن نستعمل هنا صيغة مستحدثة modernized نلائم حاجتنا في هذا الباب .

^٦ لقد خُمنَ أن الكتلة ربما تكون - في الحقيقة - كمية ممتدة tensor quantity . وهذا من شأنه أن يستلزم اعتماد كتلة الجسم قليلاً على اتجاه تسارعه و/ أو أن القوة والتسارع ليسا متوازيين تماماً . ولو اكتشف أن للكتلة مثل هذه الخواص - وليس نعمة من دليل على ذلك في الوقت الحاضر - لفهم هذا الاكتشاف بدلالة عدم تكافؤ اتجاهات الكَوْن anisotropy of the universe (أنظر الملاحظات في الفقرة الأخيرة من هذا الباب ومناقشة مبدأ ماخ Mach's principle في بُند ٢٠,١١) .

وإذا اختلفت الكُتْلُ فيزيائياً بنفس الطريقة التي تأتلف بها الأعداد حسابياً ، وَجَبَ أَنْ تكون علاقات من قبيل

$$m(C + A) = m(C) + m(A) \quad (V, V)$$

صحيحة ؛ وهكذا نستطيع استنتاج الكتلتين المستقلتين للحُمُولَتَيْن :

$$m(A) = 0.3 \text{ kg},$$

$$m(B) = 0.5 \text{ kg}.$$

ولاختبار هذا الافتراض بأن الكُتْلَ تنجمع عددياً ، فإننا نملأ العربتين بالحُمُولَتَيْن A و B معاً ، ثُمَّ نقيس التسارع الناتج من قُوَّة معلومة . فيجب أَنْ تكون الكتلة المحددة بهذه الطريقة

$$m(A + B + C) = m(A) + m(B) + m(C) = 1.0 \text{ kg}.$$

ويمكن القيام بالعديد من التجارب على هذا المنوال للتحقق من صحة الحقيقة بأن كتلة القُصُور لمجموعة أجسام مأخوذة معاً تساوي عددياً مجموع كتل القُصُور للأجسام المستقلة .

ووراء الحقيقتين ، بأن كتلة جسم مفرد تكون ثابتة وبأن كتل بضعة أجسام تنجمع عددياً ، يكمن قانون هام آخر ، ألا وهو قانون حفظ الكتلة . ففي ميادين الطبيعة التي يكون فيها قانون نيوتن الثاني صحيحاً ، تكون الكتلة محفوظة . وفي كيمياء القرن التاسع عشر ، لعب حفظ الكتلة دوراً هاماً لأن التفاعلات الكيميائية chemical reactions لا تُغيِّر - لدرجة عالية للغاية من الدقة - كتلة عينة من المادة . أما في الحقول دون الذرية ، حيث يُخفِّق قانون نيوتن الثاني ، فإن حفظ الكتلة يُخفِّق أيضاً (ويحل محل حفظ الطاقة - الكتلة mass-energy conservation) . لكن ، حتى في هذا المضمار ، يظل الجسيم مَوْسُوماً بكمية قياسية - أعني كتلة السكون rest mass .

دَعْنَا نراجع ما تقدّم : لقد عُرِفَت القُوَّة بدلالة الاستطالة الساكنة (الاستاتيّة) لزنبك مَشْدُود ؛ كما عُرِفَت الكتلة بدلالة التسارع لجسم خاضع لقُوَّة معلومة . ففي هذه الصياغة formulation ، تكون القُوَّة مفهوماً أولياً primitive ؛ بينما تكون الكتلة مفهوماً مشتقاً derived . ومع أن كلا المفهومين مَعْرُوفٌ عملياً operationally ، فإنَّ وَحْدَةَ القُوَّة تكون وَحْدَةَ اعتباريّة تستند إلى زنبك معياري اعتباطي ؛ في حين أن وَحْدَةَ الكتلة تُعرَّفُ كائتلاف معين من وَحَدَات القُوَّة ، والطول ، والزمن . لكن ، نظراً للصلة التجريبية بين القُوَّة والكتلة المبيّنة رياضياً بالمعادلة ٧,٦ ، فإنه لَمِنَ السَهْلِ أَنْ نرى أنه كان بوسعنا اختيار الكتلة كالمفهوم الأولي والقُوَّة كالمفهوم المشتق . بل الواقع أن كيلو غراماً معيارياً هو الذي يُعرَّفُ وَحْدَةَ الكتلة للعمل العلمي الحديث .

حفظ الكتلة هو أحد قوانين الفيزياء الكلاسيكية

وفي التطبيق العملي ، تُقَارَنُ الكُتْلُ المجهولة مع الكتلة المعيارية بواسطة قياسات الوزن النسبي relative weight ، وذلك نظراً لتكافؤ كتلتي القصور والحاذبية . إلا أن التحديدات المباشرة للكتلة بواسطة تجارب التسارع تكون ممكنة من حيث المبدأ . فكأبسط ما يمكن ، تخيل كيلوغراماً معيارياً وكتلة مجهولة خاضعت لنفس القوة (التي لا داعي لأن يكون مقدارها معلوماً) . فيجوز تعريف نسبة هاتين الكتلتين بأنها معكوس نسبة تسارعيهما :

$$\frac{m}{m_s} = \frac{a_s}{a} , \quad (٧,٨)$$

يزودنا التسارع النسبي بإحدى الطرق لقياس الكتلة

حيث a تسارع الكتلة المجهولة m ، و a_s تسارع الكتلة المعيارية المعروفة m_s . فليمثل هذا القياس ، لا تلزم أية وحدة قوة ، مع أنه من الجلي أن قانون نيوتن الثاني يلعب دوراً هنا .

وَيَقْدَرُ ما يعيننا الإطار المنطقي للميكانيكا ، فإنه لا يكون مهماً فيما إذا اعتبرت الكتلة مفهوماً أولياً أم مشتقاً . فلا يهم سوى أن تزودنا النظرية بفئة متسقة self-consistent من المعادلات ، وأن نختار المفاهيم الأساسية بحيث تكون هذه المعادلات أبسط ما يمكن ، كما وأن توجد صلة مفهومة بوضوح بين القياسات الفيزيائية والرموز الرياضية . فعندما تتحقق هذه الأشياء ، تزودنا النظرية بوصف بسيط لجزء ما من الطبيعة وبقدرة التنبؤ . ولا يمكن أن يطلب منها أي شيء آخر ؛ إذ لا يحاول العلم الحديث كما لا يفلح في إجابة أسئلة من قبيل : ما هي « حقاً » أكثر المفاهيم أساسية ؟ أو لماذا تنصرف الكتلة بالطريقة التي تنصرف بها ؟ فإن تحابك interweaving التعاريف والقوانين في بنية العلم الحديث ، رغم كونه مُشوشاً أحياناً ، لهو سمة ضرورية لعلم تكون الرياضيات فيه مربوطة بإحكام مع الطبيعة بواسطة الأواصر bonds المكونة من تعاريف عملياتية وبراهين تجريبية .

يكون اختيار المفاهيم الأساسية أمراً جزافاً

٧,٤ تطبيقات قانون نيوتن الثاني Applications of Newton's Second Law

بما أن المعادلة ٧,٦ هي معادلة اتجاهية ، فإنه يمكن إعادة التعبير عنها كـ ثلاث معادلات عددية :

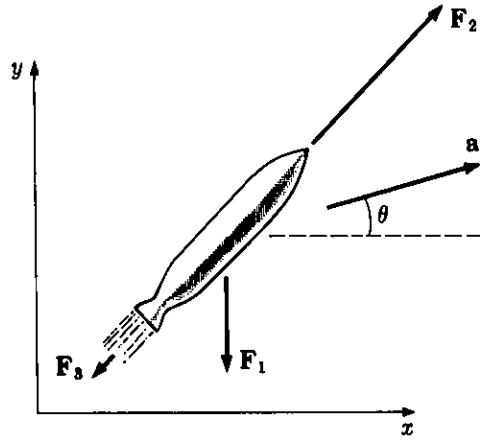
$$F_x = ma_x , \quad (٧,٩)$$

$$F_y = ma_y , \quad (٧,١٠)$$

$$F_z = ma_z , \quad (٧,١١)$$

قانون نيوتن الثاني على صورة مركبات

حيث تشير x و y و z إلى محاور ديكارتية ثلاثة متعامدة بالتبادل . أما إذا كان معلوماً أن الحركة تحدث على امتداد خط مستقيم مفرد ، فإنه يمكن اختيار اتجاه هذا الخط ، أيًا كان ،



شكل ٧,٨ : يُقاني صاروخ تسارعاً a استجابةً لقوى الجاذبية (F_1)، والدفع (F_2)، وانجرار الهواء الاحتكاكي (F_3) .

كأتجاه x . عندئذٍ ، تلزم معادلة عددية واحدة فحسب . كذلك ، إذا حدثت الحركة في مستوى ، أمكن اختيار اثنين من المحاور الثلاثة بحيث يقعان في ذلك المستوى .

وفي هذا البند ، سنحلّ أولاً مثالين عدديّين ينطويان على حركة في مستوى ، ومن ثمّ سنعتبر نوعين من الحركة في بُعد واحد . كما سندرس في بنود لاحقة أمثلة أخرى على الحركة في بُعد واحد وبُعدين .

■ مثال ١ : يتحرك صاروخ كتلته $١,٥ \times ١٠^٣$ كـم غ عبر الهواء بحيث تصنعُ سرجهته زاوية ٤٥° مع الاتجاه الأفقيّ إلى أعلى (شكل ٧,٨) . ويخضع ، عند لحظة معينة ، لثلاث قوى : وزنه ، F_1 ، الذي يؤثر رأسياً إلى أسفل ويكون مقداره $١,٤٧ \times ١٠^٦$ ن ؛ دفعه ، F_2 ، الذي يتجه على امتداد طيرانه ويكون مقداره ٣×١٠^٦ ن ؛ وانجرار الهواء الاحتكاكيّ ، F_3 ، الذي يتجه بعكس سرجهته ويكون مقداره $٠,٢ \times ١٠^٦$ ن . فما تسارع الصاروخ ؟

باختيار محوريّ x و y كما في شكل ٧,٨ ، نستطيع الكتابة

$$F_1 = -1.47 \times 10^6 j,$$

$$F_2 = 2.12 \times 10^6 i + 2.12 \times 10^6 j,$$

$$F_3 = -0.14 \times 10^6 i - 0.14 \times 10^6 j,$$

حيث i و j متجهتا وحدة على امتداد محوريّ x و y . أمّا القوة الكلية ،
فهي $F_T = F_1 + F_2 + F_3$

$$F_T = 1.98 \times 10^6 i + 0.51 \times 10^6 j, \quad (٧,١٢)$$

وتُقاس بالنيوتن . وقسمة هذه على كتلة الصاروخ تُعطي تعبيراً لتسارعه :

التسارع محسوباً من القوة

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_T}{m} = (13.2\mathbf{i} + 3.4\mathbf{j}) \text{ m/sec}^2. \quad (V, 13)$$

وهذا متجه ذو مقدار ١٣,٦ م / ث^٢ (حوالي 1.4g) ، ويصنع زاوية ١٤,٤° مع الاتجاه الأفقي إلى أعلى (tan θ = 3.4/13.2 = 0.258) .

■ مثال ٢ : لا داعي لاستخدام قانون نيوتن الثاني دائماً لإجابة السؤال : إذا حددت القوة ، فما الحركة ؟ إذ يمكن استخدامه - سواءً بسواء - لإجابة السؤال : إذا حددت الحركة ، فما القوة ؟ ولقد استعمله نيوتن نفسه بهذه الطريقة ؛ إذ أنه أفاد من المعرفة عن الحركة القمرية lunar والكوكبية planetary التي زودته بها قوانين كبلر بغية استنتاج قانون قوة الجاذبية هالك مثالاً أكثر إلفة . تدور سيارة بسرعة ١٠ م/ث حول منعطف نصف قطر انحنائه radius of curvature ٣٠ م . فما القوة التي يتأثر بها راكب كتلته ٧٥ كـغ ؟

لقد أسفرت دراسة كينماتيكا الحركة الدائرية في بند ٦,١٠ عن أن مقدار التسارع يتحدد بالمعادلة

$$a_c = \frac{v^2}{r},$$

حيث v السرعة و r نصف قطر الدائرة . وعلى ذلك ، ففي هذا المثال ، يكون تسارع السيارة

$$a = \frac{(10 \text{ m/sec})^2}{30 \text{ m}} = 3.33 \text{ m/sec}^2.$$

كما يكون للراكب ، الذي يتبع نفس مسار السيارة ، التسارع ذاته . وبالتالي ، يجب أن تكون القوة المؤثرة عليه ، وفقاً لقانون نيوتن الثاني ،

$$F = ma = 75 \text{ kg} \times 3.33 \text{ m/sec}^2 = 250 \text{ N}. \quad (V, 14)$$

القوة محسوبة من التسارع

وتتجه القوة والتسارع على امتداد نفس الخط ، نحو مركز المسار الدائري . وتكون محصلة القوة هذه أفقية . وبما أن الراكب لا يعاني أية مركبة رأسية للتسارع ، فإن مجموع القوى الرأسية المؤثرة عليه (أي قوة الجاذبية إلى أسفل وقوة المقعد إلى أعلى) يجب أن يكون صفراً . ■

□ الحركة بقوة ثابتة Motion with Constant Force

هَبْ أَنْ جَسِماً متحركاً في خط مستقيم يتأثر بقوة ثابتة F . اختر محور x بحيث يقع على امتداد اتجاه القوة . عندئذ ، تكون $a_y = a_z = 0$ ، و

$$a_x = \frac{F}{m} = \text{constant}. \quad (V, 15)$$

القوة الثابتة تعني تسارعاً ثابتاً

وقد درسنا كينماتيكاً الحركة المتسارعة بانتظام في بُعد واحد في بُند ٥,٧ . وتزودنا المعادلتان ٥,٥٥ و ٥,٥٦ بما يُدعى « حلّ الحركة solution for the motion » أي بإجابات عن السؤالين : أين الجسم وكم سرعة حركته في كلّ الأوقات ؟ وتستطيع نفس القوة أن تُحدث حركات مختلفة ، اعتماداً على الشروط الابتدائية . افترض ، مثلاً ، أن قوة ثابتة مقدارها ٦ ن تؤثر في اتجاه x الموجب على جسم كتلته ٢ كغ . فسيكون تسارعه $a_x = ٣ م/ث^٢$. فإذا بدأ من السكون ($v_0 = ٠$ صفراً) عند نقطة الأصل ($x_0 = ٠$ صفراً) في الزمن الابتدائي ($t = ٠$ صفراً) ، تحدّد موضعه اللاحق بالمعادلة

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2,$$

التي تكون بوحدات النظام المتري (م ك م ك ث mks)

$$x = 1.5t^2.$$

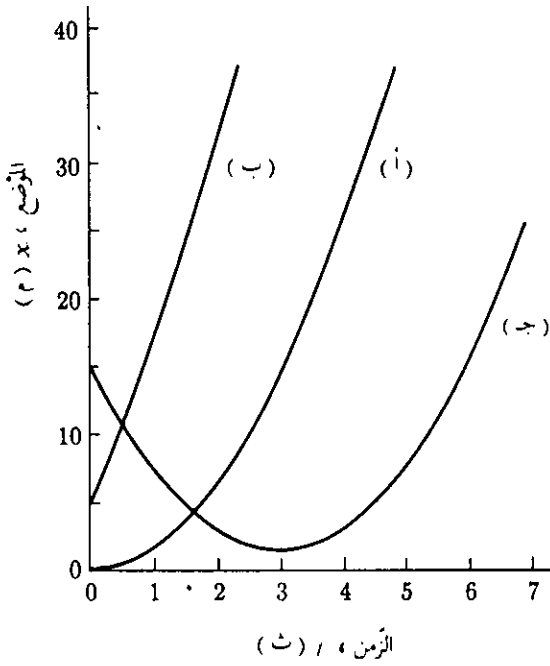
فينتحرّك الجسم بعيداً إلى اليمين بسرعة متزايدة أبداً (شكل ٧,٩) . لكن ، لو كان موضعه عند نقطة أخرى x_0 في الزمن الابتدائي وكانت له سرعة ابتدائية v_0 في هذا الزمن ، لتحدّد تاريخه اللاحق بالمعادلة الأعقد

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_x t^2.$$

ومثل هذه الحركة مُدكّل عليها أيضاً بمثلين في شكل ٧,٩ ، أحدهما فيه $x_0 = ٥ م$ و $v_0 = ٩ م/ث$ ، والثاني فيه $x_0 = ١٥ م$ و $v_0 = -٩ م/ث$. فلسرجهة ابتدائية موجبة ، يتسارع الجسم بعيداً إلى قيم x الأكبر ، محتفظاً بسرعة أعلى ممّا كان عليه عندما بدأ من السكون . أمّا بالنسبة لسرجهة ابتدائية سالبة ، فيشرع الجسم بالحركة إلى اليسار (إلى قيم x الأصغر) ؛ لكنّ التسارع إلى اليمين يُبطئه . وبعد ٣ ث يسكن ، فينعكس اتجاه حركته ، ويتسارع بعيداً إلى قيم x الأكبر . والنقاط الرئيسية التي يُدكّل عليها هذا المثال هي هذه : تخضع الحركة الأحادية البعد لجسم خاضع لقوة ثابتة بتسارع ثابت . وتعتمد التفاصيل الدقيقة للحركة على الشروط الابتدائية - أين كان موضع الجسم وكم كانت سرعة حركته في بادئ الأمر . غير أنّ كلّ الحركات الممكنة ، لتسارع معيّن ، تتبع رسماً بيانياً مكافئاً parabolic للموضع كدالة في الزمن ؛ بل الحقيقة أنّ القطوع المكافئة جميعها تكون واحدة ، بخلاف إزاحات أفقية ورأسية على الرسم البياني . كما أنّ الحركة التي بدأت من السكون أو باتجاه التسارع تستمر بنفس الاتجاه ؛ في حين أنّ جسيماً متحرّكاً - بادئ ذي بدء - في الاتجاه المضاد للتسارع سوف يقف ويعكس اتجاهه بعد بعض الوقت .

□ قوة متغيرة مع الزمن Force Varying With Time

بما أنّ $a = dv/dt$ و $v = dr/dt$ ، فإنّه يمكن أيضاً كتابة قانون نيوتن الثاني على أيّ من الصورتين التاليتين :



شكل ٧,٩ : ثلاثة رسوم بيانية للموضع ضد الزمن
لحركة بنفس التسارع الثابت ($a_x = 3 \text{ م/ث}^2$) ،
لكن بثلاثة شروط ابتدائية مختلفة :

$$x = 1.5t^2 \quad (أ)$$

$$x = 5 + 9t + 1.5t^2 \quad (ب)$$

$$x = 15 - 9t + 1.5t^2 \quad (ج)$$

$$m \frac{dv}{dt} = F, \quad (٧,١٦)$$

أو

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = F. \quad (٧,١٧)$$

يمكن التعبير عن قانون نيوتن الثاني
على صورة معادلة تفاضلية

وهاتان معادلتان تفاضليتان differential equations. وحتى نلفت الانتباه إلى سمة المعادلة
التفاضلية هذه لقانون نيوتن الثاني ، دعنا نعتبر قوة افتراضية hypothetical متجهة على امتداد محور
 x وتزايد باضطراد مع الزمن :

$$F_x = \alpha t,$$

حالة خاصة قابلة للحل
soluble : تناسب F_x مع الزمن

حيث α ثابت تناسب. فيمكن كتابة المعادلة $F_x = m a_x$ على الصورة :

$$m \frac{dv_x}{dt} = \alpha t. \quad (٧,١٨)$$

وتساءل هذه المعادلة التفاضلية ، في الواقع : أي دالة $v_x(t)$ لها مشتقة أولى تساوي $(\alpha/m)t$ ؟
واضح أن الجواب هو دالة تربيعية . فتضمنين ثابت اعتباطي (اختياري) ، v_0 ، تكون هذه

$$v_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{m} \right) t^2 + v_0. \quad (٧,١٩)$$

ومفاضلة المعادلة ٧,١٩ تعطي المعادلة ٧,١٨. وهذا الحل عُيِّنهُ للسَّرجة هو بدوِّره معادلة
تفاضلية :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{m} \right) t^2 + v_0.$$

والدالة x التي تساوي مشتقتها الطرف الأيمن من المعادلة ٧,١٩ يمكن إيجادها إذا ما كتبنا

$$x = \int \left(\frac{dx}{dt} \right) dt = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{m} \right) t^2 + v_0 \right] dt.$$

فتكون النتيجة

$$x = \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha}{m} \right) t^3 + v_0 t + x_0. \quad (٧,٢٠)$$

وكل من الخطوتين - من المعادلة ٧,١٨ إلى ٧,١٩ ومن المعادلة ٧,١٩ إلى ٧,٢٠ - إن هي إلا تكامل ؛ كذلك نُدخلُ في كل خطوة ثابت تكامل . وتُدعى المعادلة ٧,٢٠ بحل للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية second-order

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{\alpha}{m} \right) t.$$

وَيَمَيِّزُ هذا الحلَّ عموماً بأنه يحتوي على ثابتين اعتباطيين . فكلما كانت القوة F معلومة ، أمكن اعتبار قانون نيوتن الثاني كمعادلة تفاضلية (أو كفتة مكونة من ثلاث معادلات تفاضلية) للكميات المجهولة x و y و z . ولا تؤدي إلا حِفْظاً من دوال القوة إلى حلول ببساطة الحل المعبرَ هنا .

٧,٥ المذبذب (أو المتذبذب) التوافقي The Harmonic Oscillator

نمة قانون للقوة يحدث في كثير من الأحيان للحركة الأحادية البعد في الطبيعة ، ألا وهو

قانون القوة لمذبذب توافقي

$$F_x = -kx. \quad (٧,٢١)$$

وهذا ينص على أن القوة تتجه نحو نقطة الأصل (أي أن مركبتها تكون سالبة لقيم x الموجبة ، وموجبة لقيم x السالبة) ، وأن مقدار القوة ، الذي يكون صفراً عند نقطة الأصل ، يتزايد طردياً مع البعد عن نقطة الأصل . وتُدعى الكمية k بثابت القوة force constant . وعند تطبيقه على زنبرك ، يُسمى قانون القوة هذا بقانون هوك Hooke's law ؛ وفحواه : أن القوة تتناسب مع الإزاحة . * وهو تقريب جيد لزنبركات عديدة ، ويفسر لماذا يمكن - من حيث المبدأ - استعمال زنبرك لتعريف القوة فضلاً عن قياسها . كذلك ، يكون نفس قانون القوة صحيحاً على وجه

* القوة المعنية هنا هي القوة اللازمة لإزاحة أحد طرفي زنبرك إذا ما بُت الطرف الآخر .

التقريب لبندول pendulum أو لأرجوحة swing . وعموماً ، فإن أي نظام يُوصف بواسطة قانون القوة هذا يُدعى بالمُذبذب (أو المُتذبذب) التوافقي.

وَيُبين شكل ٧,١٠ صورةً مثاليةً للمذبذب توافقي - عربته cart كتلتها m ، مستقرة على سطح أفقي عديم الاحتكاك ، ومتصلة بأحد طرفي زنبرك يكون طرفه الآخر مثبتاً. [†] ويُفترض أن كتلة الزنبرك مهملة بالمقارنة مع كتلة العربة . وكما هو مبين في شكل ٧,١٠ ، فإن إحداثي الموضع x يُعرّف بأنه إزاحة العربة بعيداً عن موضع اتزانها equilibrium position . وعند تطبيقه على العربة ، يمكن كتابة قانون نيوتن الثاني على الصورة :

$$ma_x = -kx, \quad (٧,٢٢)$$

أو ، بصورة مكافئة ،

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x. \quad (٧,٢٣)$$

قانون الحركة

وبما أن النسبة k/m ثابتة ، فإن الشيء الطريف الذي تنص عليه هذه المعادلة هو أن التسارع يتناسب مع سالب إحداثي الموضع . ومرة ثانية ، فنحن نعالج معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية . وهناك طرق شكلية للمضي في إيجاد حلها ؛ لكننا سنستخدم بدلاً من ذلك طريقة التجربة والخطأ trial-and-error method ، وذلك بأن نسأل ببساطة : هل نحن على دراية بأية دالة تتناسب مشتقتها الثانية مع سالب الدالة (كما تقتضي المعادلة ٧,٢٣) ؟ وكما ناقشنا في بند ٥,١٠ ، فإن دالتي الجيب وجيب التمام تتسمان بهذه الخاصية (بل الواقع أنهما الدالتان الوحيدتان من هذا القبيل) . وعلى ذلك ، فبوسعنا التسليم بالمعادلة التالية كحلٍّ لإحداثي الموضع :

$$x = A \sin \omega t, \quad (٧,٢٤)$$

أو

$$x = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \quad (٧,٢٥)$$

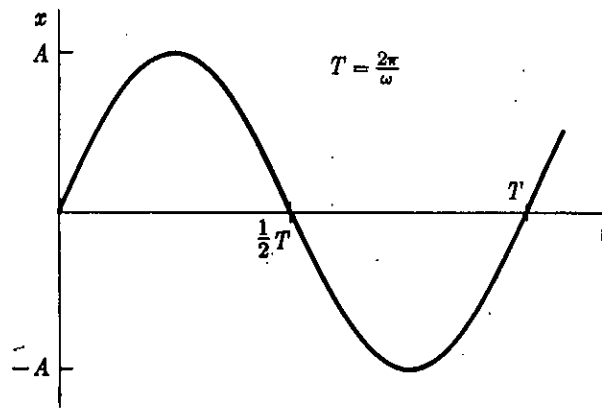
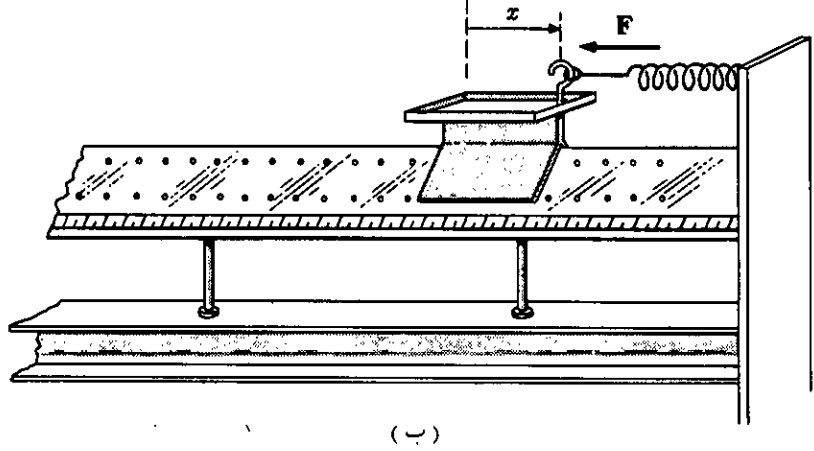
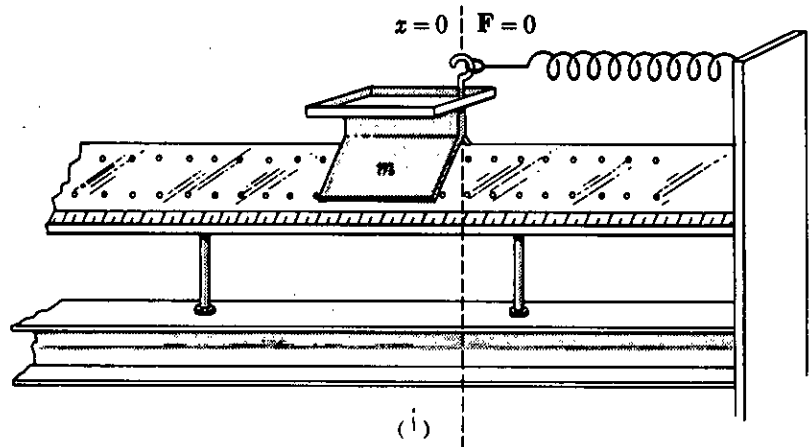
(قارن المعادلتين ٥,٩٩ و ٥,١٠٣) . وتكون الثوابت هنا

$$A = \text{الامتداد} \quad \text{amplitude} \quad [\text{البعد الفيزيائي} : \text{طول}] ; \quad (٧,٢٦)$$

$$\omega = \text{التردد الزاوي} \quad \text{angular frequency} \quad [\text{البعد} : (\text{زمن})^{-1}] ; \quad (٧,٢٧)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \text{الدورة} \quad \text{period} \quad [\text{البعد} : \text{زمن}]. \quad (٧,٢٨)$$

[†] نظراً لارتخاء sag الزنبرك الحقيقي ، فإن هذا التركيب setup لا يكون عملياً في المختبر . لكن أنظر تمرين ٧,٢٥ .



شكل ٧،١٠ : مُدَبِّبٌ نوافقيٌّ مثاليٌّ . (أ) عند موضع اتزان الزنبرك ، لا تتأثر العربة بأية قوة . (ب) للإزاحة تساوي x بمناى عن موضع الاتزان ، تؤثر القوة بعكس اتجاه الإزاحة ، كما يتناسب مقدارها مع الإزاحة $(F_x = -kx)$. (ج) رسم بياني للإزاحة x ضد الزمن t للمدبب (المعادلة ٧،٢٤) .

وبمفاضلة المعادلة ٧,٢٤ ، نجد أنَّ مركبة x للسَّرجة هي

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t. \quad (٧,٢٩)$$

كما نعطِي مفاضلة ثانية

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin \omega t. \quad (٧,٣٠)$$

وَتَبَيَّنُ مقارنة المعادلتين ٧,٢٤ و ٧,٣٠ أنَّ

$$a_x = -\omega^2 x, \quad (٧,٣١)$$

مما يُكافِيُ المعادلة ٧,٢٣ إذا اعتبرنا ω^2 و k/m كَمَيَّة واحدة . وهذا يعني أنَّ حلَّنا التَّجريبِيَّ trial solution يكون مقبُولاً إذا عَبرَنا عن التَّردُّد الزَّائِي بدلالة ثابت القُوَّة k والكتلة m بواسطة العلاقة

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (٧,٣٢)$$

التَّردُّد الزَّائِي

وهكذا تستطيع العربة أنْ تقومَ بِحَرَكَةٍ شَبِيْهِ جَيْبِيَّة sinusoidal motion - وَتَدْعَى أَيْضاً حَرَكَةً تَوَافِقِيَّةً بسيطة simple harmonic motion - يتحدَّد تردُّدها الزَّائِي بالمعادلة ٧,٣٢ ، أو يتحدَّد دَوْرُهَا بالعلاقة

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (٧,٣٣)$$

دَوْرَةُ الحَرَكَةِ

[أنظر شكل ٧,١٠ (ج) .]

بَيِّدَ أَنَّ المعادلة ٧,٢٤ (أو ٧,٢٥) لا تَزُوْدُنَا بِالْحَلِّ الأَعْمَ لحركة المذبذب ؛ إذ تُفِيدُ هذه المعادلةُ بأنَّ $x = 0$ عندما يكون $t = 0$ صَفْراً ؛ مع أنَّه ، على العموم ، قد يكون للإحداثِيَّ x قيمة أخرى عند $t = 0$ صَفْراً . ورياضياً ، فإنَّ افتقار المعادلة ٧,٢٤ إلى العُمُومِيَّة generality إنَّها تَبَيَّنُ الحَقِيقَةَ أنَّها تحتوي على ثابت اعتباطي واحد فقط A (أمَّا الثَّابِت ω ، كَوْنُهُ يتحدَّد بالكميَّتين k و m ، فهو ليس اعتباطياً) ؛ في حين أنَّ الحَلَّ العامَّ لمعادلة تفاضليَّة من الرَّتبة الثانية يجب أنْ يحتوي ، بدلاً من ذلك ، على ثابتين اعتباطيين . فيمكن كتابة الحَلَّ العامَّ بأيِّ من طريقتين :

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t, \quad (٧,٣٤)$$

الحالة العامة للحركة التَّوافِقِيَّة

حيث a و b ثابتان اعتباطيان ؛ أو

$$x = A \sin (\omega t + \varphi), \quad (٧,٣٥)$$

حيث A و φ هما الثابتان الاعتباريان . وفي التعبير الأخير ، لا يزال A هو الاتساع ؛ بينما يكون

$$\varphi = \text{ثابت الطور phase constant [لأبدي]} . \quad (٧,٣٦)$$

وبالرغم من مظهرهما المختلف ، فإن المعادلتين ٧,٣٤ و ٧,٣٥ مكافئتان لبعضهما البعض ؛ كما تمثل كلتاهما لقانون الحركة (المعادلة ٧,٢٣) ، حيث تظل ω محدّدة بالمعادلة ٧,٣٢ . ونترك براهين هذه الحقائق للتأريين . هذا ، وإن الحركة العامة ، التي تصفها المعادلة ٧,٣٤ أو ٧,٣٥ ، تظلّ تُدعى حركة توافقية بسيطة .

ويكون الثابتان A و φ اعتباريين بمعنى أن المعادلة ٧,٣٥ تمثل لقانون الحركة ، بغض النظر عن قيمتي A و φ . لكن ، لأية شروط ابتدائية معينة ، ينبغي أن يُختار A و φ ليستوفيا match هذه الشروط . هبْ ، مثلاً ، أن عند $t = 0$ صفراً ، يكون $x = x_0$ و $v = dx/dt = v_0$. عندئذ تكون المعادلة ٧,٣٥ ، عند $t = 0$ صفراً ،

$$x_0 = A \sin \varphi; \quad (٧,٣٧)$$

كما تكون مشتقتها الأولى بالنسبة إلى الزمن

$$v_0 = \omega A \cos \varphi. \quad (٧,٣٨)$$

وتزودنا ٧,٣٧ و ٧,٣٨ بمعادلتين للمجهولين ، A و φ . فإذا أخذنا نسبة هاتين المعادلتين ، حذفنا A وحصلنا على

$$\frac{x_0}{v_0} = \frac{1}{\omega} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{\omega} \tan \varphi.$$

ويوجد لهذه المعادلة حلان للثابت φ بين صفر و 2π . ويمكن كتابة كليهما على الصورة :

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\omega x_0}{v_0} \right). \quad (٧,٣٩)$$

كذلك ، لإيجاد A ، رُبع square كلا الطرفين للمعادلة ٧,٣٧ ؛ حينئذٍ نحصل على

$$x_0^2 = A^2 \sin^2 \varphi. \quad (٧,٤٠)$$

ثم أعد نفس العملية للمعادلة ٧,٣٨ ، بعد قسمة كلا الطرفين أولاً على ω :

$$\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = A^2 \cos^2 \varphi. \quad (٧,٤١)$$

وأخيراً اجمع المعادلتين ٧,٤١ و ٧,٤٠ لتحصل على

$$x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = A^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = A^2;$$

حيث يتلشى φ نظراً لمتطابقة مثلثية معروفة [$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$]. وعلى ذلك ، يكون الحل للثابت A

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}. \quad (٧,٤٢)$$

الحلّ للانتاع

وإنها لمسألة اصطلاحية أن نختار الجذر التربيعي الموجب . عندئذٍ ، يكون واحد فقط من حلّي φ مناسباً ، ويمكننا استعمال المعادلة ٧,٣٧ لنقرر أيّاً منها يكون هذا .

ويُسمّ المذبذبُ التوافقيّ بالخاصية البسيطة والهامة القائلة إن دورته مستقلة عن اتساعه . ففي الصيغة ٧,٣٣ ، تعتمد T على m و k فقط ، وليس على A (أو على φ أو x_0 أو v_0). وإن قيمة أكبر للثابت k (ممّا يُطابقُ زنبركاً أقسى stiffer) تُحدثُ دورةً أصغر ؛ كما أن قيمة أكبر للكتلة m (قُصور ذاتي inertia أكبر) تُحدثُ دورةً أكبر .

خاصية هامة : تكون الدورة مستقلة عن الانتاع

والظواهر التذبذبية oscillatory phenomena شائعة في الطبيعة — شوكة رنانة مهتزة vibrating tuning fork ؛ حصان خشبي هزاز rocking ؛ أمواج على سطح الماء ؛ صوت sound مُرسَل transmitted عبر الهواء ؛ بناية بأكملها تمايل swaying مع الريح — فعدد الأمثلة يكاد يكون غير محدود ؛ ولكلّها تقريباً يكون قانون القوة البسيط ، الذي تعبّر عنه المعادلة ٧,٢١ ، تقريباً جيداً good approximation للقوة الحقيقية المؤثرة نحو نقطة الاتزان المركزية central للحركة . وعلى ذلك ، فإن تشكيلة هائلة من حركات التمايل ، أو التآرجح swinging ، أو الاهتزاز ، أو التذبذب تُوصفُ بدقة نوعاً بواسطة دوال الجيب .

إن الحركة التوافقية شائعة في طول الطبيعة وتعرضها

وبالطبع ، لا تكون كلّ دوال الجيب متطابقة . فقد تُزاحُ بطرق مختلفة في الزمن (φ مختلف) ؛ وقد يكون لها مقدار كبير أو صغير (A مختلف) ؛ كذلك قد يكون لها دورة طويلة مُتهادية stately كما لجسر مُعلّق suspension bridge تمايل ، أو اهتزاز مُحْمُوم frenetic قوامه مليون ذبذبة لكل ثانية كما لبلورة crystal صغيرة (ω أو T مختلفة) . على الرغم من ذلك ، فإن هذه الدوال تتسم بتطابق رياضي أساسي . وإنه لأمر جدير بالملاحظة أن دالة رياضية بسيطة مفردة نصف مدى هائلاً من الأنماط والمقاييس والسرعات المختلفة للحركة التذبذبية . والسبب ، وفقاً لقانون نيوتن الثاني ، هو أن هناك قوى متناسبة مع الإزاحة ومضادة اتجاهها للإزاحة شائعة في سائر أرجاء الطبيعة .

إن قوة الجاذبية التي يتأثر بها جسم تُسمى وزنه weight . وتؤثر هذه القوة سواء أكان الجسم متحركاً أم لا ؛ لكنها تقاس على الوجه الأنسب عندما يكون الجسم ساكناً . وكل مقياس مدرج scale يُسجل الوزن يكون أداة لقياس القوة . وغالباً ما تكون الوحدات المخطوطة على مدرجة dial المقياس وحدات كتلة ، وليس وحدات قوة . ومع ذلك ، فإن انحراف deflection إبرة المقياس بقياس قوة الجاذبية التي يتأثر بها الجسم الموزون . أو تُعدّل adjusted أوزان معلومة ، في ميزان ذي كفتين pan balance ، حتى تتساوى قوتا الجاذبية على الكفتين . وبما أن قياس الوزن هو قياس ساكن ، فإنه يُزودنا بمعلومات هامة عن قوة طبيعية أساسية مستقلة عن قوانين الحركة .

خواص قوة الجاذبية .

وتسفر دراسات قوة الجاذبية عن الحقائق التالية : (١) بالقرب من سطح الأرض ، يكون وزن الجسم - لدرجة جيدة من التقريب - مستقلاً عن موضعه . (٢) تكون قوة الجاذبية المؤثرة على الجسم مستقلة عن حالة حركته . (٣) والأهم من هذا وذاك ، أن الوزن يتناسب مع الكتلة . وهذا التناسب ، الذي يبدو أنه كوني لكل المواد من سائر الأحجام ، قد اختبر تجريبياً للألومنيوم aluminum والذهب gold لدرجة من الدقة تساوي ثلاثة أجزاء من مئة بليون جزء .

ونظراً للتناسب الملاحظ بين الوزن والكتلة (كتلة القصور) ، فعالباً ما يكون هناك خلط بين هذين المفهومين . تذكر أن كتلة القصور ، التي تُعرف بأنها ثابت التناسب بين القوة والتسارع في قانون نيوتن الثاني ، هي مقياس للمقاومة resistance المبذولة ضد التغير في حركة جسم خاضع لقوة - أية قوة . من ناحية أخرى ، فإن الوزن هو - على وجه التحديد - مقياس لشدة intensity استجابة جسم لقوة الجاذبية . وليس ثمة من أي سبب جلي على الإطلاق لوجود صلة بين هذين المفهومين . وقد ظل تناسبها الطردي ، الذي اكتشفه نيوتن ، صدفة غامضة لأكثر من قرنين . أمسا كيف أفادت نظرية النسبية العامة لأينشتاين Einstein's general theory of relativity من هذا التناسب وأزالت غموضه ، فهذا ما سنبحثه في الباب الثاني والعشرين .

ويمكن كتابة التناسب التجريبي بين قوة الجاذبية وكتلة القصور على الصورة :

تناسب هذه القوة مع الكتلة

$$F_{\text{grav}} = mg. \quad (٧,٤٣)$$

حيث g ثابت تناسب . فإذا اختير محور z (مع متجه الوحدة k) لنظام إحداثي ديكارتي بحيث يشير رأسياً إلى أعلى ، كانت المعادلة الاتجاهية هي

$$F_{\text{grav}} = -mgk. \quad (٧,٤٤)$$

ومع أن g يتفاوت قليلاً من موضع لآخر على سطح الأرض ، فإنه يكون ثابتاً تماماً في أي موضع واحد ، ومستقلاً عن حجم أو طبيعة المادة الموزونة . وإن مقارنة قانون القوة هذا مع قانون نيوتن الثاني لتبين على الفور أن g ينبغي أن يكون له نفس البعد كالسارع . وتكون قيمته العددية في النظام الدولي

$$g = 9.80 \text{ m/sec}^2. \quad (V, 45)$$

تسارع الجاذبية

وإذا كانت قوة الجاذبية هي القوة الوحيدة المؤثرة على جسم ، ارتبط تسارعه بتلك القوة بواسطة قانون نيوتن الثاني ،

$$F_{\text{grav}} = ma. \quad (V, 46)$$

ولما كانت $F_{\text{grav}} = -mgk$ ، فإنه يتبع للتو أن

$$a = -gk, \quad (V, 47)$$

وهذا تسارع ثابت متجه إلى أسفل وذو مقدار 9.8 م/ث^2 . وعلى ذلك ، فإن g يُدعى عادةً « بتسارع الجاذبية the acceleration of gravity » . لكن من المهم أن نذكر أنه إذا كانت الجاذبية مجرد واحدة من عدة قوى مؤثرة على جسم ، فلا داعي لأن يتسم تسارع الجسم بأية علاقة بسيطة مع الثابت g .

ولقد سبق لنا أن بحثنا المعادلات التي تحكم الحركة المتسارعة بانتظام للسقوط الحر free fall ، وهي مبنية في المعادلات $0.01 - 0.08$. وليس ثمة من حركة تحدث في الهواء تكون سقوطاً « حرّاً » بحق وحقيق لأن مقاومة الهواء تؤثر بقوة ما في اتجاه مضاد للحركة . لكن قد تكون هذه القوة المعوقة retardation force من الصغر ، بالمقارنة مع قوة الجاذبية ، بحيث يمكن إهمالها ، وذلك إذا كانت السرجة ضئيلة لدرجة كافية ، أو إذا كان الجسم كثيفاً dense جداً وذا شكل يلائم مقتضيات الديناميكا الهوائية aerodynamically shaped كالقنبلة مثلاً . عندئذ ، فإن الحركة - إذا كانت في بُعد واحد - توصف بنجاح بالمعادلات $0.01 - 0.04$ أو $0.05 - 0.08$ كحركة متسارعة بانتظام (حيث $a = g$) . وعلى الصعيد الآخر ، عندما تغدو القوة المعوقة لمقاومة الهواء من الكبير بحيث تتساوى مقداراً (لكن تتعاكس اتجاهها) مع قوة الجاذبية ، تتحقق سرعة نهائية (حدية) terminal speed ؛ ويكون التسارع صفراً .

تسارع ثابت عندما تكون

$$F = F_{\text{grav}}$$

سرعة نهائية عندما تكون

$$F = 0$$

■ مثال ١ : غواص هوائي skydiver كتلته $m = 80 \text{ كـغ}$ ، وساقط رأسياً إلى أسفل ، يتأثر بقوة مقاومة هوائية تتحدد بصورة تقريبية بالعلاقة $F_D = \gamma v^2$ ، حيث $\gamma = 0.25 \text{ ن} \cdot \text{ث}^2 / \text{م}^2$. فما المدة التقريبية والمسافة لسقوط الغواص الهوائي قبل أن تنمو القوة المعوقة إلى ٥ بالمئة من وزنه ؟ وما سرعته النهائية ؟

للإجابة عن السؤال الأول ، صُغِ $F_D = 0.05mg$ ، لتحصلَ على

$$v = \sqrt{\frac{0.05mg}{\gamma}}$$

وعددياً ، يكون هذا

$$v = \sqrt{\frac{(0.05)(80 \text{ kg})(9.8 \text{ m/sec}^2)}{0.25 \text{ N sec}^2/\text{m}^2}} \\ = 12.5 \text{ m/sec.}$$

وبما أنَّ القوَّة المعوَّقة لا تزال صغيرة نسبياً عند هذه السرعة ، فإنَّ معادلات التسارع الثابت تكون سارية المفعول على وجه التقريب . فتعطي المعادلة ٥,٥٢ الزمن اللازم لبلوغ هذه السرعة ،

$$t \cong \frac{v}{a} = \frac{12.5 \text{ m/sec}}{9.8 \text{ m/sec}^2} \cong 1.3 \text{ sec.}$$

كما تتحدَّد المسافة المقطوعة من المعادلة ٥,٥٤ :

$$x \cong \frac{v^2}{2a} = \frac{(12.5)^2}{2 \times 9.8} \cong 8 \text{ m.}$$

كذلك ، للإجابة عن السؤال الثاني ، لاحظ أنَّ محصلة القوَّة إلى أسفل على الغواص

الهوائي هي

$$F = mg - \gamma v^2.$$

فتكون سرعته النهائية ، التي تتحدَّد بالشرط $F = 0$ ،

$$v_T = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}} = 56 \text{ m/sec.}$$

ويساوي هذا حوالي ١٢٥ ميلاً/س .

★ البندول البسيط ° The Simple Pendulum

وَفَقَّاً لِلْأَسَاطِير ، فَقَدْ رَاقِبَ غَالِيلِيو- حَوالِي عَام ١٥٨٢- تُرَيَات chandeliers متأرجحة في كاتدرائية cathedral ، وَلَاحَظَ أَنَّهَا كَانَتْ تَتَذَبَذَبُ بِدَوْرَةٍ ثَابِتَةٍ مُسْتَقْلَةٍ عَنِ الْإِتْسَاعِ . وَمِنْ هَذِهِ الْمُلَاحَظَةِ ، فَقَدْ انْقَادَ - حَسَبَ الْإِفْتِرَاضِ الشَّائِعِ - لِأَنَّ يَبْحَثَ فِي الْحَرَكَةِ التَّوَافِقِيَّةِ الْبَسِيطَةِ . وَاقْتَرَحَ فِي وَقْتٍ لَاحِقٍ أَنَّ الْبَنْدُولَ قَدْ يَصْلُحُ لِأَن يَكُونَ لُبَّابَ آلِيَّةِ (ميكانيكية) mechanism ساعة . وَبَدَأَ اسْتِعْمَالُ سَاعَةِ الْبَنْدُولِ بِالْفِعْلِ حَوالِي عَام ١٦٦٠ ، وَظَلَّتْ شَائِعَةً الْاسْتِعْمَالِ حَتَّى

من الأسهل أن نعالج معضلة البندول البسيط بالاستعانة بمفهوم الطاقة . وسنعمل هذا في بُند ١٠,١١ . وعلى ذلك ، فإنَّ المعالجة هنا ، التي نستخدم مفهوم القوَّة ، هي اختيارية .

عهودٍ قريبة جداً . هذا ، ويكون البندول مفيداً في ساعة لأنه يقوم - لدرجة جيدة من التقريب - بحركة توافقية بسيطة ، ذات دَوْرَة مستقلة عن الاتساع .

إِعتَبَرُ بندولاً مثاليًا (شكل ٧،١١) . فهو قضيب rod طوله l وكتلته مُهمَلَة ، يثبت على محور pivoted عند أَحَدِ طَرَفَيْهِ ويحمل ثِقْلًا bob ذا كتلة m عند الطَرَفِ الآخر . [†] وتؤثر على الثقل قوتان : F_{grav} ، وهي ذات مقدار mg ، ومتجهة رأسيًا إلى أسفل ؛ و F_{rod} ، وهي القوة التي يؤثر بها القضيب ، وتنتجه على امتداد القضيب . فتكون القوة الكلية على الثقل

$$F = F_{grav} + F_{rod} . \quad (٧،٤٨)$$

وأنه لَمِنْ المُفِيدِ أَنْ نُركِّزَ انتباهنا على تلك اللحظة أثناء الحركة عندما يصنع القضيب زاوية θ مع الاتجاه الرأسي ، وأنْ نختارَ اتجاهي إسناد معرفين بواسطة زوج من المحاور مُوجَّهٍ بحيث يكون القضيب - عند هذه اللحظة - متجهًا على امتداد محور y كما يكون اتجاه حركة الثقل على امتداد محور x (أنظر شكل ٧،١١) . إِستنادًا إلى هذين المحورين ، فإنه يُعبَّرُ عن قانون نيوتن الثاني بالمعادلتين

$$ma_1 = F_1 . \quad (٧،٤٩)$$

$$ma_2 = F_2 . \quad (٧،٥٠)$$

حيث يشير الرَّمزان السُّفْلَيَانِ subscripts إلى مركبتَي a و F على امتداد اتجاهي الإسناد . واختيار المحورين المائلين tilted مَرَدُّهُ أَنَّهُ يَكُونُ عندئذٍ كافيًا أَنْ نَعتَبِرَ فقط أولى هاتين المعادلتين . فمع أنه لا داعي لأن يكون F_2 و a_2 صفرًا (أنظر مسألة ٧،١٥) ، فبإمكاننا إيجاد حركة البندول بدون استعمال المعادلة ٧،٥٠ .

بشكل محوران مائلان اختياراً ملائماً

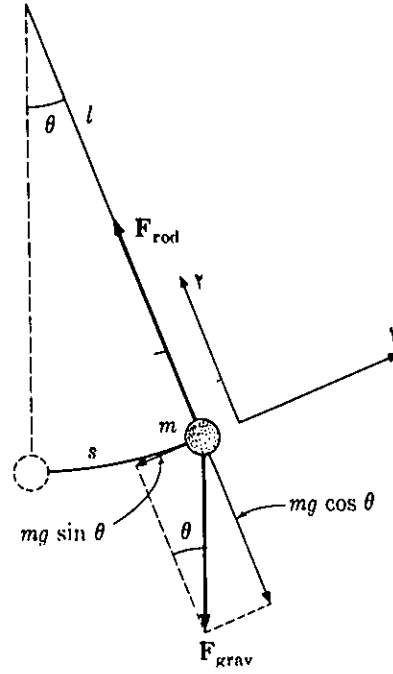
لا داعي لأن نعتبر سوى المركبتين a_1 و F_1

وما F_1 و a_1 على وجه التحديد ؟ ... بما أنه لا يوجد للقوة F_{rod} أية مركبة على امتداد محور x ، فإن F_{grav} فحسب تُسهمُ بنصيب في F_1 . وكما هو مبين في شكل ٧،١١ ، تكون مركبة القوة هذه

$$F_1 = -mg \sin \theta .$$

وإنَّ إِحدائِيَا مَلاَمًا لتعيين موضع ثقل البندول هو s ؛ أي إِزاحة الثقل بعيداً عن موضع اتزانهِ ، مَقاسَةً على امتداد قوس حركته . ومن التَّعَرِيفِ الأساسي لِزاوية مَقاسَةٍ بِوَحَدَاتٍ دائرية radians ، ترتبط θ ببساطة مع s :

† مثل هذا البندول المثالي ، ذي القضيب العديم الوزن weightless والكتلة النقطية point mass ، والذي يتأرجح في مستوى ، إِنَّمَا يُدْعَى «بندولاً بسيطاً» ، وذلك لتمييزه عن «البندول الفيزيائي» physical pendulum «أو» البندول المركب compound pendulum ذي الكتلة الموزعة distributed mass .



شكل ٧,١١ : بندول بسيط . يزودنا محوران مائلان باتجاهي إسناد ملائمين . وعند اللحظة المبينة ، حين تكون إزاحة الثقل على امتداد قوسه هي s ، تكون سرجه الثقل موازية لمحور ١ . كما قد تكون له مركبتا تسارع غير صفريتين على امتداد كلا المحورين .

$$\theta = \frac{s}{l} . \quad (٧,٥١)$$

وعلى ذلك ، فإنه يمكن كتابة مركبة القوة F_1 على الصورة :

$$F_1 = -mg \sin \left(\frac{s}{l} \right) . \quad (٧,٥٢)$$

كما يمكن التعبير عن مركبة التسارع a_1 بدلالة الإزاحة s ؛ حيث تكون*

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} . \quad (٧,٥٣)$$

وتعويض هذين التعبيرين للكميتين F_1 و a_1 في المعادلة ٧,٤٩ يؤدي إلى معادلة الحركة التالية للبندول :

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin \left(\frac{s}{l} \right) . \quad (٧,٥٤)$$

معادلة الحركة للبندول

وهذه معادلة تفاضلية للدالة $s(t)$. وحلها التام exact solution يتضمن ما يُدعى دوالاً ناقصية elliptic functions . لكننا سنعتبر هنا صورتها التقريبية لإزاحات صغيرة ($1 \gg \theta$ أو $1 \gg s$) . فبموجب المعادلة ٥,١٠٦ ، يكون

$$\sin \left(\frac{s}{l} \right) \approx \frac{s}{l} \quad (s \ll l) .$$

* مع أن هذه الصيغة للكمية a_1 قد تبدو « بدئية » ، فإنها لتقتضي برهاناً . ونحن نترك هذا البرهان كمسألة للقارئ .

وبالاستعانة بهذا التقريب ، يمكن كتابة المعادلة ٧,٥٤ على الصورة :

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = - \frac{mg}{l} s, \quad (٧,٥٥)$$

معادلة الحركة للإزاحات الصّغيرة
($s \ll l$)

التي يسري مفعولها على الإزاحات الزاوية angular displacement الصّغيرة . وهذه هي معادلة المذبذب التوافقي البسيط ، التي تكافئ المعادلة ٧,٢٣ ، حيث يتحدّد ثابت القوّة k بالعلاقة

$$k = \frac{mg}{l}. \quad (٧,٥٦)$$

وبهذا التعويض للثابت k ، يمكن تطبيق أيّ من مُعادلات بند ٧,٥ على البندول . فتوصف حركته بالمعادلة المكافئة للمعادلة ٧,٣٥ ،

$$s = A \sin (\omega t + \varphi). \quad (٧,٥٧)$$

الدّبذبات الصّغيرة تكون توافقية

كما يتحدّد تردده الزاويّ من المعادلتين ٧,٣٢ و ٧,٣٣ بالعلاقة

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (٧,٥٨)$$

ودوّرته بالعلاقة

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (٧,٥٩)$$

تكون الدّورة مستقلة عن كلتا الكتلة والانتساع

لاحظ أنّ كتلة الثقل غير موجودة في هذين التعبيرين . وهذه من مميّزات الحركة التي تحكمها الجاذبيّة .

■ مثال ٢ : ما طول البندول البسيط الذي تساوي دَوْرته ٢ ث ؟

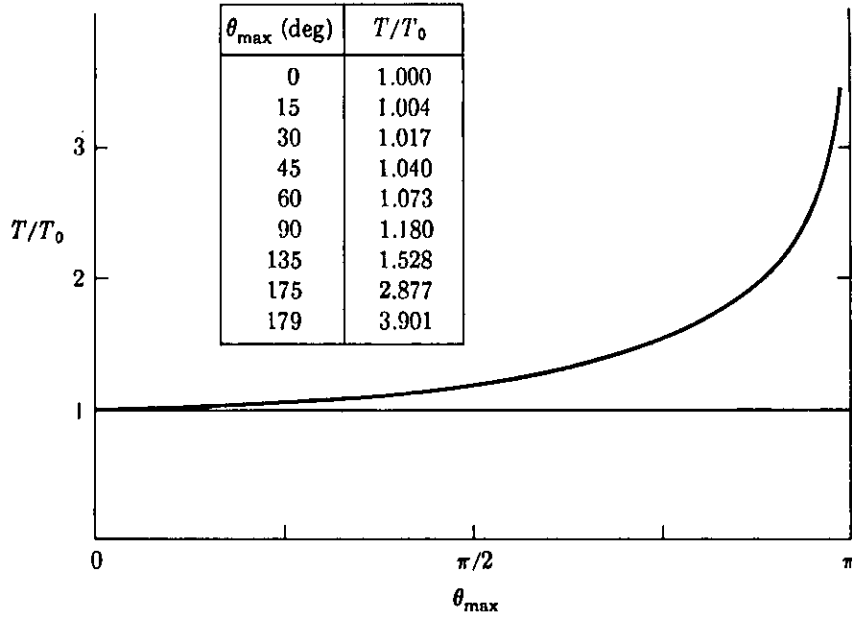
من المعادلة ٧,٥٩ ، نحصل على

$$l = g \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2.$$

وعددّيّا ، تُعطي هذه الصيغة

$$\begin{aligned} l &= 9.80 \text{ m/sec}^2 \times (2 \text{ sec}/2\pi)^2 \\ &= 0.993 \text{ m} = 99.3 \text{ cm}. \end{aligned}$$

وبندول بهذا الطّول يُدعى « بندول ثوانٍ seconds pendulum » . ■



شكل ٧,١٢ : اعتماد دورة بندول على زاوية تارجه العظمى
 تساوي الكتبة $T_0 : 2\pi\sqrt{l/g}$ ؛
 أي الدّورة التقريبية لانتساع صغير .
 ويبين الجدول المدرج inset table أن T تختلف عن T_0 بالمقدار ١,٧ بالمئة فقط لتأرجح يبلغ ٣٠ ، وبالمقدار ٤ بالمئة لتأرجح ٤٥ . وعندما تقرب θ من π ، تقرب T من اللانهاية .

وإن بندولاً ذا طول ثابت منقولاً من موضع لآخر على الأرض لسوف يُبدى تغييراً طفيفاً في دورته نظراً لحدوث تغيير في g . وهكذا ، فإن البندول يُزوّدنا بطريقة ممتازة لقياس g - وعلى الأخص لقياس التغيرات في g من موضع لآخر .

■ مثال ٣ : يتأرجح بندول إلى المخالف أقصى قيمته ٢٠ . فما الخطأ الكسري (الجزئي) fractional error في الطرف الأيمن من المعادلة ٧,٥٥ ، عند هذه الزاوية ؟

لكي نحصل على المعادلة ٧,٥٥ من المعادلة الدقيقة ٧,٥٤ ، استبدلنا $\sin \theta$ بالزاوية θ على الطرف الأيمن . وعلى ذلك ، يكون الخطأ الكسري عند أية زاوية θ

$$\frac{\theta - \sin \theta}{\sin \theta} \quad (٧,٦٠)$$

وبالاستعانة بجدول جيوب ، يمكن حساب هذه النسبة عند $\theta = ٢٠ = ٠,٣٤٩$ مسر . فتكون

$$\frac{0.349 - 0.342}{0.349} = 0.02,$$

أو ٢ بالمئة . ولطريقة أخرى لحساب هذه النسبة ، أنظر تمرين ٧,٣٥ . ■

وكما يتضح من المناقشة والاشتقاق الآنفين ، فإن البندول البسيط يكون مُدَبِّدباً توافقياً فقط لزوايا اهتزاز صغيرة . أمّا للانتساعات الكبيرة ، فتعتمد دورته على الانتساع . ويبين شكل ٧,١٢ كيف تعتمد الدّورة على زاوية التّأرجح العظمى .

اقترح : بالاستعانة بفئة مفاتيح أو أوزان أخرى معلقة من خيط ، تحقق من تناسب $T \sim \sqrt{l}$ (المعادلة ٧,٥٩) للأنساعات الصغيرة ، وراجع صحة الطول لبدول ثوانٍ ، ثم ابحث اعتماد الدورة على الاتساع لاتساعات أكبر .

٧,٧ كتلة الجاذبية Gravitational Mass

إن الحقيقة القائلة - بأن الأجسام القريبة من الأرض ، التي تكون قوة الاحتكاك عليها مهملة ، كلها تسقط بنفس التسارع الثابت - لهي من الإلفة بحيث نفوتنا دلالتها بسهولة ؛ مع أنه يجب اعتبارها ظاهرة استثنائية بحق وحقيق اعتبر عدداً من الأوزان المختلفة ؛ فيكون جذب الجاذبية على كل منها مختلفاً . ومع ذلك ، فكلها يسقط بنفس التسارع تماماً . فكيف يحدث أن يكون الجسم متأثر بضعف قوة الجاذبية لجسم آخر ضعف كتلة القصور بالضبط أيضاً ، بحيث يتحرك كلاهما بنفس التسارع تماماً ؟ ... لسنأهدها هنا إلى تحليل هذه الصدفية ، بل إلى مجرد معاودة التأكيد على أنه ليس هناك من سبب بين أن تكون الكتلة ومقدار قوة الجاذبية متناسبين . فلا توجد أية قوة أساسية أخرى في الطبيعة ترتبط مع الكتلة بهذه البساطة . مثلاً ، يتأثر البروتون والبوزيترون بنفس القوة الكهربائية بالرغم من الفارق الكبير في كتلتهما ؛ في حين أن البروتون والنيوترون ، اللذين تكون كتلتهما واحدة تقريباً ، يشعان بقوى كهربائية ومغناطيسية مختلفة للغاية .

القوة تناسب مع الكتلة ، وهذه سمة تفرد بها الجاذبية

وقد برزت أحجية تناسب الوزن مع الكتلة في العلوم في الشطر الأخير من القرن التاسع عشر . وعلى وجه الخصوص ، فقد عَنَّ السؤال فيما إذا كانت نسبة الوزن إلى الكتلة عند بقعة معينة على الأرض ثابتة حقاً أو تتغير قليلاً من مادة لأخرى . وبُغية تسهيل مناقشة هذا السؤال وتركيز الانتباه على هذه الأحجية ، فقد أدخل مفهوم جديد - هو كتلة الجاذبية . ويمكن جلاء مدلول كتلة الجاذبية على الوجه الأفضل باعتبار تجربة افتراضية تخيل أنك في مختبر مجهز equipped لقياس القوة والسرعة والتسارع ، وأن لديك عدداً من الأجسام المتبينة تحت تصرفك ، بما فيها كيلوغرام معياري . وبما أن التجربة افتراضية ، تخيل أيضاً أن لديك سطحاً أفقياً عديم الاحتكاك ومستوياً flat تماماً تنزلق عليه الأجسام ؛ ثم يتم التأثير بقوة أفقية معلومة (ليست قوة الجاذبية) على كل جسم على التعاقب ، ومن ثم قياس التسارع . فبفضل قانون نيوتن الثاني ، تزودك القوة والتسارع بقياس لكتلة القصور m_1 (حيث استخدمنا الرمز السفلي 1 لتأكيد أن كتلة القصور inertial هي التي يجري قياسها) :

$$m_1 = \frac{F}{a} \quad (٧,٦١)$$

تعريف عملياً لكتلة القصور
بسنخدم الحركة

وبعد تعريف وقياس كتلة القصور لكل جسم بواسطة تجارب مستقلة عن الجاذبية ، حول انتباهك إلى ماهية قوة الجاذبية المؤثرة على كل جسم من أجسام الاختبار test objects. هنا تدخل

فرضية postulate أساسية ، سنختبر صحتها بواسطة تجارب إضافية . وهذه الفرضية هي التالية :
يعتمد مقدار قوة الجاذبية التي تؤثر على جسم معين على خاصية واحدة فقط لذلك الجسم ،
تكون كمية قياسية . ومن الجلي أن هذه فرضية قوية حول بساطة الطبيعة ؛ إذ تقول إن عدداً
مفرداً يكفي للكشف عن مقدار قوة الجاذبية التي يتأثر بها الجسم ، بصرف النظر عن شكله أو لونه
أو تركيبه الكيميائي chemical composition ، وبصرف النظر عما إذا حوى سائلاً ، أو جامداً ، أو
غازاً . ونطلق على هذه الكمية العددية اسم كتلة الجاذبية ؛ على أن تُعتبر خاصية ذاتية intrinsic
للجسم ، مشابهة تماماً للشحنة الكهربائية . فبينما تقيس الشحنة قوة التفاعل الكهربائي
strength of electric interaction للجسم ، تقيس كتلة الجاذبية قوة تفاعل الجاذبية . بل الواقع
أن شحنة الجاذبية gravitational charge قد تكون اسماً أفضل لهذه الكمية .

تشبيه هام : كتلة الجاذبية والشحنة
الكهربائية

ووفقاً لهذه الفرضية ، يجب أن تتناسب قوة الجاذبية التي يتأثر بها أي واحد من أجسام
الاختبار مع كتلة الجاذبية ، m_G . فالتعبير الرياضي عن هذه الفرضية هو

$$F_{\text{grav}} = gm_G \quad (7,62)$$

حيث g ثابت تناسب (عند موضع معين) . ويحتاج هذا المفهوم الجديد ، كتلة الجاذبية ، إلى
وحدة قياس ومعياري لهذه الوحدة . فقد تقرر - من باب الملاءمة - أن تقيس كتلة الجاذبية بنفس
وحدة كتلة القصور ، الكيلوغرام ، وأن تبني كمعيار لها نفس جسم الكيلوغرام الواحد ؛ حتى
إذا ما فعلت هذا ، شرعت بوزن كل من أجسام الاختبار : أي أنك تحدد بواسطة قياس ساكن
قوة الجاذبية على كل منها . فيحدد وزن الكيلوغرام المعياري الثابت g عن طريق المعادلة

$$g = \frac{F_{\text{grav}}}{1 \text{ kg}}$$

في حين أن وزن أي جسم آخر يُحدد كتلته الجاذبية بواسطة المعادلة

$$m_G = \frac{F_{\text{grav}}}{g} \quad (7,63)$$

تعريف عملياً لكتلة الجاذبية
يستخدم قياس القوة الساكنة

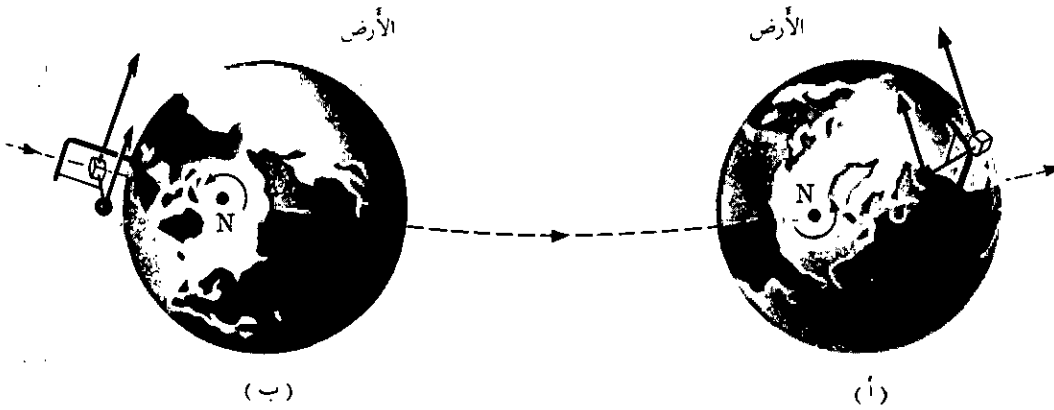
دعنا نراجع ما تقدم : باستخدام تجربة فيها حركة لكن بدون الجاذبية ، قُمت بقياس
كتل القصور لعدد من الأجسام . كذلك ، باستخدام تجربة بدون حركة لكن مع الجاذبية ،
قُمت بقياس كتل الجاذبية لنفس الفئة من الأجسام . فبالرغم من الحقيقتين المشوشتين بأن كلتا
الكميتين تقاس بنفس الوحدة وتستند إلى نفس المعيار ، من الواضح أن تعريفيهما العمليتين
مختلفان تماماً . وبالتالي ، فإذا اكتشفت تساوي كتلة القصور والجاذبية لكل جسم مختلف ،

$$m_I = m_G \quad (7,64)$$

اكتشفت بذلك حقيقة في غاية الأهمية عن الطبيعة ، هي ليست بأي حال من الأحوال محض
مسألة تعريف .

هذا ، ويستلزم نجاح قانون نيوتن للجاذبية في وصف الحركة الكوكبية أن تكون كتلتنا القُصُور والجاذبية متساويتين . كما أن التسارع الثابت لكل الأجسام الساقطة سقوطاً حراً يستلزم الشيء ذاته . إلا أن التحقق من صحة تساويهما لدرجة عالية للغاية من الدقة - تقع حالياً ضمن نطاق ثلاثة أجزاء في ١١١٠ - إنها يتركز على تجارب أكثر تخصصاً ، قام بها لأول مرة رولاند فون إيتفيس Roland von Eötvös في الثمانينات من القرن الماضي ، كما هذبها وصقلها روبرت ديكبي Robert Dicke من جامعة برنستون Princeton University في بواكير الستينات من هذا القرن . وقد سعى ديكبي إلى اكتشاف ما إذا كانت مواد مختلفة تعاني نفس تسارع الجاذبية نحو الشمس أم لا . ورغم تعقيد تجربته الدقيقة في التنفيذ ، فهي بسيطة من حيث المبدأ .^٥ ... وزنان مصنوعان من مادتين مختلفتين يُعلَّقان من وتر ليفي (فيبر) fiber طويل ، بحيث لو كان أحد الوزنين متسارعاً نحو الشمس بقوة أكبر من الآخر ، لالتوى twist الوتر (شكل ٧،١٣) ؛ إذ ، نظراً لدوران الأرض ، فإن جذب الشمس قد يلوي الوتر (هذا إن حدث ذلك على الإطلاق) أولاً في اتجاه واحد ، ومن ثم في الاتجاه الآخر . ومثل هذا التعاقب اليومي لاتجاه اللي قد يكون الكشف عنه

↑
الاتجاه نحو الشمس



شكل ٧،١٣ : سَتَتْ تجربة ديكبي إلى اكتشاف فارق في تسارع الجاذبية نحو الشمس لجسمين مصنوعين من مادتين مختلفتين ، تبيينها هنا للملاءمة كمكعب وكرة . وكلاهما معلق بوتر ليفي طويل . فإذا لم يكن الجسمان متساويي التسارع نحو الشمس ، التوى الوتر في أحد الاتجاهين عند الشروق sunrise (أ) ، وفي الاتجاه المضاد عند الغروب sunset (ب) . ويبين الرسمان التوضيحيان تسارعاً افتراضياً أكبر للمكعب منه للكرة ؛ مع أنه ، في حقيقة الأمر ، لم يكشف عن أية فوارق .

٥ لتحقيق جيد عن التجارب التي أجريت لاختبار تساوي كتلتي الجاذبية والقصور ، أنظر : روبرت ديكبي ، « تجربة إيتفيس » ، مجلة Scientific American ، كانون أول (ديسمبر) ، ١٩٦١ .

أسهل من اللي في اتجاه واحد فقط ؛ كما قد يُعزى لدرجة معقولة من اليقين إلى فعل الشمس بدلاً من تأثيرات تَرْجَافِيَّة (اضطرابية) perturbing مجهولة . فباستثناء تعقيدات غير جوهرية يُحدِّثها دوران الأرض وجذب القمر ، يكون الوزان المعلقان منهمكين - في الواقع - « بسقوط حر » نحو الشمس (بالإضافة إلى بقية المعدات ، والقائم بالتجربة ، والأرض ذاتها) . ويكون تسارع كلٍّ منهما نحو الشمس متناسباً مع نسبة كتلة الجاذبية إلى كتلة القصور :

تساوي تسارع الجاذبية لجسمين
يستلزم :

$$a \sim \frac{m_G}{m_1}$$

$$\left(\frac{m_G}{m_1}\right)_1 = \left(\frac{m_G}{m_1}\right)_2$$

وقد نَحَقَّقْ ديكبي ، لدرجة استثنائية من الدقة ، من تساوي التسارعين ، وبالتالي من تساوي نسب كتلة الجاذبية إلى كتلة القصور للذهب ، والألومنيوم ، ومواد أخرى .

وخلال معظم ما تبقى من هذا الكتاب ، سنعتبر تكافؤ كتلتي القصور والجاذبية كحقيقة ثابتة من حقائق الطبيعة ؛ وعلى ذلك ، سنشير ببساطة إلى كلمة « كتلة » ، رامزين إلى أيٍّ من ، أو إلى كِلا ، نوعي الكتلة بنفس الرمز m .

٧,٨ الحركة في بُعْدَيْن Motion in Two Dimensions

يحدثُ العديدُ من أهمِّ أمثلة الحركة في الطبيعة في بُعْدَيْن : تصادمٌ وتفاعلٌ زوج من الجسيمات الأولية ؛ انحراف إلكترون بفعل نواة ؛ مدار قمر صناعي نسبةً إلى الأرض ؛ مدار الأرض حول الشمس . فلكلِّ نوع من أنواع الحركة هذه ، تُخَطَّطُ traced out المسارات في مستوى وهمي imaginary في الفضاء ، نظراً لعدم وجود قوى فعالة قادرة على حَرَف الجسيمات أو الأجسام خارج نطاق مستوى حركتها . والمبادئ العامة التي تحكم الحركة في ثلاثة أبعاد ليست مختلفة عن مبادئ الحركة الثنائية البعد . غير أنه يسهل التَّدليل على هذه المبادئ ببساطة أكثر للحركة الثنائية البعد ، التي سوف لا نعتبر سواها . وإنَّ الصِّفَة الاتجاهية لقانون نيوتن الثاني هي التي تُعَلِّل - بالدرجة الأولى - السَّهْلَ الطَّرِيفَةَ للحركة المتعددة الأبعاد multidimensional التي لا توجد في الحركة الأحادية البعد .

□ الحركة الدائرية المنتظمة Uniform Circular Motion

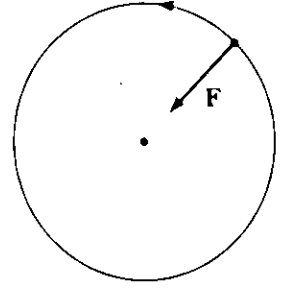
اعتبرنا كينماتيكا الحركة الدائرية المنتظمة في بَنْد ٦,١٠ . فاكشفنا هناك أنَّ تسارعَ جسم متحرِّك في دائرة بسرعة ثابتة يتجه نحو مركز الدائرة ؛ كما يتحدَّد مقداره بالعلاقة

$$a = \frac{v^2}{r} . \quad (٧,٦٥)$$

ويكشف قانون نيوتن الثاني ، $F = ma$ ، للتو عن القوة اللازمة لإحداث مثل هذه الحركة . فيما أن مقدار التسارع ثابت ، يكون مقدار القوة ثابتاً أيضاً ، ويتحدد بالعلاقة

$$F = \frac{mv^2}{r} . \quad (٧,٦٦)$$

قوة مركزية جاذبة -



وعلاوةً على ذلك ، بما أن القوة والتسارع هما كميتان متجهتان ، ولكليهما نفس الاتجاه ، وجب أن تنجّه القوة نحو مركز الدائرة . ومثل هذه القوة ، المتجهة دائماً نحو مركز ثابت ، تُدعى قوة مركزية central force . وغالباً ما تُعرف أيضاً باسم نيوتن الأصلي لها - قوة مركزية جاذبة centripetal (بمعنى الباحثة عن المركز center-seeking) . * مثلاً ، تُنقل القوة المركزية الجاذبة لحجر يُلَوَّحْ swung على طرفِ جبل بواسطة الحبل . كذلك ، تؤثر الجاذبية والكهرباء عبْر الفراغ لإحداث قوى مركزية ، وذلك بدون الاستعانة بوسيط ماديّ material intermediary . فيَقْبَدُ القمر في مدار شبه دائريّ بفعلِ قوةٍ متجهةٍ نحو مركز الأرض ؛ كما يتأثر الإلكترون في ذرة هيدروجين بقوة مركزية جاذبة نحو البروتون المركزي في هذه الذرة .

■ مثال ١ : في سباق سيارات ، يتوجب على سيارة سباق sports car أن تقوم بانعطاف ، نصف قطر انحنائه ٥٠ م ، على سطح طريق مستوية . فإذا كانت القوة القُصوى التي تستطيع الطريق أن تؤثر بها على الإطارات tires قبل أن تتلَقَ هذه جانبياً skid هي ٤٠ بالمئة من وزن السيارة ، فما السرعة العظمى التي يوسع السيارة أن تقوم بالانعطاف عندها بدون الانزلاق جانبياً ؟

نضع قوة الطريق على الإطارات ، $0.4mg$ ، مساويةً للقوة المركزية الجاذبة ، فنكتب

$$0.4mg = \frac{mv^2}{r} .$$

عندئذٍ ، تتحدد السرعة v بالعلاقة

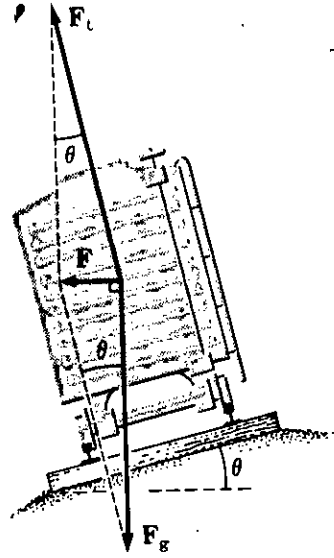
$$v = \sqrt{0.4gr} .$$

وعددباً ، تكون هذه

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{0.4 \times 9.8 \text{ m/sec}^2 \times 50 \text{ m}} \\ &= 14.0 \text{ m/sec} ; \end{aligned}$$

أي حوالي ٣١ ميلاً/س .

• لا داعي للحركة في مجال field مركزي للقوة أن تكون دائرية .



شكل ٧,١٤ : عندما تدور عربة شحن حول منعطف ، تنتج قوة الجاذبية المؤثرة عليها رأسياً إلى أسفل كما يكون لها مقدار معلوم ، في حين أن القوة الكلية F تتحدد بواسطة التسارع : فتكون أفقية وذات مقدار mv^2/r . أما القوة التي يؤثر بها خط السكة الحديدية ، F_t ، فتساوي $F - F_g$ ويجب أن يكون لها الاتجاه الميّن ، بصرف النظر عن الميلان . ويكون الميلان صحيحاً إذا أثرت F_t عمودياً على مجرى الطريق .

■ مثال ٢ : يمتد مقطع section من خط سكة حديدية railroad track على طول قوس دائرة نصف قطرها ٥٠٠ م . وتدور القطارات حول هذا المنعطف بسرعة متوسطة تبلغ ٨٠ كم/س (نحواً من ٥٠ ميلاً/ث) . فبأي زاوية يجب أن يُمَيَّلَ be banked الخط ؟

تكون القوة الإجمالية على حافلة قطار

$$F = F_g + F_t, \quad (٧,٦٧)$$

حيث F_g قوة الجاذبية و F_t القوة التي يؤثر بها الخطان على الحافلة (أنظر شكل ٧,١٤) . وبما أن الحافلة تقوم بالانعطاف حول قوس دائري في مستوى أفقي ، فإن القوة الكلية المؤثرة عليها يجب أن تتجه أفقياً وأن تكون ذات مقدار

$$F = \frac{mv^2}{r}.$$

مذكّرة : تؤثر القوة الكلية باتجاه التسارع

مبدأ الميلان banking : لا يكون للقوة F_t مركبة جانبية sidewise على المركبة vehicle

أما القوة F_g ، فتتجه - بالطبع - إلى أسفل ، ويكون مقدارها mg . وعلى ذلك ، فإن القوة F_t تساوي $F - F_g$ ، أي كانت تلك بحيث تستوفي شروط المعادلة ٧,٦٧ . فإذا أميل الخط كما ينبغي ، أثرت F_t عمودياً على مجرى الطريق roadbed ، كما هو مبين في شكل ٧,١٤ . ويتضح من هندسة الشكل أن مقادير القوى ، في هذه الحالة ، ترتبط معاً بالعلاقين

$$F_t = \frac{F_g}{\cos \theta},$$

و

$$F = F_g \tan \theta, \quad (٧,٦٨)$$

حيث θ زاوية الميلان angle of bank . فبوضع $F = mv^2/r$ و $F_g = mg$ ، نحصل على

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}. \quad (٧,٦٩)$$

الزاوية الصَّحْبَة للميلان

وإذا استخدمنا عامل تحويل ملائماً ، نجد لهذا المثال أنَّ

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{(80 \times 10^3 \text{ m/hr})^2}{500 \text{ m} \times 9.80 \text{ m/sec}^2 \times (3600 \text{ sec/hr})^2} \\ &= 0.101. \end{aligned}$$

فتكون الزاوية $\theta = ٥,٧٧^\circ$.

■ مثال ٣ : ما السرعة المدارية orbital والدَّوْرَة لقمر صناعيٍّ أرضيٍّ منخفض الارتفاع

low-altitude ؟

إذا كان المدار دائرياً ، نستطيع أن نساوي القوة المركزية الجاذبة مع قوة الجاذبية :

$$\frac{mv^2}{r} = mg. \quad (٧,٧٠)$$

من هنا ، فإن كتلة القمر لا تكون مهمة ، حيث يكون تسارعه إلى الدَّاخل واحداً بغض النظر عن كتلته . وهذه النتيجة هي نفسها التي اكتشفها غاليليو لأجسام ساقطة سقوطاً حراً ، وذلك لسبب وجيه جداً . فالقمر إن هو إلا جسم ساقط سقوطاً حراً ؛ بل الواقع أنَّه لكذلك لدرجة أدق من كرة قاعدة مقذوفة أو حجر ساقط ، حيث تكون مقاومة الهواء للقمر مُهملة ، أو شَيْء مهملة . ومن المعادلة ٧,٧٠ ، تتحدَّد سرعة القمر بالعلاقة

$$v = \sqrt{rg}. \quad (٧,٧١)$$

ومع أنَّه لأمرٌ غَيْرٌ واقعيٍّ ، فإنَّ قرأً افتراضياً يدور حول الأرض بحيث يكاد يلامس سطحها يُزوِّدنا بنهاية طريفة لأغراض حسابية . عندئذٍ ، يكون r نصف قطر الأرض ، $٦,٣٧ \times ١٠^٦$ م ، كما يكون g $٩,٨٠$ م/ث^٢ . ففي هذه النهاية ، تكون

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{6.37 \times 10^6 \text{ m} \times 9.80 \text{ m/sec}^2} \\ &= 7.90 \times 10^3 \text{ m/sec}, \end{aligned} \quad (٧,٧٢)$$

أو نحواً من ٢٤ مرّة ضعف سرعة الصَّوت في الهواء ، التي تساوي $٣,٣ \times ١٠^٣$ م/ث . أمَّا الدَّوْرَة (أو الزَّمن الدَّوْرِيّ للدَّوران) ، فتساوي المحيط مقسوماً على السرعة ،

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (٧,٧٣)$$

أو، بالاستعانة بالمعادلة ٧,٧١ ، يمكن كتابة هذه على الصورة البديلة :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}. \quad (٧,٧٤)$$

وتعويض قيمتي r و g أعلاه في هذه المعادلة يُعطي

$$T = ٥٠.٦٦ \text{ ث} = ٨٤ \text{ د}. \quad (٧,٧٥)$$

دَوْرَة قمر صناعي افتراضي عند
ارتفاع صفري

ونتركها كمسألة للقارئ لأنَّ يَبِين أنَّ قمرًا صناعيًا على ارتفاع ١٠٠ ميل له سرعة أقلَّ بالمقدار ١٠٠ م/ث فقط ودَوْرَة أكبر بالمقدار ٤ د فقط من هذه الأرقام المحسوبة . فالزمن البالغ ساعة ونصف إنما يشكّل عددًا مُدَوَّرًا round number صالحًا لدورة قمر صناعي يدور ضمن نطاق بضع مئات الأميال من سطح الأرض .

■ مثال ٤ : قمر اتصالات communications satellite ، على ارتفاع ٢٢٢٤٠ ميلاً فوق خطِّ الإستواء equator ، يترأى للعيان وكأنَّه يحوم hover فوق نقطة ثابتة على الأرض . يُكْمِلُ مداراً دائرياً واحداً في ٢٣ س و ٥٦ د . ° فبأي عامل تتناقص قوَّة الجاذبيَّة إذا صعدنا من سطح الأرض حتَّى هذا الارتفاع ؟

لايجاد ذلك ، حَسَبْنَا أنَّ نَحْسَبَ تسارع القمر ونقارنهُ مع g ، الذي هو تسارع الجاذبيَّة عند سطح الأرض . فتسارع القمر هو

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r. \quad (٧,٧٦)$$

وهذه الصَّيْغَة الأخيرة هي الأجدى هنا ؛ حيث يساوي بُعْدُ القمر عن مركز الأرض

$$r = ٢٦٢٤٠ \text{ ميلاً} = ٤,٢١٦ \times ١٠^٧ \text{ م} ؛$$

كما تساوي دَوْرَتُهُ

$$T = ٨,٦١٦ \times ١٠^٤ \text{ ث} .$$

فتعويض هذه الأعداد في المعادلة ٧,٧٦ يُعطي

$$a = ٠,٢٢٤٢ \text{ م/ث}^٢ ؛ \quad (٧,٧٧)$$

عندما يكون $a = g/43.7$
 $r = 6.61R$

• تُدْعَى هذه الفترة الزمنية يوماً نجمياً (أو فلکیاً) sidereal day . وهو الزمن اللازم للأرض كي تُكْمِلَ دَوْرَة واحدة في إطار إسناد قصوري (نسبة إلى النجوم) . أمَّا اليوم الشمسي solar day ، فهو أطول قليلاً ؛ حيث تلزم ٤ د إضافية لنقطة على الأرض لكي تعود إلى نفس الموضع نسبة إلى الشمس . ويساعد شكل ٧,١٣ على تفسير السبب وراء ذلك .

أي حوالي ٤٤ مرة أقل من g عند سطح الأرض . وقد كانت عملية حسابية مماثلة هي التي حدت نيوتن على اكتشاف قانون التربيع العكسي inverse-square law للتجاذب الجاذبي $(F \sim 1/r^2)$ gravitational attraction .

□ حَرَكَةُ الْمَقْدُوفَاتِ Projectile Motion

اعتبر حصاة pebble مقذوفة من حافة منضدة أفقية ، كما هو مبين في شكل ٧,١٥ . فإذا سمينا الاتجاه الأفقي باتجاه x والاتجاه الرأسي إلى أعلى باتجاه z ، كانت معادلتا الحركة المعنيتان هما

$$F_x = ma_x, \quad (٧,٧٨)$$

$$F_z = ma_z. \quad (٧,٧٩)$$

وبعد أن تريح الحصاة حافة المنضدة ، تكون $F_x = 0$ و $F_z = -mg$ إذا كانت مقاومة الهواء مهملة . وعلى ذلك ، فإن مسارها تُقيدُهُ المعادلتان

$$0 = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (٧,٨٠)$$

حركة حرة باتجاه x

$$-mg = m \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (٧,٨١)$$

تسارع منتظم باتجاه z

ويمكن أن تُعالج هاتان المعادلتان كلٌّ على حدة . فالأولى تنص على أنه لا يوجد تسارع أفقي . وهذا يعني ، بالطبع ، أن المركبة الأفقية للسرعة v_x ، تكون ثابتة . فإذا وقعت نقطة الأصل لنظام الإحداثيات عند النقطة التي تريح الحصاة فيها المنضدة (شكل ٧,١٥) ، وإذا برحت هذه المنضدة عند $t = 0$ ، فإن الزيادة اللاحقة للإحداثي x تتحدد ببساطة بالعلاقة

$$x = v_x t. \quad (٧,٨٢)$$

من ناحية أخرى ، عند $t = 0$ ، يكون $z = 0$ و $dz/dt = 0$ (أي مركبة رأسية صفرية للسرعة) . وعلى ذلك ، فإن الإحداثي z يُوصفُ بالحالة الخاصة البسيطة للمعادلة ٥,٥١ ،

$$z = -\frac{1}{2}gt^2, \quad (٧,٨٣)$$

التي تكون سالبة نظراً لكون التسارع في الاتجاه السالب . وهكذا ، تكون المركبة الأفقية للحركة نفس الشيء كما لو لم يحدث أي سقوط ، ويكون الجزء الرأسي من الحركة كما لو كان السقوط مباشرة إلى أسفل .

كذلك يمكن ائتلاف المعادلتين ٧,٨٢ و ٧,٨٣ لكي تعطيا معادلةً لمسار الحصة . ولهذا الغرض ، يجب حذف (إزالة) الزمن . فوفقاً للمعادلة ٧,٨٢ ، يكون $t = x/v_x$ ؛ وبتعويض x/v_x بدلاً من t في المعادلة ٧,٨٣ ، نحصل على معادلة المسار trajectory equation ،

$$z = - \left(\frac{g}{2v_x^2} \right) x^2. \quad (٧,٨٤)$$

وهذه معادلة قطع مكافئ . فالئتلاف بين الهلالين ثابت ؛ وبالتالي يتناسب z مع x^2 .

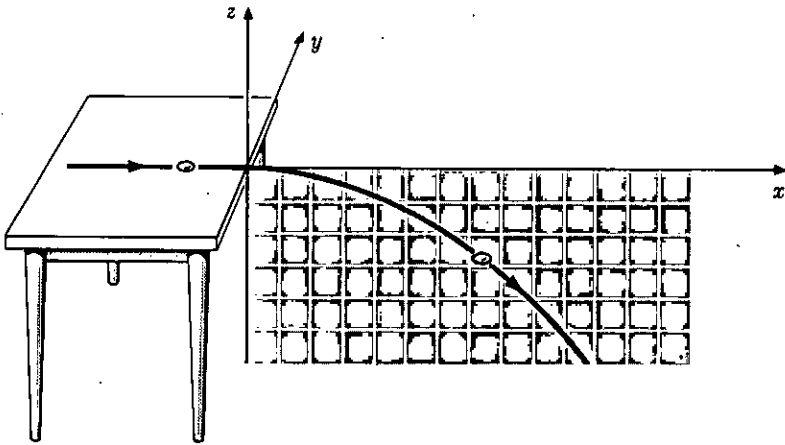
وعلى العموم ، يكون تحليل analysis حركة المقذوفات واحداً من حيث المبدأ - مركبة أفقية ثابتة للسرجة مؤلفة مع تسارع رأسي ثابت - لكن أعقد بقليل رياضياً . فتكون المعادلة العامة للإحداثي x

$$x = x_0 + v_{x0}t; \quad (٧,٨٥)$$

كما تكون المعادلة العامة للإحداثي z

$$z = z_0 + v_{z0}t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (٧,٨٦)$$

والمفاضلة مرتين بالنسبة إلى الزمن لتبين على الفور أن تعبري x و z هذين يمثلان لقانون نيوتن الثاني ، المحدد بالمعادلتين ٧,٨٠ و ٧,٨١ .



شكل ٧,١٥ : النظام الإحداثي والمسار لحصة قذفت من حافة منضدة . ويُعبّر عن الجزء المكافئ parabolic part للمسار بالمعادلة ٧,٨٤ .

■ مثال ٥ : يُطلق مقذوف من نقطة الأصل بسرجة ابتدائية مركبتها v_{x0} و v_{z0} (شكل ٧,١٦) . فما مدى range المقذوف ؟

نستطيع أن نضع $t = 0$ صفراً عند لحظة الإطلاق . عندئذٍ ، يكون $x_0 = z_0 = 0$ ؛ كما يكون إحداثيا الموضع ، كذالتين في الزمن ،

$$x(t) = v_{x0}t, \quad (V,87)$$

$$z(t) = v_{z0}t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (V,88)$$

أما عند نقطة التصادم impact ، فإن $x = R$ و $z = 0$. وعلى ذلك ، لكي نحصل على زمن الطيران flight time ، ضَع $z = 0$ صفراً في المعادلة V,87 . فيعطي هذا حلين للزمن t : $t = 0$ صفراً ، الذي هو الزمن الابتدائي ، و

$$t = \frac{2v_{z0}}{g}, \quad (V,89)$$

الذي هو زمن الطيران المطلوب . وتعويض هذا الزمن في المعادلة V,87 يعطي التعبير التالي للمدى :

$$R = \frac{2v_{x0}v_{z0}}{g} \quad (V,90)$$

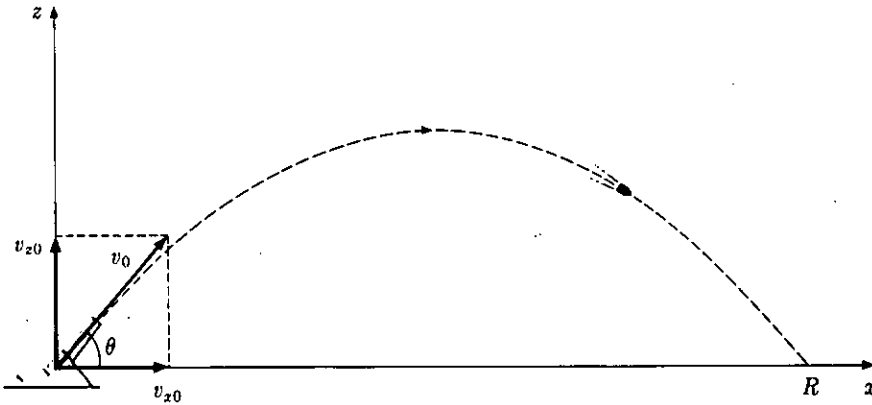
مدى مقذوف

■ مثال ٦ : لو لم يكن هناك هوائي ، فكم قد يكون أقصى مدى لمقذوف أُطلق بسرعة ماخ ١ Mach ١ (سرعة الصوت) وبأي زاوية يجب أن يُطلق لكي يُحرز هذا المدى ؟

من الأفضل إجابة هذين السؤالين بترتيب عكسي . فكما يتضح من شكل V,١٦ ، تكون

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta,$$

$$v_{z0} = v_0 \sin \theta.$$



شكل V,١٦ : مسار مكافئ parabolic لمقذوف . وإن تحليل resolution منته السرجة الابتدائية إلى مركبتين أفقية ورأسية مثبت فوق superimposed الرسم التوضيحي المكاني spatial diagram .

وعلى ذلك ، يمكن إعادة كتابة تعبير المدى ، أي المعادلة ٧,٩٠ ، على الصورة :

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \cos \theta \sin \theta. \quad (٧,٩١)$$

كما يمكن تبسيط الرياضيات باستعمال الصيغة المثلثية

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

عندئذٍ ، يتحدد المدى بالعلاقة

$$R = \left(\frac{v_0^2}{g} \right) \sin 2\theta. \quad (٧,٩٢)$$

تعبير آخر للمدى

وفي هذا المثال ، يكون v_0 و g ثابتين . وبذلك يبلغ المدى قيمته القصوى عندما يكون $\sin 2\theta$ أكبر ما يمكن . وبما أن $\sin x$ يبلغ ذروته عند $x = \pi/2$ ، فإن الشرط للمدى الأقصى هو $2\theta = \pi/2$ ، أو

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45 \text{ deg}. \quad (٧,٩٣)$$

وبطريقة بديلة ، بمقدورنا تطبيق الشرط النهائي extremal condition ، $dR/d\theta = 0$ ، أو

$$\left(\frac{2v_0^2}{g} \right) \cos 2\theta = 0.$$

فضمن المدى الفيزيائي مَوْضِع الاهتمام ($\theta = \text{صفرًا إلى } \pi/2$) ، يكون لهذه المعادلة حل واحد ، عند $\theta = \pi/4$.

وتعويض $\pi/4$ بدلاً من θ في المعادلة ٧,٩٢ يُعطي التعبير التالي للمدى الأقصى :

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (٧,٩٤)$$

فلمقدوف أُطلق بسرعة ماخ ١ ، تكون $v_0 = ٣٣٠ \text{ م/ث}$. حينئذٍ ،

$$R_{\max} = \frac{(3.3 \times 10^2)^2 \text{ m}^2/\text{sec}^2}{9.8 \text{ m/sec}^2} = 1.11 \times 10^4 \text{ m} = 11.1 \text{ km}, \quad (٧,٩٥)$$

أو زهاء ٧ أميال . وهذا ، بالطبع ، تقدير مُغَالَى فيه overestimate كثيراً للمدى الفعلي actual لمثل هذا المقدوف ، نظراً لإهمالنا احتكاك الهواء .

★ ٧,٩ حركة الجسيمات المشحونة في المجالين الكهربائي والمغناطيسي

The Motion of Charged Particles in Electric and Magnetic Fields

سنقدم قوانين القوة الكهربائية والمغناطيسية وسنبحثها بإسهاب في البابين الخامس عشر والسادس عشر. لكن، عند هذه المرحلة، يمكننا اعتبار هذه القوانين كحقائق محددة واستخدامها مع قانون نيوتن الثاني لدراسة حركة الجسيمات المشحونة.

ففي مجال كهربائي E (وهو كمية متجهة)، يتأثر جسيم ذو شحنة q بقوة تحدّد بالعلاقة

$$F_e = qE, \quad (٧,٩٦)$$

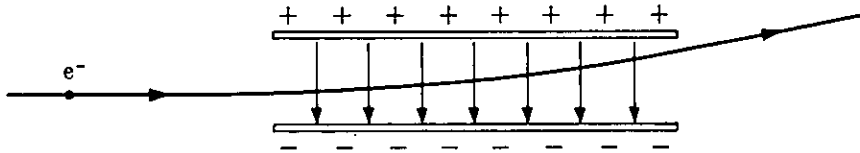
قانون القوة الكهربائية

(حيث يُعبّر عن E بالوحدة فولت/م volt/m وعن q بالكولومب coulomb ، فتحدّد F_e بالنيوتن newton). وعلى ذلك، يكون قانون نيوتن الثاني للجسيم

$$ma = qE. \quad (٧,٩٧)$$

وللحالة الخاصة التي تنطوي على مجال كهربائي ثابت (شكل ٧,١٧)، يُعاني الجسيم تسارعاً ثابتاً، موازياً للمجال الكهربائي وذا مقدار $|q|E/m$. ورياضياً، تكون حركته مثل حركة مقذوف بالقرب من سطح الأرض.

E ثابت يعني a ثابتاً



شكل ٧,١٧ : في منطقة يكون فيها المجال الكهربائي ثابتاً، كذلك الموجودة بين لوحين مشحونين ومتجاورين، يُعاني جسيم مشحون تسارعاً ثابتاً ويتبع مساراً مكافئاً parabolic path . وفي هذا التّديل، يكون الجسيم مشحوناً بشحنة سالبة. وترمز السهام الرأسية إلى المجال الكهربائي E .

■ مثال ١ : في أنبوبة تلفاز (تلفزيون) television tube ، يتسارع الإلكترون في مجال كهربائي ذي مقدار ٢٠٠٠ فولت/سم ($٢ \times ١٠^٥ \text{ فولت/م}$). فما تسارعه؟ وما السرعة التي يكتسبها في مسافة ١ سم ، ابتداءً من السكون؟

باستخدام نسبة الشحنة إلى الكتلة $\text{charge-to-mass ratio}$ للإلكترون من ملحق ٣، نحصل على التعبير التالي للتسارع:

$$\begin{aligned}
 a &= \left(\frac{e}{m} \right) E \\
 &= (1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg})(2 \times 10^5 \text{ V/m}) \\
 &= 3.52 \times 10^{16} \text{ m/sec}^2.
 \end{aligned}$$

وهذا، بالطبع، تسارع هائل بالمقارنة مع أية تسارعات معلومة للأجسام الجاهزية... وللحصول على سرعة الإلكترون في «سقوطه الحر» مسافة ١ سم، نستعمل المعادلة ٥,٥٤ :

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{2ax} \\
 &= \sqrt{2 \times 3.52 \times 10^{16} \text{ m/sec}^2 \times 10^{-2} \text{ m}} \\
 &= 2.65 \times 10^7 \text{ m/sec};
 \end{aligned}$$

أي زهاء ٩ بالمئة من سرعة الضوء.

أما قانون القوة المغناطيسية، فينطوي على حاصل ضرب اتجاهي؛ إذ أنه

قانون القوة المغناطيسية

$$F_m = qv \times B, \quad (V, 98)$$

حيث q شحنة الجسم، و v سرجهته، و B المجال المغناطيسي. [الوحدات هي: q - كولوم؛ v - م/ث؛ B - تسلا (tesla) (نس T)؛ و F_m - نيوتن.] وعلى ذلك، يكون قانون الحركة لجسيم مشحون في مجال مغناطيسي

$$ma = qv \times B, \quad (V, 99)$$

الذي يمكن كتابته أيضاً

التسارع في مجال مغناطيسي

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q}{m} v \times B. \quad (V, 100)$$

ومع أن هذه المعادلة تبدو معقدة (بل قد تكون معقدة حقاً في بعض التطبيقات)، فإن لها لزوماً واحداً في غاية البساطة والطرافة: ألا وهو أن سرعة جسيم مشحون في أي مجال مغناطيسي تظل ثابتة. ويستخدم برهان هذه الحقيقة بعض العمليات الاتجاهية البسيطة. فأولاً، من حاصل الضرب القياسي لكلا طرفي المعادلة $V, 100$ مع متجه السرجية v ، نجد أن:

$$v \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{q}{m} v \cdot (v \times B).$$

وكون $v \times B$ متجهاً متعامداً مع v ، فإن حاصل الضرب القياسي على الطرف الأيمن يكون صفراً (بغض النظر عن مقدار أو اتجاه B). وعلى ذلك، فإن

$$v \cdot \frac{dv}{dt} = 0. \quad (V, 101)$$

الآن ، باستخدام المعادلة ٦,١٠٢ (والحقيقة القائلة إنَّ حاصل الضرب القياسي هو تبادلي) ،
نلاحظ أنَّ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}.\end{aligned}\quad (٧,١٠٢)$$

وتبيّن مقارنة المعادلتين ٧,١٠١ و ٧,١٠٢ أنَّ مشتقة $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ الزمنية ينبغي أن تتلاشى . لكن $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ إنَّ هو إلا v^2 . لذا تكون

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 0. \quad (٧,١٠٣)$$

نتيجة بسيطة : يكون الجسيم في
مجال مغناطيسي سرعة ثابتة

وهذا يعني أنَّ مقدار v لا يتغير مع الزمن ؛ أي أنَّ $v = \text{ثابتاً}$. ويمكننا استكناه « السبب » وراء هذه النتيجة ، إذا ما عاودنا النظر في المعادلة ٧,٩٨ . فبما أنَّ القوة المغناطيسية المؤثرة على جسيم مشحون متحرك تكون دائماً متعامدة مع سرجهة الجسيم ، فإنَّ هذه القوة تُديرُ متجه السرجة بدون تغيير مقداره ؛ إذ لكي نُغيّر سرعة الجسيم ، ينبغي أن تؤثر مركبة قوة بصورة موازية (أو معاكسة) لمتجه السرجة .

□ الحركة في مجال مغناطيسي ثابت Motion in a Constant Magnetic Field

وفقاً للمعادلة ٧,٩٨ (وبالاستعانة بالمعادلات ٦,٦٤ - ٦,٦٦) ، تكون مركبات القوة المغناطيسية على جسيم ما

$$F_{mx} = q(v_y B_z - v_z B_y), \quad (٧,١٠٤)$$

$$F_{my} = q(v_z B_x - v_x B_z), \quad (٧,١٠٥)$$

$$F_{mz} = q(v_x B_y - v_y B_x). \quad (٧,١٠٦)$$

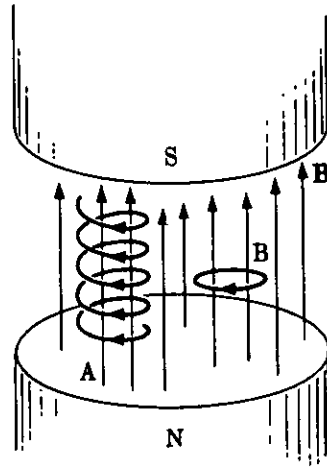
وإذا كان المجال المغناطيسي ثابتاً ، كذلك إذا اختير محور z بحيث يقع على امتداد $\mathbf{B}$ ، نتج تبسيطٌ عظيمٌ ؛ إذ تكون حينذاك $B_z = B = \text{constant}$ ، و $B_x = B_y = 0$. فتؤول مركبات معادلة الحركة ، $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}_m/m$ ، إلى

$$\frac{dv_x}{dt} = \left(\frac{qB}{m}\right) v_y, \quad (٧,١٠٧)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right) v_x, \quad (٧,١٠٨)$$

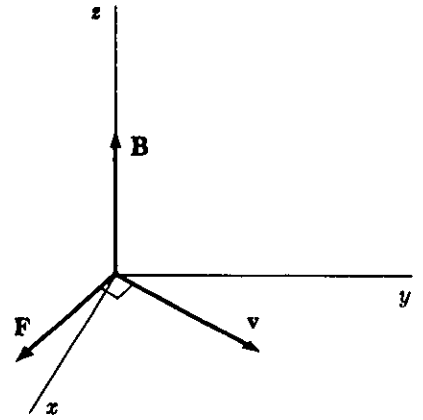
$$\frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (٧,١٠٩)$$

معادلات الحركة في مجال مغناطيسي
ثابت



شكل ٧,١٨ : في منطقة يكون فيها المجال المغناطيسي ثابتاً ، مثل تلك الموجودة بين قطبي مغناطيس كبير ، يتبع جسيم مشحون مساراً حلزونيّاً (لوليّاً) helical (A) . وإذا كانت مركبة سرّجته على امتداد المجال صفراً في بادئ الأمر ، فإنّها تظلّ صفراً ، ويكون المسار دائرة (B) . وفي هذا التّديل ، يكون الجسيم موجب الشّحنة . كما ترمز السّهام الرّأسية إلى المجال المغناطيسي B .

شكل ٧,١٩ : هندسة التّجهات لجسيم موجب الشّحنة يتحرّك عموديّاً على مجال مغناطيسيّ . فالسرّجة v تقع في مستوى xy ، والمجال المغناطيسيّ B يكون في اتجاه z ، كما أنّ القوّة F ، المتعامدة مع كلا v و B ، تقع في مستوى xy .



وإنّها لمُعْضِلَةٌ طريفة ومثيرة للتّحدّي (أنظر مسألة ٧,٢٧) أنّ نَحِلَّ هذه المعادلات وأنّ نبرهن أنّ مدار الجسيم هو حلزون helix ؛ أي حركة دائريّة في مستوى xy مُركّبة superimposed مع حركة بسرّجة منتظمة في اتجاه z . ومثل هذا المدار مبين في شكل ٧,١٨ . لكنّنا نخصّص الحديث هنا على الحركة في مستوى ، ونمضي قُدماً بطريقة مغايرة بعض الشيء .

فمن المعادلة ٧,١٠٩ ، يتبع فوراً أنّ

$$v_z = \text{constant.} \quad (٧,١١٠)$$

الحركة الموازيّة للمجال تكون حركة حرّة

لذلك ، إذا كانت v_z - باديّ ذي بدء - صفراً ، فإنّها تظلّ صفراً ، وتكون الحركة مقصورة على مستوى xy . ومن المعادلة ٧,٩٨ ، يكون مقدار القوّة $F_m = qvB \sin \theta$ ؛ لكنّ بما أنّ v تقع في مستوى xy ، فإنّها تكون متعامدة مع B (شكل ٧,١٩) ؛ وعلى ذلك ، فإنّ $\sin \theta = 1$ ، كما تكون

F_m لها مقدار ثابت

$$F_m = qvB. \quad (٧,١١١)$$

وَكُونُ السَّرعَة v ثابتة ، فَإِنَّ مقدارَ القوَّة هذا يكون ثابتاً أيضاً . وهذا يعني أَنَّ التَّسارعَ ثابتٌ مقداراً . فلدينا ، إذن ، جسيم ذو سرعة ثابتة ويُعاني تسارعاً ثابتاً ، حيث يكون متجه التسارع متعامداً مع متجه السَّرجة . وهذا هو بالضبط شرط الحركة الدائرية المنتظمة . ونتركة كتمرين للقارئ أَنْ يُبينَ أَنَّ معادلتَي الحركة الدائرية المنتظمة (أنظر المعادلة ٦،٨٦) ،

F_m متعامدة مع v

$$x = r \cos \omega t \quad (٧,١١٢)$$

و

$$y = r \sin \omega t, \quad (٧,١١٣)$$

الحركة العمودية على المجال تكون حركة دائرية

نمثِّلان فعلاً للمعادلتين ٧،١٠٧ و ٧،١٠٨ . فإذا ما قبلنا هذه الحقيقة ، أمكننا إيجاد نصف قطر الانحناء من الشرط

$$F_m = \frac{mv^2}{r}.$$

وباستبدال F_m على الطرف الأيسر بالكمية qvB (من المعادلة ٧،١١١) ، نحصل على

$$r = \frac{mv}{qB}. \quad (٧,١١٤)$$

نصف قطر الانحناء لحركة محصورة في مستوى

كذلك ، يكون التردد الزاوي للجسيم : $\omega = v/r$ ، أو

$$\omega = \left(\frac{q}{m} \right) B. \quad (٧,١١٥)$$

تردد السايكلوترون ، مقاساً بالوحدة مس/ث

وَيُذَعَى هذا بتردد السايكلوترون *cyclotron frequency* (لاحظ أنه - في الواقع - تردد زاوي) . ومن الطريف أنه يعتمد فقط على نسبة الشحنة إلى الكتلة للجسيم وعلى قوة المجال المغناطيسي ، وليس على سرعة الجسيم أو نصف قطر انحنائه .

■ مثال ٢ : ما تردد السايكلوترون لبروتون في حزام فان ألن الإشعاعي Van Allen radiation belt * عند موضع يُساوي فيه المجال المغناطيسي $B = 10^{-5}$ تس ؟ وما نصف قطر انحنائه إذا كانت طاقته ١ مغ ؟ ف ؟

• في الواقع هناك حزامان حلقياً الشكل مندبجان مع بعضهما البعض ومكوَّنان من جسيمات مشحونة (الكترونات وبروتونات على الأغلب) محبوسة في مجال الأرض المغناطيسي . ويمتد هذان الحزامان من بضع مئات من الأميال فوق سطح الأرض حتى آلاف الأميال . وهما يكوَّنان على أشدهما فوق خط الاستواء ؛ بينما يكادان يتلاشيان فوق القطبين . أمَّا أهم مصادر الجسيمات المشحونة فيها فهي الأشعة الكونية والشمس والانفجارات النووية التي أجرتها الدولتان العُظُمَتان في طبقات الجو العليا . وبلب حزاما فان ألن (وخاصة الخارجي منها) دوراً هاماً في عدد من الظواهر الفيزيائية الهامة ، نذكر منها ظاهرة الشفق القطبي الجنوبي *aurora australis* والشمالي *aurora borealis* ، والعواصف المغناطيسية *magnetic storms* ، والوهج الهوائي *airglow* . هذا ، وقد اكتشف هذين الحزامين - في بواكير عهد الأقمار الصناعية (١٩٥٨-٥٩) - فريق أمريكي برئاسة جيمس أ . فان ألن (١٩١٤ -) ، الذي كتب مقالة مبسطة رائعة عن هذا الموضوع بعنوان « أحزمة إشعاعية حول الأرض » ، بمجلة *Scientific American* ، المجلد ٢٠٠ ، آذار (مارس) ١٩٥٩ ، ص ٣٩-٤٧ .

(المشرف)

باعتبار نسبة الشحنة إلى الكتلة للبروتون من ملحق ٣ ، يكون تردد السايكلوترون

$$= 9.58 \times 10^7 \text{ C/kg} \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$= 958 \text{ radian/sec.} \quad (٧,١١٦)$$

وَيُناظر هذا حوالي ١٥٠ دَوْرَة / ث . كذلك تكون سرعة البروتون (من المعادلة $K = \frac{1}{2}mv^2$)

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 10^6 \text{ eV} \times 1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}}$$

$$= 1.38 \times 10^7 \text{ m/sec.}$$

أَمَّا نصف قطر الانحناء لمساره (إذا تحرك في مستوى متعامد مع B) ، فيمكن الحصول عليه من المعادلة ٧,١١٤ ، أو من $r = v/\omega$. فباستخدام التعبير الأخير ، نجد أن

$$r = \frac{1.38 \times 10^7 \text{ m/sec}}{0.958 \times 10^3 \text{ sec}^{-1}}$$

$$= 1.44 \times 10^4 \text{ m} = 14.4 \text{ km,} \quad (٧,١١٧)$$

أو ٩ أميال تقريباً . وفي سايكلوترون نموذجي ، تكون قوّة المجال المغناطيسي نحواً من ١ تس بدلاً من ١٠ تس . وعلى ذلك ، فإن بروتوناً ذا طاقة ١ مغ ء ف في سايكلوترون يكون له تردد زاوي حوالي ١٠ مرة أكبر من ذلك المحسوب في المعادلة ٧,١١٦ ، ونصف قطر انحناء ١٠ مرة أصغر من قيمة المعادلة ٧,١١٧ .

أَمَّا بالنسبة للحالة العامّة للحركة الحلزونيّة في مجال مغناطيسي ثابت ، فلا تقتضي النظريّة الآنفة إلاّ تعديلاً طفيفاً ؛ إذ يمكن حينذاك كتابة سرّجهة الجسيم على الصّورة :

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp}, \quad (٧,١١٨)$$

حيث تكون $v_{\parallel}$ موازيّة للمجال B وحيث تقع $v_{\perp}$ في المستوى المتعامد مع B . ويظلّ الجزء $v_{\parallel}$ ثابتاً ؛ بينما يدور الجزء $v_{\perp}$ بانتظام بتردد السايكلوترون الزاوي . وهكذا ، فإنّ المعادلة ٧,١١٥ لا تتغير . كذلك ، تستبدل v بالكميّة $v_{\perp}$ في المعادلة ٧,١١٤ ، بحيث يكون نصف قطر الانحناء

الصيغة العامّة لنصف قطر الانحناء

$$r = \frac{mv_{\perp}}{qB}. \quad (٧,١١٩)$$

٧,١٠ أطرُ الإسناد Frames of Reference

حتّى يكون ذا معنى ، ينبغي أن يُعرّف كلُّ واحد من نواميس الطّبيعة بالنسبة إلى إطار إسناد معيّن ، أو - على الأغلب - إلى فئة معيّنة من أطر الإسناد . وفي الميكانيكا الكلاسيكيّة ،

يكون إطار الإسناد إطار إسناد مكانيًا *spatial* مجتأ ؛ إذ يُفترض أن الزمن مُستقل عن إطار الإسناد . فقد يكون الإطار متحركاً وبالتالي يعتمد في حد ذاته على الزمن ؛ إلا أنه يُفترض أن إحداثي الزمن لا يتأثر بالحركة لتوضيح هذه النقطة ، تخيل نفسك وكأنك مراقب مستقل طائرة في طريقها إلى دمشق .^{*} في إطار إسنادك ، تكون دمشق متحركة نحوك ؛ أي أن متجه موضعها يتغير مع الزمن . أما بالنسبة لمراقب في بغداد ، فتكون دمشق ساكنة على بُعد ثابت . وهكذا ، فإن مفهوم الزمن مهم للتمييز بين إطارَي الإسناد . أما قياس الزمن ، فيُفترض واحداً بالنسبة لك وللمراقب المستند إلى سطح الأرض ؛ إذ سوف لا تسفر المقارنة الدقيقة عن أي فارق قابل للكشف عنه في مقياسي الزمن . هذا ، ولقد علمنا في هذا القرن أنه ، لإطارَي إسناد متحركين بسرعة نسبية عالية لدرجة كافية ، يوجد - في الحقيقة - فارق ملموس في مقياسي الزمن فضلاً عن فارق في قياسات الموضع . وقد أفضى هذا الظرف ، الذي فسّرته نظرية النسبية الخاصة ، إلى فكرة إطار إسناد رباعي الأبعاد *four-dimensional* ، جاعلاً بذلك قياسات كلا الزمان والمكان معتمدة على حالة الحركة للمراقب . بيد أن هذا التبصر الجديد يكون ذا أهمية عملية فقط عند سرعات تقارب سرعة الضوء . فحتى في إطار الإسناد لرائد فضاء مداري ، يكون قياس الزمن مختلفاً عنه على الأرض إلى حد من الصغر يمكن معه إهمال هذا الاختلاف . وعلى ذلك ، في مضمار الطبيعة الذي يسري فيه مفعول الميكانيكا الكلاسيكية ، يمكن اعتبار الزمن وكأنه مُطلق ، ولا يعتمد على إطار الإسناد إلا القياس المكاني .

في الميكانيكا الكلاسيكية ، يكون الزمن مطلقاً

وقد أدرك نيوتن ، وغاليليو من قبله ، أن قوانين الحركة واحدة في سائر أطر الإسناد القصورية . ولا يعني هذا أن كل أوجه وصف الحركة تكون واحدة في أطر إسناد مختلفة . فكيف ندرك تأثير إطار الإسناد على وصف الحركة ، نستطيع دراسة مثال معين يُسقط المراقب A [شكل ٧,٢٠ (أ)] كرة من السكون عند نقطة الأصل لنظامه الإحداثي . فإذا كان الاحتكاك مهملاً ، فإن الكرة تسقط بتسارع ثابت g ، ويصف هذا المراقب حركتها بالمعادلة

$$x_A = \frac{1}{2}gt^2. \quad (٧,١٢٠)$$

الحركة في إطار A

من ناحية أخرى ، يفحص ثلاثة مراقبين آخرين نفس الحركة . فيستخدم المراقب B [شكل ٧,٢٠ (ب)] نظاماً إحداثياً نقطة الأصل فيه على بُعد ثابت L_B أدنى نقطة الأصل لإطار الإسناد A . كما أن المراقب C ، القابع في مضعد بهبط بسرعة ثابتة v_C [شكل ٧,٢٠ (ج)] ، يصف الحركة نسبة إلى نقطة أصله ، التي يتزايد بُعدها L_C عن نقطة بداية الحركة بانتظام مع الزمن :

$$L_C = v_C t. \quad (٧,٢١)$$

وأخيراً ، يقيس المراقب D [شكل ٧,٢٠ (د)] ، الذي يستقل مضعداً متسارعاً إلى أسفل ،

* في النص الأصلي ، يشير المؤلف إلى سان فرانسيسكو ونيويورك بدلاً من دمشق وبغداد .
(المترجم)

ومع أنَّ المعادلات ٧,١٢٠ ، ٧,١٢٦ ، ٧,١٢٧ للإحداثيات x_A ، و x_B ، و x_C كلها مختلفة ، فإنها تتسم بالصفة المشتركة التالية : كلُّ منها يصف حركة متسارعة بانتظام بنفس التسارع g ؛ أي ينسجم كلُّ منها مع نمط المعادلة ٥,٥٥ . وإنَّ الأطر A ، و B ، و C هي أطر إسناد قُصُورية . ففي كلِّ منها يكون التسارع المُقاسُ واحداً ، كما يكون قانون القوة واحداً . بالمفارقة ، يكون للكرة الساقطة - وفقاً للمراقب D - تسارع أقلُّ ، مقداره $g - a$ (المعادلة ٧,١٢٨) ، وبالتالي قوَّة ظاهريَّة أقلُّ . ولَمَّا كان إطار الإسناد D إطاراً غير قُصُوريٍّ ، فإنَّ المراقب D لا يستطيع وصف الحركة باستعمال نفس الصورة لقانون نيوتن الثاني مثلاً يستطيع رفاقه من المراقبين المتمركزين في أطر قُصُورية .

نكون A ، B ، و C أطرًا قُصُورية

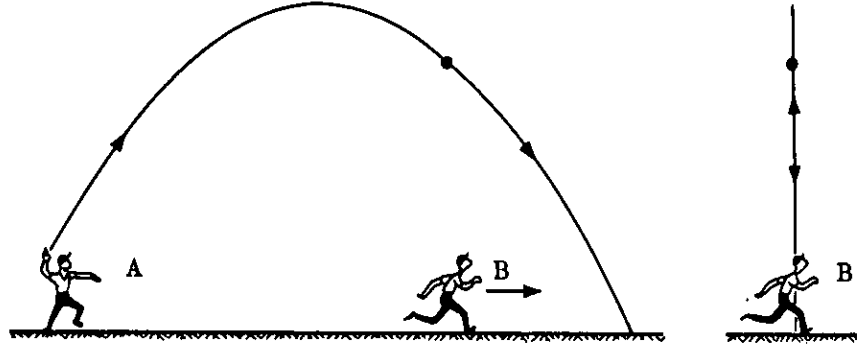
وثمة مثال آخر مدلَّل عليه في شكل ٧,٢١ يقذف لاعبٌ « بيسبول » كرةً ، يكون مسارها - في إطار إسناده - قطعاً مكافئاً (إذا ما أهملنا - مرَّةً ثانيةً - احتكاك الهواء) . أمَّا بالنسبة للاعبِ آخر يعدو إلى الأمام تحت الكرة ، فيكون مسارها خطاً مستقيماً ، يتجه رأسياً إلى أعلى وإلى أسفل . ويعزو هذان المراقبان إلى الكرة مواضع مختلفة وسرعات مختلفة . لكن ، لو قاس كلاهما التسارع ، لحصلا على نفس الجواب . فبما أنَّ أحد اللّاعبين غير متسارع نسبةً إلى الآخر ، فإنَّ للكرة نفس التسارع بالنسبة إلى كليهما ؛ كما يسري قانون نيوتن الثاني لكليهما .

والمبدأ القائل إنَّ قوانين الميكانيكا تكون واحدة في سائر أطر الإسناد القُصُورية يُدعى مبدأ النسبيَّة الغاليليَّة principle of Galilean relativity . وهو - في الواقع - مبدأ لا تغيُّر invariance أي تعبير عن أنَّ القوانين التي تحكم الحركة تكون واحدة في أطر إسناد قُصُورية مختلفة ، مع أنَّ وصف مثال معيَّن على الحركة قد يكون مختلفاً في أطر الإسناد المختلفة . وربما استطعنا تأكيد أهميَّة النسبيَّة الغاليليَّة على الوجه الأفضل بذكر هذا المبدأ على النحو الآتي : إذا كان مثال معيَّن على الحركة ممكناً (أي متوافقاً مع قوانين الحركة) في أحد أطر الإسناد القُصُورية ، كان ممكناً أيضاً في كلِّ إطار إسناد قُصُوريٍّ آخر . ويمكن التّديل على طريقة النّظر هذه إلى النسبيَّة الغاليليَّة بالاستعانة بشكل ٧,٢١ . فحركة الكرة كما يشاهدها اللّاعب B هي حركة رأسيَّة بخطّ مستقيم . ومع أنَّ هذه ليست هي الحركة التي يشاهدها اللّاعب A ، فإنَّها حركة ممكنة كان بمقدور اللّاعب A أن يُحدِّثها في إطار إسناده الشّخصي لو رغب بذلك - بمجرد قذف الكرة مباشرةً إلى أعلى . وعلى نفس الفرار ، فإنَّ الحركة المكافئة التي يشاهدها اللّاعب A هي حركة كان يمكن مشاهدتها في إطار إسناد B المتحرّك لو قُدِّت الكرة بطريقة مختلفة . فالطائفة المكوّنة من سائر الحركات الممكنة للمراقب A تماثل بالضبط طائفة الحركات الممكنة كافّة للمراقب B . وعلى ذلك ، فإنَّ هذين المراقبين يتفقان بصدد قوانين الحركة .

النسبة الغاليليَّة : قوانين الميكانيكا تكون واحدة في الأطر القُصُورية

طريقة شهوديَّة observational تعريف تكافؤ الأطر القُصُورية

وهناك نتيجة هامّة لمبدأ النسبيَّة الغاليليَّة ، ألا وهي أنّه لَمِنَ المستحيل أن نكتشف وجود إطار إسناد ثابت بحق ؛ أي إطار ساكن بالنسبة إلى أثير ether افتراضي يملأ سائر أرجاء الفراغ . فبما أنَّ كلَّ الظواهر الفيزيائيَّة (على الأقلّ الظواهر الميكانيكيَّة) تتبع نفس القوانين في إطار



شكل ٧،٢١ : وصف الحركة في إطارَي إسناد قُصُوريتين . فالمرآب A ، الذي يكون في حالة سكون بالنسبة إلى سطح الأرض ، والمرآب B ، الذي يعدو تحت كرة القاعدة المقدوفة ، يَمُرُّون إلى الكرة مساراتٍ مختلفة وسرعاتٍ مختلفة ؛ لكنهما يَنفَقان بصدد تسارعها وبصدد قانون القوة الذي يحكم حركتها .

لا تستطيع التجارب الميكانيكية أن
تكشف عن إطار ساكن مُفَضَّل

متحرك بانتظام بالنسبة إلى هذا الأثير المُفترض كما في إطار ساكن بالنسبة إلى الأثير ، فإنه لا توجد أية تجربة ميكانيكية بمقدورها التمييز بين هذين الإطارين . وقد استخدم غاليليو نفسه هذا المبدأ لتعزيز النظرية الكوبرنيكية Copernican للنظام الشمسي ؛ إذ ناقش بأن قوانين الحركة سوف لا تكون مختلفة على أرض متحركة عنها على أرض ثابتة ؛ وهكذا فقد يكون من الأجدي أن يبنى المرء النظرية الكوبرنيكية الأبسط القائلة بأرض متحركة بدلاً من النظرية البطلميوسية Ptolemaic* الأعد بكثير والقائلة بنظام شمسي مُقام حول أرض ثابتة . وقبل غاليليو ، كان جُل العلماء والفلاسفة ، ابتداءً من بطلميوس Ptolemy ، قد ناقشوا بأن السقوط الرأسي المباشر للحجر إنما دَلَّل على أن الأرض لا بُدَّ وأن تكون ساكنة . لكن وفق مبدأ غاليليو للنسبية ، لم يبرهن ذلك سكون الأرض †.

* نسبة إلى كلوديوس بطلميوس Claudius Ptolemaeus (٩٠-١٦٨ م) ، الذي وُلِدَ وترعرع وُلِع نجمه في الإسكندرية ، عاصمة العالم الثقافية يومذاك . وهو أحد شوامخ الفلك والجغرافيا عَبرَ العصور . وأعظم ما اشتهر به كتابه الهائل «المجسطي» Almagest في الفلك ، الذي يتألف من ١٣ جزءاً . وفيه أسس ركائز النظام الشمسي المعروف باسمه . ويعتبر أهم ما نقل العرب من التراث اليوناني . وقد تناوله رَهْطٌ كبير من أساطين العرب والإسلام بالشرح والتعليق والاختصار والتصحيح ، من أمثال جابر بن الأفلح والبيثاني وابن الهيثم وثابت بن قرة والبيروني والخوارزمي ونصير الدين الطوسي (أنظر مثلاً كتاب «تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك» للمرحوم قدرى طوقان) . ومن روائع بطلميوس أيضاً كتاب «الدليل الجغرافي» Geographike hyphegesis (في ثمانية مجلدات) ، الذي أرسى فيه مبادئ علم رسم الخرائط وابتكر - فيما يبدو - خطوط الطول والعرض ؛ وكتاب «علم البصريات» Optica (في خمسة أجزاء) ؛ و«علم الإقناعات» Harmonica (في ثلاثة أجزاء) .

(المشرف)

† أما مبدأ أينشتاين للنسبية فهو أعم ، إذ يجزم بأن أطر الإسناد القُصُورية تكون متكافئة لكل نوااميس الطبيعة ، وليس فقط للميكانيكا ؛ أنظر الباب الحادي والعشرين .

وليس بوسعنا القول إننا لعل دراية حقاً بوجود أي إطار إسناد قصوري مثالي ؛ إذ أنه لمن المستحيل أن نَعزَل تماماً جسماً ما عن التأثيرات الخارجية وأن نجد في أي إطار يكون هذا الجسم غير متسارع . لكننا نكاد نَحَقِّق المثل الأعلى . فلأغراض معينة ، يكون من المفيد أن نُعيد تعريف الإطار القصوري بأنه ذلك الذي يكون فيه جسم ما غير متسارع إذا تأثر فقط بقوة جاذبية (بدلاً من عدم تأثره بأية قوة) . ومثل هذا الإطار يُزوِّدنا به مختبر ساقط سقوطاً حراً ، أو سفينة فضاء ساجحة في المدار . ومع أنه أكثر الأطر القصورية أساسية في بعض النقاط ، فإن المختبر المداري يكون استثنائياً من ناحيتين . الأولى ، أنه يُسبغ على الجاذبية دوراً تفضيلاً *favoured role* ، فتستجيب فيه الأجسام فقط لقوى غير الجاذبية . والثانية ، أنه « موضعي local » ، بمعنى أن يتصرف كإطار قصوري فقط على امتداد منطقة في الفضاء صغيرة لدرجة كافية بحيث يمكن اعتبار مجال الجاذبية ثابتاً . فللمحركة على المدى الصغير ، يكون المختبر المداري إطاراً قصورياً صالحاً .

دليل عملي لتقريب إطار قصوري

أما لوصف الحركة على مدى أوسع ، فتكون أحياناً الأرض نفسها تقريباً كافياً لإطار قصوري ؛ كما أن إطاراً مثبتاً على الشمس يكون أفضل ، وإطاراً تكون فيه المجرة ككل غير متسارعة هو أفضل فأفضل . وإن قاعدة عملية في هذا الصدد هي الآتية : إذا كان تسارع إطار إسناد معين ، بالنسبة إلى إطار قصوري مثالي ، أصغر بكثير من التسارعات قيد الدراسة ، فإن إطار الإسناد ذلك يكون تقريباً ملائماً لإطار قصوري . مثلاً ، لسطح أرضنا تسارع متوسط ، بالنسبة إلى إطار مثبت على الشمس ، يقارب 0.0027 م/ث^2 ؛ أي أقل من 1 بالثمة من تسارع الجاذبية g . ولأي تطبيق معين ، ينبغي أن نقرر ما إذا كان هذا المقدار ، 0.0027 م/ث^2 ، صغيراً لدرجة كافية . فإن صحَّ ذلك ، كان إطاراً مثبتاً على الأرض تقريباً كافياً لإطار قصوري . فالجسيمات الأولية ، مثلاً ، تعاني تسارعات أضخم بكثير من 0.0027 م/ث^2 . وعلى ذلك ، لأجل دراستها ، يُحدَّد سطح الأرض تقريباً دقيقاً جداً لإطار قصوري . من ناحية أخرى ، لدراسة الكواكب ذات التسارعات المدارية الأقل من 0.0027 م/ث^2 ، فإن الإطار المثبت على الأرض ، الذي يكون حينئذ بعيداً عن كونه إطاراً قصورياً ، يجب أن يُعتبر إطاراً متسارعاً بسرعة . فتسارع المريخ المداري ، مثلاً ، هو 0.0025 م/ث^2 فقط . ولدراسة حركته ، إذن ، يكون إطار مثبت على الشمس تقريباً صالحاً لإطار قصوري ، بعكس إطار مثبت على الأرض . وبالطبع ، فإن هذا الطرف بالضبط هو الذي أدَّى إلى الثورة الكوبرنيكية ، التي عَيَّنت الشمس ، وليس الأرض ، بمثابة المركز الثابت للنظام الشمسي . ونحن نعلم الآن أن حتى الشمس ليست غير متسارعة تماماً ؛ إذ تدور حول المجرة بتسارع مقداره $2 \times 10^{-10} \text{ م/ث}^2$.

لماذا يكون للتسارع المطلق مدلول محدد؟

وثمة معضلة أخاذة خاصة بإطار الإسناد تظل غير محلولة : إذا كان الموضع المطلق والسرجهة المطلقة بدون معنى في الفراغ ، فلماذا يبدو التسارع المطلق وكأنه ذو معنى محدد؟ وطريقة أخرى لصياغة هذا السؤال هي الآتية : لماذا تكون أطر الإسناد القصورية فئة خاصة

مفضلة ؟ ... فكّر بمراقبين في الفراغ ، أحدهما في إطار إسناد قصوري ، والآخر في إطار متسارع . ففي الإطار القصوري ، يتحرك جسم معزول بسرجهه ثابتة . أما في الإطار المتسارع ، فلا يفعل ذلك ؛ بل يبدو وكأنه يستجيب للقوى . والحقيقة أن قوانين الحركة تكون مختلفة للغاية في إطارَي الإسناد هذين ؛ فهي أبسط بكثير في الإطار القصوري . لكن يمكن القول إن الإطار القصوري يكون متسارعاً نسبةً إلى الإطار المتسارع ، تماماً كما أن مراقباً ساكناً يكون متسارعاً نسبةً إلى جسم ساقط . فكل إطار يكون متسارعاً بنفس الطريقة بالضبط نسبةً إلى الآخر (بصورة متساوية لكن باتجاه مصاد) . لماذا يكون الإطار القصوري ، إذن ، إطار إسناد متمتعاً بامتياز خاص ؟ ... لما يتم إيجاد إجابة مرضية عن هذا السؤال . لكنه يبدو محتملاً كل الاحتمال أن توزيع distribution المادّة المنتشرة في طول الكون وعرضه لا بُدَّ وأن يكون بطريقة ما الإطار المادي الذي يحمل التسارع المطلق بالنسبة إليه (لكن ليس السرجهه المطلقة) مدلولاً معيّن . فن وجهة النظر هذه ، ما الإطار القصوري إلا واحدٌ غير متسارع بالنسبة إلى الإطار المادي للكون .

إن توزيع المادّة والطاقة في الكون لا بدّ وأن يلعب دوراً في الإجابة عن ذلك

إعتبر أرضنا الدائرة نفسها . ففي إطار إسناد ثابت بالنسبة إلى الأرض ، تقوم النجوم في السماء بحركة دائرية وبالتالي متسارعة . وكانت هذه هي النظرة القديمة إلى الكون . من ناحية أخرى ، في إطار ثابت بالنسبة إلى الشمس ، فإن سطح الأرض هو الذي يقوم بحركة دائرية متسارعة ؛ وتسارع النجوم أقل بكثير منه في الإطار المثبت على الأرض . فن البين أن الطبيعة تفضل إطار إسناد يكون للنجوم فيه تسارع متوسط ضئيل أو معدوم . وبالرغم من استحالة تعريف الحركة المطلقة أو السكون المطلق ، فإنه لبيدوا أن هناك إطاراً مادياً على صورة مادّة نائية . ولقد خمن أنه في كون خالٍ إلا من جسم مادي واحد ، فإن هذا الجسم لسوف لا تكون له كتلة ؛ أي أن مقاومة جسم للتسارع ، تلك الخاصية التي ندعوها كتلته ، إنها هي مقاومة تبدّل ضد زحزحته من أحد أطر إسناد الطبيعة القصورية المفضلة . ومعني هذا التخمين قائلاً بأنه لربما حتى وجود فترات زمنية ومكانية قابلة للقياس إنها يعتمد على وجود مادّة وطاقة في الكون . ووفقاً لوجهة النظر الأخاذة هذه ، فإن خواص وسلوك الجسيمات الأولية - أصغر دقائق المادّة في الطبيعة - تتأثر بطريقة هامة بالمادّة الجرمية للمجرات النائية . وليس ثمة من معضلة في العلم بأكثر سحراً وإثارة من البحث عن أواصر بين الحقلين دون المجهرى والكوني للعالم المادي .

خلاصة الأفكار والتعاريف

- قانون نيوتن الأول : يتحرك جسم لا تؤثر عليه أية قوة (أو جسم معزول حرّ من التأثيرات الخارجية) بسرجهه ثابتة .
- قانون نيوتن الثاني : $F = ma$ ؛ أي أن القوة الكلية المؤثرة على جسم هي حاصل ضرب كتلته وتسارعه .
- يسري قانون نيوتن الأول والثاني في أطر الإسناد القصورية .
- الإطار القصوري هو ذاك الذي يكون فيه أي جسم معزول غير متسارع .

□ يمكن تعريف مفهوم القوة بواسطة زنبرك معياري أو بتسارع كتلة معيارية .

□ الوَحْدَةُ الدَّوْلِيَّةُ SI للقوة هي النيوتن (N) ، وتساوي ١ كغ م/ث^٢ . وهي القوة اللازمة لمنح كتلة ١ كغ تسارعاً مقداره ١ م/ث^٢ .

□ الكتلة الواردة في قانون نيوتن الثاني هي كتلة القُصور .

□ تقيس كتلة الجاذبية ، الشَّيْبَة بالشَّحنة الكهربائية ، مقدار قوة الجاذبية التي يتأثر بها الجسم أو يؤثر بها .

□ تكون كتلة الجاذبية وكتلة القُصور متساويتين تجريبياً .

□ الكتلة كميَّة قياسية . وفي الفيزياء الكلاسيكية ، تكون الكتلة محفوظة .

□ يمكن التعبير عن قانون نيوتن الثاني على صورة معادلة تفاضلية ، إمَّا $mdv/dt = F$ أو $md^2r/dt^2 = F$. وهو يُدعى أيضاً قانون الحركة .

□ يُسمَّى الجسم الذي يتأثر بقانون القوة $F_x = -kx$ مُدْبِذِيَّاً (أو مُتَدْبِذِيَّاً) توافقياً . وعند تطبيقه على زنبرك ، يدعى قانون القوة هذا بقانون هوك . أمَّا الثَّابِت k فهو ثابت القوة .

□ يقوم المذبذب التوافقي بحركة توافقية بسيطة ، تُوصَفُ بالعلاقة $x = A \sin(\omega t + \phi)$. وتساوي دورته ، المستقلة عن الاتساع ، $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

□ بالقرب من الأرض ، تتجه قوة الجاذبية رأسياً إلى أسفل ويكون مقدارها $F_{grav} = mg$. ويتفاوت تسارع الجاذبية g قليلاً من موضع لآخر ، ويساوي تقريباً ٩,٨ م/ث^٢ !

□ لآتساعات اهتزازية صغيرة ، يكون البندول مذبذباً توافقياً على وجه التقريب . وتساوي دورته ، المستقلة عن الكتلة ، $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ ، حيث l طولُه .

□ تحدّد القوة المركزية الجاذبة ، في الحركة الدائرية المنتظمة ، بالعلاقة $F = mv^2/r$.

□ تكون زاوية الميلان الصحيحة ، لمركبة تدور حول منعطف ، $\theta = \arctan(v^2/rg)$.

□ تساوي دورة قمر صناعي منخفض الارتفاع ، $T = 2\pi\sqrt{r/g}$ ، نحواً من ساعة ونصف .

□ عند انعدام الاحتكاك ، يتبع المقذوف مساراً مكافئاً . ومحز أقصى مدى عند زاوية انطلاقٍ مقدارها $\pi/4$.

□ في مجال كهربائي ثابت ، يُعاني جسيم مشحون تسارعاً ثابتاً .

□ في أيّ مجال مغناطيسي ، يحتفظ جسيم مشحون بسرعة ثابتة .

□ في مجال مغناطيسي ثابت ، يقوم جسيم مشحون بحركة دائرية أو حلزونية بتردد زاوي $\omega = (q/m)B$ ، حيث q شحنة الجسيم ، و m كتلته ، و B قوة المجال المغناطيسي .

□ تكون قوانين الميكانيكا واحدة في سائر أطر الإسناد القصورية . ويُدعى هذا بالنسبية الغاليلية .

□ تكون الطائفة المكوّنة من كلّ الحركات الممكنة واحدة في الأطر القصورية كافّة .

□ التسارع المطلق له معنى ؛ أمَّا السَّرجهة المطلقة فلا .

س ٧,١ يساوي المجموع الاتجاهي لجميع القوى المؤثرة على جسم ما صفراً . فإذا استطع أن نستنتج عن مقدار سرجهته ؟ وماذا نستطيع أن نستنتج عن اتجاه سرجهته ؟

س ٧,٢ « إن إبقاء مركبة متحركة بسرعة ثابتة على سطح مستوي يقتضي قوة ثابتة ؛ حتى إذا لم تعد القوة تؤثر ، أبطأت المركبة وسكنت . » أنقذ هذه العبارة . لماذا يكون قانون نيوتن الأول تعبيراً أفيد عن الحركة من هذه العبارة ؟

س ٧,٣ من المعلوم أن جسمًا ساكنًا في إطار إسناد قصوري يتأثر بقوتين غير متوازيتين ، F_1 و F_2 . فما أقل عدد من القوى الأخرى التي ينبغي أن تؤثر أيضاً على الجسم ؟ وما أكبر عدد من القوى الأخرى التي قد تؤثر عليه ؟

س ٧,٤ (١) هل يكون مظلي parachutist ساقطاً بسرجهته ثابتة جسمًا معزولاً ؛ أي جسمًا حرًا من التأثيرات الخارجية ؟ ما هي الاختبارات التي قد تجربها لإيجاد ذلك (لا داعي لهذه الاختبارات أن تكون عملية) ؟ (٢) هل يكون فوتون في الفضاء البينمجري intergalactic جسمًا معزولاً ؟ كيف يمكن التحقق من هذا (مرة ثانية ، من حيث المبدأ) ؟

س ٧,٥ يعمل فيزيائي في مختبر يقع في القطب الجنوبي South Pole . ويكون هذا المختبر ، الذي ليس له نوافذ ، مزوداً على أتم وجه بأجهزة قياسية حساسة . (١) فسركيف قد يتحقق هذا الفيزيائي من أن المختبر ليس بساكن في إطار إسناد قصوري . (٢) هل بمقدور هذا الفيزيائي أن يثني إطاراً قصورياً داخل مختبره ؟ إن صح ذلك ، فكيف ؟

س ٧,٦ في داخل سفينة فضاء مدارية ، تطفو الأجسام بحرية وبدون تسارع بالنسبة إلى السفينة . فهل نعرف سفينة الفضاء إطاراً إسناداً قصورياً ؟ (إن هذا لسؤال دقيق ، وسنستأنف بحثه في الباب الثاني والعشرين . وإذا برّر كما ينبغي ، فإن إجابة نعم أو لا قد تعتبر صائبة .)

س ٧,٧ اقترح تشويحات ، خلاف تشوي زنبرك ، يمكن استخدامها ، من حيث المبدأ ، لتعريف القوة .

س ٧,٨ اعتبر زنبركاً معيناً يُستخدم لتعريف القوة ، فيستجيب لقوة F باستطالة Δx . إذا سببت قوة أخرى استطالة مقدارها $2\Delta x$ ، فكيف يمكنك أن تقرر ما إذا كانت قوة الثانية $2F$ أم لا ، إذا كان هذا الزنبرك هو الأداة الوحيدة المتاحة لقياس القوة ؟ باختصار ، كيف يمكنك أن تختبر ما إذا كان الزنبرك المستخدم لتعريف القوة يمثل لقانون هوك ؟

س ٧,٩ صيف القوة المؤثرة على سيارة (أ) متحركة بسرعة ثابتة على طريق عام highway مستوي ؛ (ب) متحركة بسرعة ثابتة أعلى تلة ؛ و (ج) متزلقة جانبياً بسرعة شبه ثابتة على رصيف جليدي icy pavement . إشمّل رسوماً اتجاهية مع إجاباتك .

س ٧,١٠ يُمالُّ اللُّوحُ الخشبيُّ في شكل ٧,٥ بزواوية أكبر مع الاتجاه الأفقي ، لكن ليس لدرجة كافية لأنَّ
نُسَبَّ انزلاقَ الكتلة . (١) تتغير القوة F ، الموازية للُّوح ، بالاتجاه . فهل تتغير بالمقدار ؟
(٢) كذلك تتغير القوة N ، المتعامدة مع اللُّوح ، بالاتجاه . فهل تتغير بالمقدار ؟ (٣) هل تتغير
 $F + N$ (أ) بالاتجاه ؟ (ب) بالمقدار ؟

س ٧,١١ يستطيع سطح صلب أن يؤثر بقوة احتكاكية على جسم ساكن . هل يستطيع سائل عديم الحركة أن
يؤثر بقوة احتكاكية على جسم ساكن ؟ وهل يستطيع غاز عديم الحركة أن يفعل ذلك ؟

س ٧,١٢ يتحرك مظلي رياضي مباشرة إلى أسفل بسرعة ثابتة مقدارها ٦٠ م/ث ، وذلك قبل فتح مظلته
بالضبط . ويُعَدَّ فتح مظلته ، يتحرك مباشرة إلى أسفل بسرعة ثابتة مقدارها ٤ م/ث . ناقش
جميع القوى المؤثرة عليه في كلا الزمنين . بدءاً بالزمن الأول وحتى الأخير ، هل يتزايد مقدار محصلة
القوة ، أم يتناقص ، أم يظل واحداً ؟

س ٧,١٣ تُمثِّلُ سرجهة سيارة بالرمز v وتسارعها بالرمز a . صف حالات يكون فيها (أ) a موازياً
للسرجهة v ؛ (ب) a موازياً عكسياً للسرجهة v ؛ (ج) a متعامداً مع v ؛ (د) a صفراً
و v ليست صفراً ؛ و (هـ) a ليس صفراً و v صفراً . في كل من هذه الحالات ، ما اتجاه
محصلة القوة المؤثرة على السيارة ؟

بند ٧,٣

س ٧,١٤ يكون لغواص هوائي تسارع إلى أسفل مقداره ٩ م/ث^٢ ، وذلك بُعِيدَ قفزه من طائرة . وفيما بعد ،
يغدو تسارعه إلى أسفل ١ م/ث^٢ . فهل تغيرت محصلة القوة المؤثرة عليه ؟ إن صحَّ ذلك ، فبأي
عامل ؟

س ٧,١٥ أذكر قانون حفظ الكتلة وفسر لماذا يكون مهماً في الكيمياء .

س ٧,١٦ وفقاً لقانون ستوكس Stokes's law (الوارد في تمرين ٢,١١) ، تتأثر كرية متحركة ببطء خلال
سائل بقوة متناسبة مع سرعتها . كذلك ، وفقاً لقانون نيوتن الثاني ، تتناسب القوة على الكرية مع
تسارعها ، وليس سرعتها . وفقاً بين هاتين العبارتين .

س ٧,١٧ كي يُقلِّلَ جَهْدُهُ الحسابي ، يعزو مهندس مغامر لكل من الأجسام التي يستخدمها كمية خاصة
يطلق عليها اسم « حماسة zeal » ، معرفةً بحيث أن القوة المؤثرة على جسم ما مضروبة في حماسه
تُعطي تسارعه . فما علاقة الحماسة بالكتلة ؟ إذا بُنِيَ جسمان معاً ، فهل تساوي حماسة هذا الائتلاف
مجموع حماستي الجسمين ؟

س ٧,١٨ (١) صِفْ بدقة كيف يمكن تعريف القوة إما كمفهوم أولي أو كمفهوم مشتق . (٢) لماذا توجد
اعتباطية فيما إذا كان مفهوم ما أولياً أم مشتقاً ؟

س ٧,١٩ صِفْ بدقة كيف يمكن تعريف الكتلة إما كمفهوم أولي أو كمفهوم مشتق .

س ٧,٢٠ تتأثر كتلة تهتز عند طرف زنبرك بمحصلة قوة تتفاوت مع الزمن . ومع ذلك ، فإن القوة التي يؤثر بها الزنبرك تدعى عادة قوة « مستقلة عن الزمن » . علل لماذا يُمكن نعت القوة على هذا المنوال .

س ٧,٢١ (١) فسر لماذا يكون السير على أرضية اسمنت concrete floor متعباً أكثر من السير على أرضية خشبية ، الذي يكون بدوره متعباً أكثر من السير على أرضية مكسوة بالسجاد . (٢) لماذا لا تستمر هذه التزعة ؟ مثلاً ، لماذا لا يكون السير على العشب الطويل أو الثلج أسهل من السير على سجادة ؟

س ٧,٢٢ راقب أية حركة اهتزازية مألوفة (بخلاف حركة بندول أو كتلة مثبتة بزنبرك) وقرر ما إذا كانت توافقة بسيطة . إن صح ذلك ، فإن دورتها ستكون مستقلة عن اتساعها . قدم تقريراً عن مشاهداتك .

س ٧,٢٣ سمّ بضعه تغييرات بمقدورك تحقيقها في مذبذب توافقي مما قد يُضاعف السرعة القصوى للكتلة المهتزة .

س ٧,٢٤ كيف يمكنك الاستنتاج بأن وزن جسم ما عندما يتسارع هو نفسه عندما يكون ساكناً أو متحركاً بانتظام ؟

س ٧,٢٥ يملك رائد فضاء على القمر جسماً ذا كتلة معلومة وأدوات قياسية متباينة . فكيف يمكنه تحديد تسارع الجاذبية على سطح القمر في تجربة ساكنة (أي تجربة لا تتضمن أية مشاهدات لأجسام ساقطة) ؟

س ٧,٢٦ إحدى الوسائل لإدراك مدلول قانون مألوف إدراكاً كاملاً هي أن نتخيل كيف سيكون العالم إن ضح قانون مغاير . فإذا ستكون بعض النتائج الطريفة للحياة اليومية لو كان الوزن على الأرض متناسباً مع مربع الكتلة ؟

س ٧,٢٧ قدر السرعة النهائية (الحديثة) في الهواء لجسم بالغ الخفة ، مثل قطعة صغيرة من الورق أو بالون منفوخ inflated ، ولجسم خفيف لكن أكثر كثافة بعض الشيء ، مثل كرة طاولة ping-pong أو بالون مفرغ من الهواء deflated .

س ٧,٢٨ أي مشاهدات مألوفة تبين أن قوة انجرار الهواء الاحتكاكي تتزايد إذ تتزايد السرعة ؟

س ٧,٢٩ إن تسارع الجاذبية عند سطح الأرض هو كمية فيزيائية هامة . فلم يُعتبر أقل « أساسية » من الكميات على غرار سرعة الضوء وشحنة الإلكترون ؟

س ٧,٣٠ رائد فضاء غريب الأطوار eccentric يحمل ساعة تدور بالبندول إلى القمر . ناقش صفاتها المتعلقة بضبط الوقت (أ) أثناء الطريق إلى القمر ؛ و(ب) على سطح القمر (حيث $g_{moon} = \frac{1}{6}g_{earth}$) . هل سيكون رائد الفضاء قد جازف لو استخدم هذه الساعة لتوقيت استكشافه لسطح القمر ؟

بند ٧,٧

س ٧,٣١ لو اختلفت النسبة m_1/m_0 كثيراً من مادة لأخرى ، فإذا ستكون بعض النتائج البينة على الفور ؟
هل سيكون مثل هذا التأثير مهماً لتصميم المركبات ؟

س ٧,٣٢ حَجَرَان ، كتلتا القُصور لهما متساويتان في حين أن كتلتي الجاذبية غير متساويتين ، يُسَقَطَانِ معاً من السُّكُون ، وذلك على سطح كوكب افتراضي حيث تكون كتلتا القصور والجاذبية غَيْرَ متساويتين .
(١) فهل يتسارع كلاهما بانتظام ؟ (٢) هل يتساوى وزناهما ؟ (٣) وهل يتساوى تسارعاهما ؟

س ٧,٣٣ أجب عن سؤال ٧,٣٢ لحجرين ذوي كتلة جاذبية متساوية وكتلة قصور غير متساوية .

س ٧,٣٤ اشرح بإيجاز فئة من التجارب التي قد تؤدي إلى النتيجة $m_1 = Km_0$ حيث K ثابت لا يساوي ١ .
لماذا تكون النتيجة $m_1 = Km_0$ مكافئةً فيزيائياً للنتيجة $m_1 = m_0$ (المعادلة ٧,٦٤) ؟

بند ٧,٨

س ٧,٣٥ لو تَغَيَّرَ معدل دَوْرَانِ الأرض ، فهل سيتغير وزن طَرْدٍ مقاس بواسطة ميزان زنبركي ؟ وهل سيتغير وزنه المقاس بواسطة ميزان ذي كَفَتَيْنِ ؟

س ٧,٣٦ كم يجب أن يكون طول بندول كي تكون دَوْرَتُهُ ٨٤ د ، أي مساوية لدورة فمر أرضي منخفض الارتفاع ؟ (اقترح : راجع المعادلتين ٧,٥٩ و ٧,٧٤) .

س ٧,٣٧ عندما يُؤَخَذُ انحناءُ الأرض بعين الاعتبار ، هلْ تَتَوَقَّعُ أن يكون مدى قذيفة بَيَقَارَتِيَّةٍ ذاتية الدفع intercontinental ballistic missile أكبر أم أقل من المدى المحدد بالمعادلة ٧,٩٠ ؟ علِّلِ السبب وراء إجابتك .

س ٧,٣٨ كي نَحْقُقَ المدى الأقصى ، بما فيه تأثير مقاومة الهواء ، هل يجب إطلاق قذيفة بزاوية أكبر أم أقل من ٤٥° مع الاتجاه الأفقي ؟ أورد سبباً لإجابتك .

بند ٧,٩

س ٧,٣٩ سَمَّ جِهَازاً يُسْتَخْدَمُ فيه تسارع كهربائي لحسبيات مشحونة . سَمَّ أيضاً جهازاً يُسْتَخْدَمُ فيه تسارع مغناطيسي لحسبيات مشحونة .

س ٧,٤٠ تَقْصِفُ بروتونات آتية من الفضاء الأرض من جميع الاتجاهات . باعتبار تأثير مجال الأرض المغناطيسي على هذه الحسبيات ، اشرح أية اختلافات في سلوك البروتونات المتوجهة نحو الأرض من فوق قطب جيومغناطيسي (مغناطيسي أرضي) geomagnetic ومن فوق خط الاستواء equator .

بند ٧,١٠

س ٧,٤١ رجل (أ) يجلس في سيارة ساكنة ؛ ثم (ب) يتسارع إلى سرعة v_0 على امتداد طريق مستقيم ؛ ثم (ج) يقود سيارته بسرعة ثابتة على امتداد هذا الطريق المستقيم ؛ ومن ثم (د) ينعطف إلى اليسار بينما يحتفظ بسرعه ثابتة . لكل فترة من هذه الفترات الأربع ، علِّلْ لماذا تَعْرِفُ سيارته أو لا تُعْرِفُ إطار إسناد قُصوراً . (اهمل دَوْرَانِ الأرض) .

س ٧,٤٢ هَبْ أن قانون نيوتن الثاني ينص على أن $F = mv$ بدلاً من $F = ma$. هل كان سيوجد عندئذٍ مبدأ نسبتي غاليلي في الميكانيكا ؟ فسر .

س ٧,٤٣ يمكن أن يُذكر قانون نيوتن الأول بالطريقة الآتية : إذا كانت $F = 0$ ، فإن $d^2r/dt^2 = 0$ ، حيث $n = 2$. ناقش بعض خواص عالم يكون فيه $n = 1$. هل ستحمل السرجة المطلقة أي مدلول في عالم كهذا ؟ وهل سيكون التسارع اللامتناهي ممكناً في مثل هذا العالم ؟

س ٧,٤٤ استناداً إلى السؤال السابق ، ناقش بعض خواص عالم يكون فيه $n = 3$. في عالم كهذا ، هل بمقدور إطار إسناد مُتسارع بالنسبة إلى إطار قصوري أن يكون إطاراً قصورياً ؟

س ٧,٤٥ طالبُ فيزياء مسافر جواً في الليل يُشغل وقته بأرجحة ثقل صغير معلق عند طرف وتر . ويعتبر رفيقه في السفر هذا النشاط خلواً من أي هدف إلى أن يلتفت الطالب ويقول : « لا بد وأن يكون ثمة خللٌ ما ؛ إذ لقد أتممتنا لئلا نعطافاً يُقارب ١٨٠ درجة ، ونحن عائدون الساعة إلى نقطة بدايتنا . » فسّر كيف يعمل « نظام التوجيه القصورى inertial guidance system » هذا .

تمارين

ت ٧,١ تتحرك سيارة على امتداد طريق مستقيم بسرجة ثابتة . فتتأثر بقوة جاذبية إلى أسفل مقدارها ١٥٠٠٠ ن وبقوة مقاومة ريع إلى الخلف مقدارها ١٠٠٠ ن . فما مجموع القوى الأخرى التي تؤثر على السيارة ؟ وما مصدر هذه القوى الأخرى ؟

ت ٧,٢ قدر على وجه التقريب بوحدّة النيوتن القوة اللازمة (أ) لرفع سيارة على رافعة مائية hydraulic lift ؛ (ب) لدفع مُستَثير إيهامي ° thumbtack في لوح من خشب الصنوبر pine ؛ (ج) لتقطيع الزبدة إلى شرائح ؛ و (د) لدفع عربة أطفال أعلى منحدر يميل على الاتجاه الأفقي بعشر درجات .

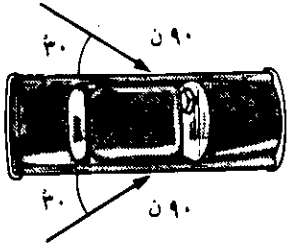
ت ٧,٣ (١) ما هي القوة الإجمالية ، $F + N$ ، التي يؤثر بها اللوح الخشبي على الكتلة الساكنة في شكل ٧,٥ إذا كانت $W = ٧$ ن ؟ (٢) أجب عن نفس السؤال إن لم تكن الكتلة ساكنة بل متحركة أسفل اللوح بسرعة ثابتة مقدارها ٠,٥ م/ث .

ت ٧,٤ حاولت السيدة و . أن تعلقَ جسماً يزن ٥٠ ن من وسط حبل غسيل clothesline طوله ٢٠ م . فتدلى الحبل حتى غدا وسطه ٠,٥ م أسفل مستوى طرفيه ثم انقطع . فكتبت رسالة غاضبة إلى صاحب المصنع حيث أن الحبل كان مضموناً لأن يحمل ٢٥٠ ن . أجب عليها برسالة تشرح فيها بكم تجاوز الحبل حدودَ ضمانه .

ت ٧,٥ تبدأ طائرة نفاثة عملية الدّرج السابق للإقلاع بتسارع مقداره ٢ م/ث² . فَيُنتِجُ كلٌّ من محركيها الثّقائين دفْعاً thrust مقداره ١٠٠ ن . فما الكتلة التقريبية للطائرة ؟

• المُستَثير الإيهامي هو « مسبار صغير عريض الرأس يُدفع بالإيهام » .

(عن المورد)



شكل ٧,٢٢ : تمرين ٧,٦ .

٧,٦ سيارة جامئة في موقف معلَّم* stalled car تساوي كتلتها ١٣٠٠ كـرغ . يضغط رَجُلان على السيارة بالقوتين المبيَّتين في الرسم التوضيحي أعلاه [شكل ٧,٢٢] . فإذا أفضت جهودهما إلى تسارع للسيارة مقداره ٠,٠٣ م/ث^٢ ، فما قوَّة الاحتكاك التي تؤثر على السيارة ؟

٧,٧ عندما تؤثر نفس القوَّة F على ثلاثة أجسام كلَّ على حِدَّة ، فإنها تستجيب بتسارعات مقدارها ٢,٠ م/ث^٢ ، و ٣,٠ م/ث^٢ ، و ٤,٠ م/ث^٢ . (١) إذا وُضِعَ الجسمان الأخفَّ على إحدى كفتي ميزان بينا وضع أثقل الأجسام الثلاثة على الكفَّة الأخرى ، فأَيُّ كفَّة تهبط ؟ (٢) إذا ثبتت الأجسام الثلاثة معاً وأثرت عليها القوَّة F ، فإِذَا يكون تسارعها ؟

٧,٨ « تُوزَن » عربة في مختبر بالطريقة الآتية : ابتداءً من السكون ، فإنها تُدْفَعُ بقوَّة ثابتة مقدارها ٨ ن . وبعد ٣ ث ، تقاس سرعتها بأنها ٤ م/ث . (١) إذا كان الاحتكاك مُهْمَلًا ، فما كتلة العربة ؟ (٢) إن لم يكن الاحتكاك مُهْمَلًا ، فهل تكون الكتلة الحقيقية أكبر أم أقلَّ من هذه القيمة المحسوبة ؟

٧,٩ تؤثر مِجَنَّةُ[†] catapult بقوة ثابتة فتسارع طائرة كتلتها ٨٠٠٠ كـرغ إلى سرعة ٦٠ م/ث في ١,٥ ث . فما هي القوَّة ؟

بند ٧,٤

٧,١٠ يتحرَّك متزلج لفترة ما بسرعة ثابتة ، ثُمَّ يتسارع إلى سرعة أعلى ، وَبَعْدَهَا يَتَبَاطَأُ إلى سرعته الأصلية ، التي يحتفظ بها ثانيةً بَعْضَ الوقت . أرسِّمْ مَخْطُطًا بيانيًا لمحْصَلَةُ القوَّة المؤثرة على المتزلج كدالَّة في الزَّمن .

٧,١١ سلسلة ثلاثية الحَلَقَاتِ three-link chain ، كتلة كلِّ حلقة فيها ١٠ كـرغ ، تندلَّى من خُطَافِ hook . يُسْحَبُ الخُطَافُ إلى أعلى بتسارع ثابت مقداره ٢ م/ث^٢ . فما محْصَلَةُ القوَّة المؤثرة على الحلقة الوسطى ؟

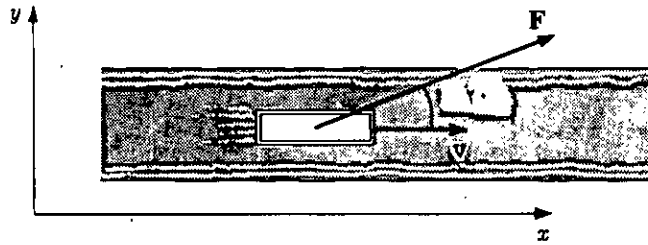
٧,١٢ تُسْتَبَدَّلُ الكتلة واللُّوحُ في شكل ٧,٥ بعربة صغيرة وبحرَى هوائيٍ عديم الاحتكاك يميل أيضاً بزاوية ٣٠° على الاتجاه الأفقي . وتكون قوَّة الجاذبية الرَّأْسِيَّة على العربة ٦ ن . (١) فما كتلة العربة ؟ (٢) كم تستغرق العربة من الوقت عند انزلاقها من السكون مسافة ٢ م على امتداد المجرى ؟ (٣) وما سرعتها عند نهاية هذا الانزلاق ؟

* الموقف المَعْلَم هو « فسحة مُعلَّمة تتسع لسيارة واحدة (في ساحة لإيقاف السيارات) » .
(عن المورد)

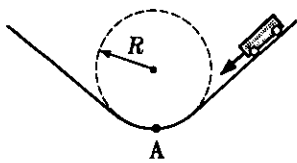
† آلة لإطلاق الطائرة من على سطح سفينة .
(عن المورد)

ت ٧,١٣ يتحرك الصّاروخ المبين في شكل ٧,٨ لاحقاً خارج الغلاف الجوي ، بحيث يظلّ محوره مائلاً بزاوية ٤٥° على الاتجاه الرأسي ، وبفسس الدّفع F_2 . عندئذ يكون مقدار قوة الجاذبية $F_1 = 1.2 \times 10^6$ ن ؛ كما تكون قوة الاحتكاك F_3 صفراً . فما الزاوية المحصورة بين محور الصّاروخ ومتجه تسارعه ؟

ت ٧,١٤ في الأيام الخوالي ، كانت الخيل تجرّ البرّجات ° barges عبر القنوات بالطريقة المبينة في شكل ٧,٢٣ . أدناه . هب أن حصاناً في لحظة معينة يؤثر بقوة F مقدارها ٨٠٠٠ ن بزاوية ٢٠° مع اتجاه حركة البرّج ، وأن البرّج ذا الكتلة ١٠٠٠٠ كـرغ يتسارع على امتداد القناة بتسارع ٠,١ م/ث^٢ . فما مركبتا x و y للقوة التي تؤثر بها المياه على البرّج ؟



شكل ٧,٢٣ : تمرين ٧,١٤ .



شكل ٧,٢٤ : تمرين ٧,١٥ .

ت ٧,١٥ أفغوانية ° roller coaster فيها قسم بشكل جزءاً من دائرة رأسية نصف قطرها $R = 25$ م (أنظر شكل ٧,٢٤) . بأي قوة يؤثر الخط على عربة كتلتها ٥٠٠ كـرغ تتحرك بسرعة ٢٠ م/ث عبر النقطة A ، التي هي نقطة الخط الدنيا ؟

ت ٧,١٦ رجل كتلته m يستقلّ دولاب فرس Ferris wheel نصف قطره r ويدور بسرعة زاوية ω . عبر عن القوة الكليّة ، بدلالة m و r و ω ، التي تؤثر على الرجل حيناً يكون عند ذروة الدّولاب وحيناً يكون عند قاعدته . إذا كان التعبيران متماثلين ، فسّر سبب ذلك ؛ كذلك إذا كانا مختلفين ، علّل مرّة ذلك .

ت ٧,١٧ يتحرك جسم كتلته m على امتداد محور x . ففي الزمن $t = 0$ ، يكون عند $x = 0$ كما تكون مركبة x لسرجهته v_0 . يتأثر بقوة ثابتة مقدارها F متجهة نحو x السّالب ($F_x = -F$) . (١) للحالة $v_0 > 0$ ، أوجد تعابير (أ) للإحداثي x كدالة في الزمن ؛ (ب) لأقصى قيمة للإحداثي x ؛ و (ج) للزمن حين يكون الجسم ثانيةً عند $x = 0$. (٢) أعد التمرين للحالة $v_0 < 0$. (٣) أرسم مخططين بيانيين للإحداثي x ضدّ t للحالتين $v_0 > 0$ و $v_0 < 0$.

• جمع برّج ، وهو «مركب لنقل البضائع» . (عن المورد)

• الأفغوانية هي «سكة حديد مرتفعة (في مدينة للملاهي) تتلوى وتنخفض ، ويجري فوق قضبانها عربات صغيرة» .

(عن المورد)

† سُمّي هذا الدّولاب باسم جورج واشنطن غيل فرس George Washington Gale Ferris ، المهندس الأمريكي الذي صمّمه عام ١٨٩٣ . ويتكوّن من مقطعين متوازيين بينهما مقاعد تبقى في وضع أفقي ، بينما يدور الدّولاب في مستوى رأسي .

(المشرف)

ت ٧,١٨ جسيم يبدأ حركته من السكون عند نقطة الأصل يتأثر بالقوة $F_x = Ae^{-bx}$ ، حيث A و b ثابتان .
أوجد تعبيراً لسرعة الجسيم كدالة في الزمن t .

ت ٧,١٩ جسيم متحرك على امتداد محور x يتأثر بالقوة $F_x = A - \alpha x$ ، حيث A و α ثابتان . أوجد تعبيراً
عاماً لموضع الجسيم كدالة في الزمن t .

ت ٧,٢٠ في مصعد شحن freight elevator ساكن تكون قراءة ميزان زنبركي يحمل قطفاً من الموز
١٠ كغ ؛ بينما تكون قراءته ١٢ كغ بعيد بدء المصعد بالحركة . (١) فهل شرع المصعد بالحركة
إلى أعلى أم إلى أسفل ؟ (٢) وما تسارعه ؟

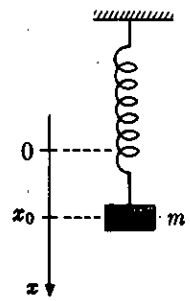
ت ٧,٢١ تتذبذب كتلة مجهولة m بدوارة θ عند طرف زنبرك يخضع لقانون هوك . يجد عالم تجريبي أنه
إذا زاد الكتلة بمقدار ١ كغ ، أمست الدوارة $\frac{\pi}{4}$ ث . فما الكتلة الابتدائية m ؟

ت ٧,٢٢ جبل مطاطي متدّل من قمة بُرجٍ يمتد أسفل البُرج حتى منتصفه . يبدأ لاعب سيرك
circus performer بالهبوط أسفل الجبل ؛ وعندما يصل إلى نهايته ، يكون على سطح الأرض . إذا
كان اللاعب يزن ٧٥٠ ن وكان جبله يمثل لقانون هوك ، حيث ثابت الزنبرك $k = 60 \text{ ن/م}$ ،
فكم يكون ارتفاع البُرج ؟

ت ٧,٢٣ تحقق من أن بُعد الكمية $\sqrt{m/k}$ للمذبذب التوافقي هو زمن ، كما تقتضي المعادلة ٧,٣٣ .

ت ٧,٢٤ (١) ما سرعة مذبذب توافقي عندما تكون إزاحته نصف اتساعه ؟ (٢) عند أي إزاحة تكون سرعته
نصف سرعته القصوى ؟

ت ٧,٢٥ يحمل زنبرك وزناً كتلته m ، كما هو مبين في شكل ٧,٢٥ . وتكون القوة التي يؤثر بها الزنبرك على
الوزن $F_x = -kx$. (١) بين أن موضع الاتزان للوزن هو $x_0 = mg/k$. (٢) أثبت أن القوة
الإجالية المؤثرة على الوزن هي $F_x' = -kx'$ ، حيث $x' = x - x_0$. (٣) ماذا تكون طبيعة حركة
الوزن إذا أزيح من موضع اتزانه ومن ثم ترك ؟



شكل ٧,٢٥ : تمرين ٧,٢٥

ت ٧,٢٦ بين أن طريقتي كتابة $x(t)$ للمذبذب التوافقي ، المحددتين بالمعادلتين ٧,٣٤ و ٧,٣٥ ، هما
متكافئتان . عبر عن الثابتين a و b بدلالة الثابتين A و ϕ .

ت ٧,٢٧ الموضع والسرعة الابتدائيان لمذبذب توافقي هما $x_0 = -B$ ، و $v_0 = 0$. (١) فما الثابتان
 A و ϕ في المعادلة ٧,٣٥ ؟ (٢) وما الثابتان a و b في المعادلة ٧,٣٤ ؟ (٣) أجب عن نفس
الزُوج من الأسئلة إذا كان الشرطان الابتدائيان $x_0 = 0$ ، و $v_0 = C$.

ت ٧,٢٨ مذبذب توافقي له تردد زاوي $\omega = 200 \text{ ث}^{-1}$.
(١) إذا كان الشرطان الابتدائيان له $x_0 = 0.02 \text{ م}$ ، و $v_0 = 4 \text{ م/ث}$ ، فما اتساعه A وثابت
طوره ϕ ؟

(٢) إذا كان اتساعه $A = 0.02 \text{ م}$ وثابت طوره $\phi = (\pi/3)$ ، فما الشرطان الابتدائيان x_0 و v_0 ؟

ت ٧,٢٩ بواسطة تغيير بسيط للمتغيرات change of variable ، يمكن كتابة المعادلة ٧,٣٥ على الصورة
 $x = A \sin \omega t'$. (١) عبّر عن t' بدلالة t . (٢) أرسم مخططاً بيانياً للكمية x ضد t ثابت
طُور ϕ اعتباطي . كيف يتبدى تغيير المتغير الزمني في الرسم البياني ؟

ت ٧,٣٠ بَيِّنْ أَنْ كِلَا التَّعْبِيرَيْنِ لِلدَّالَّةِ $x(t)$ ، المَعَادِلَتَيْنِ ٧,٣٤ و ٧,٣٥ ، يُمَثِّلُ لِمَعَادِلَةِ الْحَرَكَةِ لِلْمُذَبَذَبِ التَّوَافِقِيَّ (المَعَادِلَةُ ٧,٢٣) إِذَا تَحَدَّدَ التَّرَدُّدُ الزَّائِيَّ بِالْعِلَاقَةِ $\omega = \sqrt{k/m}$.

بند ٧,٦

ت ٧,٣١ احْسَبْ طَوَّلَكَ بِالْأَمْتَارِ ، وَكُتْلَتَكَ بِالْكِلوْغَرَامَاتِ ، وَوِزْنَكَ بِالنيوتُونَاتِ .

ت ٧,٣٢ أَوْجِدْ صِيغَةً لِلسَّعَةِ الْقُصْوَى لِبَنْدُولٍ ؛ ثُمَّ احْسِبْهَا عَدَدِيًّا لِپَارَامَتَرَاتِ نُمُودَجِيَّةٍ لِأَرْجَحَةِ طِفْلِ .

ت ٧,٣٣ أَوْجِدْ صِيغَةً لِسَعَةِ بَنْدُولٍ كَدَالَّةٍ فِي إِزَاحَتِهِ .

ت ٧,٣٤ بَنْدُولٌ لَهُ دَوْرَةٌ ١ ثَعْدَ الْقُطْبِ الشَّمَالِيِّ . فَمَا دَوْرَتُهُ عِنْدَ خَطِّ الْاِسْتَوَاءِ ؟ (تَرَدُّدُ قِيَمٍ دَقِيقَةٍ لِتَسَارُعِ الْجَازِيَّةِ g فِي مَلْحَقِ ٣ .)

فِرْعَ اِخْتِيَارِي : طَوْرُ صِيغَةٍ تَقْرِيبِيَّةٍ تُحَدِّدُ التَّغْيِيرَ الْكُسْرِيَّ فِي الدَّوْرَةِ ، $\Delta T/T$ ، لِتَغْيِيرِ كُسْرِيٍّ ضَمِيلٍ فِي تَسَارُعِ الْجَازِيَّةِ ، $\Delta g/g$.

ت ٧,٣٥ بِاسْتِخْدَامِ مَفْكُولِ مُتَسَلِّسَةِ $\sin \theta$ ، بَيِّنْ أَنَّ الْخَطَأَ الْكُسْرِيَّ فِي الطَّرَفِ الْاَيْمَنِ لِلْمَعَادِلَةِ ٧,٥٥ ، الَّذِي هُوَ عِبَارَةٌ عَنِ الْقُوَّةِ الْمَرْجَعَةِ الْمُؤَثِّرَةِ عَلَى بَنْدُولٍ بَسِيطٍ ، يَسَاوِي تَقْرِيبًا

$$\frac{1}{6} \theta^2 \text{ أَوْ } \frac{1}{6} \left(\frac{s}{l} \right)^2$$

لِلزَاوِيَةِ $\theta = 20^\circ$ ، نَحَقِّقْ مِنْ أَنَّ هَذِهِ النَّتِيجَةُ تَتَّفَقُ مَعَ النَّتِيجَةِ الْوَارِدَةِ فِي مِثَالِ ٣ مِنْ بَنْدِ ٧,٦ .
فِرْعَ اِخْتِيَارِي : عَمِّمْ هَذَا التَّعْبِيرَ التَّقْرِيبِيَّ إِلَى حَدِّ آخَرَ ، مُبَيِّنًا أَنَّ :

$$\frac{\theta - \sin \theta}{\sin \theta} \approx \frac{1}{6} \theta^2 + \frac{7}{360} \theta^4 \quad (\theta \ll 1).$$

بند ٧,٧

ت ٧,٣٦ (١) يَتَأَثَّرُ جِسْمٌ خَاضِعٌ لِقُوَى جَازِيَّةٍ ، أَيْبًا كَانَتْ مَصَادِرُهَا ، بِقُوَّةٍ تَنَاسَبُ مَعَ كُتْلَةِ الْجَازِيَّةِ لَهُ نَفْسِهِ m_G . بَيِّنْ أَنَّهُ إِنْ لَمْ يَتَأَثَّرْ بِأَيَّةِ قُوَى أُخْرَى ، فَإِنَّ تَسَارُعَهُ يَتَنَاسَبُ مَعَ نِسْبَةِ كُتْلَتِهِ الْجَازِيَّةِ إِلَى كُتْلَةِ قُصُورِهِ $(a \sim m_G/m_I)$. (٢) اِسْتِخْدَمْ هَذِهِ الْحَقِيقَةَ كَيْ تَفْسِّرَ لِمَاذَا يَسْتَطِيعُ زَوْجٌ مِنَ الْأَقْوَارِ الصَّنَاعِيَّةِ أَنْ « يُحَلِّقًا بِتَشْكِيلٍ وَاحِدِ fly formation » ، بِحَيْثُ يَظَلَّانِ قَرِيبَيْنِ مِنْ بَعْضِهِمَا الْبَعْضَ بِدُونِ اسْتِخْدَامِ أَيَّةِ قُوَّةٍ مُحَرَّكَةٍ .

بند ٧,٨

ت ٧,٣٧ يَدُورُ قَرِصَانِيٌّ فِي مَدَارٍ دَائِرِيٍّ عَلَى ارْتِفَاعِ ١٠٠ مِيلٍ . بَيِّنْ أَنَّ سَرْعَتَهُ هِيَ ٧٨٠٠ م/ث وَدَوْرَتُهُ ٨٨ د . (لِلْمُقَارَنَةِ مَعَ أَرْقَامٍ مِمَّاثِلَةٍ ، أَنْظِرِ الْمَعَادِلَتَيْنِ ٧,٧٢ وَ ٧,٧٥ . كَذَلِكَ ، لِلْمُقَارَنَةِ مَعَ نَهْجِ جَبْرِيٍّ ، أَنْظِرِ مَسْأَلَةَ ٧,١٨ .)

ت ٧,٣٨ لِلْحَرَكَةِ الْمُنْتَظِمَةِ فِي دَائِرَةٍ ، يُكْتَبُ التَّسَارُعُ الْمَرْكَزِيُّ الْجَايِذُ عَادَةً عَلَى الصُّورَةِ $a = v^2/r$ أَوْ $a = \omega^2 r$. عَبْرَ أَيْضًا عَنْ a كَدَالَّةٍ فِي (أ) ω وَ v ؛ وَ (ب) r الدَّوْرَةِ T . (إِقْتِرَاحُ : اِحْتَفَظْ بِهَاتَيْنِ الصِّغَتَيْنِ فِي مَوْضِعٍ مِلَانٍ ؛ فَلْعَلَّهَا أَنْ تَكُونَا مُفِيدَتَيْنِ .)

ت ٧,٣٩ لَوْ زَادَتْ الْأَرْضُ مُعَدَّلَ دَوْرَانِهَا (بِدُونِ تَغْيِيرِ شَكْلِهَا) حَتَّى غَدَا الْمَقِيمُونَ عِنْدَ خَطِّ الْاِسْتَوَاءِ « عَدِيجِي الْوِزْنَ » ، فَكَمْ سَيَكُونُ طَوَّلُ الْيَوْمِ ؟

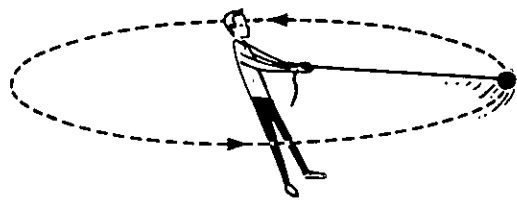
ت ٧,٤٠ مَا تَسَارُعُ الْقَمَرِ نَحْوِ الْأَرْضِ ؟ كَيْفَ يُقَارَنُ هَذَا التَّسَارُعُ مَعَ g ؟ (لِأَجْلِ الْمَعْطِيَاتِ الضَّرُورِيَّةِ ، أَنْظِرْ مَلْحَقَ ٣ د .)

ت ٧,٤١ ما تسارع الأرض نحو الشمس؟ كيف يُقَارَن هذا التسارع مع g ؟ وكيف يقارن مع تسارع سطح الأرض الناجم عن دَوْرَان الأرض اليومي (حوالي 0.034 م/ث^٢ عند خط الاستواء)؟ (لأجل المعطيات الضرورية، أنظر ملحق ٥.٣).

ت ٧,٤٢ تدور سفينة فضاء حول القمر على ارتفاع منخفض. (١) فما سرعتها؟ (٢) وما دَوْرَتُهَا؟ (ملاحظة: يُناهز تسارع الجاذبية على سطح القمر $g/6$).

ت ٧,٤٣ يُوصَلُ جزء مستقيم من نموذج لخط سكة حديدية بجزء هو عبارة عن قوس دائرة نصف قطرها 0.4 م. ويتحرك نموذج القاطرة model locomotive، ذو الكتلة 1.5 كغ، بسرعة ثابتة مقدارها 1.2 م/ث. (١) فما القوة الكلية على القاطرة عندما تكون على الجزء المستقيم؟ ولماذا؟ (٢) ما القوة الكلية على القاطرة عندما تكون على الجزء المنحني؟ وما مصدر القوة؟ (نظراً لعدم تساوي القوى على الجزء المستقيم والجزء المنحني، فإن الأقواس الدائرية لا تُوصَلُ مباشرةً بالخطوط المستقيمة في السكك الحديدية الحقيقية؛ إذ تُستخدَم، بدلاً من ذلك، «منعطقات حديدية» ذات نصف قطر انحناء يتغير تدريجياً).

ت ٧,٤٤ بلوح رجل كتلة 1 كغ في دائرة أفقية نصف قطرها 2 م (أنظر شكل ٧,٢٦ أدناه). (١) على افتراض أنه يستطيع بذل قوة قصوى باتجاه المركز مقدارها 200 ن، ما السرعة القصوى التي بمقدوره أن يمنحها للكتلة الدائرية؟ (٢) إذا قصّر الوتر المربوط بالكتلة واستمر في بذل القوة القصوى باتجاه المركز، فهل تزيد سرعة الكتلة أم تنقص؟ وهل تزيد سرعتها الزاوية أم تنقص؟ (اهمل تأثير الجاذبية الطفيف وافرض أن الرجل يشد أفقياً).



شكل ٧,٢٦: تمرين ٧,٤٤.

ت ٧,٤٥ يتسارع إلكترون أفقياً في أنبوبة تلتفاز إلى سرعة 10^7 م/ث؛ ثم ينطلق بحرية مسافة 0.2 م حتى يرتطم بسطح الأنبوبة. صُوب - في بادئ الأمر - مباشرةً نحو نقطة مركزية على سطح الأنبوبة. فكم المسافة أدنى هذه النقطة التي يصطدم عندها فعلاً بسبب قوة الجاذبية إلى أسفل؟ هل هذا تأثير هام يترع إلى جعل صور التلفاز غير واضحة؟

ت ٧,٤٦ بليّة marble متدحرجة بسرعة 80 سم/ث تتدحرج من حافة منضدة وتصطدم بالأرضية على بُعد 40 سم عن المنضدة. فما ارتفاع المنضدة؟

ت ٧,٤٧ بأي سرعة ينبغي أن تُقذف كرة رأسياً إلى أعلى كما تبلغ ارتفاعاً قدره 25 م؟ وما أقصى مسافة أفقية يمكن قذف كرة إليها بنفس هذه السرعة الابتدائية؟

ت ٧,٤٨ (١) أكتب معادلتين جبريتين لمركبتَي السرجة الأفقية والرأسية، v_x و v_y ، لحركة المقذوفات المدلل عليها في شكل ٧,١٦ والموصوفة بالمعادلتين ٧,٨٧ و ٧,٨٨. (٢) اشتق تعبيراً لأقصى ارتفاع للمسار الذي يبلغه المقذوف عند منتصفه.

ت ٧,٤٩ (١) أوجد معادلة المسار للمقدوف المبين في شكل ٧,١٦ . . . إن هذه المعادلة تتضمن x و z ، لكن ليس t . (٢) إحدف t من المعادلتين ٧,٨٥ و ٧,٨٦ بغيّة التعبير عن z كدالة في x للحالة العامة لحركة مسار مكافئ parabolic .

ت ٧,٥٠ (١) قارن مقداري تسارع إلكترون وبروتون في نفس المجال الكهربائي . (٢) بعد أن تسارع إلكترون وبروتون من السكون نفس المسافة بنفس الاتجاه بواسطة مجالين كهربائيين مقدارهما واحد ، فإنها بدخلان منطقة تحتوي على مجال مغناطيسي متعامد مع سرّجهتَيْهما . فهل ينعطف الإلكترون والبروتون بنفس الاتجاه أم باتجاهين متضادين ؟ وما نسبة نصفي القطر لمسارَيْها الدائريّين في منطقة المجال المغناطيسي ؟

ت ٧,٥١ (١) بين أن معادلتَي الحركة الدائريّة المنتظمة ،

$$x = r \cos \omega t,$$

$$y = r \sin \omega t,$$

حيث r و ω ثابتان ، تمثلان للمعادلتين ٧,١٠٧ و ٧,١٠٨ ، اللتين تحكمان حركة جسيم مشحون في مجال مغناطيسي ثابت . (٢) أورد تعبيراً للثابت ω . (٣) بين أن السرعة v ثابتة . (٤) ما علاقة نصف القطر r مع السرعة v ؟

ت ٧,٥٢ في أحد أطر الإسناد ، يكون متجه الموضع لجسيم r . وفي إطار إسناد آخر ، يكون متجه موضع نفس الجسيم $r' = r + r_0 + v_0 t$ ، حيث r_0 و v_0 متجهان ثابتان . (١) فكيف تختلف سرّجهة الجسيم في أحد إطارَي الإسناد عن سرّجته في الإطار الآخر ؟ (٢) وكيف يختلف تسارعه في أحد الإطارين عن تسارعه في الإطار الآخر ؟ (٣) أعطِ وصفاً إنشائيّاً للعلاقة بين إطارَي الإسناد هذين .

مسائل

القوة والطاقة الحركية

م ٧,١ لجسيم متحرك على امتداد محور x ، أثبت أن

$$F_x = \frac{dK}{dx},$$

حيث F_x مركبة x للقوة المؤثرة على الجسيم و K الطاقة الحركية .

المتوسطات الزمانية والمكانية

م ٧,٢ يمكن تعريف المتوسط الزمني للدالة F بالعلاقة

$$(F)_t = \frac{1}{T} \int_0^T F dt;$$

بينما يمكن تعريف متوسط الموضع لها بالعلاقة

$$(F)_x = \frac{1}{X} \int_0^X F dx.$$

(١) بين أن المتوسطين متماثلان إذا كانت $F = \text{ثابتاً}$:

$$(F)_t = (F)_x = F.$$

(٢) بين بمثال أن المتوسطين قد يختلفان إن لم تكن F ثابتة . وعلى وجه الخصوص ، لتكن F دالة القوة $F = at$ التي تؤثر باتجاه x الموجب على جسيم ساكن عند نقطة الأصل في $t = 0$. أوجد $x(t)$ لهذا الجسيم ، ثم أثبت أنه عندما يتحرك الجسيم من $x = 0$ صفرًا إلى $x = X$ فإن الزمن T ، يكون المتوسطان

$$(F)_x = \frac{1}{2}\alpha T \text{ و } (F)_t = \frac{1}{2}\alpha T$$

م ٧,٣ توصف حركة جسيم على محور x بواسطة المعادلة

$$x = Ae^{-Bt},$$

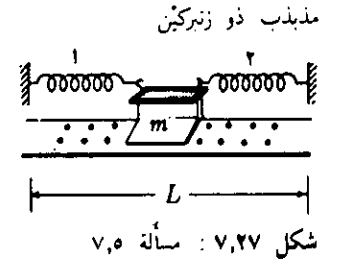
حيث A و B ثابتان و t الزمن . (١) ما بُعد B ؟ (٢) وما مدلول A الفيزيائي ؟ (٣) أرسم مخططات بيانية للموضع x ضد t ، والسرعة v ضد t ، والتسارع a ضد t . (٤) أكتب القوة F كدالة في x .

إذا أعطيت $x(t)$ أوجد $F(x)$

م ٧,٤ يتأثر جسيم متحرك على امتداد محور x بالقوة $F_x = F_0 \sin \omega t$ ، حيث F_0 و ω ثابتان . (١) أوجد تعبيراً عاماً للكمية $x(t)$ ، التي هي موضع الجسيم كدالة في الزمن . (٢) إذا كانت $x(0) = 0$ و $v(0) = 0$ ، فماذا تكون $x(t)$ ؟ ولماذا يتحرك الجسيم باضطراب بعيداً عن نقطة الأصل على الرغم من أن المتوسط الزمني للقوة F_x يساوي صفراً خلال دورة تذبذب ؟ ما السرجة الابتدائية $v(0)$ اللازمة لكي تكون $x(t)$ دورية ؟

إذا أعطيت $F(t)$ أوجد $x(t)$

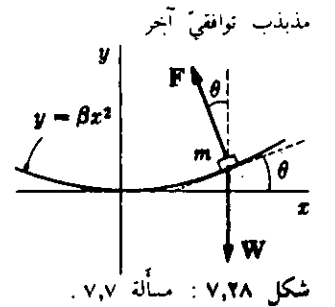
م ٧,٥ يمكن وصل الزنبرك ١ ، الذي يساوي طول أترانه l_1 ، والزنبرك ٢ ، الذي يساوي طول أترانه l_2 ، بعربة على مجرى هوائي ، كما هو مبين في شكل ٧,٢٧ . عندما يؤثر الزنبرك ١ بمفرده ، تتذبذب العربة بتردد ν_1 ؛ أما عندما يؤثر الزنبرك ٢ بمفرده ، فتتذبذب العربة بتردد ν_2 . بعد ذلك يوصل كلا الزنبركين بالعربة . (١) تضبط المسافة بين نقطتي تعليق الزنبركين بحيث تكافي مجموع طولي الأتران لهما : $L = l_1 + l_2$. بين أن العربة تتذبذب بتردد $\nu = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$. (٢) تغير المسافة L بحيث لا يكون أي من الزنبركين في حالة أتران حين تكون العربة مترنة . أثبت أن تردد التذبذب للعربة بظل $\nu = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$.



إتساع وطور المذبذب التوافقي

م ٧,٦ عمم النظرية المحددة بالمعادلات ٧,٣٧-٧,٤٢ ، وبين كيف تختار ثابت الطور ϕ للمذبذب التوافقي لأية شروط ابتدائية x_0 و v_0 . بصورة خاصة ، أثبت أن ϕ تقع في الربع الثاني إذا كانت $x_0 > 0$ و $v_0 < 0$ (حيث $A > 0$) . (إقترح : أرسم مخططاً بيانياً لقوس ظل u (arc tan u) ضد u ، حيث $u = \omega x_0 / v_0$) .
فرع اختياري : إذا اختير الجذر السالب للثابت A في المعادلة ٧,٤٢ ، بين أنه يمكن اختيار ϕ بحيث لا تتغير المعادلة ٧,٣٥ للدالة $x(t)$.

م ٧,٧ حوض مسطح قليلاً له مقطع عرضي مكافئ يتحدد بالعلاقة $y = \beta x^2$. تنزل فيه كتلة m بدون احتكاك ، متأثرة بقوة الجاذبية W المتجهة رأسياً إلى أسفل ، وبقوة الحوض F المتعامدة مع الحوض (أنظر شكل ٧,٢٨) . (١) يكون أي من التقارب الآتية سارياً للتذبذبات الصغيرة : $\theta \ll 1$ ، $\cos \theta \approx 1$ ، و $\sin \theta \approx \tan \theta$ (حيث تعرف θ في الشكل) . فسر لماذا يسري أيضاً التقريب $|d^2y/dt^2| \ll mg$. (٢) بين أن مركبة x للقوة الكلية على الكتلة تتحدد على وجه التقريب ، للتذبذبات الصغيرة ، بالعلاقة $F_x = -kx$. أورد تعبيراً للثابت k . (٣) أعط صيغة لدورة التذبذب T . (٤) ناقش بإيجاز اعتماد T على β ، θ ، و m .



الأجسام الساقطة

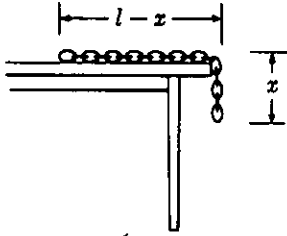
م ٧,٨ يسقط حجر من سطح بناءية بسرعة ابتدائية صفرية ، فيستغرق ١,٠ ث كي يمر عبر نافذة ارتفاعها ١,٠٣ م . فكم تبعد قمة النافذة عن السطح ؟

م ٧,٩ بعد أن يسقط رجل حجراً من رأس بناءية ، ينتظر مدة ١,٥ ث ، ثم يقذف كرة قاعدة إلى أسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠ م/ث . (١) إذا بلغ الحجر والكرة سطح الأرض معاً ، فما ارتفاع

البنية ؟ (٢) بين أن ثمة زمن انتظار أقصى ، بالنسبة لسرعة ابتدائية محدّدة للكرة ، لا تستطيع الكرة بعده أن تدرك الحجر ، مهما كانت البنية عالية . ما زمن الانتظار الأقصى للسرعة $v_0 = 20 \text{ م/ث}$ ؟

سلسلة متزلقة من منضدة

٧,١٠ م سلسلة طولها l ، متدل جزء منها على حافة منضدة ، تكون ساكنة في بادئ الأمر (أنظر شكل ٧,٢٩) . عندما تُترك هذه السلسلة ، تتزلق من على المنضدة باحتكاك مهمّل . (١) فإذا يكون تسارعها كدالة في الزمن ؟ (٢) بين أن الزمن اللازم للسلسلة كي تبرح المنضدة هو



شكل ٧,٢٩ : مسألة ٧,١٠ .

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 - x_0^2}}{x_0} \right) .$$

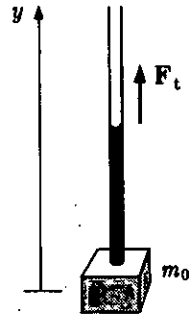
حيث x_0 هو طول جزء السلسلة المتدلي في بادئ الأمر من على حافة المنضدة . ناقش هذا التعبير في النهايتين

$$x_0 \rightarrow l \text{ و } x_0 \rightarrow 0$$

(٣) تتزلق سلسلة طولها ١ م من على منضدة في ١ ث . فما x_0 ؟

التوتر في حبل رأسي

٧,١١ م التوتر (الشد) tension في حبل ما هو القوة التي يؤثر بها أحد أجزاء الحبل على جزء مجاور - مثلاً ، القوة F_t التي يؤثر بها الجزء غير المظلل من الحبل على جزئه المظلل في شكل ٧,٣٠ أدناه . أوجد التوتر F_t ، كدالة في y ، (أ) لحبل عديم الكتلة يحمل حملاً ساكناً كتلته m_0 ؛ (ب) لحبل ذي كتلة ثابتة لكل وحدة طول ، τ ، يحمل نفس الحمل الساكن ؛ و (ج) لحبل ذي كتلة ثابتة لكل وحدة طول ، τ ، يُسارع الحمل ذا الكتلة m_0 إلى أعلى بتسارع a .



شكل ٧,٣٠ : مسألة ٧,١١ .

تصميم أمثل لكبل رأسي

٧,١٢ م أقصى توتر يستطيع كبل cable معين احتماله بدون أن ينقطع هو $F_t = \alpha A$ ، حيث A مساحة المقطع العرضي و α ثابت . (١) ناقش تصميم كبل أمثل optimal (أي ذاك الذي يستخدم أقل قدر ممكن من المادة) لحمل حمل كتلته M . (٢) بين أنه يمكن كتابة مساحة المقطع العرضي لهذا الكبل على الصورة :

$$A(y) = \frac{Mg}{\alpha} e^{(\rho g/\alpha)y} ,$$

حيث ρ كثافة مادة الكبل و y المسافة المقاسة إلى أعلى ابتداءً من الحمل . (٣) لأي طول من الكبل يساوي وزن الكبل وزن الحمل الذي يحمله ؟

نظام مكون من حبل أمان

م ٧,١٣ صمم نظاماً مكوناً من حبل أمان safety rope لرجل كتلته ١٠٠ كغ يعمل حيث يمكن أن تزل قدمه ويسقط . . . ينبغي أن تكون له حرية الحركة على امتداد مسافة ١٠ م أثناء عمله ؛ كما ينبغي أن يعاني تسارعاً ليس أكثر من 8g إذا سقط . إهتم بالسّات العملية فضلاً عن النظرية لنظامك .

حركة اعتباطية في دائرة

م ٧,١٤ يتحرك جسيم بسرعة غير ثابتة حول دائرة نصف قطرها l . ويتحدد متجه موضعه بالعلاقة $\mathbf{r} = l \cos \theta \mathbf{i} + l \sin \theta \mathbf{j}$ حيث $\theta = s/l$ (أنظر شكل ٧,٣١) . بين أن مركبتي x و y لتسارع الجسيم تتحددان بالعلاقين

$$a_x = -l \left[\frac{d^2\theta}{dt^2} \sin \theta + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos \theta \right],$$

$$a_y = l \left[\frac{d^2\theta}{dt^2} \cos \theta - \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta \right].$$

(٢) عندما يكون الجسيم عند النقطة P ، أثبت أن مركبتي تسارعه على امتداد المحورين ١ و ٢ ترتبطان بالمركبتين a_x و a_y بواسطة المعادلتين

$$a_1 = -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta,$$

$$a_2 = -a_x \cos \theta - a_y \sin \theta.$$

(٣) باستخدام هذه النتائج ، بين أن

$$a_1 = l \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) = \frac{d^2s}{dt^2},$$

$$a_2 = l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{(ds/dt)^2}{l}.$$

إن تعبير المركبة a_1 يؤكد صحة المعادلة ٧,٥٣ . أما تعبير المركبة a_2 ، فيبين أن التسارع المركزي الجاذب في الحركة الدائرية هو v^2/r ، بغض النظر عما إذا كانت v ثابتة أم لا .

البندول البسيط

م ٧,١٥ للبندول البسيط ، يعاني الثقل مركبة تسارع باتجاه نقطة الموتر pivot point (إلا عند نقطتي النهاية للتأرجح) . (١) لماذا ؟ (٢) بين أنه يمكن كتابة F_{rod} ، أي مقدار القوة التي يؤثر بها القضيب على الثقل ، على الصورة :

$$F_{rod} \cong mg \left(1 + \frac{A^2}{l^2} - \frac{3}{2} \frac{s^2}{l^2} \right),$$

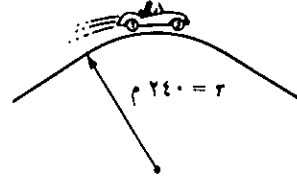
حيث s إزاحة الثقل و A اتساعه (راجع شكل ٧,١١ والمعادلة ٧,٥٧) . (تلميح : قد تكون النتيجة الأخيرة الواردة في مسألة ٧,١٤ مفيدة .)

التسارع المركزي الجاذب

م ٧,١٦ تقوم طائرة نفثة للتدريب jet trainer بالتحليق في دائرة رأسية نصف قطرها ٨٠٠ م . وأثناء دورانها حول هذه الدائرة ، تتفاوت سرعة الطائرة بحيث يعاني الرّبان عند أسفل الدائرة تسارعاً مقداره 4g (أي أن مقعده يؤثر عليه بقوة إلى أعلى أكبر بأربعة أمثال من تلك التي تؤثر أثناء الطيران العادي الأفقي) ؛ بينما يكون « عديم الوزن » عند أعلى الدائرة (أي أن مقعده لا يؤثر عليه بأية قوة) .

(١) أوجد التسارع المركزي الجاذب للطائرة النفاثة عند أعلى وأسفل دائرة التحليق . (٢) أوجد سرعة الطائرة عند أعلى وأسفل الدائرة .

٧,١٧ م عندما تبلغ سيارة سباق ذروة crest تل صغير ، تبرج. دواليبها الطريق للحظة . ويكون المقطع العرضي للتل بالقرب من ذروته قوساً دائرياً نصف قطره ٢٤٠ م (أنظر شكل ٧,٣٢) . فما سرعة السيارة ؟ هل يجب أن يقلق سائقها حول إمكانية مخالفته للسير ؟



شكل ٧,٣٢ : مسألة ٧,١٧ .

الأفار الصناعية المنخفضة الارتفاع

٧,١٨ م إذا أخذت بعين الاعتبار الحقيقة بأن تسارع الجاذبية بتفاوت عكسياً مع مربع المسافة الشعاعية r (radial distance) ، بين أنه يمكن كتابة دورة فر صناعي يخلق في مدار دائري (المعادلة ٧,٧٤) على الصورة $T = T_0(r/R)^{3/2}$ ، حيث R نصف قطر الأرض و T_0 دورة فر صناعي افتراضي بدور حول سطح الأرض بحيث يكاد يلامسه (أنظر المعادلة ٧,٧٤) . (٢) أثبت أنه ، لارتفاعات h صغيرة بالمقارنة مع R ،

$$\frac{T}{T_0} \approx 1 + \frac{3}{2} \frac{h}{R} .$$

(٣) استهلاً بالمعادلة ٧,٧١ ، طوّر صيغاً مماثلة لسرعة فر صناعي في مدار دائري .

سرعة ، خاطئة ، حول منعطف مائل

٧,١٩ م ما محصلة القوة التي تؤثر على حافلة سكة حديدية إذا تحركت على الخط الموصوف في مثال ٢ ببند ٧,٨ (أنظر أيضاً شكل ٧,١٤) بسرعة ١٢٥ كم/س ؟

زاوية الميلان و «قوى g »

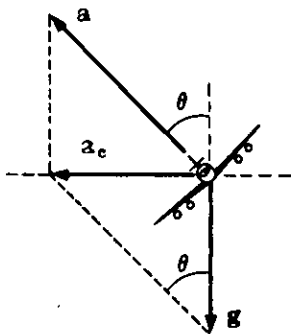
٧,٢٠ م عندما تدور طائرة في دائرة أفقية ، يعاني راكب محصلة تسارع $a_c = g + a$ ، حيث g تسارع الجاذبية و a التسارع الذي تزودنا به الطائرة (أنظر شكل ٧,٣٣) . (١) بين أن زاوية الميلان الصحيحة للطائرة تحدد بالعلاقة

$$\theta = \arctan \left(\frac{\omega v}{g} \right) ,$$

حيث v سرعة الطائرة و ω سرعتها الزاوية في قوسها الدائري . (٢) يمكن تعريف «قوة g » (g force) المؤثرة على الراكب بأنها القوة ، المقاسة بوحّدات وزنه ، التي يؤثر بها المقعد عليه . أثبت أن «قوة g » تساوي a/g ، كما يمكن كتابتها على الصورة :

$$\frac{a}{g} = \sec \theta = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega v}{g} \right)^2} .$$

(٣) تقوم طائرة نفاثة تجارية ، سرعتها $v = ٢٥٠$ م/ث ، بانعطاف «بمعدل معياري» «standard-rate» turn ، تساوي سرعتها الزاوية $\omega = \pi/60$ م/ث . أوجد (أ) زاوية الميلان ؛



شكل ٧,٣٣ : مسألة ٧,٢٠ .

(ب) الزمن اللازم لانتماء دائرة كاملة ؛ (ج) قطر الدائرة ؛ و (د) « قوة θ » المؤثرة على راكب ما .

م ٧,٢١ يُثبت أحد طرفي شريط مرين بنقطة ثابتة في مستوى أفقي ؛ بينما يُثبت الطرف الآخر بوزن يستطيع الانزلاق بدون احتكاك على المستوى . فتوصف حركة الوزن بالمعادلتين

$$x = 5A \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right),$$

$$y = 2A \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right),$$

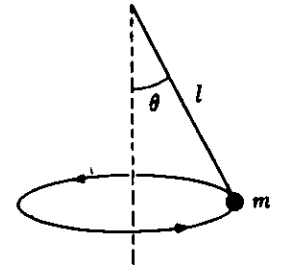
حيث A و T ثابتان و t الزمن . (١) أوجد معادلة المسار التي تحتوي على x و y لكن ليس t .
خطط المسار . ما اسم هذا المنحنى ؟ (٢) بين أن النقطة الثابتة في المستوى تقع عند $x = 0$ صفراً و $y = 0$ صفراً . (هذه النتيجة التي تبدو « بديهية » إنها تقتضي برهاناً .) (تلميح : اعتبر اتجاه التسارع .) (٣) ما دالة القوة (كيف تعتمد على x و y) ؟

م ٧,٢٢ بندول بتأرجح بحرية في سائر الاتجاهات . إذا تتبع الوزن المعلق عند نهايته السفلى دائرة أفقية ، برهن أن تردد الزاوي هو

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}},$$

حيث l و θ مُعرَّفان في شكل ٧,٣٤ . (ملاحظة : لا تتطلب هذه النتيجة تقريب الزوايا الصغيرة .)

فرع اختياري : أثبت أن جسمًا متزلقاً بدون احتكاك داخل كرة يشكل نظاماً مكافئاً فيزيائياً لبندول كروي spherical pendulum ، بشرط أن يحمل ثقل البندول وتر مرين ، وليس قضيب جاسي rigid rod .

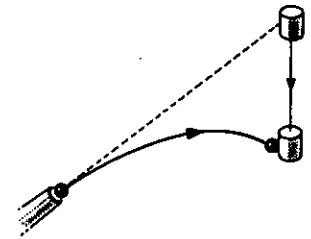


شكل ٧,٣٤ : مسألة ٧,٢٢ .

م ٧,٢٣ برهن أن المقذوف يبلغ أعلى نقطة في مساره عندما يكون قد قطع نصف مده الأفقي بالضبط .

حركة المقذوفات

م ٧,٢٤ تُقذف كرة فلزيّة (معدنية) بقوة نحو علبة معلقة ، في نفس اللحظة التي تُترك فيها العلبة وتبدأ بالسقوط (أنظر شكل ٧,٣٥) . أثبت أن الكرة سترتطم بالعلبة في وسط الهواء (إذا أهمل الاحتكاك) ، بصرف النظر عن السرعة الابتدائية للكرة .



شكل ٧,٣٥ : مسألة ٧,٢٤ .

م ٧,٢٥ (١) بين أنه يمكن إطلاق مقذوف ذي مدى محدد R وسرعة ابتدائية محددة v_0 بأي من زاويتين ابتدائيتين إذا كان $R < R_{\max}$. سمّ هاتين الزاويتين θ_1 و θ_2 . (٢) برهن أن نسبة زمني الطيران لهذين المسارين هي

$$\frac{t_1}{t_2} = \tan \theta_1.$$

م ٧,٢٦ في مباراة المشاهير All-Star Game بكرة القاعدة التي جرت في مدينة ديترويت Detroit بالولايات المتحدة عام ١٩٧١ ، ضرب اللاعب ريجي جاكسون Reggie Jackson من فريق رياضيي أوكلاند

ضربة هدف قياسية

Oakland Athletics الكرة ضربة ربما كانت ضربة هدف قياسية record home run . فوفقاً لأحد تقارير الصحف ، « برحت رمية جاكسون الهرقليّة herculean clout الملعب عند علامة ٤١٥ قدماً وعند نقطة ارتفاعها ١٣٢ قدماً . ولقد قُدِّر أنها قطعت ٦٠٠ قدم . » بين أنه لو تركت الكرة مضرب جاكسون بزاوية ٤٥ مع الاتجاه الأفقي ومرت بالنقطة المعينة ، لكنت قد قطعت أكثر بقليل من ٦٠٨ قدم (عند انعدام مقاومة الهواء) . استخدم $\theta = 32.2$ قدم / ث^٢ ، إن لزمت .

فرع اختياري : (١) برهن أن المدى النظري للكرة يتحدد بالعلاقة

$$R = \frac{L^2}{L - H}$$

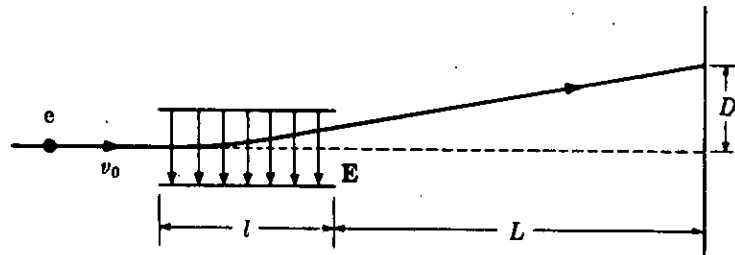
حيث L هي المسافة الأفقية من نقطة ترك الكرة الملعب H ارتفاع الكرة عند تلك النقطة . (لاحظ عدم الاعتماد على θ . هل يعني هذا أنه ليس بمقدور جاكسون أن يضرب الكرة أبعد من ذلك على سطح القمر ؟) (٢) هب أن الشك في كل من L و H هو ٢ قدم . فما الشك في R ؟

جسيم في مجال مغناطيسي ثابت

٧,٢٧ م تتحدد معادلات الحركة لجسيم مشحون في مجال مغناطيسي ثابت بالمعادلات ٧,١٠٧-٧,١٠٩ . حل هذه المعادلات لإيجاد $x(t)$ ، و $y(t)$ ، و $z(t)$ ، وبين أن مسار الجسيم هو حلزون . (للملاءمة في الترميز ، ضع $\gamma = qB/m$. وقد يكون من المثير أن تفاضل واحدة أو أكثر من هذه المعادلات . اهتم بصورة خاصة بالثوابت الواردة في الحل . هل هي كلها مستقلة ؟)

أنبوبة الأشعة المهبطية

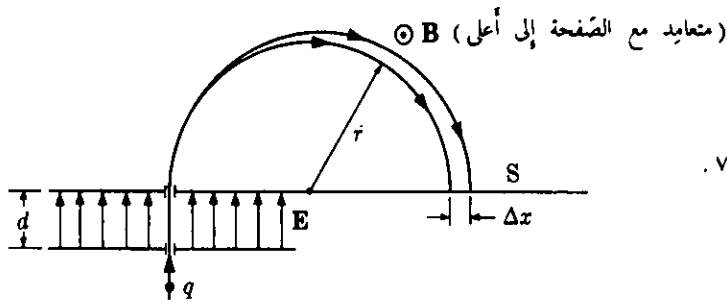
٧,٢٨ م في أنبوبة أشعة مهبطية cathode-ray tube ، تمر الإلكترونات كتلة الواحد منها m ، وشحنته $q = -e$ ، وسرعته الابتدائية v_0 بين ألواح متوازية طولها l . ويتجه بين هذه الألواح مجال كهربائي ثابت E إلى أسفل (أنظر شكل ٧,٣٦ أدناه) ، في حين أن المجال الكهربائي يكون صفراً في كل موضع آخر . بعد الألواح بمسافة L ، ترتطم الإلكترونات بشاشة فلورية fluorescent screen . اشتق تعبيراً لحصلة الانحراف D ، المعروفة في الشكل . (يمكن إهمال الجاذبية .)



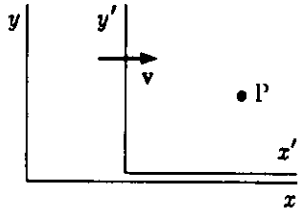
شكل ٧,٣٦ : مسألة ٧,٢٨

مقياس طيف الكتلة

٧,٢٩ م في أحد أشكال مقياس طيف الكتلة mass spectrometer ، تدخل أيونات ions موجبة الشحنة منطقة يوتر فيها مجال كهربائي منتظم E ، حيث تسارع مسافة d ، ثم تدخل منطقة فيها مجال كهربائي صفري ومجال مغناطيسي منتظم B ، تتبع فيها مساراً نصف دائري حتى تبلغ سطحاً كاشفاً S (detecting plane) (أنظر شكل ٧,٣٧ أدناه) . هب أن الأيونات التي تدخل الجهاز هي من



شكل ٧,٣٧ : مسألة ٧,٢٩ .



شكل ٧,٣٨ : مسألة ٧,٣٠ .

صنّفين ، كتلتاهما m و $m + \Delta m$ ، وكلّهما تحمل نفس الشحنة q . إذا كانت سرعة الأيونات مُهملة عندما تدخل منطقة المجال الكهربائي ، فإذا ستكون الفجوة Δx بين أشعة الأيونات عند السطح الكاشف ؟

م ٧,٣٠ في شكل ٧,٢١ ، ليكن اللاعب A عند نقطة الأصل لنظام إحداثي ديكارتي xy ، وليكن اللاعب B عند نقطة الأصل لنظام $x'y'$ يتحرك باتجاه x بسرعة v (أنظر شكل ٧,٣٨ أعلاه) . للنقطة P الإحداثيان xy في الإطار الأول والإحداثيان $x'y'$ في الإطار الآخر . (١) بين أن

تحويل غاليلي

$$x' = x - vt,$$

$$y' = y,$$

إذا تطابقت نقطتا الأصل عند $t = 0$ صفرًا ... تشكّل هاتان المعادلتان ، بالإضافة إلى عبارة عن تساوي القياسات الزمنية ، $t' = t$ ، تحويلًا غاليليًا . (٢) فسّر لماذا تشكّل المعادلات التالية تحويلًا غاليليًا أيضًا :

$$x' = x + x_0 - vt,$$

$$y' = y + y_0,$$

$$t' = t + t_0.$$

صِف العلاقة بين إطارَي الإسناد .

م ٧,٣١ عند $t = 0$ صفرًا ، يقذف المراقب A في شكل ٧,٢٠ (أ) كرة إلى أسفل من نقطة الأصل لنظامه الإحداثي بسرعة ابتدائية $v_0 = 3$ م/ث . وفي نفس هذه اللحظة ، تمر نقطة الأصل لنظام إحداثيات المراقب C [شكل ٧,٢٠ (ج)] بنقطة أصل A بسرّجة ثابتة إلى أسفل مقدارها ٥ م/ث . (١) أكتب معادلة الحركة للكرة من وجهة نظر C (أي x_C ضد t) . (٢) ما هو الزمن الذي تدرك به الكرة - وتمرّ عبْر - نقطة الأصل لنظام إسناد C ؟ (٣) أين يكون C نسبةً إلى A عند هذا الزمن ؟ (٤) كيف يجب أن يقذف A كرة أخرى بحيث يتطابق وصفه لحركتها مع وصف C لحركة الكرة الأولى ؟

وصف الحركة في أطر إسناد مختلفة

م ٧,٣٢ في بناية ما لتكن نقطة الأصل لمحور رأسي z عند مستوى الطابق الأول ونقطة الأصل لمحور رأسي z' عند مستوى أرضية مضعد . يتصاعد المصعد بسرعة ثابتة v_0 . وفي اللحظة التي تتطابق عندها نقطتا الأصل ، تفلت تثبيت fixture من سقف المصعد وتسقط . وفي تلك اللحظة ، تكون التثبيت عند $z = z' = h$. (١) أكتب تعابير للدالتين $z(t)$ و $z'(t)$ اللتين تصفان سقوط التثبيت . (٢) متى وأين تهبط التثبيت في إطار الإسناد المثبت على البناية ؟ (٣) متى وأين تهبط في إطار الإسناد المثبت على المضعد ؟

م ٧,٣٣ يتزلج لاعبا هوكي hockey على مسارين متوازيين يبعدان ٣ م عن بعضهما البعض : كمال بسرعة ١٠ م/ث ، وليث بسرعة ٢٠ م/ث ؛ بينما يراقب جميل من المدرج المسقوف grandstand . وبمجرد أن يتجاوز ليث كمالاً ، يقذف كمال القرص المطاطي puck إليه عبر الجليد ؛ فيتلقفه ليث بعد ١,٥ ث . صف حركة القرص المطاطي في إطار إسناد جميل ، وكمال ، وليث . ما هي سرعات القرص المطاطي v_r ، و v_K ، و v_L في إطار الإسناد الثلاثة هذه ؟



٨. الزخم وحركة الأنظمة قانون نيوتن الثالث

Momentum and the Motion of Systems:

Newton's Third Law

بُنيَ البابُ السَّابعُ حولَ أربعةِ مفاهيمَ رئيسيةٍ في الميكانيكا - القوةُ ، والكتلةُ ، والطولُ ، والزمنُ . فعددُ المفاهيمِ الميكانيكيةِ الهامةِ ليس كبيراً . وباعتبارِ المفاهيمِ المشتقةِ من قبيلِ السَّرجةِ والتَّسارعِ ، فمن المحتملِ أنَّ أقلَّ من اثني عشرٍ منها يكفي لتأسيسِ كاملِ الميكانيكا . ولا نعدو الحقيقةَ إذا قلنا إنَّه بإدراكِ هذهِ المفاهيمِ ، يغدو علمُ الميكانيكا مفهوماً . إلا أنَّ إدراكَ المفهومِ يشمَلُ أكثرَ من مجردِ معرفةٍ تعريفٍ أو معادلةٍ . « فالإدراكُ » التامُ لمفهومٍ معيَّنٍ يقتضي من المرءِ أن يعيَ تعريفَهُ العمليَّ ، وبعْدَهُ الفيزيائيَّ ووَحْدَتَهُ ، وعلاقَتَهُ بالمفاهيمِ الهامةِ الأخرى من خلالِ القوانينِ والمعادلاتِ ، والدَّورَ الذي يلعبه في الأجزاءِ المتنوعةِ من العالمِ الفيزيائيِّ ، والمقاديرَ النموذجيةِ التي يتَّخذها . أضفْ إلى ذلكِ ضرورةَ اكتسابِ شيءٍ من « الإحساسِ » الحدسيِّ intuitive للمفهومِ ، كنوعٍ من الإدراكِ الفوريِّ والاستحسانِ الذي يحدثُ فقط بعدَ النظرِ إلى المفهومِ من زوايا مختلفةٍ عديدةٍ وبعدِ رؤيته مطبَّقاً في مواقفٍ متنوعةٍ كافيةٍ لجعله يبدو بمظهرِ الصِّديقِ المألوفِ . كلمةٌ تحذيرٌ : هذا الضُّربُ من الإلفةِ العلميةِ الجديرةِ بالاهتمامِ المبنيَّةِ على الدِّراسةِ المقداريةِ يختلفُ كثيراً عن الإلفةِ الخادعةِ التي تنتجُ عن الاستخدامِ اليوميِّ غيرِ الدقيقِ لكلماتٍ مثلِ القوةِ ، والطاقةِ ، والتَّسارعِ .

وفي التَّنَافُسِ من أجلِ « الأكثرِ جوهرًا بينِ المفاهيمِ » في الميكانيكا ، من المحتملِ أن يتقاسمَ الزَّمانُ والمكانُ الجائزةَ الأولى . وتعقبُها في ذلكِ مباشرةً المفاهيمُ الرئيسيةُ الثلاثةُ : الزَّخمُ ، والطاقةُ ، والزَّخمُ الزَّاوي . فلقد اكتسبَ كلُّ منها أهميَّةً في الميكانيكا بسببِ ظهوره في قانونٍ للحِفْظِ . وأثبتَ كلُّ منها فائدتهِ في حلِّ مُعضلاتِ الحركةِ . كما قاومَ كلُّ منها ثورةَ القرنِ العشرينِ في الفيزياءِ وبرزَ كمفهومٍ أساسيٍّ في النظريَّتَيْنِ الجديديَّتَيْنِ للنَّسبيةِ وميكانيكا الكمِّ . ووَجَدَ كلُّ

المفاهيمِ المقداريةِ تُولفُ لِبَابِ النَّظَريَّةِ

الزَّخمُ مفهومٌ أساسيٌّ في الميكانيكا

منها أساساً أصْلَبَ في الفيزياء من خلال علاقته بمبدأ التماثل principle of symmetry في الطبيعة . ورغم أننا مَعْنُون في هذا الجزء من الكتاب بميكانيكا نيوتن الكلاسيكية فقط ، فمن المهم معرفة أي أجزاء من هذه النظرية تظل سارية المفعول على التّخوم المعاصرة للفيزياء (كحفظ الزّخم مثلاً) ، وأي أجزاء قد وُجد أنها محدودة المدى (كحفظ الكتلة مثلاً) .

لقد نَمَت في الأبواب الأولى دراسة قوانين حفظ الزّخم ، والطاقة ، والزّخم الزاوي . وسنشد في هذا الباب إدراكاً أعمق لمفهوم الزّخم وما يتصل به من مظاهر علم الميكانيكا . كما سيكون الزّخم الزاوي موضوع الباب التاسع ، والطاقة موضوع الباب العاشر .

٨,١ الزّخم وقانون نيوتن الثاني ؛ الدّفع

Momentum and Newton's Second Law; Impulse

كما أوضحنا في الباب الرابع ، فإن زّخم جسيم يُعرّف ، في الميكانيكا الكلاسيكية ، بأنه حاصل ضرب الكتلة والسّرجة للجسيم :

$$p = mv. \quad (٨,١)$$

التعريف الكلاسيكي للزّخم

والرمز المألوف للزّخم هو p . وهو كمية متجهة يكون اتجاهها بنفس اتجاه السّرجة . وبُعْدُهُ الفيزيائي هو الكتلة $\times$ الطول / الزمن ؛ كما أن وَجْدَتَهُ في النظام الدولي SI هي كـ غ م / ث .

ولقد وُجِدَ أن تعريف المعادلة يكون خطأ - أي عديم الجدوى - عند السّرعات القريبة من سرعة الضوء ؛ ويرد تعريف النسبية للزّخم في المعادلة ٢٦,٢١ . ومن المهم أيضاً أن نتذكّر أن المعادلة ٨,١ لا تصلح أبداً للجسيمات العديمة الكتلة ، والتي تمتلك زّخماً بالرّغم من انعدام كتلتها . على كلّ حال ، فسنعنى في هذا الباب بقطاعات الطبيعة التي تصف فيها المعادلة ٨,١ زّخم الجسيم على نحو كافٍ .

لقد أكّدنا عدّة مرّات في بنود سابقة أن الزّخم مفهوم هامّ يستحقّ التعريف والدراسة لأنّه ، تحت ظروف معيّنة (وبالتحديد في الأنظمة المعزولة) ، يكون محفوظاً . وهناك سبب آخر يدعونا إلى تعريف الزّخم : إنّه خاصيّة الحركة الأكثر ارتباطاً بالقوة بصورة بسيطة ومباشرة . فعُدّل تغيّر الزّخم يساوي القوة المؤثرة . وبمفاضلة المعادلة ٨,١ نحصل (بما أن m ثابتة) على

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt}. \quad (٨,٢)$$

فالطرف الأيمن هو حاصل ضرب الكتلة والتسارع ، الذي يُساوي - حسب قانون نيوتن الثاني - القوة المؤثرة على الجسيم . وعلى ذلك يمكن استبدال المعادلة ٨,٢ بالعلاقة

قانون نيوتن الثاني بدلالة الزخم

$$F = \frac{dp}{dt}. \quad (٨,٣)$$

وهذه صيغة أخرى لقانون نيوتن الثاني : القوة تساوي معدل تغير الزخم .

□ الدَّفْع Impulse

إذا أثرت قوة ثابتة F على جسيم ما ، فإن الزخم يتغير بمعدل ثابت . وبعد فترة زمنية Δt ، يتحدد تغير الزخم Δp بالعلاقة

$$\Delta p = F \Delta t. \quad (٨,٤)$$

التغير في الزخم إذا كانت $F =$ ثابتاً

ويُسمى الالتلاف $F \Delta t$ على اليمين « بالدفع » ؛ فالتغير في الزخم يساوي الدفع . من ناحية أشمل ، فإن الدفع ، الذي نستخدم له الرمز I ، يُعرف بدلالة تكامل ، إذ نستطيع أن نكتب

$$p = \int \left(\frac{dp}{dt} \right) dt.$$

وبناءً على المعادلة ٨,٣ ، يمكن استبدال dp/dt بالقوة F بحيث تصبح

$$p = \int F dt. \quad (٨,٥)$$

والتكامل على اليمين تكامل غير محدود . ويُفضل في التطبيقات اختيار حدود معينة للزمن ، t_1 و t_2 ، بحيث يصبح التكامل محدوداً . عند ذلك يكون

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt, \quad (٨,٦)$$

حيث $p_2 - p_1$ هو التغير في الزخم في الفترة الزمنية $t_2 - t_1$. ويُعرف الدفع I الذي زُود به الجسم في هذه الفترة بالعلاقة

تعريف الدفع

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt. \quad (٨,٧)$$

وإذا عبرنا اختصاراً عن $p_2 - p_1$ بالرمز Δp ، تصبح المعادلة ٨,٦

قانون نيوتن الثاني بدلالة الدفع

$$\Delta p = I. \quad (٨,٨)$$

وهذا أقرب ما يكون إلى الشكل الذي عبّر به نيوتن عن قانونه الثاني . * وكان نيوتن يستخدم الدفع وتغير الزخم أكثر من استخدامه القوة والتسارع . لاحظ أنه لفترة زمنية متناهية الصغر dt ، infinitesimal ، يكون الدفع $dI = F dt$ ، بحيث أن

$$dp = F dt. \quad (٨,٩)$$

هذه المساوية للكميات المتناهية الصغر ، والتي تنطبق على أية قوة ، تشبه مساوية الكميات المحدودة في المعادلة ٨,٤ ، التي تسري لقوة ثابتة .

والعلاقة وثيقة بين الدفع ومتوسط القوة . فبصورة عامة يُعرف المتوسط الزمني لكمية قياسية Q بالعلاقة

$$\bar{Q} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} Q dt. \quad (٨,١٠)$$

وهذا يعني أن الثابت $\bar{Q}$ والمتغير Q لهما نفس التكامل الزمني بين t_1 و t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{Q} dt = \bar{Q} \int_{t_1}^{t_2} dt = \bar{Q} \times (t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} Q dt.$$

وبصورة مماثلة ، فإن المتوسط الزمني لكمية متجهة v يُعرف بالعلاقة

$$\bar{v} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v dt. \quad (٨,١١)$$

(عند عدم التحديد صراحة ، فإن كلمة « متوسط » تعني عادة المتوسط الزمني ؛ إلا أنه من الممكن والمفيد أحياناً تعريف قيم متوسطة بالنسبة إلى متغيرات أخرى غير الزمن .) وتدل مقارنة المعادلتين ٨,١١ و ٨,٧ على أنه يمكن التعبير عن الدفع ببساطة بدلالة القوة المتوسطة :

$$I = \bar{F} \Delta t, \quad (٨,١٢)$$

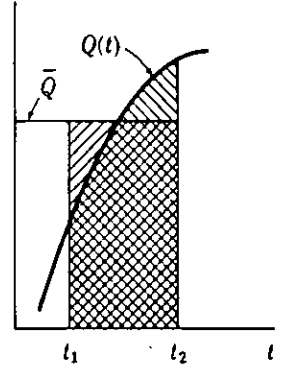
تعبير آخر للدفع

حيث تمثل Δt الفترة $t_2 - t_1$. وتمكننا هذه العلاقة من إعادة صياغة المعادلة ٨,٨ على الصورة :

$$\Delta p = \bar{F} \Delta t. \quad (٨,١٣)$$

قارن المعادلة ٨,١٣ مع المعادلة ٨,٤ (لقوة ثابتة) و ٨,٩ (لاية قوة) .

* عبارة نيوتن هي : « يتناسب التغير في الحركة مع القوة المحركة المؤثرة ، ويحدث باتجاه نفس الخط الذي تؤثر فيه تلك القوة » . هذه هي ترجمة عبارة نيوتن الأصلية باللاتينية . وبما أنه يستخدم « الحركة » بدلاً من الزخم و « القوة » بدلاً من الدفع ، فإنه يتوجب علينا نقل عبارته لتتفق بالمصطلح الحديث على الصورة التالية : يتناسب التغير في الزخم مع الدفع المؤثر ، ويكون اتجاهه موازياً للدفع .



■ مثال ١ : جُسيم كتلته m يتحرك على محور x بسرعة v_0 . تؤثر عليه قوة ثابتة مقدارها F لمدة Δt بنفس اتجاه حركة الجسيم . فما الدفع الذي أُعطي للجسيم ؟ وما السرعة النهائية للجسيم ؟

مقدار الدفع هو $F \Delta t$. وبدلالة المتجهات ، يكون الدفع

$$\mathbf{I} = F \Delta t \mathbf{i},$$

حيث $\mathbf{i}$ متجه الوحدة باتجاه x . والمعادلة الاتجاهية التي نحدد التغير في الزخم هي

$$p_2 - p_1 = \mathbf{I}.$$

ومركبتها باتجاه x تكون ، في هذا المثال ،

$$mv_f - mv_0 = F \Delta t, \quad (٨,١٤)$$

حيث v_f هي السرعة النهائية للجسيم . وحل المعادلة ٨,١٤ للحصول على v_f يُعطينا

$$v_f = v_0 + \frac{F}{m} \Delta t.$$

أما اتجاه v_f فيكون على امتداد محور x . ويمكن طبعاً الحصول على نفس النتيجة باستخدام معادلات الحركة بتسارع منتظم في الفترة Δt . ■

■ مثال ٢ : كرة تتحرك شرقاً بزخم قدره ٥ كغ م/ث . ضُربت من الجانب الذي يزود الكرة بدفع مقداره ١٠ ن ث باتجاه الشمال . فما الزخم النهائي للكرة ؟ إذا استمرت الضربة ١ مرث (١٠^{-٣} ث) ، فما متوسط القوة التي أثَّرت على الكرة خلال هذا الزمن ؟

دع محور x يدل على الشرق ومحور y يدل على الشمال (شكل ٨,١) . فوفق المعادلة ٨,٨ ، نستطيع أن نكتب

$$p_2 - p_1 = \mathbf{I},$$

أو ، بصورة مكافئة ،

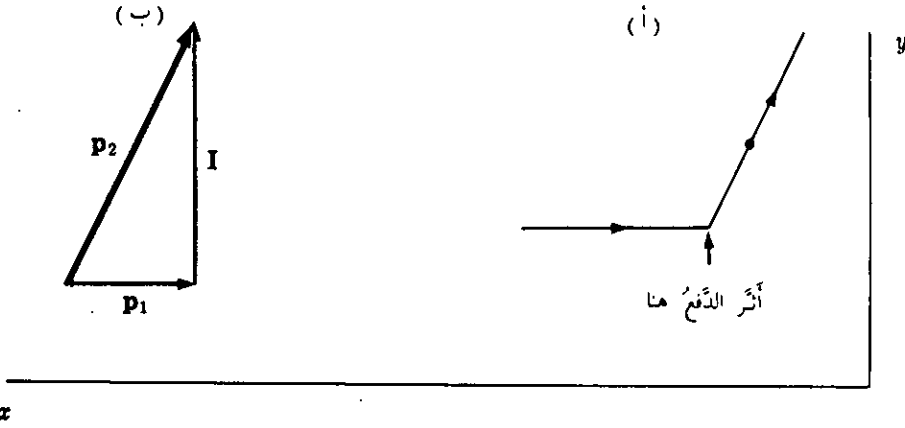
$$p_2 = p_1 + \mathbf{I}. \quad (٨,١٥)$$

وبما أن p_1 و $\mathbf{I}$ محددان ، فإن المسألة تؤول إلى واحدة عن جمع المتجهات لإيجاد p_2 . لاحظ أن الوحدة ن ث هي كالوحدة كغ م/ث . والمعادلة الاتجاهية هي

$$p_2 = (5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}) \text{ kg m/sec.}$$

وهكذا ، فإن للزخم النهائي p_2 مقداراً يساوي

$$\sqrt{10^2 + 5^2} \text{ كغ م/ث} = 11,2 \text{ كغ م/ث}.$$



شكل ٨،١ : انحراف جسم بواسطة قوة دفع . (أ) مسار الجسم . (ب) شكل سهماني للحصول على الزخم النهائي p_2 كمجموع الزخم الابتدائي والدفع (المعادلة ٨،١٥).

كما أن اتجاهه يصنع زاوية θ مع محور x حيث $\theta = 2$ ($\tan \theta = 2$) (أنظر شكل ٨،١).
وتساوي هذه الزاوية ٦٣،٤°.

ونجيب عن السؤال الثاني باستخدام المعادلة ٨،١٢. فبدلالة المقادير، تكون

$$F = \frac{I}{\Delta t}.$$

وبما أن $I = ١٠$ ن ث و $\Delta t = ١٠^{-٣}$ ث ، فإن $F = ١٠^٤$ ن . ومفهوم الدفع مفيد على وجه الخصوص في مسائل من هذا النوع ، حيث تؤثر قوة كبيرة لفترة زمنية قصيرة . ■

وبالنسبة لجسيم مفرد لا تؤثر عليه أية قوى ، فإن حفظ الزخم يكافئ حفظ (أو ثبات) السرجية (قانون نيوتن الأول). ولا يتخذ حفظ الزخم أهمية ودلالة خاصة إلا لانتلافات اثنين أو أكثر من الجسيمات المتفاعلة - أي للأنظمة . فقبل متابعة مبدأ حفظ الزخم بصورة عامة (بند ٨،٧) ، يتعين علينا دراسة حركة الأنظمة وقانون نيوتن الثالث (البند ٨،٢ - ٨،٦).

٨،٢ مركز الكتلة Center of Mass

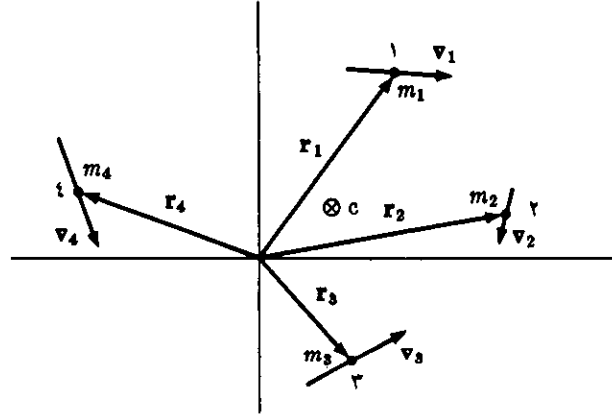
النظام هو أية مجموعة من اثنين أو أكثر من الأشياء ، المتفاعلة عادةً مع بعضها البعض ، كالنظام الشمسي أو كمجموعة من الجزيئات المكونة لجسم صلب . ومن المفيد والسهل على حد سواء دراسة الأنظمة بصورة عامة إعتبر فئة من الجسيمات المتفاعلة - أي عدد من الجسيمات . دعنا نميزها بالأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، وهكذا دواليك (شكل ٨،٢) : كتلة الجسيم ١ هي m_1 ، ومتجه الموضع لها r_1 ، وسرجتها v_1 ، وهلم جرا ؛ كما نسيم متغيرات الجسيمات الأخرى بنفس الطريقة . ونسمي الكتلة الكلية للنظام M :

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots \quad (٨,١٦)$$

بالإضافة إلى M ، فإن الخاصية الهامة الأخرى للنظام ككل هي مركز كتلته ، الذي يتحدد بنقطة يُعرَفُ موقعها بالعلاقة

تعريف مركز الكتلة

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + \dots}{M} \quad (٨,١٧)$$



شكل ٨,٢ : نظام من الجسيمات . ويتميز كل جسيم بكتلته ، ومتجه موضعيه ، وسرعيته ، بالإضافة إلى المتغيرات الأخرى . والنقطة المميزة بالحرف c هي مركز كتلة النظام .

إنه المتوسط الموزون للموضع

ومتجه مركز الكتلة هو عبارة عن المتوسط الموزون *weighted average* لمتجهات الموضع المفردة . (معاملات الوزن هي m_1/M ، m_2/M ، m_3/M ، وهلم جرا . وبمجموعها يساوي ١ .) وبذلك يمكن وصف مركز الكتلة بأنه الموضع المتوسط لكل الكتلة في النظام . وليس من الضروري ، بصورة عامة ، أن يقع عند أية نقطة مادية للنظام (إرجع إلى شكل ٨,٣) .

■ مثال ١ : أين يقع مركز كتلة نظام يتكون من جسيمين فقط ؟

إذا كان الجسيمن متساويي الكتلة ، تؤول المعادلة ٨,١٧ إلى متوسط بالمعنى المألوف :

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{2} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{r}_2 .$$

وهذا يُحدد نقطة في المكان عند منتصف المسافة بين الجسيمين [شكل ٨,٣ (أ)] . أما بالنسبة للجسيمات التي تختلف في كتلتها ، فإن متجه الموضع للجسيم الأثقل يتمتع بوزن إحصائي أكبر في المجموع . وهكذا ، إذا كان الجسيم ١ بروتونا ($m_1 = 1.67 \times 10^{-27}$ كغ) والجسيم ٢ ديوتروناً ($m_2 = 3.34 \times 10^{-27}$ كغ) ، فإن متجه مركز الكتلة يكون

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{3} \mathbf{r}_1 + \frac{2}{3} \mathbf{r}_2 .$$

وعلى وجه التحديد ، افترض أن البروتون يقع عند نقطة الأصل لنظام إحداثي وأن الديوترون يقع على محور x على بُعد ٦ فر (6×10^{-10} م). عندئذ يكون $r_1 = 0$ و $r_2 = 6i$ كما يكون

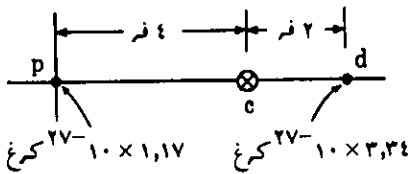
$$r_c = 4i \text{ fm},$$

وهي نقطة على بعد ٤ فر من البروتون و ٢ فر من الديوترون [شكل ٨,٣ (ب)].

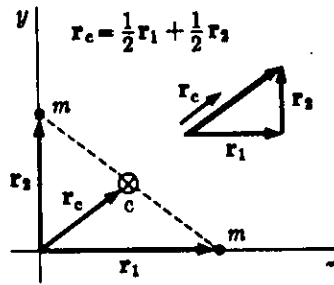
ونستطيع أحيانا كثيرة أن نَحْمَنَ بدقة مركز الكتلة دون اللجوء إلى المعادلة ٨,١٧. فمركز كتلة قضيب منتظم ، مثلاً ، يكون عند مركز القضيب [شكل ٨,٣ (ج)] ، ومركز كتلة لوح مستطيل يقع عند مركز اللوح . أمّا بالنسبة للأنظمة المركبة composite ، فأحدى النتائج المفيدة ، التي نذكرها دون برهان هي الآتية : إذا عُرفَ مركز كتلة كل جزء من أجزاء نظام مركب ، فإنه يمكن حساب مركز كتلة النظام برمته باعتبار أن كتلة كل جزء تقع عند مركز كتلة ذلك الجزء . فيمكن إيجاد مركز الكتلة لنظام الأرض - القمر ، على سبيل المثال ، بوضع كتلة الأرض أولاً عند مركزها وكتلة القمر عند مركزه ، ثم إجراء الحسابات كما لو كان نظاماً مكوناً من جسيمين . وتبين النتيجة أن مركز كتلة النظام المركب يقع على بعد ٢٩٠٠ ميل عن مركز الأرض [شكل ٨,٣ (د)].

مركز كتلة الأجسام المتماثلة

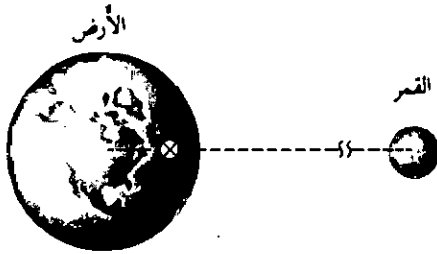
نظرية : يمكن اعتبار أجزاء الأنظمة كجسيمات نقطية



(ب)



(أ)



(د)



(ج)

شكل ٨,٣ : مراكز كتلة . (أ) مركز كتلة زوج من الجسيمات المتساوية الكتلة هو نقطة في المكان عند منتصف المسافة بين الجسيمين . ومن الأسهل ، وإن لم يكن من الضروري ، اختيار محور للإحداثيات على امتداد الخطّ الواصل بين الجسيمين . (ب) يقع مركز كتلة بروتون وديوترون عند ثلثي المسافة من البروتون إلى الديوترون . (ج) يقع مركز كتلة أسطوانة منتظمة عند مركزها الهندسي . (د) مركز كتلة نظام الأرض - القمر هو نقطة على بُعد ٢٩٠٠ ميل عن مركز الأرض .

وعندما تتحرك الجسيمات المكونة لنظام ما ، فإن مركز كتلتها يتحرك أيضاً . ومع أنه من الممكن أن يكون مركز الكتلة نقطة في المكان لا ارتباط لها بأيّة مادة ، إلا أنه نقطة محدّدة تماماً وله أيضاً سرّجهة محدّدة تماماً . ففاضلة المعادلة ٨,١٧ تُعطينا صيغةً لسرّجهة مركز الكتلة :

$$v_c = \frac{dr_c}{dt} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots}{M} \quad (٨,١٨)$$

ومن الواضح أن سرّجهة مركز الكتلة هي متوسط موزون لسرّجّهات الجسيمات المفردة . وبالمثل ، فإن المتوسط الموزون للتسارع يساوي تسارع مركز الكتلة :

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 + \dots}{M} \quad (٨,١٩)$$

■ مثال ٢: جسم جاسي يقوم بحركة انتقاليّة بدون دَوَران بحيث أن كلّ جزء منه له نفس التسارع (شكل ٨,٤) . فما تسارع مركز الكتلة ؟

من الواضح تقريباً أن الجواب يجب أن يكون $a_c = a$. ولبرهان ذلك ، جزء الجسم إلى عدد هائل من « الجسيمات » ، واستخدم الحقيقة بأن $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a$. بذلك تصبح المعادلة ٨,١٩

$$a_c = \frac{a(m_1 + m_2 + m_3 + \dots)}{M} = a.$$

■ مثال ٣ : كرة بلياردو كتلتها m تتدحرج بسرعة v باتجاه كرة بلياردو أخرى ، كتلتها m أيضاً (شكل ٨,٥) . متّجها الموضع للكرتين هما :

$$r_1 = vt\mathbf{i} + y_0\mathbf{j},$$

$$r_2 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}.$$

فأوجد موضع ، وسرّجهة ، وتسارع مركز كتلتيهما .

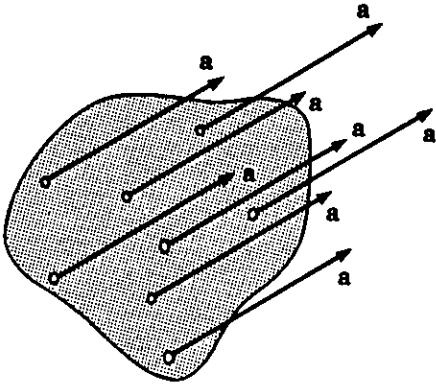
بما أن الكتلتين متساويتان ، فإن $r_c = \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2$ ، أو

$$r_c = (\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}vt)\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}. \quad (٨,٢٠)$$

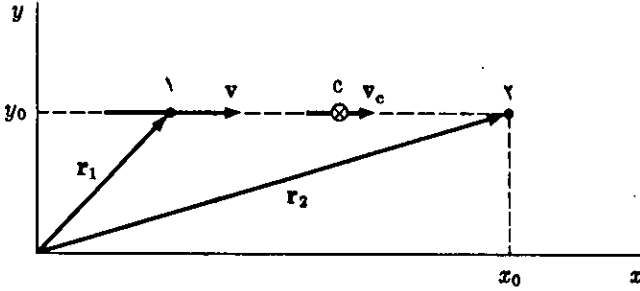
وهذه نقطة متحرّكة عند منتصف المسافة بين الكرتين . وبدلاً من أخذ المتوسط الموزون للسرّجهة ، فإنه يمكن مفاضلة المعادلة ٨,٢٠ مباشرة للحصول على سرّجهة مركز الكتلة . فتساوي

$$v_c = \frac{dr_c}{dt} = \frac{1}{2}v\mathbf{i},$$

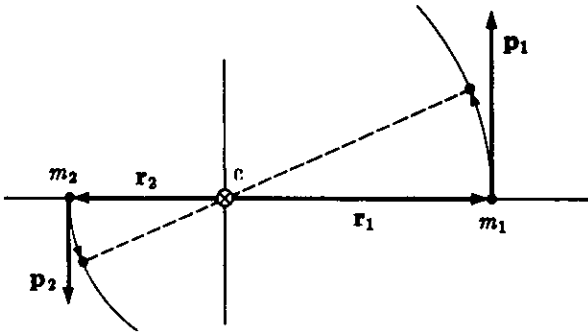
■ أي نصف سرّجهة الكرة المتحرّكة . وبما أن v_c ثابتة ، فإن $a_c = 0$.



شكل ٨,٤ : جسم جاسي يقوم بحركة انتقالية . فكل جزء من الجسم له نفس التسارع a .



شكل ٨,٥ : كرة البلياردو ١ تتحرك بسرجهه v نحو كرة البلياردو الساكنة ٢ . فتكون سرجهه مركز الكتلة $v_c = \frac{1}{2}v$.



شكل ٨,٦ : جسيمان يقومان بحركة دائرية منتظمة حول مركز كتلتيهما الثابت .

□ علاقة الزخم بمركز الكتلة Relationship of Momentum to Center of Mass

إذا عدنا إلى اعتبار عدد اعتباطي من الجسيمات ، فإنه يمكننا كتابة الزخم الكلي لنظام ما كما يلي :

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots \quad (٨,٢١)$$

ومقارنة المعادلتين ٨,١٨ و ٨,٢١ تبين في الحال أن الزخم الكلي يرتبط ببساطة بسرجهه مركز الكتلة :

نعيّر هام للزخم الكلي

$$P = Mv_c. \quad (٨,٢٢)$$

ويستج عن ذلك أيضاً علاقةً بسيطةً لمعدل التغير الزمني للزخم الكلي :

$$\frac{dP}{dt} = M \frac{dv_c}{dt} = Ma_c. \quad (٨,٢٣)$$

يتحرك مركز الكتلة كجسيم نقطي
كتلته M

وتشبه هاتان المعادلتان بوضوح نظريتهما للجسيم المفرد : $p = mv$ ، و $dp/dt = ma$. فإحدى طرق التعبير عن مدلول المعادلة ٨,٢٢ بالكلمات هي قولنا إن زخم نظام ما يساوي زخم جسيم مفرد كتلته M موضوع عند مركز كتلة النظام . وهذا هو أحد الأسباب وراء أهمية مركز الكتلة .

مفضلة ثنائي الجسم

■ مثال ٤ : مركز كتلة نظام مكون من جسيمين في حالة سكون . يقوم الجسيم ١ ، ذو الكتلة m_1 ، بحركة دائرية منتظمة حول مركز الكتلة على بعد r_1 وبسرعة v_1 . فما حركة الجسيم ٢ ، ذي الكتلة m_2 ؟

بما أن مركز الكتلة ساكن ، فن الملائم وضعه عند نقطة الأصل (أنظر شكل ٨,٦) . وتقول المعادلة ٨,١٧ في هذه الحالة إلى

$$0 = \frac{m_1}{M} r_1 + \frac{m_2}{M} r_2.$$

وبذلك يكون

$$r_2 = - \left(\frac{m_1}{m_2} \right) r_1; \quad (٨,٢٤)$$

أي أن متجه الموضع r_2 يعاكس في الاتجاه r_1 ؛ كما أن نسبة مقداريهما ، $r_2/r_1 = m_1/m_2$ ، ثابتة . لذلك ، إذا تحرك الجسيم ١ في دائرة نصف قطرها r_1 ، تحرك الجسيم ٢ في دائرة نصف قطرها r_2 . وبما أن مركز الكتلة ساكن ، فإن المعادلة ٨,٢٢ تنص على أن الزخم الكلي P للنظام يساوي صفراً . وهذا يعني أن

$$p_2 = -p_1; \quad (٨,٢٥)$$

أي أن الزخمين يتساويان مقداراً ويتعاكسان اتجاهًا . لذلك تكون $m_1v_1 = m_2v_2$ ، أو

$$v_2 = \left(\frac{m_1}{m_2} \right) v_1. \quad (٨,٢٦)$$

فمثلاً ، إذا كان الجسيم ١ إلكترونًا والجسيم ٢ بروتوناً ، حيث $m_1/m_2 = 1/1,836$ (وإذا فرضنا إمكانية وصف حركتهما كلاسيكياً) ، كان نصف القطر المداري للبروتون أصغر ١٨٣٦ مرة من

نصف القطر المداري للإلكترون ، وسرعته أقل ١٨٣٦ مرة من سرعة الإلكترون . لاحظ ، مع ذلك ، تساوي زخميهما .

٨,٣ قانون نيوتن الثاني للأنظمة Newton's Second Law for Systems

إن طريقة تطبيق قانون نيوتن الثاني على نظام غير جاسي - كالنظام الشمسي ، مثلاً - لا تبدو واضحة لأوّل وهلة . صحيح أن القوة الكلية المؤثرة على النظام والكتلة الكلية للنظام هما فكرتان واضحتان ؛ لكن ما هو « التسارع » لنظام تتحرك أجزاؤه في اتجاهات مختلفة بتسارعات مختلفة ؟ ... كما سنرى ، فإن مفهوم مركز الكتلة يزودنا بطريقة لإجابة هذا السؤال .

دعنا ، كما في البند السابق ، نعتبر نظاماً عاماً يتكوّن من أي عدد من الجسيمات . فلهذه الجسيمات زخام $p_1, p_2, p_3, \dots$ ، كما تتأثر بقوى $F_1, F_2, F_3, \dots$ (شكل ٨,٧) . وقد تنشأ هذه القوى إما من داخل النظام أو من خارجه . وتكون القوة الكلية المؤثرة على النظام

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \dots \quad (٨,٢٧)$$

ويمكن تطبيق قانون نيوتن الثاني على كل جسيم على حدة ، يُعطي معادلات الحركة

$$\begin{aligned} F_1 &= m_1 a_1, \\ F_2 &= m_2 a_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

يخضع كل جسيم لقانون نيوتن الثاني

وإذا جعلنا مجموع الأطراف اليسرى لهذه المعادلات مساوياً لمجموع الأطراف اليمنى ، تكون النتيجة

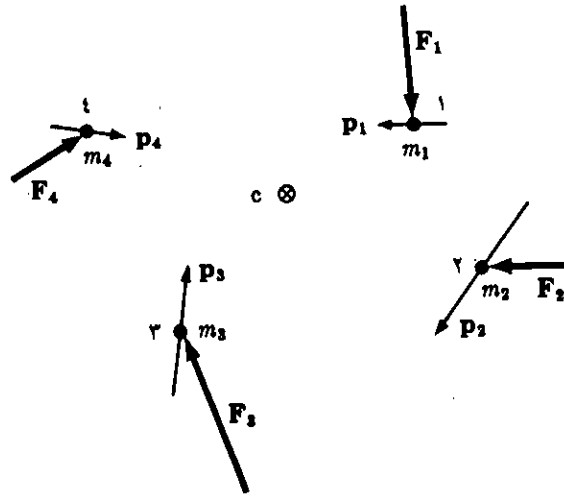
$$F = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 + \dots \quad (٨,٢٨)$$

وبموجب المعادلة ٨,١٩ ، فإن المجموع على اليمين هو حاصل ضرب الكتلة الكلية للنظام في تسارع مركز الكتلة . وعلى ذلك ، نستطيع إعادة كتابة المعادلة ٨,٢٨ بصورة مقتضبة جداً :

$$F = M a_c. \quad (٨,٢٩)$$

قانون نيوتن الثاني للنظام برئته

ويمكننا تسمية هذه المعادلة بقانون نيوتن الثاني للنظام ككل . وتنص على أن القوة الكلية المؤثرة على جميع أجزاء النظام تساوي حاصل ضرب الكتلة الكلية في تسارع مركز الكتلة . ويمكننا التعبير عن هذه النتيجة الطريفة والجميلة في بساطتها بصورة أخرى : يتحرك مركز الكتلة كما لو أن كل كتلة النظام قد تركزت هناك ، وكما لو أن جميع القوى قد أثرت هناك (حتى لو لم يوجد هناك ، في الحقيقة ، أية كتلة أو قوة) . من الواضح إذن أن مركز الكتلة هو نقطة ذات أهمية

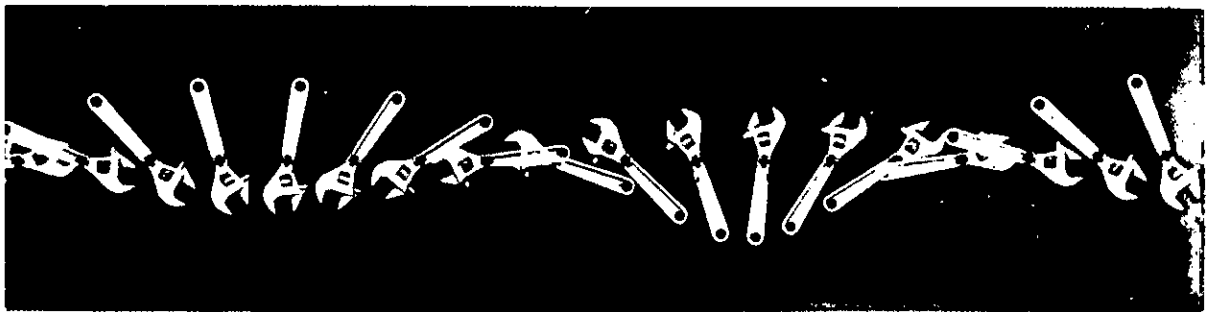


شكل ٨,٧ : نظام جُسيّات. زخامُها p_i وتأثير بقوى F_i .

خاصّة جداً . ويمكن وصفها بنقطة التمثيل الكامل ؛ إذ أنّها النقطة الوحيدة التي تُمثّل حركتها بدقّة متوسط حركة النظام برمته يبيّن شكل ٨,٨ مِلْوَى : wrench ينزلق فوق سطح أفقي أملس . وينتحرّك مركز الكتلة ، المبيّن بإشارة صليب سوداء ، بسرعة ثابتة في خطّ مستقيم ، تماماً كحركة جُسيم مفرد ؛ بينما تكون حركة كلّ جزء آخر من المِلْوَى أكثر تعقيداً . إنّ ذلك يعني ضمناً ، كحقيقة تجريبية (بمساعدة المعادلة ٨,٢٩) ، أنّ $F = 0$. فجميع كلّ القوى المؤثرة على سائر الذرّات المكوّنة للمِلْوَى يُساوي صِفْراً . مثل هذه البساطة يجب أن تكون ذات أهميّة . وسنستكشف هذه الأهميّة في البندين الآتيين .

لماذا تتلاشى القوة الكتلة المؤثرة على المِلْوَى ؟

ونظراً للصّلة بين الزّخم ومركز الكتلة المبيّنة في البند الأخير (أنظر ، بصورة خاصّة ، المعادلة ٨,٢٣) ، يمكن أيضاً كتابة المعادلة ٨,٢٩ على الصّورة :



شكل ٨,٨ : حركة مِلْوَى بدون احتكاك . مركز الكتلة فقط (الصليب الأسود) ينتحرّك بسرجة ثابتة . (الصّورة مأخوذة من كتاب P.S.S.C. Physics ، لناشره D. C. Heath & Co. ، ١٩٦٥ .)

شكل آخر لقانون نيوتن الثاني للنظام
برمته

$$F = \frac{dP}{dt}, \quad (٨,٣٠)$$

وهذا شكل آخر لقانون نيوتن الثاني للنظام برمته .

■ مثال : ما القوى المؤثرة على جُسمي النظام الذي بَحْثْنَاهُ في مثال ٤ بالبند السابق والمبين في شكل ٨,٦ ؟ وما القوة الكلية ؟

إمَّا المعادلة ٨,٢٩ أو المعادلة ٨,٣٠ تستلزم أَنَّ القوة الكلية $F = 0$ ، حيث أفدنا أَنَّ مركز الكتلة كان ساكنًا ؛ وهذا يعني أَنَّ $a_c = 0$ ، أو $dP/dt = 0$. ويمكن التَّحَقُّقُ من تلاشي القوة الكلية باعتبار القوى المفردة . ولسنا في حاجة إلى معرفة ماهية القوى (أي فيما إذا كانت كهربائية ، أو جاذبية ، أو أي شيء آخر) ؛ إذ أَنَّ التَّسَارِعَاتِ المعروفة تُحدِّد القوى . فالجُسم ١ يتحرَّك بانتظام في دائرة . لذلك يتأثر بقوة مركزية جاذبة مقدارها (من المعادلة ٧,٦٦)

$$F_1 = \frac{m_1 v_1^2}{r_1}.$$

وتؤثر هذه القوة باتجاه مركز الكتلة (أو ، نفس الشيء ، باتجاه الجُسم ٢) . وللقوة المضادة F_2 المقدار

$$F_2 = \frac{m_2 v_2^2}{r_2}.$$

إستخدم الآن المعادلة ٨,٢٤ للتعويض عن مقدار r_2 ، والمعادلة ٨,٢٦ للتعويض عن v_2 ، وذلك للحصول على

$$F_2 = \frac{m_1 v_1^2}{r_1} = F_1. \quad (٨,٣١)$$

فالمقداران متساويان . وبما أَنَّ الاتجاهين متضادَّان فإنَّ

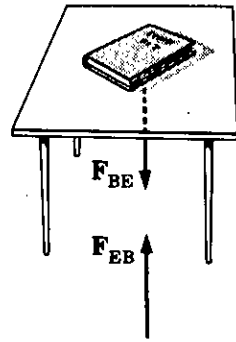
$$F = F_1 + F_2 = 0.$$

٨,٤ قانون نيوتن الثالث Newton's Third Law

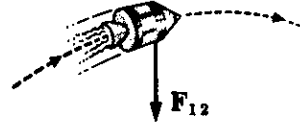
يمثل الآتي صيغةً حديثةً لقانون نيوتن الثالث : إذا تفاعل جسمان A و B ، فإنَّ القوة التي يؤثر بها B على A تساوي في المقدار وتعاكس في الاتجاه القوة التي يؤثر بها A على B . ورياضياً ، فإنَّ

قانون نيوتن الثالث

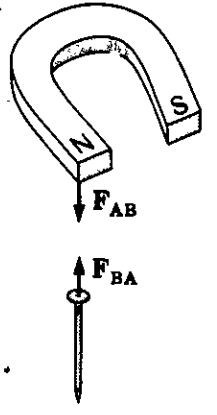
$$F_{AB} = -F_{BA}. \quad (٨,٣٢)$$



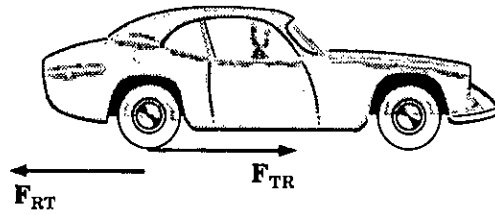
(ج)



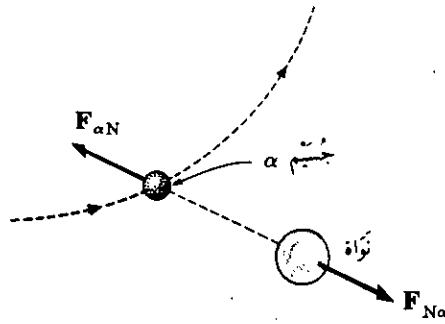
(ب)



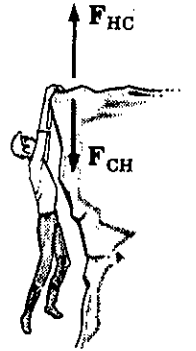
(أ)



(د)



(و)



(هـ)

شكل ٨,٩ : أمثلة على فِعْل قانون نيوتن الثالث : $F_{AB} = -F_{BA}$

(أ) يجذب مسبار مغناطيسياً بقوة تساوي وتضاد قوة المغناطيس على المسبار. (ب) قرصناعي والأرض ، أو (ج) كتاب والأرض ، يجذب كل منهما الآخر بالتساوي ، بغض النظر عن حركتهما النسبية. (د) قوة إطار دولاب على الطريق تتوازن مع قوة دسر الطريق على الإطار. (هـ) قوة اليدين على الجرف (الصخري) تساوي وتضاد قوة الجرف على اليدين. (و) يتناثر جسيم ألفا ونواة بقوتين متساويتين المقدار.

واصطلاحاً ، سنجعل الحرف السفلي subscript الأول يدلُّ على الجسم المتأثر بالقوة والحرف السفلي الثاني يدلُّ على الجسم المؤثر بالقوة (أنظر شكل ٨,٩). وبصورة أعمَّ نوعاً ، يمكن

صياغة القانون كالآتي : **تَرَدُّ كُلُّ قُوَى الطَّبِيعَةِ فِي أَزْوَاجٍ مُتَسَاوِيَةٍ وَمُتَضَادَّةٍ** . * لاحظُ أَنَّ القانونَ الثالثَ يحتاجُ لتطبيقه إلى اثنتين (أو أكثر) من الأجسام المتفاعلة . أمَّا القانونان الأول والثاني فيمكن صياغتهما بدلالة أجسام مفردة .

وهو قانون قوى ، وليس قانون حركة

ومن أهم مظاهر قانون نيوتن الثالث التي تستوجب الفهم هو أنه قانون قوة ، وليس قانون حركة بصورة مباشرة ؛ إذ أنه تعبير عن القوى التي تؤثر بها وتتأثر بها الجُسيمات أو الأجسام بغض النظر عن حركتها . فهو ينص ، على سبيل المثال ، أنه إذا تأثر كتاب إلى أسفل بقوة جاذبية مقدارها ١٠ ن ، انجذبت الأرض إلى أعلى بواسطة الكتاب بمحصلة قوة مقدارها ١٠ ن ، بغض النظر عما إذا كان الكتاب يُرْفَع أو يَسْتَقِرُّ على مِنْضدة أو يقع على الأرض ، وبغض النظر عن أية قوى أخرى قد تؤثر على الكتاب والأرض . وتحدد حركة الأرض وحركة الكتاب بالقوة الكلية المؤثرة على كلٍّ منهما (قانون نيوتن الثاني) . فَإِنَّ قُوَّةَ جاذبية الأرض هي مجرد واحدة من بين مجموعة القوى الممكنة المؤثرة على الكتاب ؛ كما أَنَّ قُوَّةَ جذب الكتاب للأرض هي مجرد واحدة من بين مجموعة القوى المؤثرة على الأرض . وبموجب قانون نيوتن الثالث ، تكون هاتان القوتان المعيتان متساويتين ومتضادتين ؛ أيَّ أنها زوج متناظر .

وهناك نقطة هامة أخرى جديرة بالاهتمام عن قانون نيوتن الثالث هي عموميته ، وعموميتها تنشأ عما لا يقوله القانون . فهو لا يفصح بشيء عن الحركة ؛ ولا يفصح بشيء عن القوى المؤثرة على الجسم A والتي تنشأ عن أي مصدر آخر غير الجسم B ؛ كما أنه لا يفصح بشيء عن نوع القوة المؤثرة بين A و B ؛ أيَّ أنه تعميم تام عن القوى في الطبيعة ، بغض النظر عن شدتها ، أو مصدرها ، أو نوعها ، أو تأثيرها . فالمرء لا يستطيع أن يستنبط من قانون نيوتن الثالث ، مثلاً ، قوة ، أو حتى اتجاه قوة ، الجاذبية التي تؤثر بها الأرض على كتاب ؛ إذ تأتي تلك المعرفة من قانون معين للقوة ، هو قانون الجذب العام . وينص القانون الثالث فقط على أن قوة الأرض على الكتاب - مهما كانت شدتها وطبيعتها - تناظرها قوة مضادة للكتاب على الأرض . أضف إلى ذلك أنه يترك الباب مفتوحاً أمام إمكانية وجود قوى تؤثر بين الأجسام لم تُكتشف بعد . فإذا حدث ذلك ، وإذا بقي قانون نيوتن الثالث ساري المفعول ، فإن القوى الجديدة أيضاً يجب أن تَرَدُّ في أزواج متساوية ومتضادة . فحينما صاغ نيوتن القانون الثالث ، لم يكن معلوماً بصورة مقدارية سوى قوة الجاذبية . ووجد بعد ذلك أن القوى الكهربائية والمغناطيسية تخضع للقانون الثالث . كما أن قوى التلاصق العادية ، الكهربائية في جوهرها ، تخضع لنفس القانون . وفي المجال دون الذري ، وجد أن التفاعلات القوية والضعيفة تتوافق مع قانون حفظ الزخم ، الأمر الذي يمكن اعتباره تركيباً synthesis حديثاً لقانوني نيوتن الأول والثالث .

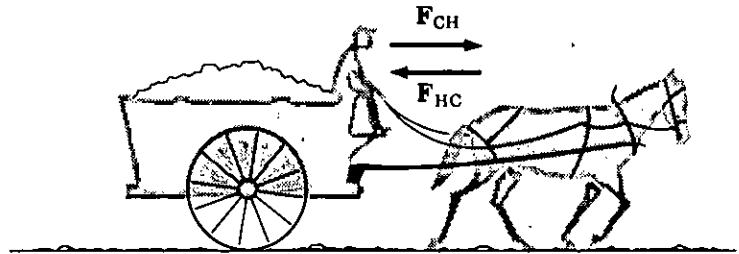
إنه يحكم كل القوى ولكنه لا يحدد أيها منها

* من الممارسات المألوفة في الفيزياء - وهو ما نتبعه هنا - أن يُدعى زوجُ متجهات مُحصلة صفر ، بالتساوي والمتضاد . وهذا يعني ، طبعاً ، أنها متساويان في المقدار ومتضادان في الاتجاه .

ورغم سهولة استيعاب فكرة القوى المتساوية والمتضادة ، إلا أنها يمكن أن تكون مربكة في التطبيق العملي ؛ كما أنها تتضمن مدلولات غير متوقعة لنبحث « نقيضة الحصان والعربة cart and horse paradox » . إذا كانت العربة تشد الحصان إلى الخلف بنفس مقدار القوة التي يشد بها الحصان العربة إلى الأمام ، فكيف يستطيع الحصان والعربة أن يتحركا على الإطلاق ؟ أو بعبارة أعم : إذا كانت كل قوة في الطبيعة تختزل بقوة مضادة ، فلماذا يوجد أي تسارع في الكون ؟ ... يكمن حل النقيضة الظاهرة في فكرة أساسية واحدة : إن القوتين المتساويتين والمتضادتين لزوج متناظر من القوى لا تؤثران على نفس الجسم . فالحصان يؤثر على العربة بقوة F_{CH} (شكل ٨,١٠) ؛ أما القوة F_{HC} المساوية والمضادة للقوة F_{CH} فلا تؤثر على العربة ، بل على الحصان . وحركة العربة تتحدد فقط بالقوى المؤثرة عليها ، لا بما قد تؤثر به من قوى على الأشياء الأخرى . فإذا أشرنا بالرمز F_C إلى القوة الكلية المؤثرة على العربة (التي تساوي F_{CH} مضافاً إليها قوة الاحتكاك مع الأرض زائد مقاومة الهواء) ، أمكننا تطبيق قانون نيوتن الثاني على العربة بمفردها :

$$F_C = m_C a_C ; \quad (٨,٣٣)$$

أي أن كتلة العربة مضروبة في تسارعها تساوي القوة الكلية المؤثرة عليها . فقوة العربة على الحصان التي « تختزل » قوة الحصان على العربة لا علاقة لها في الواقع بحركة العربة . وبما أن قانون نيوتن الثالث لا يربط بين القوى المختلفة المؤثرة على العربة ، فلا حاجة لأن تختزل بعضها بعضاً ، ويمكن للعربة أن تتسارع .



شكل ٨,١٠ : « نقيضة الحصان والعربة » ... لماذا يتسارع النظام ؟

لنبحث الآن في تطبيق قانون نيوتن الثالث حيثما ينطبق فعلاً - على التفاعل بين الأرض والحصان . فبما أن الحصان يضغط على الأرض إلى الخلف ، فإن الأرض تدفع الحصان إلى الأمام بقوة مساوية ومضادة . وإذا تسارع الحصان إلى الأمام ، فذلك لأن القوة الناتجة عن دفع الأرض أكبر من القوة التي تؤثر بها العربة إلى الوراء . فالاحتكاك ، وهو بعيد عن أن يكون قوة التباطؤ التي نفترض أنه يمثلها عادة ، يقوم هنا بدور القوة المحركة التي تدفع الحصان إلى الأمام ما الذي يدفع السيارة إلى الأمام ؟ إنه ليس محركها ، بل الطريق . فالقضبان

دشر المركبات

الحديدية تدفع القاطرة إلى الأمام ؛ كما أن الهواء يذسر الطائرة (حتى الطائرة النفثة) . ومحركات السيارة أو القاطرة أو الطائرة لا تدفع بالمركبة إلى الأمام ، بل تدفع مادة ما (الطريق ، القضبان ، أو الهواء) إلى الخلف . فالمادة ، بخضوعها لقانون نيوتن الثالث ، يجب أن تتفاعل react لتدفع المحركات ، وما يتصل بها من مركبات ، إلى الأمام على الصاروخ فقط ، لعدم وجود شيء يدفع ضده ، أن يستخدم طريقة مختلفة للذسر (بند ٨،١٠) .

إن صياغة نيوتن الأصلية لقانونه الثالث هي موضع اهتمام ، سببه جزئياً أن فكرة « الفعل ورد الفعل » قد تسربت إلى اللغة العادية . فغالباً ما نسمع الإشارة إليها في مواقف بعيدة كل البعد عن الفيزياء . لقد كتب نيوتن : « لكل فعل يوجد دائماً رد فعل مساو ومضاد ؛ أو أن الفعلين المتبادلين بين جسمين يتساويان دائماً ويتضادان . » وتضاع نفس العبارة بالمصطلح الحديث كالآتي : توجد لكل قوة في الطبيعة قوة مساوية ومضادة ؛ أي أن القوتين المتبادلتين بين جسمين يتساويان دائماً في المقدار وتتضادان في الاتجاه . فمن الواضح أن الصياغتين الواردتين للقانون الثالث في بداية هذا البند لا تختلفان في مضمونها عن صياغة نيوتن . أما لماذا اختار نيوتن استخدام كلمة « فعل » بدلاً من كلمة « قوة » ؟ فليس مؤكداً - ربما كي يجعل « فعل » تشمل معاً فكرة « قوة » وفكرة « تغير الزخم » ، وربما فقط لسبب لغوي مفاضة أن « فعل action لها ضد مناسب ، « رد فعل reaction » ؛ في حين أن « قوة » ليس لها مثل ذلك .

صياغة نيوتن لقانونه الثالث

٨،٥ اختزال القوى الداخلية The Cancellation of Internal Forces

ليس هناك من نتيجة لقانون نيوتن الثالث أهم من اختزال القوى الداخلية لكل نظام . فالقوة الداخلية هي قوة منشؤها وفعلها (أو سببها ومسببها) كلاهما داخل النظام قيد الدراسة . فإذا اعتبر الحصان والعربة معاً كنظام واحد ، فإن قوة العربة على الحصان تعتبر قوة داخلية . كذلك ، لأي جسم مادي ، تكون القوى بين مكوناته الذرية قوى داخلية . من ناحية أخرى ، فإن القوة الخارجية هي قوة تؤثر على النظام ، إلا أن منشأها من خارجه . فإذا اعتبرنا العربة بمفردها كنظام ، كانت القوة الناتجة عن الحصان وقوة الاحتكاك الناشئة عن الأرض - سواء بسواء - قوتين خارجيتين . ومن الممكن ، طبعاً ، أن تكون نفس القوة خارجية لنظام ما وداخلية لآخر . فقوة الشمس على الأرض هي قوة خارجية إذا اعتبرنا الأرض بمفردها النظام موضع الاهتمام . أما في النظام الشمسي ككل ، فتكون نفس القوة قوة داخلية .

تعريف قوة داخلية

تعريف قوة خارجية

وعلى ذلك ، يمكن قسمة القوة الكلية لأي نظام إلى جزء داخلي وآخر خارجي :

هـ في الأصل اللاتيني ، يشير نيوتن إلى كلمة vis (التي تترجم عادة إلى « قوة ») في صياغته للقانونين الأول والثاني ، وإلى actio (التي تترجم عادة إلى « فعل ») في صياغته للقانون الثالث .

$$F = F_{int} + F_{ext} \quad (٨,٣٤)$$

وإن تعريف القوتين الداخليّة والخارجيّة مع قانون نيوتن الثالث يستلزم فوراً أنَّ مجموع القوى الداخليّة يجب أن يساوي صفراً . فلكلّ قوّة توجد قوّة مساوية ومضادة . وبالنسبة لقوّة داخلية ، تؤثر القوّة المضادة أيضاً داخل النظام وتكون هي نفسها قوّة داخلية . وباختصار ، فإنّ جميع القوى الداخليّة تردّ في أزواج متوازنة . وبما أن مجموع أي زوج يساوي صفراً ، فإنّ مجموع جميع الأزواج يساوي صفراً . وعلى ذلك نستطيع كتابة :

$$F_{int} = 0, \quad (٨,٣٥)$$

نتيجة هامة لقانون نيوتن الثالث :
مجموع القوى الداخليّة يساوي صفراً

$$F = F_{ext} \quad (٨,٣٦)$$

وهذا يعني أنه يمكن إعادة كتابة المعادلتين ٨,٢٩ و ٨,٣٥ لتصبحا :

$$F_{ext} = Ma_c, \quad (٨,٣٧)$$

صيفتان محستان لقانون نيوتن الثاني
للأنظمة

$$F_{ext} = \frac{dP}{dt} \quad (٨,٣٨)$$

وهاتان هما الصيغتان النهائيّتان الهامتان لقانون نيوتن الثاني للأنظمة .

وتنصّ المعادلة ٨,٣٧ على أن مركز الكتلة لنظام يستجيب للقوى الخارجيّة كما لو كان جسماً مفرداً كتلته M . وهذا يفسّر في الحال لماذا يتحرك مركز كتلة الملوّ المصوّر في شكل ٨,٨ بدرجة ثابتة (حيث أنه ، بالنسبة للملوّ ، $F_{ext} = 0$) . وهذا يفسّر أيضاً لماذا تخضع كرة بلياردو وجسيم أولي لنفس القوانين الميكانيكية ، رغم تعقيد بنية كرة البلياردو [شكل ٨,١١ (أ)] . وبالنسبة لنظام الأرض - القمر ، فإنّ مركز الكتلة ، وليس أية نقطة أخرى ، هو الذي يتبع مساراً إهليلجياً elliptical path حول الشمس [شكل ٨,١١ (ب)] . وهكذا فإنّ اختزال القوى الداخليّة يجعل وصف الأنظمة المعقّدة بنفس بساطة وصف الجسيمات المفردة .

بما أن $F_{int} = 0$ ، يكون للأنظمة
المعقّدة صفات جزيئية بسيطة

ويوجد في الواقع تناظرٌ تامٌّ بين حركة الجسيمات وحركة الأنظمة . وإليك ملخصاً
للمعادلات الهامة :

للنظام

$$P = Mv_c$$

$$F_{ext} = Ma_c$$

$$F_{ext} = \frac{dP}{dt}$$

للجسيم المفرد

$$p = mv$$

$$F = ma$$

$$F = \frac{dp}{dt}$$

تتحكم الأنظمة والجسيمات المفردة
بمعادلات متشابهة

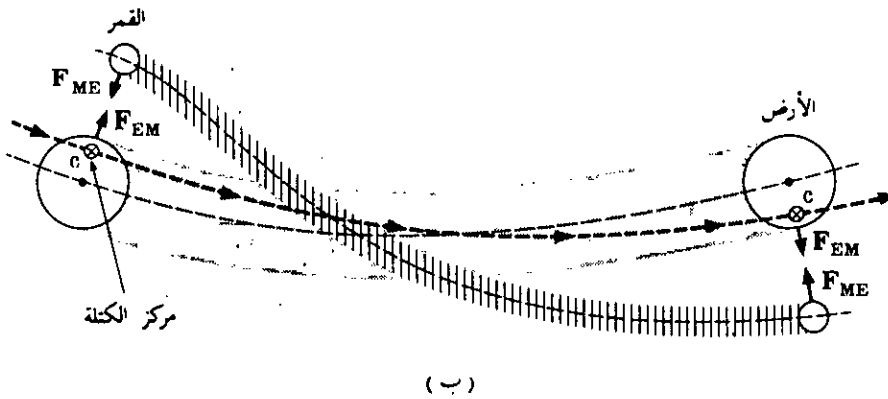
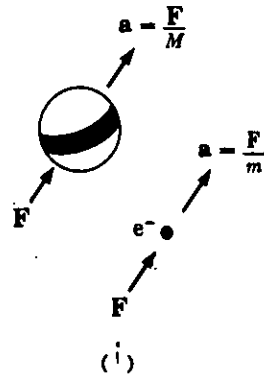
فمادلنا السطر الأول تُعرفان الزخم ؛ بينما تُعطينا معادلات السطرين التاليين صورتين بديلتين لقانون نيوتن الثاني .

□ علاقة قانون نيوتن الثالث بقانوني نيوتن الأول والثاني

The Connection of Newton's Third Law To Newton's First and Second Laws

إن اختزال القوى الداخلية لكل نظام هو أكثر من مجرد كونه أمراً ملائماً في الميكانيكا ؛ فيكاد المرء يقول إن وجود الميكانيكا مرهون بوجوده . ولقد بلغ تألفنا مع الحقيقة بأن الأجسام الجاسئة تتسارع فقط استجابة للقوى الخارجية أن أصبحنا نتغاضى بسهولة عن أهمية القوى الداخلية المختزلة لبعضها . فلو كان للقوى الداخلية أي أثر على حركة الأجسام الجاهريّة ، لما استطاع غاليليو دراسة التسارع المنتظم قرب سطح الأرض ، ولما استطاع نيوتن معرفة ماهية قوة الجاذبية من دراسة الحركة الكوكبية ؛ كما أن الأجسام العادية التي لا تتأثر بقوى خارجية سوف تتسارع تلقائياً عندئذ . فحقيقة خضوع « الأجسام » و « الأشياء » (التي هي نفسها أنظمة معقدة) لقانون نيوتن الثاني إنما تعتمد مباشرة على سريان قانون نيوتن الثالث .

قانون نيوتن الثاني يتطلب القانون الثالث



شكل ٨.١١ : اختزال القوى الداخلية . (أ) نستجيب كرة بلياردو لقوة مؤثرة ككثيوتية مفردة ، تماماً كاستجابة إلكترون مفرد . (ب) قوى الجذب بين القمر والأرض هي قوى داخلية إذا اعتبرنا الأرض والقمر معاً كنظام مفرد . وليس لهذه القوى أي أثر على حركة مركز كتلة نظام الأرض - القمر ، الذي يتبع مساراً إهليلجياً أملس حول الشمس . (هذا الشكل ليس مرسوماً بواجب مقياس رسم) .

والقانون الأول أيضاً يتطلب القانون
الثالث

وللجسم المعزول ، تكون $F_{ext} = 0$. وإذا كان لهذا الجسم أن يتحرك دون تسارع (قانون نيوتن الأول) ، فمن الضروري أيضاً أن تكون $F_{int} = 0$. وهذا يعني أن قانون نيوتن الثالث يُشكل قاعدة ارتكاز للقانون الأول ولتعريف إطار إسناد قصوري ، بنفس الكيفية التي يُشكل بها قاعدة ارتكاز للقانون الثاني . ولقد تمت دراسة هذه الصلة ، بصورة نوعية أوفى ، في بند ٤،٨ .

وتبين هذه الاعتبارات أن قانوني نيوتن الأول والثاني ، كما صيغاً أصلاً ، ليسا كافيتين تماماً . فالقول بأن جسمًا يتحرك بسرجهة ثابتة أو بتسارع معين هو أمر مُبهم ؛ حيث أن أجزاء الجسم المختلفة قد تتحرك بصورة مختلفة (أنظر المِلْوى في شكل ٨،٨) . ولإزالة الإبهام ، يتوجب على هذين القانونين أن يُشيرَا إلى سرجهة وتسارع مركز الكتلة .

نستطيع الآن ، بالتبصر الأعمق الذي يزودنا به قانون نيوتن الثالث ، أن نُعيد صياغة قانوني نيوتن الأول والثاني بشكل أفضل وأعم :

صياغة جديدة لقانوني نيوتن الأول
والثاني

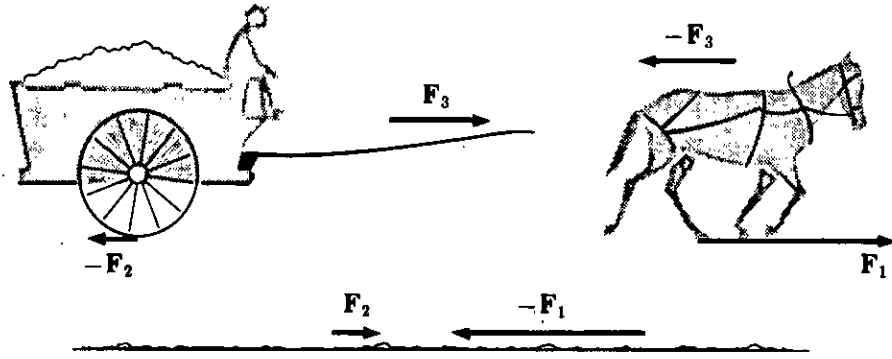
١ - يتحرك مركز الكتلة لنظام معزول (أي حرّ من تأثير القوى الخارجية) بسرجهة ثابتة .

٢ - ترتبط محصلة القوة الخارجية المؤثرة على نظام كتلته M مع تسارع مركز الكتلة بالعلاقة $F_{ext} = Ma_c$.

نستطيع أن ندرك الآن حاجتنا إلى قانون نيوتن الثالث لإثبات صحة القانونين الأول والثاني .

وأخيراً ، دعنا نتفحص نقيضة الحصان والعربة على نطاق كوني . فإذا كانت كل قوة في الطبيعة يُنطلُ مفعولها بقوة مضادة ، فلماذا يوجد أي تسارع في العالم ؟ والجواب هو : أنه لا يوجد حقاً تسارع لنظام معزول ! على الأقل لا يوجد تسارع لمركز الكتلة ، نقطة التمثيل التامة للنظام . لكن أجزاء مفردة من نظام معزول تعاني تسارعاً ، نظراً لكون تلك الأجزاء ليست معزولة بذاتها . فلكي يتسارع أي شيء في هذا الكون ، يجب أن يرتبط بشيء آخر خارج ذاته (ليس من الضروري ، طبعاً ، أن يتصل بروابط مادية ؛ وإنما يرتبط من خلال قوى) . ونحن نرى التسارع والتعقيدات المثيرة للحركة فقط عندما نركّز الاهتمام على جزء ما من نظام كلي . فلو أمكننا النظر إلى الكون من على[†] ، ولاحظنا فقط الحركة المتوسطة (أي حركة مركز الكتلة) للأنظمة المعزولة ، لَمَا شاهدنا سوى الحركة بسرجهة ثابتة .

† في النص الأصلي : Olympian view ، نسبة إلى جبل الأولب ، أو ألبوس ، في مقاطعة تساليا Thessaly الواقعة في الجزء الشرقي من اليونان . وقد شاعت الأساطير الإغريقية أن تجعل من هذا الجبل منوى للآلهة ومسرحاً لمغامراتها العجيبة .



شكل ٨,١٢ : العربة والحصان والأرض مبنية كأنظمة منفصلة . وليس من الضروري أن تساوي القوة الكلية المؤثرة على أي من هذه الأنظمة صفرًا .

٨,٦ حركة الأنظمة في بُعد واحد The Motion of Systems in one Dimension

مبدأ عملان

ثمة مبدأان هامان عامان وكبيراً الفائدة في حلّ المعضلات العملية هما :
 (١) ينطبق قانون نيوتن الثاني على حدة على كل جزء من أي نظام بغض النظر عن كيفية اتصال ذلك الجزء (أو عن كونه متصلاً) بأجزاء أخرى . (٢) ينطبق قانون نيوتن الثالث على أي جزئين من نظام ما ، بغض النظر عن كيفية ارتباطهما (أو عن كونهما مرتبطتين) عضوياً . وسنعالج في هذا البند بالتفصيل مثالين على الحركة في بُعد واحد من أجل التّدليل على هذين المبدأين .

■ مثال ١ : حصان كتلته ٥٠٠ كـ يجر عربة كتلتها ٣٠٠ كـ بتسارع ٢ م/ث^٢ . إذا كانت قوة الاحتكاك التي تؤثر بها الأرض على العربة ٤٠٠ ن ، فما القوة المؤثرة على الحصان ؟

كما هو مبين في شكل ٨,١٢ ، فإننا ندعو مقدار قوة الاحتكاك الأمامية المؤثرة على الحصان F_1 ، ومقدار قوة الاحتكاك الخلفية المؤثرة على العربة F_2 ، ومقداري القوتين المتساويتين والمتضادتين المؤثرتين بين الحصان والعربة F_3 . وبإدراكنا أن قوتين لهما نفس المقدار F_3 ، نكون قد استفدنا من قانون نيوتن الثالث والمبدأ الثاني الوارد في الفقرة السابقة . كذلك نستخدم المبدأ الأول بتطبيق قانون نيوتن الثاني بثلاث طرق مختلفة : على الحصان بمفرده ، والعربة بمفردها ، وعلى العربة والحصان معاً . فتكون معادلات المركبات الأفقية :

$$F_1 - F_3 = m_H a; \quad \text{الحصان} \quad (٨,٣٩)$$

$$F_3 - F_2 = m_C a; \quad \text{العربة} \quad (٨,٤٠)$$

$$F_1 - F_2 = (m_H + m_C) a. \quad \text{الحصان والعربة} \quad (٨,٤١)$$

(حيث يرمز الحرفان السفليان H و C إلى الحصان horse والعربة cart على التوالي .) وبما أن الحصان والعربة لهما نفس التسارع ، فقد ظهر نفس الرمز a في المعادلات الثلاث جميعها . ومن

المهم جداً أن نلاحظ أنه إذا اختبر الحصان كالنظام موضع الاهتمام ، فإن القوة (F_2) تصبح عديمة الأهمية بالرغم من الاتصال العضوي الموجود بين الحصان والعربة . وعلى المرء ، عند التفكير في الحصان بمفرده ، أن يمتح عقلياً العربة والأرض من الصورة . فهناك الحصان بمفرده في المكان ، يتسارع تحت الفعل المشترك للقوتين F_1 و ($-F_3$) المؤثرتين عليه فعلياً . وبالمثل ، فإنه يمكن اعتبار العربة ، بغض النظر عن ارتباطها العضوي بالحصان ، كنظام منفصل يتسارع تحت فعل القوتين F_3 و $-F_2$.

ليست كل المعادلات الثلاث $8,39 - 8,41$ ضرورية ، رغم أنه من المفيد فحصها جميعاً لتقرير أي زوج منها يُعطينا الحل بالطريقة الأسهل . فبما أن F_2 معلومة (400 N) ، فإنه لمن الأبسط أن نستخدم المعادلتين الثانية والثالثة ، $8,40$ و $8,41$ ، اللتين تحويان F_2 . وعددياً تأخذ هاتان المعادلتان الصورة التالية :

$$F_3 - 400 \text{ N} = 300 \text{ kg} \times 2 \text{ m/sec}^2 = 600 \text{ N}; \quad \text{العربة :}$$

$$F_1 - 400 \text{ N} = 800 \text{ kg} \times 2 \text{ m/sec}^2 = 1,600 \text{ N}. \quad \text{الحصان والعربة :}$$

ويزودنا حلها بالإجابات المطلوبة ؛ أي القوى المؤثرة على الحصان :

$$F_1 = 2000 \text{ N} ;$$

$$F_3 = 1000 \text{ N} .$$

ويمكن استخدام المعادلة $8,39$ للتحقق من صحة هاتين الإجابتين ؛ حيث نجد أن كلا من طرفيها الأيسر والأيمن يساوي 1000 N ، مؤكدين بذلك توافق الإجابات السابقة .

ونترك كتمرين حساب تسارع الأرض باتجاه اليسار ، الناتج عن زوج القوى غير المتوازن $-F_1$ و F_2 المؤثر على سطح الأرض (شكل $8,12$) . ■

■ مثال ٢ : سِلْسِلَة ثلاثية الحَلَقَات three-link chain يَجْرِي رَفْعُهَا بِخُطَافِ hook (شكل $8,13$) . كتلة كل حلقة في السلسلة 10 كغ ، وقوة الخُطَافِ إلى أعلى 414 N . فما تسارع السلسلة ؟ وما القوى المؤثرة على الحلقة الوسطى ؟

يُبين شكل $8,13$ اتجاهات القوى المختلفة المؤثرة والرموز الدالة على مقاديرها : F_H لقوة الخُطَافِ إلى أعلى ، F_G لقوة الجاذبية إلى أسفل على كل حلقة ، و F_1 و F_2 لأزواج القوى المتساوية والمتضادة المؤثرة بين الحَلَقَات . وتتطلب مُعْضِلَة من هذا النوع أسلوباً منهجياً methodical approach ؛ كما تحتاج إلى قرار - قرار عما نختار كالأُنْظُمَة موضع الاهتمام . ولا يضيرنا أن نختار أنْظُمَة أو أجزاء أكثر مما نحتاج فعلاً . فيمكننا ، مثلاً ، تطبيق قانون نيوتن

الثاني - سواء بسواء - على السلسلة ككل وأيضاً على كل حلقة على حدة . فالمعادلات التي تربط بين المركبات الرأسية للقوة والتسارع هي :

$$F_H - 3F_G = 3ma; \quad \text{السلسلة بأكملها :} \quad (٨,٤٢)$$

$$F_H - F_G - F_1 = ma; \quad \text{الحلقة العليا :} \quad (٨,٤٣)$$

$$F_1 - F_G - F_2 = ma; \quad \text{الحلقة الوسطى :} \quad (٨,٤٤)$$

$$F_2 - F_G = ma. \quad \text{الحلقة السفلى :} \quad (٨,٤٥)$$

يخضع كل نظام أو نظام فرعي لقانون نيوتن الثاني

ونمثل a هنا تسارع السلسلة ، و m كتلة كل حلقة . ونظهر الكتلة الكلية $3m$ في المعادلة الأولى ؛ بينما نظهر الكتلة m للحلقة المفردة في كل من المعادلات الأخرى . كذلك نظهر القوى المؤثرة إلى أعلى بإشارات موجبة ، والقوى المؤثرة إلى أسفل بإشارات سالبة .

والكميات المعروفة في هذا المثال هي F_H (٤١٤ ن) ، و m (١٠ كـغ) ، و $F_G = mg = 10 \times 9.8 = 98 \text{ N}$. أما المجاهيل فهي F_1 ، و F_2 ، و a . فيمكن إيجاد التسارع من أولى المعادلات الأربع . وتلك المعادلة - تطبيق قانون نيوتن الثاني على السلسلة ككل - هي ، بصورتها العددية ،

$$414 \text{ N} - 3 \times 98 \text{ N} = 30 \text{ kg} \times a.$$

وحلها يعطينا التسارع ،

$$a = 4.0 \text{ م/ث}^2.$$

يمكن الآن استخدام معادلتَي الحلقة العليا والحلقة السفلى لإيجاد القوتَين F_1 و F_2 . فيكونان ، في الصورة العددية ،

$$414 - 98 - F_1 = 10 \text{ kg} \times 4 \text{ m/sec}^2 = 40 \text{ N}; \quad \text{الحلقة العليا :}$$

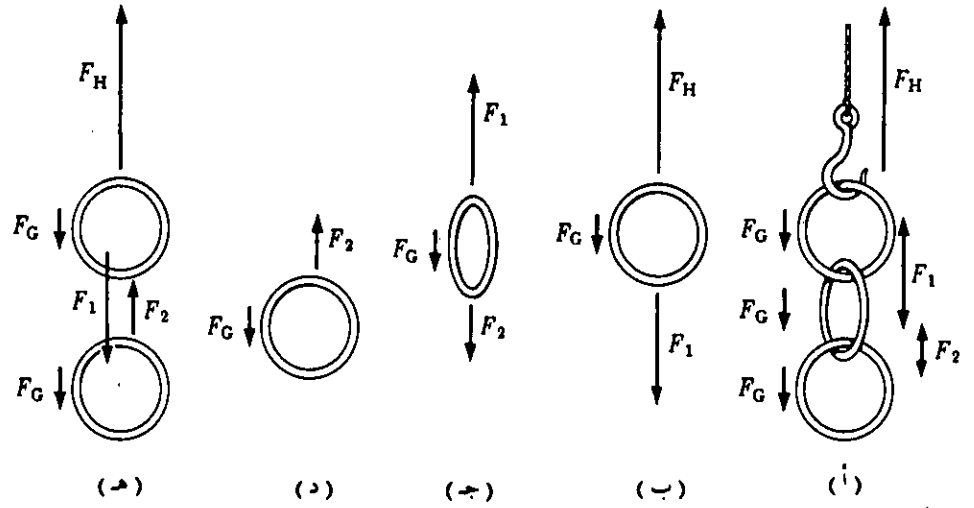
$$F_2 - 98 = 10 \text{ kg} \times 4 \text{ m/sec}^2 = 40 \text{ N}. \quad \text{الحلقة السفلى :}$$

ويعطينا حلُّها قوتَي التفاعل :

$$F_1 = 276 \text{ ن} ;$$

$$F_2 = 138 \text{ ن} .$$

هذا ، ويمكن استخدام معادلة الحلقة الوسطى للتأكد من هاتين الإجابتين . فطرفها الأيسر هو



شكل ٨،١٣ : تسارع سلسلة ثلاثية الحلقات . (أ) تعتبر كل السلسلة كأنظمة موضع الاهتمام . (ب) الحلقة العليا بمفردها هي المتبصرة . (ج) الحلقة الوسطى بمفردها هي المتبصرة . (د) الحلقة السفلى بمفردها هي المتبصرة . (هـ) معالجة الحلقتين العليا والسفلى معاً كنظام مفرد ينطبق قانون نيوتن الثاني على كل جزء أو مجموعة أجزاء .

$$F_1 - F_G - F_2 = 276 - 98 - 138 = 40 \text{ N.}$$

كما أنَّ طرفها الأيمن هو

$$ma = 10 \text{ kg} \times 4 \text{ m/sec}^2 = 40 \text{ N.}$$

ولبيان قوة المبدأ القائل بإمكانية تطبيق قانون نيوتن الثاني على أي جزء من النظام ، كذلك للحصول على تأكيد آخر على صحة إجاباتنا ، يمكننا اختيار الحلقة العليا مع الحلقة السفلى كأنظمة موضع الاهتمام . فلقد استبعدنا في شكل ٨،١٣ (هـ) الخطأف والحلقة الوسطى . بهذا تكون كتلة النظام المتبصري ٢٠ كـرغ ، ويكون لجزيئيه ، بناءً على حلنا ، نفس التسارع إلى أعلى ، ٤ م/ث^٢ ما القوى المؤثرة على هذا النظام ؟ القوى المؤثرة إلى أعلى هي F_H على الحلقة العليا و F_2 على الحلقة السفلى . والقوى المؤثرة إلى أسفل هي قوة الجاذبية $2F_G$ والقوة F_1 على الحلقة العليا . فمحصلة القوة إلى أعلى على هذا النظام الشائهي الحلقة هي

$$\begin{aligned} F_{up} &= F_H + F_2 - 2F_G - F_1 \\ &= 414 + 138 - 196 - 276 \\ &= 80 \text{ N.} \end{aligned}$$

ونساوي هذه القوة ، كما يجب أن تكون ، $2ma$:

$$2 \times 10 \text{ kg} \times 4 \text{ m/sec}^2 = 80 \text{ N.}$$

٨,٧ حفظ الزخم Conservation of Momentum

وَقَفًا للمعادلة ٨,٣٨ ($F_{ext} = dP/dt$) ، بتغير الزخم الكلي لنظام استجابة للقوى الخارجية المؤثرة على النظام . ويتج عن ذلك في الحال أنه في حالة انعدام القوى الخارجية (لنظام معزول على وجه الخصوص) ، يكون الزخم الكلي ثابتاً :

$$P = \text{constant} \quad (F_{ext} = 0). \quad (٨,٤٦)$$

حفظ الزخم

ويبدو هذا وكأنه أكثر قليلاً من مجرد إعادة صياغة قانون نيوتن الأول لنظام ما . لكن أهميته كقانون للحفظ تغدو أوضح إذا اعتبرنا أجزاء النظام المفردة وكتبنا

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + \dots = \text{constant}. \quad (٨,٤٧)$$

الثبت أثناء التغير : مجموع فئة من المتغيرات يكون محفوظاً

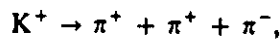
فيمكن لأي زخم أن يتغير بمفرده مع الزمن ؛ إلا أن مجموعها يكون محفوظاً إذا كان النظام حراً من تأثير قوة خارجية . لاحظ أننا نتعامل هنا مع مجموع اتجاهي . فالزخم الكلي يكون ثابتاً مقداراً واتجهاً .

إنه قانون اتجاهي

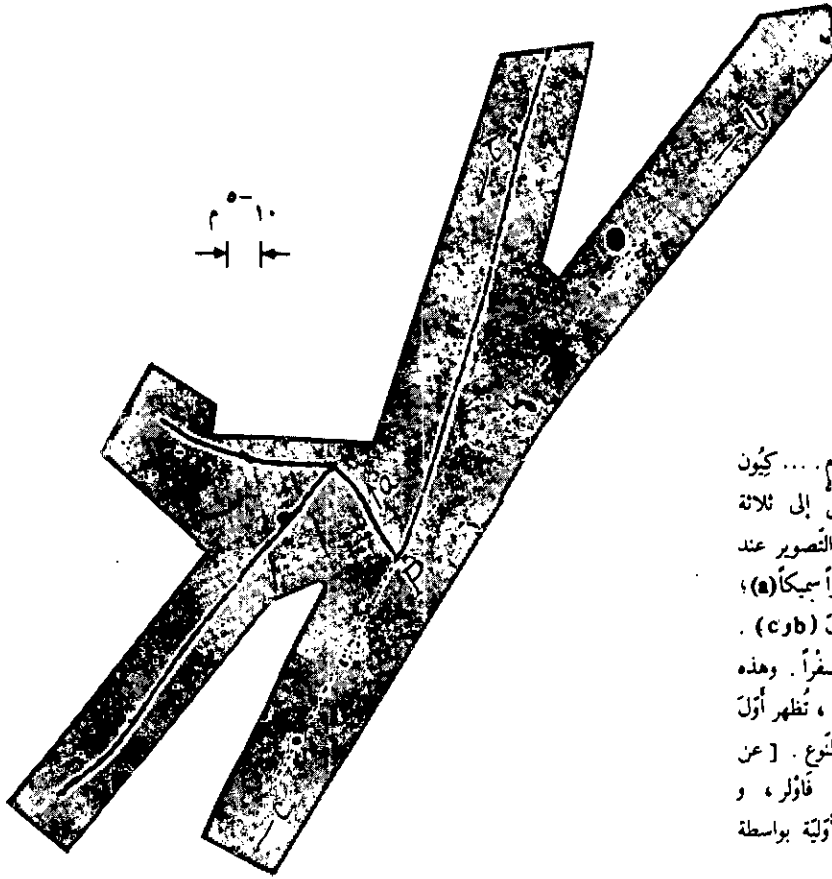
□ اضمحلال الجسيمات اللامستقرة Decay of Unstable Particles

إن واحداً من المجالات التي يتمتع فيها حفظ الزخم بأهمية خاصة هو العالم دون المجهرى للجسيمات الأولية ، حيث تتم كل حوادث التفاعل تقريباً بين عدد صغير من الجسيمات المعزولة فعلياً عن بقية الكون . وقد بُحِثَ مثلاً الاضمحلال لجسيم لامستقر إلى جسيمين آخرين ، والذي يُدعى بالاضمحلال الثنائي الجسم ، في بند ٤,٥ (انظر شكل ٤,١) . فمشاهدة جسيمين ينبثقان عن عملية اضمحلال « باتجاهين متضادين » بزخم كلي مقداره صفر (في إطار إسناد كان فيه الجسيمُ التتوُّجُ parent particle في حالة سكون) ليس شكلاً دليلاً واضحاً على عدم وجود جسيم ثالث أفلت من الكشف عنه . أمّا إذا شاهدنا واحداً فقط من الجسيمين الناتجين ، فإنه يمكن استخدام قانون حفظ الزخم للمساعدة في تحديد خواص الجسيم غير المرئي . كذلك في حالة الاضمحلالات الثلاثية الأجسام لجسيم ساكن ، فإن مجموع الزخام النهائية للجسيمات الناتجة يجب أن يكون صفراً ؛ إلا أنه يوجد العديد اللامتناهي من الطرق التي تنبعث بها الجسيمات الثلاثة دون أن تتنافى مع قانون حفظ الطاقة أو قانون حفظ الزخم . فالاضمحلال الثلاثي الأجسام للكيون الموجب ، والذي يحدث على الصورة

حفظ الزخم يُحدد جسيمات غير مرئية



يظهر في شكل ٨,١٤ .



شكل ٨,١٤ : اضمحلال ثلاثي الأجسام... كيون
(المسار الموسوم بالحرف x) يضمحل إلى ثلاثة
بيونات ، بعد أن يسكن في مستحلب التصوير عند
النقطة P . فيترك بيون ذو زخم صغير مساراً سميكاً (a) ؛
بينما يترك بيونان زخمهما أكبر مسارين أخف (b و c) .
ويكون مجموع زخام البيونات الثلاثة صفراً . وهذه
الصورة المركبة ، ذات الأهمية التاريخية ، تظهر أول
حادثة اضمحلال شوهدت من هذا النوع . [عن
كتاب : س . ف . باول ، ب . هـ . فاؤلر ، و
د . هـ . بيركتر : دراسة الجسيمات الأولية بواسطة
الطريقة الفوتوغرافية ، ص ٢٨٩ :

C.F. Powell, P.H. Fowler, and D.H. Perkins,

The Study of Elementary Particles by the Photographic Method (New York: Pergamon Press, 1959).]

□ أمثلة جاهزة : انفجار القذائف Macroscopic Examples: The Bursting of Shells

من حوادث العالم الجاهري التي لا تختلف عن اضمحلال جسيم أولي انفجار قذيفة
مدفعية artillery shell إلى شظيتين أو أكثر .

■ مثال ١ : هب أن قذيفة أطلقت رأسياً إلى أعلى تنفجر إلى شظيتين بمجرد بلوغها أقصى
ارتفاعها . فتندفع إحدى الشظيتين ، بكتلة ٥ كـرغ ، إلى أسفل بسرعة ٦٠٠ م/ث ؛ بينما
تكون كتلة الشظية الأخرى ١٠ كـرغ . فبأي اتجاه وبأي سرعة تندفع هذه الشظية ؟

يجب أن نحدد أولاً فيما إذا أمكن اعتبار القذيفة كنظام معزول إلى درجة كافية من
التقريب ... عند الانفجار ، تغطي الشظية التي تندفع إلى أسفل دفعا قدره
٣٠٠٠ كـرغ م/ث $I = mv = 3,000 \text{ kg m/sec}$. فإذا استغرق الانفجار ١ مرث (مجرد
تخمين) ، فإن متوسط قوة الانفجار الذي تأثرت به هذه الشظية هو (من المعادلة ٨,١٢)

$$F = \frac{I}{\Delta t} = 3 \times 10^6 \text{ N.}$$

بالمقارنة ، فإن قوة الجاذبية الخارجية التي تؤثر على هذه الشظية هي

$$F_{\text{grav}} = mg \cong 50 \text{ N.}$$

ويمكننا أن نفرض أن قوة مقاومة الهواء هي أيضاً صغيرة بالمقارنة مع قوة الانفجار ، وعلى ذلك يمكن إهمال القوى الخارجية عند أخذ المقياس الزمني للانفجار بعين الاعتبار . * وهذا يعني أنه إذا كان الزخم يساوي صفراً قبل الانفجار مباشرة ، وجب أيضاً أن يساوي صفراً بعد الانفجار مباشرة . ونرى هنا بوضوح قيمة مبدأ حفظ الزخم . فبغض النظر عن الطبيعة المعقدة لقوى الانفجار الداخلية ، وبغض النظر عن جهلنا بماهيتها الحقيقية (وهذا صحيح للجسيمات الأولية كصخته لقذائف المدفعية) ، فإن حفظ الزخم يزودنا بحلقة وصل بسيطة بين « قبل » و « بعد » . فبعد الانفجار ، يكون

$$p_1 + p_2 = 0 ;$$

وهكذا يجب أن تندفع الشظية التي تساوي كتلتها ١٠ كغ رأسياً إلى أعلى بزخم ابتدائي مقداره

$$p_2 = p_1 = 3,000 \text{ kg m/sec.}$$

وبما أن $m_2 = 10$ كغ ، فإن السرعة الابتدائية للشظية الثانية تكون

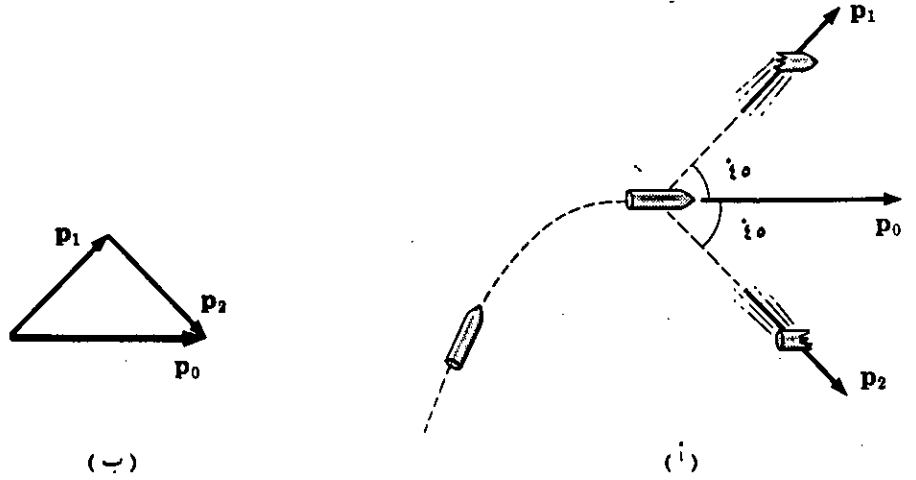
$$v_2 = 300 \text{ م/ث.}$$

■ مثال ٢ : الانفجار (أو الاضمحلال) إلى شظيتين إنما يؤدي إلى زخمين متساويين ومتضادين فقط إذا كانت القذيفة (أو الجسم) في حالة سكون في البداية . افرض ، بدلاً من ذلك ، أن قذيفة كتلتها $m_0 = 10$ كغ تتحرك أفقياً بسرعة $v_0 = 5 \times 10^2$ م/ث عند لحظة انفجارها إلى شظيتين متساويتي الكتلة ($m_1 = m_2 = 5 \text{ kg}$) . فإذا تحركت إحدى الشظيتين باتجاه يصنع زاوية ٤٥° إلى أعلى مع مسار القذيفة الابتدائي ، بينما تحركت الأخرى باتجاه ٤٥° إلى أسفل مع مسار القذيفة الابتدائي (شكل ٨،١٥) ، فما سرعة كل منهما ؟

إن تطبيق قانون حفظ الزخم في هذه الحالة يتطلب الجمع الاتجاهي للزخمي الشظيتين p_1 و p_2 ، كما هو مبين في شكل ٨،١٥ (ب) . فنعتبر عن حفظ الزخم بالعلاقة

$$p_1 + p_2 = p_0. \quad (٨،٤٨)$$

* إنه لصحيح ، بالطبع ، أن القوة الداخلية الكلية تساوي صفراً ، وهي بالتالي ليست أكبر من القوة الخارجية . إلا أن ذلك الجزء من القوة الداخلية الذي يؤثر على كل شظية يفوق كثيراً القوة الخارجية المؤثرة على تلك الشظية . ويمكن التعبير عن نفس الفكرة بالطريقة الآتية : يكون تسارع مركز الكتلة خلال الزمن الذي يستغرقه الانفجار أقل بكثير من تسارع الشظيتين .



شكل ٨,١٥ : حفظ الزخم في انفجار قذيفة . (أ) يكون زخم القذيفة قبيل انفجارها p_0 ، أما p_1 و p_2 فهما زخما الشظيتين . (ب) ينفي حفظ الزخم أن $p_1 + p_2 = p_0$.

وبما أن الرسم السهائي الذي يمثل المجموع الاتجاهي هو مثلث قائم في هذا المثال ، ضلعه المتساويان p_1 و p_2 ووتره p_0 ، فإن هذه المقادير تمثل لنظرية فيثاغورس :

$$p_0^2 = p_1^2 + p_2^2. \quad (٨,٤٩)$$

وعديًا ، يكون $p_0 = ١٠ \text{ كـرغ} \times ٥ \times ١٠^٢ \text{ م} / \text{ث} = ١٠ \times ٥ \times ١٠^٣ \text{ كـرغ} \cdot \text{م} / \text{ث}$. وبما أن $p_1 = p_2$ ، فإن المعادلة ٨,٤٩ تستلزم أن $p_1^2 = \frac{1}{2} p_0^2$ ، أو

$$p_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} p_0 = 0.707 p_0. \quad (٨,٥٠)$$

وهكذا ، فإن $p_1 = p_2 = 3.535 \times 10^3 \text{ kg m/sec}$. وبالقسمة على كتلة كل منهما ، أي ٥ كـرغ ، نجد السرعتين المطلوبتين :

$$v_1 = v_2 = 707 \text{ m/sec.}$$

... ومن المثقف instructive حل نفس المعضلة باستخدام المركبات . فبأخذ محور x أفقيًا ومحور y رأسيًا ، نجد أن

$$p_{1x} + p_{2x} = p_{0x} = p_0, \quad (٨,٥١)$$

$$p_{1y} + p_{2y} = p_{0y} = 0. \quad (٨,٥٢)$$

ومن هندسة متجهات الزخم (شكل ٨,١٦) ، نستطيع الكتابة

$$p_{1x} = p_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.707p_1$$

$$p_{1y} = p_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.707p_1$$

$$p_{2x} = p_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.707p_2$$

$$p_{2y} = p_2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -0.707p_2$$

عندئذ تصبح المعادلة ٨,٥٢

$$0.707(p_1 - p_2) = 0,$$

التي يتبع منها أن $p_1 = p_2$. كذلك تصبح المعادلة ٨,٥١

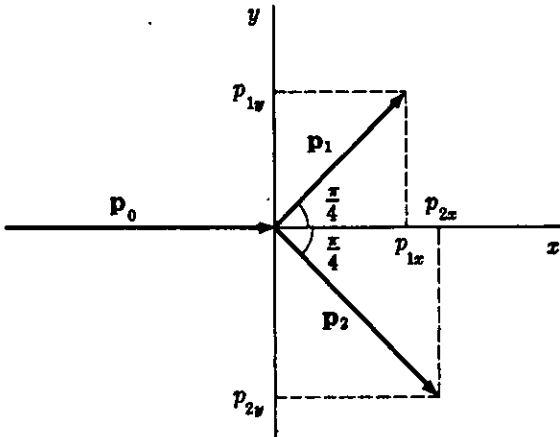
$$0.707(p_1 + p_2) = p_0.$$

وبما أن $p_1 = p_2$ ، فإنه يمكن أيضاً كتابة ذلك $1.414p_1 = p_0$ ، أو

$$p_1 = 0.707p_0;$$

وهي نفس نتيجة المعادلة ٨,٥٠؛ إلا أنها وُجدت بطريقة مختلفة.

ليس هناك، بالطبع، أي شيء هام أساساً في هذا المثال. فهو مجرد تدليل على تطبيق نموذجي لقانون حفظ الزخم في عالمنا الجاهري، أمكن من خلاله تأكيد الحقيقتين الهامتين: (١) إن تفاصيل القوى الداخلية لا أهمية لها لحفظ الزخم؛ و (٢) إن الطبيعة الاتجاهية للزخم تلعب دوراً هاماً في قانون حفظ الزخم.



شكل ٨,١٦: رسم توضيحي لحل معادلة حفظ الزخم، $p_0 = p_1 + p_2$ ، باستخدام المركبات. وقد رُسم السهمان الممثلان للزخمين p_1 و p_2 بطولين مختلفين، لأن مقداريهما غير معلومين في المثال المعطى. ويبين الحل أنها متساويان فعلاً.

٨,٨ حفظ الزخم في أنظمة غير معزولة

Momentum Conservation in Systems that are not Isolated

يستطيع حفظ الزخم أن يلعب دوراً هاماً حتى بالنسبة لأنظمة غير معزولة عن التأثيرات الخارجية. ويمكن أن يحدث هذا بطريقتين: (١) قد يكون مجموع القوى الخارجية صفراً.

فمع أن النظام ليس معزولاً ، فإنه لا يتأثر بمحصلة قوة خارجية ، ويكون زخمه بالتالي ثابتاً .
 وتمثل عربة شحن متحركة فوق مسار أفقي مستقيم نظاماً كهذا ، بشرط إهمال الاحتكاك ؛
 حيث تتزن قوة الجاذبية إلى أسفل مع دفع المسار إلى أعلى ، وبذلك تكون القوة الخارجية الكلية
 صفراً . (٢) قد تتلاشى مركبة محصلة القوة الخارجية باتجاه ما . فبما أن الزخم كمية متجهة ،
 فإن قانون حفظ الزخم لنظام معزول هو في الواقع ثلاثة قوانين في واحد ؛ وكل مركبة تكون ثابتة
 على حدة . أما لنظام غير معزول ، فإن المركبات يمكن معالجتها على انفراد . وقد يحدث عندئذ
 أن تكون مركبة واحدة أو اثنتان للزخم محفوظة بسبب تلاشي مركبة واحدة أو اثنتين للقوة
 الخارجية . فخذيفة قرب سطح الأرض ، مثلاً ، تتأثر فقط بقوة رأسية إلى أسفل (إذا كانت
 مقاومة الهواء مهملة) . لذا ، تظل المركبة الأفقية لزخمها ثابتة . كذلك ، لا تتأثر الأرض في
 مدارها حول الشمس بقوة في الاتجاه العمودي على مستوى مدارها . لذا ، فإن مركبة زخمها في
 ذلك الاتجاه والمساوية صفراً - بادي ذي بدء - تظل صفراً ؛ فلا ينحرف مدار الأرض عن
 مستواه الأصلي .

قد تكون إحدى مركبات الزخم
 محفوظة وأخرى قد لا تكون كذلك

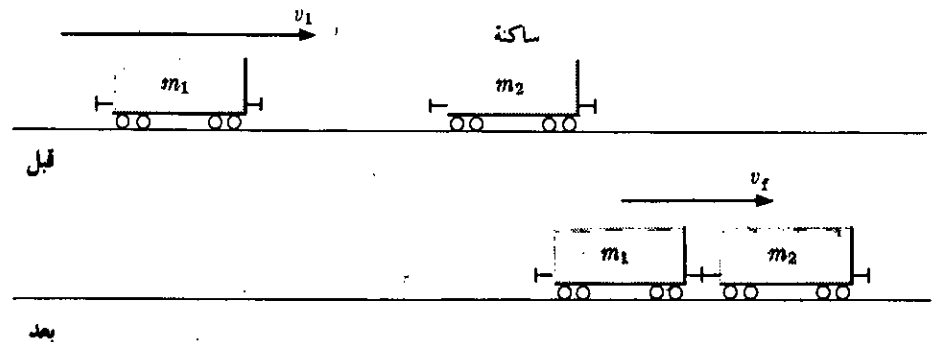
■ مثال : عربة شحن كتلتها $m_1 = 1,5 \times 10^4$ كغ تندرج على مسار أفقي بسرعة
 $v_1 = 2,0$ م/ث . تصطدم فترتبط couples بعربة أخرى كتلتها $m_2 = 1,0 \times 10^4$ كغ ،
 وتتحرك العربتان معاً بعد ذلك بسرعة أقل v_f (شكل ٨,١٧) . فما قيمة v_f ؟

من الأفضل أولاً حل هذا النوع من المسائل جبرياً ، لأن للحل الجبري تطبيقاً أوسع بكثير
 من الحل العددي الخاص قبل التصادم لم يكن للعربة الثانية أي زخم ؛ فالزخم الكلي
 للعربتين ليس سوى زخم العربة الأولى . وتكون مركبة الأفقية ، التي تساوي مقدارها الكلي ،

$$p_1 = m_1 v_1 . \quad (٨,٥٣)$$

أما بعد التصادم ، فتتحرك الكتلة الكلية $m_1 + m_2$ ، بسرعة v_f . ويكون زخم النظام

$$p_2 = (m_1 + m_2) v_f . \quad (٨,٥٤)$$



شكل ٨,١٧ : حفظ الزخم في
 تصادم وتربط عربتي شحن .

وبما أنَّ القوى المؤثرة خلال التصادم والترابط كلها قوى داخلية بالنسبة لنظام العريتين المختار ، فإنَّ الزخم يكون محفوظاً : $p_1 = p_2$. وبمساواة طرفي المعادلتين ٨,٥٣ و ٨,٥٤ نحصل على

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_f .$$

فالحل الجبري للسرعة النهائية v_f هو

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 . \quad (٨,٥٥)$$

نصادم بدون ارتداد في بُعد واحد

أما بالنسبة للقيم العددية الخاصة بهذا المثال ، فتكون

$$v_f = \frac{1.5 \times 10^4}{(1.5 + 1.0) \times 10^4} \times 2.0 \text{ m/sec} = 1.2 \text{ m/sec} .$$

وتسري هذه النتيجة حتى عند اعتبار تأثير قوى الاحتكاك على العريتين ، بشرط أن تُغَيَّر قوى الاحتكاك هذه زخم النظام الكلي بقدر يسير خلال فترة التصادم والترابط القصيرة .

ويمكن تطبيق الحل الرياضي لهذا المثال دون تغيير على أمثلة أخرى افترض أنَّ رصاصة كتلتها m_1 وسرعتها v_1 تصطدم بقطعة خشب ساكنة ، كتلتها m_2 ، وتنفجر فيها . فما السرعة التي ستكتسبها قطعة الخشب والرصاصة معاً ؟ تزودنا المعادلة ٨,٥٥ بالجواب . ولهذا المثال استخدام عملي ؛ إذ أنه يمدنا بطريقة مناسبة لتعيين سرعة رصاصة . فيمكن تحديد السرعة الكبرى v_1 بقياس السرعة الصغرى v_f .

٨,٩ حفظ الزخم ومركز الكتلة Momentum Conservation and Center of Mass

يتبع من المعادلة ٨,٢٢ أنه إذا كان P ثابتاً ($P = \text{constant}$) ، فإنَّ

$$v_c = \text{constant} ; \quad (٨,٥٦)$$

إذا كانت $F_{ext} = 0$ ، فإنَّ $v_c = \text{constant}$

أي أنَّ مركز الكتلة يتحرك بسرعة ثابتة . كذلك ، إذا كانت أية مركبة للزخم الكلي محفوظة ، فإنَّ المركبة المناظرة لسرعة مركز الكتلة تكون ثابتة . فعند حل معضلات معينة بحفظ الزخم ، كثيراً ما يكون مناسباً استخدام مفهوم مركز الكتلة .

■ مثال ١ : ما سرعة مركز الكتلة لعريتي الشحن المعترتين في البند السابق (أنظر شكل ٨,١٧) ؟

التصادم دون ارتداد ، باستخدام مفهوم مركز الكتلة

اختر نقطة أصل اعتباطية ؛ وليكن r_1 و r_2 متجهي الموضع لمركزي كتلة العربتين . بذلك يكون متجه الموضع لمركز كتلة النظام ككل

$$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \quad (٨,٥٧)$$

كما تكون سرجهته

$$v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

لكن قبل تصادم العربتين تكون $v_2 = 0$ ؛ وعلى ذلك فإن

$$v_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \quad (٨,٥٨)$$

ولا تتغير v_c بعد التصادم ، كما يجب أن تساوي v_r ؛ حيث أن جميع أجزاء النظام تتحرك عندئذ بنفس السرجية . وهذه النتيجة ،

$$v_r = v_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \quad (٨,٥٩)$$

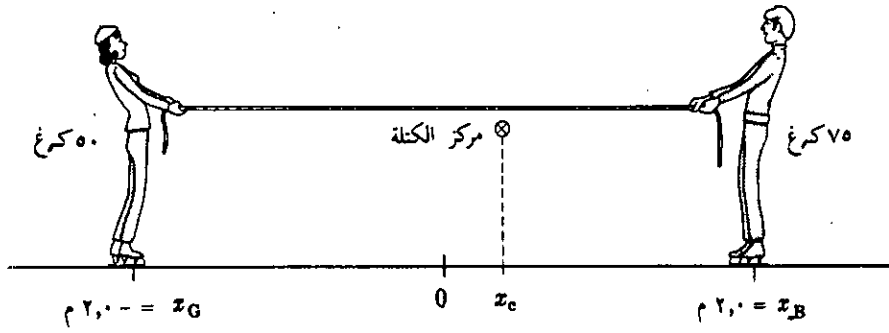
تكافي النتيجة السابقة ؛ أي المعادلة ٨,٥٥ .

■ مثال ٢ : فتي كتلته ٧٥ كـرغ وفناة كتلتها ٥٠ كـرغ يجتديان زلاجات ويقابلان بعضهما البعض على سطح أفقي من الجليد أملس تماماً . تبلغ المسافة بينهما ٤,٠ م ، ويتصلان بواسطة حبل (شكل ٨,١٨) . فإذا ابتداء من السكون ، وجذب كل منهما الآخر بالشد على الحبل يداً فوق يد ، فأين يلتقيان ؟

قد يبدو لأول وهلة أن نقطة تلاقيهما سوف تعتمد على أيهما يشد الحبل بصورة أقوى . لكن هذا ليس صحيحاً ؛ إذ يشكل الفتي والفناة والحبل معاً نظاماً يجب أن تكون مركبة زخميه الأفقية محفوظة . فجميع القوى المؤثرة على الحبل هي قوى داخلية ، ولا تستطيع التأثير على زخمها الكلي أو على حركة مركز كتلتها . ويزودنا مفهوم مركز الكتلة بأيسر الحلول لهذه المسألة . فبما أن مركز الكتلة ساكن بادي ذي بدء ، فإنه يظل كذلك ؛ أي أنه نقطة ثابتة بين الفتي والفناة .^{*} ومهما اقتريا من بعضهما البعض ، تظل تلك النقطة بينهما كما تظل ساكنة . وعلى ذلك ، فإنها يجب أن تكون نقطة تلاقيهما . والسؤال الذي ينبغي الإجابة عنه عندئذ هو : أين يقع مركز الكتلة ؟ ... باختيار الخطّ الواصل بين الفتي والفناة كمحور x ، نجد أن

$$x_c = \frac{m_B x_B + m_G x_G}{m_B + m_G}$$

° بتعبير أدق ، لا يتحرك مركز الكتلة أفقياً . لكن لماذا يستطيع الحركة رأسياً إلى أعلى وإلى أسفل ؟



شكل ٨,١٨ : حِفْظُ المَرَكَبَةِ الأفقية للزخم في نظام حرّ من تأثير قوّة أفقيّة خارجيّة . فمركز الكتلة ، الساكن في البداية ، لا يتحرّك سواءً إلى اليسار أو إلى اليمين .

حيث يرمز الحرفان السفلّيان B و G إلى الفتي والفتاة على الترتيب . وإذا اخترنا نقطة الأصل في منتصف المسافة بينهما ، بحيث أن $x_B = 2.0$ م ، و $x_G = -2.0$ م ، فإن إحداثيّ مركز الكتلة يكون

$$x_c = \left(\frac{75 \text{ kg}}{125 \text{ kg}} \right) \times 2.0 \text{ m} - \left(\frac{50 \text{ kg}}{125 \text{ kg}} \right) \times 2.0 \text{ m} \\ = 0.4 \text{ m};$$

أي أن مركز الكتلة يقع على بُعد ٢,٤ م عن الفتاة و ١,٦ م عن الفتي . وهذه هي نقطة تلاقيهما .

★ مثال على تصادم ثنائي الجسم Example of a Two-Body Collision

نيوترون متحرّك بسرعة 4×10^6 م/ث يصدم بروتوناً ساكناً . ونتيجة لهذا التصادم ، ينحرف النيوترون بزاوية ٣٠° بينما يرتد البروتون بزاوية ٦٠° مع اتجاه حركة النيوترون الابتدائية ؛ أي بزاوية ٩٠° مع الاتجاه النهائي للنيوترون (شكل ٨,١٩) . فما السرعة النهائية للجسيمين ؟

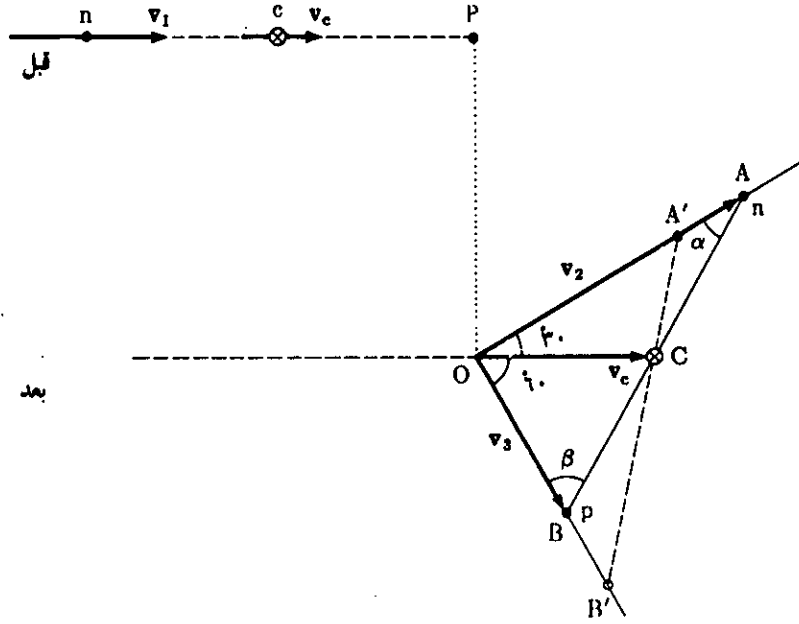
تصادم ثنائي البعد

يمكننا ، لأغراض هذا المثال ، أن نفترض تساوي كتلتي النيوترون والبروتون (حيث أنها في الحقيقة يختلفان في الكتلة بأقلّ من جزء واحد في الألف) . وهناك طرق مختلفة لحلّ هذه المسألة (جميعها ، بالطبع ، يستخدم حفظ الزخم) . فلقد اقترح معالجة المثال الوازد في بند ٨,٨ بطريقة جبريّة ، باستخدام المركبات دعنا هنا نستخدم مفهوم مركز الكتلة مقروناً بنهج هندسيّ .

تكون الحالة الفيزيائية ، قبل التصادم ، هي نفسها لعربتي الشّحن في مثال ١ ؛ حيث تكون سرّجهة مركز الكتلة ، من المعادلة ٨,٥٨ ،

$$v_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{1}{2} v_1. \quad (٨,٦٠)$$

وكما يظهر في الرسم المشار إليه بكلمة « قبل » في شكل ٨، ١٩ ، فإن مركز الكتلة يقع في منتصف المسافة بين النيوترون والبروتون ، وسرجهته ، تساوي نصف سرجهة النيوترون ($v_c = 2 \times 10^6 \text{ م/ث}$) . ويستمر مركز الكتلة ، بعد التصادم ، في الحركة بنفس الاتجاه وببنفس السرعة . فَيَبِينُ الرسمُ المشار إليه بكلمة « بعد » في شكل ٨، ١٩ الوضع عندما يصل مركز الكتلة النقطة C إلى يمين نقطة التصادم O . عند هذه اللحظة (كما هو الحال لكل الأزمنة) يتعين على النيوترون والبروتون أن بقعا على خطٍ مستقيم يمر بمركز الكتلة ، كالخط AB أو A'B' .

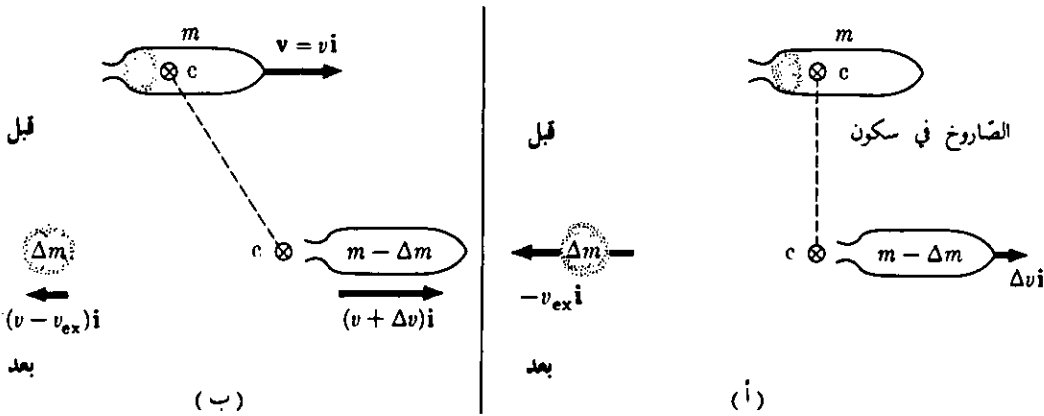


شكل ٨، ١٩ : تصادم نيوترون - بروتون ... يستمر مركز الكتلة إلى الأمام بسرجهة ثابتة ، ويظل عند منتصف خط مرسوم بين الجسيمين . فعندما يكون مركز الكتلة عند C ، يكون الجسيان عند A و B ، حيث أن الطولين CA و CB متساويان . وتمثل النقطتان A' و B' تخميناً خاطئاً عن موقع الجسيمين في هذه اللحظة . (لاحظ أن متجهات السرجة مرسومة بمقاييس رسم مختلف في الرسمين « قبل » و « بعد » .)

أضف إلى ذلك أنه ، نظراً لتساوي كتلتي الجسيمين ، يجب أن يتساوى بُعدهما عن C ليكن AB هو الخط الصحيح حيث $CA = CB$. (الخط A'B' ليس صحيحاً ؛ ذلك أن $CA' < CB'$) . نستخدم الآن إحدى نظريات الهندسة المستوية . فالمثلث OAB قائم ، و C منتصف الوتر . وتنص النظرية أن الخط OC يقسم المثلث القائم إلى مثلثين متساويي الساقين ، يكون فيها $OC = CA = CB$. لذلك يجب أن تساوي الزاوية α ٣٠° والزاوية β ٦٠° . وهذا يختتم النقاش الهندسي . عندئذ تمثل القطع الخطية المتجهة OA ، و OB ، و OC ، على الترتيب ، السرجهتين النهائييتين للجسيمين وسرجهة مركز الكتلة . فتكون السرعتان النهائييتان المطلوبتان :

$$\begin{aligned} v_2 &= 2v_c \cos (30 \text{ deg}) \\ &= 2 \times 2 \times 10^6 \times 0.866 = 3.46 \times 10^6 \text{ m/sec,} \\ v_3 &= 2v_c \cos (60 \text{ deg}) \\ &= 2 \times 2 \times 10^6 \times 0.500 = 2 \times 10^6 \text{ m/sec.} \end{aligned}$$

يَعْتَمِدُ الدَّسْرُ العَادِي عَلَى سَطْحِ الْأَرْضِ إِلَى دَرَجَةٍ كَبِيرَةٍ عَلَى الْاِحْتِكَاكِ - عَلَى الْحَقِيقَةِ بِأَنَّ الْمُرَكَّبَةَ ، أَكَانَتْ قَارِباً أَمْ قَاطِرَةً أَمْ سَيَّارَةً أَمْ طَائِرَةً ، لَا تَكُونُ نِظَاماً مَعْزُولاً . لَكِنْ الْحَالُ مُخْتَلَفٌ جِداً بِالنَّسْبَةِ لَصَارُوخٍ فِي الْفَضَاءِ . فَلَيْسَ لِلصَّارُوخِ أَرْضٌ أَوْ هَوَاءٌ أَوْ مَاءٌ لِيُدْفَعَ ضِدَّهَا ؛ بَلْ عَلَيْهِ أَنْ يَتَسَارَعَ بِطَرِيقَةٍ أُخْرَى . وَبِالطَّبَعِ ، فَالصَّارُوخُ هُوَ الْآخِرُ لَيْسَ نِظَاماً مَعْزُولاً تَمَاماً ؛ إِذْ يَتَأَثَّرُ بِقُوَّةِ جاذِبِيَّةِ الشَّمْسِ وَالْأَرْضِ وَالْقَمَرِ أَوْ أَجْسَامٍ فَلَكَئِيَّةٍ أُخْرَى ، وَيَتَسَارِعُ نَتِيجَةً لَذَلِكَ . وَيَتَحَدَّدُ مَسَارُ الصَّارُوخِ أَثْنَاءَ فِتْرَةِ طَيْرَانِهِ الْحَرَّ coasting period ، وَهِيَ الْجِزَاءُ الرَّئِيسِيَّ مِنْ رَحْلَةِ أَيِّ صَارُوخٍ ، بِوِاسْطَةِ قُوَى الْجاذِبِيَّةِ الْخَارِجِيَّةِ هَذِهِ . عَلَى كُلِّ حَالٍ ، فَلَيْسَ هُنَاكَ مَا يَسْتَطِيعُ فِعْلُهُ رَبَّانُ الصَّارُوخِ - أَوِ الضَّابِطُ الْأَرْضِيَّ - إِزَاءَ هَذِهِ الْقُوَى . وَإِذَا رَغِبَ رَائِدُ الْفَضَاءِ فِي أَنْ يَتَسَارَعَ وَفَقَّ هَوَاءٌ ، وَجِبَ عَلَيْهِ أَنْ يَحْدَ بَدِيلاً لِلْاِحْتِكَاكِ الَّذِي يُكُونُ الْأَسَاسَ لِلتَّحَكُّمِ فِي الدَّسْرِ عَلَى الْأَرْضِ . وَهُوَ يَتَوَصَّلُ إِلَى هَذَا التَّحَكُّمِ مِنْ خِلَالِ عَادَمِ الصَّارُوخِ rocket exhaust وقانونِ حِفْظِ الزَّخْمِ .



شَكْل ٨,٢٠ : دَسْرُ الصَّوَارِيخِ . (أ) بِالنَّسْبَةِ لِإِطَارِ إِسْنَادِ يَكُونُ فِيهِ الصَّارُوخُ سَاكِنًا فِي الْبَدَايَةِ ، يَنْفَصِلُ الْجِزَاءُ الْمُنْبَثُّ مِنْ غَازِ الْعَادَمِ وَمَا تَبَقِيَ مِنَ الصَّارُوخِ بِزَخْمَتَيْنِ مُتَوَافَتَيْنِ وَمُتَضَادَّتَيْنِ ، لَكِنْ مَرَكُزُ كَلَّتِهَا يَبْقَى سَاكِنًا . (ب) بِالنَّسْبَةِ لِإِطَارِ إِسْنَادِ يَتَحَرَّكُ فِيهِ الصَّارُوخُ بِسُرْعَةٍ v فِي الْبَدَايَةِ ، يَنْفَصِلُ الْجِزَاءُ الْمُنْبَثُّ مِنْ غَازِ الْعَادَمِ وَمَا تَبَقِيَ مِنَ الصَّارُوخِ بِطَرِيقَةٍ تَجْعَلُ الزَّخْمَ الْكُلِّيَّ ، الْمَسَاوِي لِلْقِيَمَةِ mv ، يَظَلُّ ثَابِتًا . وَيَسْتَمَرُّ مَرَكُزُ كَلَّةِ النِّظَامِ الْكُلِّيِّ فِي الْحَرَكَةِ بِسَرَجَةٍ ثَابِتَةٍ .

تَصَوَّرِ الْآنَ صَارُوخًا فِي الْفَضَاءِ الْخَارِجِيِّ empty space مِمَّا بِشَكْلِ بِحَقِّ نِظَامٍ مَعْزُولًا . فَيَتَحَرَّكُ مَرَكُزُ كَلَّتِهِ بِسَرَجَةٍ ثَابِتَةٍ . وَلَنْ تَتِمَكَّنَ أَيْةُ حَرَكَاتٍ أَوْ تَغْيِيرَاتٍ أَوْ قُوَى دَاخِلِيَّةٍ مِمَّا كَانَتْ أَنْ تَمْنَعَ مَرَكُزَ الْكَلَّةِ مِنَ الْاِسْتِمْرَارِ دُونَ كَلَّلٍ إِلَى الْأَمَامِ بِسَرَجَةٍ ثَابِتَةٍ . إِلَّا أَنَّهُ يُمْكِنُ أَنْ نَجْعَلَ جِزَاءً مِنَ النِّظَامِ يَتَسَارِعُ ، فَيَغْيِرُ بِذَلِكَ زَخْمَهُ ، بِشَرَطِ أَنْ يَتَأَثَّرَ جِزَاءٌ آخَرُ مِنَ النِّظَامِ بِتَغْيِيرٍ فِي الزَّخْمِ مَسَاوٍ وَمُضَادٍّ . حِينَئِذٍ عَلَى رَائِدِ الْفَضَاءِ أَنْ يَكُونَ مُسْتَعِدًّا حَرْفِيًّا لِلتَّضَحِّيَةِ بِبَعْضِ سَفِينَتِهِ مِنْ أَجْلِ مَصْلَحَةِ الْجِزَاءِ الْبَاقِي . فَبِالتَّخَلُّصِ مِنْ بَعْضِ الْكَلَّةِ فَقَطْ يَسْتَطِيعُ إِحْرَازَ تَسَارُعٍ لِمَا يَبْقَى .

مَبْدَأُ دَسْرِ الصَّوَارِيخِ : يَجِبُ التَّخَلُّصُ مِنْ بَعْضِ الْكَلَّةِ

ونستطيع القول ، بأبسط العبارات ، إنَّ السفينة الصَّاروخية تنقسم إلى جزَّين : جزء الحمولة payload ، والوقود مع الجزء المستنفد . ولا يشكل أيُّ من الجزَّين نظاماً معزولاً ، لأنَّ كلَّ واحد منها يتفاعل مع الجزء الآخر . لذا ، إذا اعتبرنا كلَّ جزء على حدة ، أمكن لقوَّة خارجيَّة أن تؤثر على ذلك الجزء فتسارعه . وما يحدث هو أنَّ جزء الحمولة يدفع الجزء المستنفد إلى الخلف ؛ بينما يدفع الجزء المستنفد الحمولة إلى الأمام بقوة مساوية ومضادة . ويستمرُّ مركز كتلة النظام الكليِّ بانتظام ، غير متأثر بكلِّ ما يحدث . إلا أنَّ جزء الحمولة ليحقق التسارع المنشود ؛ حيث تولِّف الحمولة ، عادةً ، جزءاً يسيراً من الكتلة الكلية الأصلية للصَّاروخ . فحتى تتمكن من اكتساب سرَّجة عالية باتجاه معيَّن ، يجب إحداث تسارع لكتلة كبيرة من الوقود المستنفد بالاتجاه المضادَّ .

ولإعطاء هذه الأفكار صيغةً رياضيَّةً ، نعتبر صاروخاً يتحرَّك على امتداد محور x في إطار إسنادٍ « ساكن » . لتكن كتلة الصَّاروخ ، عند لحظةٍ معيَّنة ، m وسرَّجته v_i . فبعد فترة زمنيَّة قصيرة لاحقة ، تصبح كتلته أقلَّ ، $m - \Delta m$ ، وسرَّعته أكبر ، $v + \Delta v$ (شكل ٨,٢٠) ؛ حيث يتمُّ التخلُّص ، خلال هذه الفترة ، من كتلة Δm من الوقود المستنفد بسرَّجة $-v_{ex}$. نسبةً إلى جزء الحمولة في الصَّاروخ ، أو بسرَّجة $(v - v_{ex})i$ في إطار الإسناد الساكن . فعند بداية الفترة المذكورة يكون زخمُ النظام

$$p_1 = m v_i. \quad (٨,٦١)$$

أمَّا عند نهاية هذه الفترة ، فيصبح

$$p_2 = (m - \Delta m)(v + \Delta v)i + \Delta m(v - v_{ex})i. \quad (٨,٦٢)$$

وبما أنَّ النظام لم يتأثر بأيَّة قوى خارجيَّة ، فإنَّ زخمه يكون محفوظاً :

$$p_1 = p_2.$$

الزخم محفوظ للصَّاروخ والجزء المستنفد منه معاً

وعلى ذلك يمكن معادلة مركَّبات x على يمين المعادلتين ٨,٦١ و ٨,٦٢ . ونحصل بعد إجراء العمليات الجبريَّة اللازمة على صيغةٍ تُحدِّد الكتلة Δm ، التي يجب التخلُّص منها للحصول على التزايد (increment) Δv في السَّعة :

$$\Delta m = \left(\frac{\Delta v}{v_{ex} + \Delta v} \right) m. \quad (٨,٦٣)$$

زيادة السَّعة Δv تقضي فقداناً في الكتلة يساوي Δm

إفرض ، مثلاً ، أنَّ الزيادة في السَّعة هي $\Delta v = ١٠٠$ م/ث (حوالي ٢٢٥ ميلاً/س) وأنَّ سرعة العادم هي ٩٠٠ م/ث . فبتعويض هذه القيم في المعادلة ٨,٦٣ نحصل على

$$\Delta m = 0.10m;$$

أي أنه يجب التخلص من عُشر الكتلة كعادم .

والواقع أن مفعول المعادلة ٨,٦٣ يسري فقط عندما يكون $v_{ex} \ll \Delta v$. (لماذا ؟) وتصبح صحيحة تماماً ، وأعم فائدة ، إذا سمحنا للتزايدين Δm و Δv بالاقتراب من الصفر . وللحصول على هذه النهاية ، أعد أولاً كتابة المعادلة ٨,٦٣ على الصورة :

$$\frac{\Delta v}{\Delta m} = \frac{v_{ex} + \Delta v}{m} . \quad (٨,٦٤)$$

إجعل الآن Δm (ومعها Δv) تقتربان من الصفر . عندئذ تتلاشي Δv في الطرف الأيمن ، ويبقى v_{ex}/m . أما في الطرف الأيسر ، فتوجد ملاحظة دقيقة متعلقة بالإشارة : إذ أننا عرفنا Δv أنها $v_2 - v_1$ (السرعة اللاحقة مطروحاً منها السرعة السابقة) ؛ لكننا عرفنا Δm بأنها $m_1 - m_2$ (الكتلة السابقة مطروحاً منها الكتلة اللاحقة) . ففي النهاية ، إذن ، تكون النسبة مساوية لمشتقة إشارتها سالبة :

$$\lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta m} = \lim_{m_2 \rightarrow m_1} \frac{v_2 - v_1}{m_1 - m_2} = - \frac{dv}{dm} .$$

وبذلك نؤول المعادلة ٨,٦٤ إلى المعادلة التفاضلية

$$\frac{dv}{dm} = - \frac{v_{ex}}{m} . \quad (٨,٦٥)$$

المعادلة الأساسية للصاروخ في صورتها التفاضلية

وهذه معادلة أساسية في هندسة الصواريخ . وهي صحيحة تماماً فقط لصاروخ بعيد جداً عن جميع مراكز الجاذبية . بيد أنها تسري بصورة تقريبية كلما كان التغير في الزخم الناتج عن عادم الصاروخ أكبر بكثير من التغير في الزخم الناتج عن الجاذبية في نفس الفترة الزمنية .

والمعادلة ٨,٦٥ هي صورة بسيطة لمعادلة تفاضلية يمكن إجراء تكاملها في الحال إذا كتبنا

$$v = \int \left(\frac{dv}{dm} \right) dm = -v_{ex} \int \frac{dm}{m} . \quad (٨,٦٦)$$

وعلى وجه الخصوص ، اعتبر فترة محددة تتغير فيها كتلة جزء الحمولة من الصاروخ من m_1 إلى m_2 (نقصان) ، كما تتغير سرعته من v_1 إلى v_2 (زيادة) . حينئذ يصبح التكامل في المعادلة ٨,٦٦ تكاملاً محدوداً ، ونحصل على

$$\begin{aligned} v_2 - v_1 &= -v_{ex} \int_{m_1}^{m_2} \frac{dm}{m} \\ &= -v_{ex} (\ln m_2 - \ln m_1) . \end{aligned}$$

وبكتابتها على الصورة الأكثر اقضاباً most compactly ، فإنها تصبح

$$v_2 - v_1 = v_{ex} \ln \left(\frac{m_1}{m_2} \right) . \quad (٨,٦٧)$$

معادلة الصاروخ في صورتها الجبرية بعد التكامل

لفرض ، مثلاً ، أننا نرغب في تغيير السَّرْجَهِه بمقدار يساوي v_{ex} . فإنَّ ذلك يتطلَّب $\ln(m_1/m_2) = 1$ ، أو $m_1/m_2 = 2.72$ ؛ وهذا يقتضي تحوُّل ثلثي الكتلة تقريباً إلى عادم . أمَّا الحصول على تغيُّر في السَّرْجَهِه يعادل $3v_{ex}$ ، فإنَّه يتطلَّب $\ln(m_1/m_2) = 3$ ، أو $m_1/m_2 \cong 20$ ؛ وهذا يقتضي تحوُّل ٩٥ بالمئة من الكتلة إلى عادم . فمن الواضح ، إذن ، أنه يجب أن تكون سرعة العادم أكبر ما يمكن لتقليل الكتلة التي نتخلَّص منها كعادم إلى الحدِّ الأدنى .

ومن المفيد أن ننظر إلى المعادلة ٨,٦٥ بطريقة أخرى . فيمكن إعادة كتابتها بدلالة مشتقات زمنية :

$$-v_{ex} \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} . \quad (٨,٦٨)$$

دفع الصاروخ

[استخدمنا هنا المتساوية (equality): $dv/dm = (dv/dt)/(dm/dt)$]. والطرف الأيمن لهذه المعادلة عبارة عن كتلة مضروبة في تسارع . وعلى ذلك ، يمكن تفسير الطرف الأيسر على أنه القوة المؤثرة على الصاروخ والناجمة عن العادم . وتسمَّى هذه القوة بالدَّفع thrust :

$$\text{thrust} = v_{ex} \left| \frac{dm}{dt} \right| . \quad (٨,٦٩)$$

ولا عجب ؛ فإنَّ الدَّفع يتناسب مع كلٍّ من مُعدَّل تدفُّق الكتلة mass flow rate وسرعة العادم . ونعطينا المعادلة ٨,٦٩ الدَّفع بالضبط ، حتى في حالة وجود قوى أخرى ، كالجاذبية واحتكاك الهواء .

★ ٨,١١ الأنظمة الثنائية الجُسيم ، الكتلة المختزلة

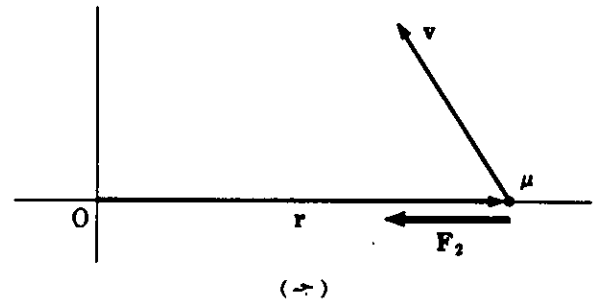
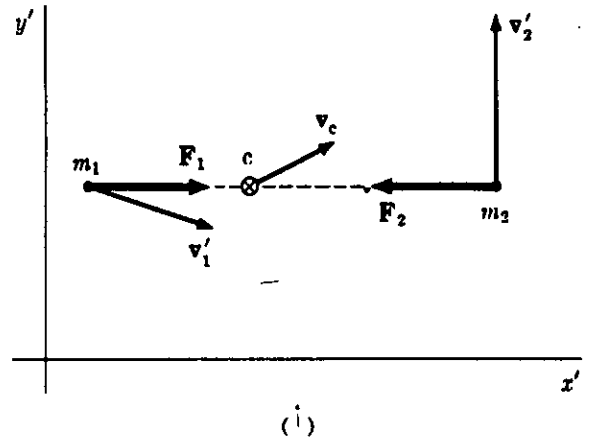
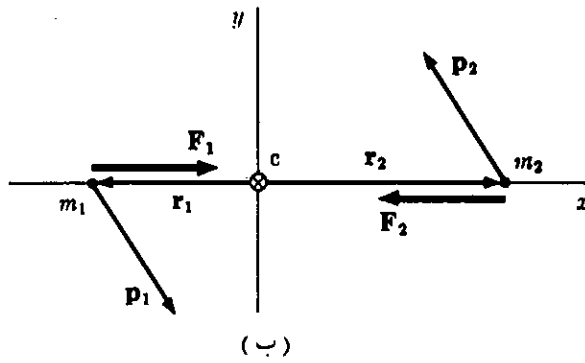
Systems of Two Particles; Reduced Mass

الأرض والقمر ، الشمس وعطارد ، بروتون وإلكترون ، جُسيم ألفا ونواة - كل هذه أنظمة ثنائية الجسم . وسنبيِّن في هذا البند كيفية تبسيط معضلة ثنائي الجسم في الميكانيكا الكلاسيكية إلى معضلة أحادي الجسم الفعَّال effective one-body problem إذا كان النظام معزولاً .

تبدو الحركة مُعقَّدة في إطار اسناد
اعتباطي

إعتبر جُسيمين كتلتاهما m_1 و m_2 ويتأثران بقوتين F_1 و F_2 . فإذا كان النظام معزولاً ، وجب على القوتين أن تبطلا مفعول بعضهما البعض ($F_1 = -F_2$) ، بحيث يتحرَّك مركز الكتلة بسرَّجَهِه ثابتة v_c [شكل ٨,٢١ (أ)] . واحدى طرق تبسيط وصف الحركة تكمن في اختيار إطار اسناد يكون فيه مركز الكتلة ساكناً عند المركز . عندئذٍ ، وكما هو مبين في شكل ٨,٢١ (ب) ، يقع r_1 و r_2 على امتداد نفس الخطَّ المستقيم ، كما يتساوى الزَّخْمان ويتضادَّان ($p_1 = -p_2$) . وينتج المزيد من التبسيط إذا استخدمنا متجه الموضع النسبي ،

$$r = r_2 - r_1 , \quad (٨,٧٠)$$



شكل ٨,٧١ : نظام معزول مكوّن من جُسَيْمَيْن . (أ) تتساوى القوّتان وتتضادّان $(F_1 = -F_2)$ في أيّ إطار إسناد ؛ كما أنّ سرّجهة مركز الكتلة v_c تكون ثابتة . (ب) يتساوى الزّخاآن ويتضادّان $(p_1 = -p_2)$ في إطار إسناد يكون فيه مركز الكتلة ساكناً . (جـ) يُمكن إيجاد حركة الجُسَيْمَيْن بِجُلّ معضلة أحاديّ الجسم الفعّال أولاً . وهي حركة جُسَيْم مفرد كتلته μ (المعادلة ٨,٧٤) نحت تأثير قوّة F_2 . (نُبَيّن هنا قوّة مركزية . وعلى كلّ حال ، فإنّ معالجة معضلة ثنائيّ الجسم في المتن تقتضي فقط أنّ تكون $F_1 + F_2 = 0$ ، لا أنّ تؤثر F_1 و F_2 على امتداد نفس الخطّ .)

والسرّجهة والتّسارع النسبيّين ،

$$v = v_2 - v_1 , \quad (٨,٧١)$$

$$a = a_2 - a_1 . \quad (٨,٧٢)$$

فيمكن استخدام قانون نيوتن الثاني ، على يمين المعادلة ٨,٧٢ ، وذلك بوضع F_2/m_2 بدلاً من a_2 ، و F_1/m_1 بدلاً من a_1 . وهكذا يُصبح التّسارع النسبيّ

$$a = \frac{F_2}{m_2} - \frac{F_1}{m_1} .$$

ومن قانون نيوتن الثالث لهذا النّظام المعزول ، نستنتج أنّ $F_1 = -F_2$ ؛ لذا نجد أنّ

$$a = F_2 \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right).$$

وبشيء من إعادة الترتيب ، نكتب هذه العلاقة :

$$F_2 = \mu a, \quad (٨,٧٣)$$

حيث نعرف μ ، المُسمَّاة بالكتلة المُختزلة ، بالعلاقة

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (٨,٧٤)$$

... من الواضح أنَّ المعادلة ٨,٧٣ لها شكل قانون نيوتن الثاني لجسيم كتلته μ . وهي تُعرف مُفضَّلةً أحادي الجسم الفعَّال . وهذه معضلة جسيم كتلته μ (ليس جُسيمًا حقيقيًا) ، وله مُتجه موضع r ، وسرعة v ، وتسارع a ، كما يتأثر بقوة F_2 [شكل ٨,٢١ (ج)] . وإذا أمكن إيجاد حركة الجسيم المفرد الفعَّال ، فإننا نستطيعُ استنتاج حركة الجُسيمين الحقيقيَّين منها . ففي إطار الإسناد لشكل ٨,٢١ (ب) ، الذي ثبت فيه مركز الكتلة عند نقطة الأصل ، تكون المعادلات الرابطة (حيث استخدمنا M بدلاً من $m_1 + m_2$) :

$$r_1 = - \left(\frac{m_2}{M} \right) r, \quad (٨,٧٥)$$

$$r_2 = \left(\frac{m_1}{M} \right) r, \quad (٨,٧٦)$$

$$v_1 = - \left(\frac{m_2}{M} \right) v, \quad (٨,٧٧)$$

$$v_2 = \left(\frac{m_1}{M} \right) v, \quad (٨,٧٨)$$

$$a_1 = - \left(\frac{m_2}{M} \right) a, \quad (٨,٧٩)$$

$$a_2 = \left(\frac{m_1}{M} \right) a. \quad (٨,٨٠)$$

ونترك برهانَ المعادلتين الأوليتين من هذه المعادلات كتمرين للقارئ ؛ بينما تتبعُ الأربعةُ الأخرى مباشرةً من الاثنتين الأوليتين . وإذا عوضنا عن خواص الجسيم المفرد الفعَّال (r ، و v ، و a) في الطرف الأيمن للمعادلات ٨,٧٥ - ٨,٨٠ ، تحدَّدت صفات الجسيمات الحقيقية في الطرف الأيسر (بالنسبة لإطار الإسناد المختار) .

ويمكن تعريفُ زخمٍ

زخم الجسيم المفرد [الفعال]

$$p = \mu v, \quad (٨,٨١)$$

للجسيم المفرد الفعال ؛ إلا أنه ليس زخماً نسبياً ، $p_2 - p_1$. عوض الآن في المعادلة ٨,٨١ عن μ و v من المعادلتين ٨,٧٤ و ٨,٧١ ، وذلك للحصول على

$$p = \frac{m_1 m_2}{M} (v_2 - v_1)$$

$$= \frac{m_1}{M} p_2 - \frac{m_2}{M} p_1;$$

وبالنسبة لإطار الإسناد المختار ، حيث $p_1 = -p_2$ ، نكتب هذه :

$$p = \frac{m_1 + m_2}{M} p_2 = p_2; \quad (٨,٨٢)$$

وهو يساوي زخم جسيم حقيقي

أي أن زخم الجسيم المفرد الفعال يساوي في الواقع زخم جسيم حقيقي . * ومقداراً :

$$p = p_1 = p_2. \quad (٨,٨٣)$$

■ مثال : كتلتان متساويتان ، كلٌّ منهما ١ كـرغ ، متصلتان بخيط طوله ٣ م ، وتدوران حول مركز كتلتيهما الساكن على سطح من الجليد عديم الاحتكاك تقريباً . تؤثر كل كتلة على الأخرى بقوة ١٤ ن . فما الكتلة المختزلة للنظام ؟ وما حركة الجسيم المفرد الفعال ؟

بالنسبة للكتلة المختزلة ، نعطينا المعادلة ٨,٧٤

$$\mu = \frac{1}{2}m = 0.5 \text{ kg.}$$

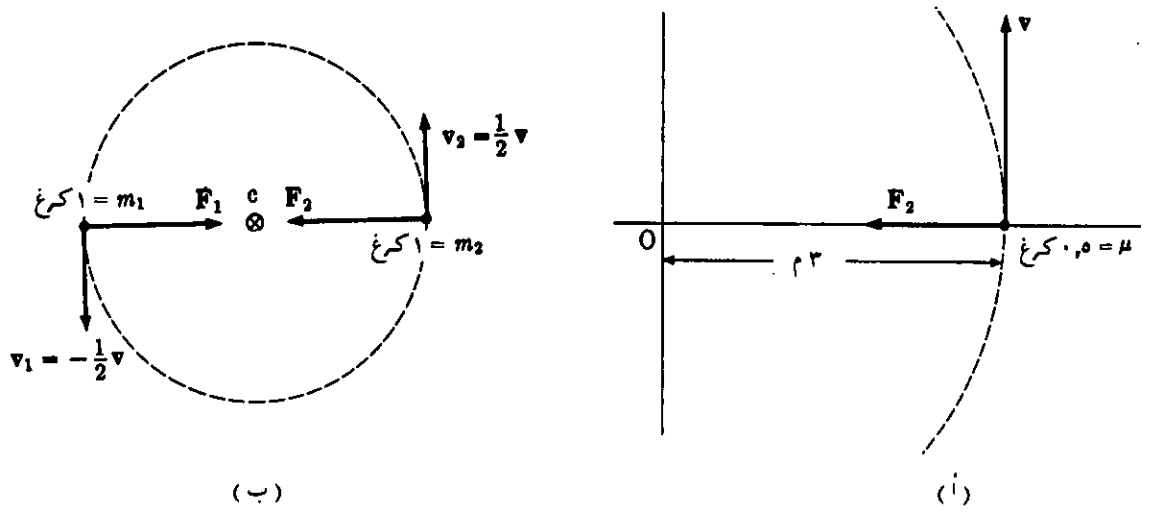
(لاحظ أنه لأي ائتلاف من كتلتين ، تكون μ دائماً أقل من أصغر الكتلتين m_1 و m_2 .) ومقدار متجه الموضع للجسيم المفرد الفعال ، الذي يساوي $r_2 - r_1$ ، هو ٣ م . وبما أن هذا الجسيم يقع على بُعد ثابت عن نقطة الأصل ويتأثر بقوة مركزية جاذبة centripetal force ثابتة المقدار ، فإنه يتحرك حركة دائرية منتظمة . ومن صيغة القوة المركزية الجاذبة ، $F = \mu v^2/r$ ، نجد أن

$$v = \sqrt{\frac{Fr}{\mu}} = \sqrt{\frac{14 \text{ N} \times 3 \text{ m}}{0.5 \text{ kg}}} \\ = 9.17 \text{ m/sec.}$$

كما أن تسارع الجسيم المفرد الفعال هو

$$a = \frac{F}{\mu} = 28 \text{ m/sec}^2.$$

• يمكن أيضاً تعريف زخم زاوي لجسيم مفرد فعال ، حيث يتبين أنه مساوٍ للزخم الزاوي الكلي للجسيمين الحقيقيين .



شكل ٨،٢٢ : مثال على كتلتين متساويتين تدوران حول نقطة ثابتة . (أ) يتحرك الجُسيم المفرد الفعّال في دائرة نصف قطرها ٣ م بسرعة v . (ب) يتحرك كل جُسيم فعليّ في دائرة نصف قطرها ١،٥ م بنصف سرعة ونصف تسارع الجُسيم المفرد الفعّال . ويكون للقوى والزخام نفس المقدار في الرّسّمين التّوضيحيّين .

عندئذٍ تبيّن المعادلتان ٨،٧٧ و ٨،٧٨ أنّ

$$v_1 = v_2 = \frac{1}{2}v = 4.58 \text{ m/sec.}$$

ومن المعادلتين ٨،٧٩ و ٨،٨٠ :

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}a = 14 \text{ m/sec}^2.$$

كذلك يتساوى زخم الجُسيم المفرد الفعّال وزخم كلّ من الجُسيمين الحقيقيّين ، كما يجب أن يكون عليه الأمر :

$$p = \mu v = 4.58 \text{ kg m/sec,}$$

$$p_2 = m_2 v_2 = 4.58 \text{ kg m/sec.}$$

وبقارن شكل ٨،٢٢ بين حركة الجُسيم المفرد الفعّال وحركة الجُسيمين الحقيقيّين . ■

٨،١٢ أهمية حفظ الزّخم The Significance of Momentum Conservation

إعتبر نظاماً من جُسيمين يتفاعلان معاً لكنّها معزولان عن سائر التّأثيرات الخارجيّة . فلقد كان قانونان أساسيان لتفاعل مثل هذين الجُسيمين موضع بحث هذا الباب : أحدهما قانون نيوتن الثالث للقوى المتساوية والمتضادة ، المعبرّ عنه رياضياً بالعلاقة

$$F_{12} = -F_{21};$$

والثاني هو قانون حفظ الزّخم ، المعبرّ عنه بالعلاقة

$$p_1 + p_2 = \text{constant.}$$

هل أحد هذين القانونين جوهري أكثر من الآخر؟ ... ليست هناك طريقة منطقية واضحة للإجابة عن هذا السؤال. إلا أن التجربة تميل إلى بيان أحد القانونين أكثر شمولاً وفائدة؛ أو، كما يبدو، أعمق من الآخر. وفي الأصل، اختار نيوتن قوانينه الثلاثة كأنسب مسلمات axioms لتطوير الميكانيكا. ومن القانون الثالث (مع القانون الثاني)، أمكن استنباط قانون حفظ الزخم. ولقد أتبعنا حتى الآن النهج الكلاسيكي في هذا الباب: يُشكل حفظ الزخم نتيجة لقوانين نيوتن. ومع ذلك، فمن المهم أن ندرك أن قانون حفظ الزخم يمكن أن يحل محل قانون نيوتن الثالث كواحد من القواعد الأساسية في الميكانيكا. فلو حدث هذا، لأصبح القانون الثالث ثانوياً، ولاستطعنا استنباطه رياضياً من حفظ الزخم وقانون نيوتن الثاني. وإن تطوّر الفيزياء منذ عهد نيوتن، وتطوّرات القرن العشرين على وجه الخصوص، تبين أن قانون حفظ الزخم هو في الواقع أحقّ في أن يعتبر قانوناً طبيعياً جوهرياً أكثر من قانون نيوتن الثالث.

يمكن اشتقاق حفظ الزخم من قوانين نيوتن

يبدو الآن أنه من المفضل اختياره كقانون أساسي

فمن الأسباب الداعية إلى إضفاء أهمية خاصة على قانون حفظ الزخم هو بساطته. فكل قانون للحفظ له إغراء خاص نظراً لاختياره كمية واحدة ثابتة من بين فوضى النشاط والتغير في الطبيعة. وبما أن الزخم ثابت لكل نظام معزول أو تفاعل، بات طبيعياً النظر إليه كمفهوم أساسي، وإلى حفظه كقانون هام إلى أبعد الحدود.

١ - حفظ الزخم في غاية البساطة

ومع دراسة رياضيي القرنين الثامن عشر والتاسع عشر للميكانيكا وإعادة صياغتها، طغت أهمية مفهومي الطاقة والزخم على مفهوم القوة. ولقد كان هذا عرضياً؛ إذ تبين ببساطة أن المعادلات الأقدر على حل معضلات الميكانيكا كانت معادلات تجلّي فيها الزخم والطاقة ولم تظهر فيها القوة. ولقد تمت إزاحة القوة عن مركزها الرئيسي في الميكانيكا بواسطة ثورني القرن العشرين: النسبية وميكانيكا الكم. ففي هاتين النظريتين يمكن إدخال القوة، مع أن ذلك ليس ضرورياً. أما الزخم، فإنه يظل (بإعادة تعريفه بشكل مناسب) مفهوماً مركزياً في هاتين النظريتين الحديثتين، كما يظل خاضعاً لقانون حفظ.

٢ - يظهر الزخم بشكل طبيعي في الصياغات المتقدمة للميكانيكا

ولقد جابهت القوة (ومعها قانون نيوتن الثالث) عقبتين رئيسيتين في الفيزياء الحديثة. أولها أنه في حوادث الكوارث من عمليات المَحَقِّ والخلق التي تتحكّم في سلوك الجُسِيمات الأولية، فإننا لا نعرف عادة ما هي القوى المؤثرة: إذ أننا نستطيع التحقق من حفظ الزخم قبل الحادثة وإلى ما بعد انتهائها؛ كما أننا نستطيع تعيين احتمال حدوث الحادثة؛ لكننا لا نستطيع أن نحدّد ما هي القوى المؤثرة خلال الحادثة (هذا إن كان للحادثة حقاً أي دوام زمني). والعقبة الثانية المتعلقة بالقوة هي من قبيل عدم الملاءمة أكثر من كونها مسألة أساسية. فهي ترتبط بفكرة الفعل (أو التأثير) عن بُعد action at a distance. فبما أن القوى لا تعمل لحظياً عبر المكان،

٣ - مفهوم القوة ليس مُفيداً في الفيزياء دون المجهرية

وينتقل أثرها بسرعة محدودة ، فإنه يجب فحص قانون نيوتن الثالث بحرص جديد . وعلينا أن نسأل : متى يكون زوج القوى متساوياً ومتضاداً ؟ إذ لا بد من مرور بعض الوقت قبل أن يفعل الجسيم ١ نظراً لوجود الجسيم ٢ على مسافة ما ؛ وخلال ذلك الزمن فقد تتغير المسافة بين الجسيمين والقوة بينهما . ويؤدي هذا إلى تعقيد كبير في قانون نيوتن الثالث ؛ حيث أن ضرورة بقاء زوج من القوى متساوياً ومتضاداً تماماً عند لحظة ما يُسمي أمراً غير صحيح . من ناحية أخرى ، يحتفظ قانون حفظ الزخم بصيغة بسيطة حتى عند الأخذ بعين الاعتبار الفرق الزمني لانتقال أثر القوى ؛ إذ يظل صحيحاً أن للنظام زخماً كلياً ثابتاً عند كل لحظة زمنية . والسمة الوحيدة الإضافية لوجهة النظر الجديدة هي اعتبار جزء واحد فقط من الزخم الكلي ناشئاً عن المادة في النظام . أما الباقي فيأتي من الفوتونات أو « رُسل » أخرى عديدة الكتلة مما ينقل القوة والطاقة والزخم من جزء مادي إلى آخر .

٤ - يرتبط الزخم بالتأثير في الطبيعة

ومن بعض الزوايا ، فإن أوجه الأسباب لاعتبار حفظ الزخم كقانون عميق من قوانين الطبيعة هو العلاقة بين قانون الحفظ هذا وانتظام المكان $uniformity of space$. ويمكن تسمية مبدأ انتظام المكان بمبدأ تماثل العدم (اللاوجود) $nothingness$. أما كيف يستطيع قانون يمثل شمول وأهمية قانون حفظ الزخم أن يتركز على مبدأ يمثل هذه « البراءة » ، فلقد سبق تفسيره في الباب الرابع . وكما أكدنا هناك ، فإن الجمال الحقيقي لكل قانون حفظ يكمن في مبدأ التأثر الذي بُني عليه . وإن التأثر في الزمان والمكان هو المركز لقوانين حفظ الطاقة والزخم والزواي ؛ كما أن البحث عن تماثلات أدق في الطبيعة تخدم كمركزات لقوانين حفظ أخرى من أكثر مجهودات علم الفيزياء إثارة .

خلاصة الأفكار والتعاريف

الكميتين v_e و u_e هما المتوسطان الموزونان للسرعة والتسارع ، على الترتيب .

□ يُعرف زخم جسيم (من وجهة نظر لانسبية nonrelativistically) بالعلاقة $p = mv$.

□ زخم نظام هو $P = Mv_e$.

□ يُعرف الدفع بالعلاقة $I = \int_{t_1}^{t_2} F dt$.

□ يُكتب قانون نيوتن الثالث على الصورة : $F_{AB} = -F_{BA}$ ؛ أي إذا تفاعل جسمان A و B ، فإن القوة التي يؤثر بها B على A هي سالب القوة التي يؤثر بها A على B .

□ قانون نيوتن الثاني بدلالة الزخم هو $F = dp/dt$. أما بدلالة الدفع فهو $\Delta p = I$.

□ القوة الداخلية هي قوة مصدرها وفعلها (أو علتها ومعلوها) كلاهما داخل النظام قيد الدراسة . وتتلاشى القوة الداخلية

□ متجه الموضع لمركز كتلة نظام هو متوسط الموضع الموزون لكل الكتلة في النظام : $r_c = (m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \dots) / M$. كذلك ، فإن

الكتلة لأي نظام .
 $P = \text{constant}$ ، كذلك ، إذا تلاشت أية مركبة للقوة الخارجية ، فإن المركبة المُناظرة للزخم الكلي تكون ثابتة .

□ القوة الخارجية هي قوة مصدرها خارج النظام .

□ قانون نيوتن الثاني للأنظمة هو $F_{ext} = Ma_c$ ، أو $F_{ext} = dP/dt$.

□ إذا كان الزخم محفوظاً ، كانت سرجهة مركز الكتلة ثابتة .

□ يستخدم دَسْرُ الصَّوارِخ حفظَ الزخم . ولتسارع الحمولة ، يجب التخلص من بعض المادة .

□ يتصرف مركز الكتلة لنظام في كل الأحوال كجسيم مفرد كتلته M ويتأثر بقوة F_{ext} . ونحكم معادلات مشابهة الأنظمة والجسيمات المفردة (أنظر صفحة ٣٥٧) .

□ في حالة انعدام الجاذبية أو احتكاك الهواء ، يتحدد التغير في سرعة الصاروخ بالعلاقة $v_2 - v_1 = v_{ex} \ln(m_1/m_2)$ ، كما يساوي دفع الصاروخ $v_{ex}|dm/dt|$.

□ يسري قانونا نيوتن الأول والثاني على جسم مادي فقط بسبب فعل قانون نيوتن الثالث واختزال القوى الداخلية داخل الجسم .

□ إن معضلة نظام معزول ثنائي الجسم يمكن استبدالها بمعضلة جسم مفرد فعال ، معادلة حركته هي $F_2 = \mu a$ ، حيث تُعرف الكتلة المختزلة بالعلاقة $\mu = m_1 m_2 / M$.

□ لتجنب الغموض ، يجب إعادة صياغة قانوني نيوتن الأول والثاني للأنظمة بدلالة مركز الكتلة (صفحة ٣٥٩) .

□ ينطبق قانون نيوتن الثاني على كل جزء من نظام ما على حدة ، أو على أي ائتلاف من الأجزاء .

□ تجعل تطورات الفيزياء منذ عهد نيوتن قانون حفظ الزخم يبدو جوهرياً أكثر من قانون نيوتن الثالث .

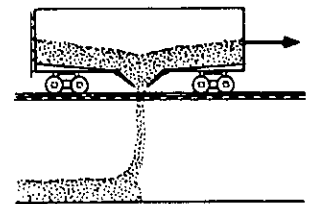
□ حفظ الزخم : إذا كانت $F_{ext} = 0$ ، عندئذ يكون

أسئلة

س ٨,١ (١) هل تستطيع الركض بسرعة كافية كي يكون لك نفس زخم سيارة تتحرك بسرعة ١ ميل/س ؟
 (٢) ما السرعة التي يجب أن يتحرك بها بروتون ليكون له نفس زخم ريشة طير تنهادر ؟

بند ٨,١

س ٨,٢ هل تزودنا المعادلة ٨,١ بتعريف عملياتيّ operational definition للزخم ؟ وهل تزودنا المعادلة ٨,٧ بتعريف عملياتيّ للدفع ؟



س ٨,٣ يكون مفهوم الزخم مفيداً على وجه الخصوص عندما تؤثر قوة كبيرة خلال زمن قصير . أورد عدة أمثلة على ظواهر قد ينطبق عليها مفهوم الدفع .

س ٨,٤ بينما تندرج عربة الشحن المبيّنة في شكل ٨,٢٣ فوق مسارٍ مستوٍ مرتفع ، تفرغ حمولتها من الرمل بمعدل ثابت $(dm/dt = \text{constant})$. فإذا كانت العربة تندرج بدون احتكاك ، فهل تتغير

شكل ٨,٢٣ : سؤال ٨,٤ .

سرعتها؟ وهل بتغير زخمُ العربة وجعلها؟ علّل إجابتك .

بند ٨,٢

س ٨,٥ أورد مثالاً على جسم صلب يقع مركز كتلته خارج جسمه .

س ٨,٦ أين يقع مركز كتلة كلٍّ من الأجسام الآتية : (أ) كرة متجانسة ؛ (ب) كرة كثافتها دالة في نصف قطرها ($\rho = \rho(r)$) ؛ (ج) أسطوانة متجانسة ؛ (د) كعكة حلقة الشكل doughnut ؛ و (هـ) كوب ماء ؟

س ٨,٧ ما الموقع التقريبي لمركز كتلة الغلاف الجوي للأرض ؟

س ٨,٨ يسبح أحمد وعلي في الفضاء قرب مخبرهما المداري orbiting . يرمي أحمد مِلْوَى إلى علي ، فينلقفه علي ويرمي به ثانية إلى أحمد . صف الحركة اللاحقة للرجلين ، وناقش حركة مركز كتلتها .

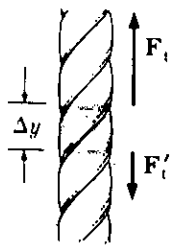
بند ٨,٤

س ٨,٩ اشرح لماذا لا تكون العبارة « متساو ومتضاد » منطقية عند الأخذ بحرفيتها بالنسبة للمتجهات . (مع ذلك فإن العبارة اختصار ملائم .)

س ٨,١٠ توجد لكلٍّ من القوى الآتية قوة مكافئة متساوية بتطلبها قانون نيوتن الثالث . أذكر طبيعة القوة المكافئة هذه والجسم الذي تؤثر عليه . (أ) قوة مقدارها mg على كرة قاعدة ؛ (ب) قوة انجرار الهواء الاحتكاكي على كرة قاعدة ؛ (ج) قوة مطرقة على مسبار ؛ (د) القوة المدية - الجزرية tidal force للقمر على محيطات الأرض ؛ (هـ) قوة الاحتكاك على سيارة متزلقة skidding ؛ و (و) الدفع الذي يدسر صاروخاً خارج الغلاف الجوي .

س ٨,١١ يدفع طاه طبخ طعام ليزلق فوق نضد counter ؛ إلا أنه يخطي في تقدير قدرة النضد على إيقاف الطبخ ، الذي يستمر بالاندفاع فوق حافة النضد ؛ فيتخذ مساراً قوسياً الشكل في الهواء لينهشم على الأرض . صف جميع القوى التي يؤثر بها الطبخ على محيطه environment عند كل جزء من حركته .

س ٨,١٢ (١) ما قوة الجاذبية التي تؤثر بها على الأرض (أ) عندما تقف ساكناً على سطح الأرض ؟ و (ب) عندما تقفز في الهواء ؟ (٢) ما القوة الكلية التي تؤثر بها على الأرض في كل من هاتين الحالتين ؟



س ٨,١٣ تكون قوتا التوتر المؤثران على مقطع من كبل cable كهربائي (الجزء المظلل من شكل ٨,٢٤) F_1 ، الناتجة عن الكبل فوق المقطع ، و F_2 ، الناتجة عن الكبل تحت المقطع . (١) هاتان القوتان غير متساويتين بالمقدار ($F_1 + F_2 \neq 0$) . فلماذا لا يتعارض ذلك مع قانون نيوتن الثالث ؟ (٢) عندما تقرب Δy من الصفر ، يقرب المقداران F_1 و F_2 من التساوي . فهل يحدث ذلك نظراً لقانون نيوتن الثالث أم لسبب آخر ؟

شكل ٨,٢٤ : سؤال ٨,١٣ .

س ٨,١٤ تأمل باختصار السبات الممكنة لسلوك المادة في عالم لا يسري فيه قانون نيوتن الثالث .

س ٨,١٥ أطلقت في الهواء كتلتان متصلتان بوتر خفيف مرن . ناقش حركة مركز كتلتها (أ) إذا كان الوتر

مشدوداً *taut* ، بحيث يسمح للكتلتين بتأثير متبادل للقوى بينهما ؛ و (ب) إذا كان الوتر متراخياً *slack* ، بحيث تتأثر كل كتلة بقوة الجاذبية فقط .

بند ٨,٥

س ٨,١٦ لأي نظام يعمل وزنك كقوة خارجية ؟ ولأي نظام يعمل كقوة داخلية ؟

س ٨,١٧ تكون سرجهة مركز كتلة زوج من الجسيمات ثابتة قبل أن يتصادما . ناقش حركة مركز الكتلة أثناء تصادم الجسيمين وبعده .

س ٨,١٨ اشرح كيف يستلزم قانون نيوتن الأول قانون نيوتن الثالث . بين ، مثلاً ، أنه لو أخفق القانون الثالث ، لأخفق القانون الأول .

س ٨,١٩ افترض أن قوة لم تُكتشف بعد داخل نواة الذرة لا تخضع لقانون نيوتن الثالث . اشرح لماذا يكون هذا بعيد الاحتمال . (النقاش الوارد في بُدَي ٨,٥ و ٨,٨ ذو أهمية .)

بند ٨,٧

س ٨,٢٠ لوحظ انبعاثُ جسيمين بزخمين متساويين ومتضادين من نقطة اضمحلال جسيم ساكن غير مستقر . فهل يُثبت ذلك أن جسيماً ثالثاً لم يُخلق في حادثة الاضمحلال ؟

س ٨,٢١ باحث تجريبي يدرس صورَ غرفة فقايق ، فيلاحظ مساراً مفرداً منبعثاً من نقطة ناكّد له تماماً اضمحلالُ جسيم ساكنٍ عندها . فهل يجب أن ينشر اكتشافه كخرق لقانون حفظ الزخم ؟

س ٨,٢٢ عندما تنحدر سيارة أسفل تلٍ ومحركها دون تشغيل ، يزداد مقدار زخمها . وفق *reconcile* بين هذه الحقيقة وقانون حفظ الزخم .

س ٨,٢٣ تقربُ كرتان متاثلتان الواحدة من الأخرى بـ *سَرَجَهَتَيْن* متساويتين ومتضادتين (ليس ضرورياً بصورة مباشرة رأساً برأس *directly head on*) . (١) فإذا يقول قانون حفظ الزخم على وجه الدقة عن حركتهما بعد التصادم ؟ وماذا لا يقول القانون ؟ (٢) هل هناك أية ظروف لا يكون فيها الزخم محفوظاً في مثل هذا التصادم ؟

بند ٨,٨

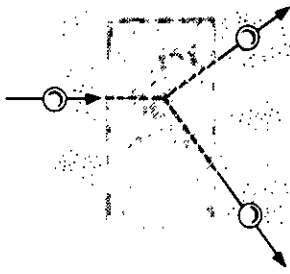
س ٨,٢٤ اشرح لماذا يمكن تطبيق قانون حفظ الزخم على تصادم يحدث (أ) في الهواء ، حيث تؤثر قوى الجاذبية الخارجية ؛ و (ب) على سطح طرقي ، حيث تؤثر قوى الاحتكاك الخارجية على النظام . (تلميح : اعتبر الدفع الذي تساهم به القوى الداخلية والقوى الخارجية على حدّ سواء .)

س ٨,٢٥ جسم يؤثر عليه قوة تتجه دائماً نحو مركز ثابت . فلماذا يتحرك الجسم في مستوى ؟

س ٨,٢٦ غواص هوائي يهبط رأسياً إلى أسفل بسرعة نهائية *terminal* ثابتة . (١) فهل يكون ثبوت زخمه نظراً لقانون حفظ الزخم أو لأي سبب آخر ؟ (٢) تسقط آلة تصوير من جيب الغواص وتتحرك إلى أعلى نسبة إليه (أي أنها تتحرك بصورة أبطأ) . فهل يظل الزخم الكلي للغواص الهوائي وآلة تصويره ثابتاً ؟ لِمَ أو لِمَ لا ؟

بند ٨,٩

س ٨,٢٧ يستطيع رجل لا يملك مجاديف أو محركاً أن يدسّ قارباً باتجاه واحد ، وذلك بأن يتحرك ذهاباً وإياباً



شكل ٨,٢٥ : سؤال ٨,٢٨

بطريقة معينة . ويستطيع بإعادة العملية أن يدفع القارب أي قدر يشاء . (١) اشرح لماذا لا تتنافى طريقة دسر القارب هذه التي تحدث داخل النظام مع قانون حفظ الزخم . (٢) هل يستطيع رواد الفضاء تغيير سرجه سفينتهم بطريقة مماثلة ؟

س ٨,٢٨ شرح من مادة غير شفافة opaque تغطي جزءاً من طاولة بلياردو (أنظر شكل ٨,٢٥) . تخني إحدى كرات البلياردو البيضاء تحت الشريحة من ناحية اليسار ؛ ثم نسمع طققة click ونظهر كرتان بيضاوان على ناحية اليمين . فلماذا يتعذر من قياسات السرجة معرفة أي الكرتين على اليمين كانت « القذيفة » وأيهما كانت « الهدف » ؟

بند ٨,١٠

س ٨,٢٩ محرك صاروخي rocket engine لسفينة فضاء يعمل لعدة ثوان كي يسارع السفينة . فهل يعتمد التغير في سرعة الصاروخ على سرعته قبل تشغيل المحرك ؟ وهل يعتمد التغير الجبرئي fractional change في السرعة على السرعة الابتدائية ؟

س ٨,٣٠ هل هناك أية طرق معقولة للدسر في الفضاء خلاف دفع الصواريخ ؟

بند ٨,١٢

س ٨,٣١ اشرح لماذا يستطيع قانون حفظ الزخم أن يحل محل قانون نيوتن الثالث كقانون أساسي للميكانيكا . بين على وجه الخصوص أن قانون نيوتن الثالث يكون عندئذ نتيجة للقوانين الأساسية .

تمارين

بند ٨,١

ت ٨,١ يسقط جسم بتسارع ثابت . عبر عن زخمه بدلالة (أ) الزمن ؛ و (ب) المسافة .

ت ٨,٢ بروتون كتلته 1.7×10^{-27} كغ يتحرك بسرعة 10^7 م/ث . (١) فما مقدار زخمه ؟ (٢) بتأثر بقوة 5×10^{-10} ن في اتجاه يوازي سرجته . فما معدل تغير زخمه ؟ (٣) ما الزمن اللازم لمضاعفة زخم البروتون ؟

ت ٨,٣ يتحرك إلكترون أفقياً إلى اليمين بزخم مقداره $p = 3 \times 10^{-24}$ كغ م/ث ، ثم يتأثر بقوة ثابتة مقدارها 1.5×10^{-18} ن . أوجد زخمه (مقداراً واتجهاً) بعد م/ث إذا أثرت القوة (أ) أفقياً إلى اليمين ؛ (ب) أفقياً إلى اليسار ؛ أو (ج) رأسياً إلى أعلى .

ت ٨,٤ (١) تحقق من أن بُعد القوة $\times$ الزمن هو نفس بُعد الزخم . (٢) تحقق من أن بُعد القوة $\times$ المسافة $\times$ الكتلة هو نفس بُعد (الزخم) ^٢ .

ت ٨,٥ يدفع رجل سيارته المعطلة على جزء مستو من طريق عام . فيتعين عليه أن يؤثر بقوة ثابتة مقدارها ١٢٠ ن حتى يحافظ على حركتها إلى الأمام بزخم ثابت مقداره 1.5×10^3 كغ م/ث . (١) فما قوة الاحتكاك المؤثرة ؟ (٢) إذا توقف عن الدفع واستمر تأثير نفس قوة الاحتكاك ، فما الزمن الذي ينقضي حتى يتناصف زخم السيارة ؟

ت ٨,٦ بلية marble كتلتها m وسرجتها v تصدم بلية ساكنة لها نفس الكتلة . بعد التصادم ، تسكن البلية

السَّاقطة وتنطلق البلية المضروبة بسرجهه v . (١) فما الدَّفع الذي أُعطي لكلٍّ من البليتين ؟ (٢) وما الدَّفع الكلي الذي أُعطي للبليتين معاً ؟

ت ٨,٧ سيارة كتلتها ١٢٠٠ كـرغ. وسرعتها ٥ م/ث تسير في بادي الأمر باتجاه الشمال . بصطدم السائق الغافل بعمود هاتف ، بعد أن يكون قد أتمَّ دوران ٩٠° إلى اليمين في فترة ٥ ثوانٍ . (١) فما الدَّفع الذي أُعطي للسيارة (أ) أثناء الدوران و (ب) أثناء التصادم ؟ (٢) وما القوَّة المتوسطة $\bar{F}$ التي أثَّرت على السيارة أثناء دورانها ؟

ت ٨,٨ (١) بالنسبة لجسم كتلته ثابتة ، يكون

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt}.$$

فما التعبير المناظر لمعدَّل تغيُّر زخم جسم كتلته متغيِّرة ؟ (٢) سمَّ جسماً أو نظاماً ما لوفاً يتغيَّر زخمه دون أن تتغيَّر سرجهته .

ت ٨,٩ بيِّن أن تعريف السَّرجهه المتوسطة

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1},$$

حيث r متجهُ الموضع ، يتبعُ من التعريف العامِّ للمتوسط الزمَني المحدَّد بالمعادلة ٨,١١ .

ت ٨,١٠ استخدم المعادلة ٨,١٠ لإيجاد الموضع المتوسط ومركبة x المتوسطة للسَّرجهه لجسيم يتحرَّك على امتداد محور x بتسارع ثابت . أوجد المتوسطين (أ) لفترة زمنية اعتباطية وشروط ابتدائية اعتباطية ؛ و (ب) لفترة زمنية من صفر إلى T بالشروط الابتدائية $x = \text{صفرًا}$ و $v_x = \text{صفرًا}$ عند $t = \text{صفرًا}$.

ت ٨,١١ وضعت كتلة ١٠ كـرغ في مستوى xy عند النقطة $x = ٥$ ، $y = ١$ ، وكتلة ٥ كـرغ عند النقطة $x = ٥$ ، $y = ٤$. (١) فأين يقع مركز كتلتها ؟ (٢) أضيفت كتلة ثالثة مقدارها ٣٠ كـرغ عند النقطة $x = ٢$ ، $y = ٢$. فأين يقع مركز كتلة الكتل الثلاث معاً ؟

بند ٨,٢

ت ٨,١٢ المسافة بين مركزي ذرة الكربون وذرة الأكسجين في جزئي أول أكسيد الكربون carbon monoxide (CO) هي 1.13×10^{-10} م (١,١٣) . (١) فأين يقع مركز كتلة الجزئي ؟ (٢) إذا كانت نواة الكربون تتحرَّك عند لحظة ما إلى أسفل بسرعة 3×10^4 م/ث وكان مركز الكتلة ساكناً ، فما اتجاه وسرعة حركة نواة الأكسجين ؟ (اهمل أي تأثير للإلكترونات على الكتلة الجزئية .)

ت ٨,١٣ تحقَّق بالحساب ممَّا ورد في بند ٨,٢ من أن مركز كتلة نظام الأرض - القمر يقع على بُعد ٢٩٠٠ ميل عن مركز الأرض .

ت ٨,١٤ جسيم مقذوف كتلته m_1 يتحرَّك بسرعة v_1 نحو هدف ساكن كتلته m_2 . أوجد سرجهه وتسارع

مركز الكتلة لنظام الجسيمين .

ت ٨,١٥ متجه الموضع لبليّة كتلتها $2m$ هو $r_1 = v_0 t i$ ؛ ومتجه الموضع لبليّة أخرى ، كتلتها m ، هو $r_2 = -v_0 t j$. (١) خطّط مساري البليتين وبين موضعيهما عند لحظة مُعيّنة . (٢) أوجد (أ) موضع ؛ (ب) سرّجه ؛ و (ج) تسارع مركز كتلتها .

ت ٨,١٦ كرة مقدوفة تتبع مساراً مكافئاً parabolic path بتحدّد بالعلاقة $r_1 = v_0 t i + (v_1 t - \frac{1}{2} g t^2) j$. بتحدّد موضعها بالمعادلة $r_2 = v_0 t i$. أوجد سرّجه وتسارع مركز كتلة هذا الزوج من الكرات .

ت ٨,١٧ (١) بالنسبة لنظام الكرتين الوارد في التمرين السابق ، أوجد (أ) الزخم الكلي ؛ و (ب) معدل تغير الزخم . (٢) ما القوة الكلّية المؤثرة على هذا النظام ؟

ت ٨,١٨ ينطلق صاروخ دفع ذو ورنية vernier-thrust rocket صُدفة عند أحد أطراف سفينة فضائية كتلتها 2000 كـرغ ، فيضع السفينة في حركة غزليّ دَواميّة . ويستمرّ دفع الصاروخ للسفينة مدّة 2 ث بقوة 400 ن . (١) صِفْ بكلمات مناسبة حركة مركز كتلة السفينة . (٢) احسب التغير في سرّجه السفينة ، على فرض أنّ اتجاه الدفع لا يتغير إلّا قليلاً أثناء فترة انطلاق الصاروخ .

ت ٨,١٩ أسقط حجر كتلته m_1 من قمة برج عند الزمن $t = 0$ صفرًا بتسارع ثابت g . وعند الزمن $t_1 = t$ ، أسقط حجرًا ثانٍ ، كتلته m_2 ، من نفس النقطة . السرّعة الابتدائية لكل منهما صفر . (١) أوجد لهذا النظام من الحجرين بعد زمن t_1 (أ) سرّجه مركز الكتلة ؛ (ب) تسارع مركز الكتلة ؛ (ج) الزخم الكلي للنظام ؛ و (د) القوة الكلّية المؤثرة على النظام . (٢) أثبت بجلاء تحقّق المعادلات ٨,٢٢ ، ٨,٢٩ ، و ٨,٣٠ . (٣) اشرح لماذا يمكن اعتبار الحجرين كنظام واحد ، رغم انعدام تأثير أحدهما على الآخر .

ت ٨,٢٠ رافعة سلسلة chain hoist ترفع كتلة 10 كـرغ بسرعة ثابتة مقدارها 0.1 م/ث . فما القوة التي تؤثر بها الرافعة إلى أسفل على العارضة girder التي تحملها ؟ (اهمل كتلة الرافعة بالمقارنة مع كتلة حملها) .

ت ٨,٢١ تسقط كتلة 10 كـرغ من السكون مسافة 3 م ، فترتطم بالأرض وتعاني تسارعاً مقداره $200g$ أثناء إيقافها . فما القوة الكلّية التي تؤثر بها على الأرض (أ) مباشرة بعد بدء سقوطها ؛ (ب) مباشرة قبل ارتطامها بالأرض ؛ (ج) أثناء إيقافها ؛ و (د) بعد أن أوقفت ؟

ت ٨,٢٢ بالرجوع إلى شكل ٨,١٢ ومثال ١ في بند ٨,٦ ، احسب تسارع الأرض الناتج عن محصلة القوة إلى اليسار ، $F_2 - F_1$ ، التي يؤثر بها الحصان والعربة على الأرض . إذا استمرّ تأثير هذه القوة 1 س ، فما المسافة التي قد تتحركها الأرض ؟ قارن هذه المسافة مع مقاس ذرة ، أو نواة ، أو جسيم أولي .

ت ٨,٢٣ بين أنّ المعادلات ٨,٤٢ - ٨,٤٥ ليست مُستقلة تماماً عن بعضها البعض : اشتق إحداها جبرياً من الثلاث الأخرى .

ت ٨,٢٤ سلسلة ثلاثية الحلقات ، كتلة كل منها ١٠ كـرغ ، تندلى من خطاف . سُحبت السلسلة إلى أعلى بتسارع ثابت مقداره ٢ م/ث^٢ . أوجد جميع القوى المؤثرة على الحلقة الوسطى .

ت ٨,٢٥ قاطرة locomotive تجر N عربة على مسار مستو بتسارع a . فتكون العربة ١ الأقرب من القاطرة ؛ بينما تقع العربة N عند مؤخرة القطار . كما يكون لكل عربة نفس الكتلة m وتؤثر عليها نفس قوة الاحتكاك F_f . (١) فما القوة التي تؤثر بها العربة n على العربة $n+1$ ؟ (٢) ما القوة التي تؤثر بها العربة $n+1$ على العربة n ؟ (٣) وما القوة التي تؤثر بها العربة ١ على القاطرة ؟

ت ٨,٢٦ يجر غلام عربة كتلتها ٨ كـرغ عندما يؤثر عليها بقوة مقدار مركبتها الأفقية ٢٠ ن . (١) فما القوة التي تؤثر بها العربة على الأرض ؟ (٢) تتناصف قوة الاحتكاك عندما تندرجح العربة على سطح أنعم smoother . فإذا استمر الغلام بجر العربة بنفس القوة ، فما تسارع العربة ؟ وما المركبة الأفقية للقوة التي تؤثر بها العربة على الغلام (أ) عندما تندرجح بسرعة ثابتة ؛ و (ب) عندما تتسارع ؟

ت ٨,٢٧ جسيم ألفا زخمه الابتدائي 7×10^{-10} كـرغ م/ث يقترب من نواة يورانيوم ساكنة . فبنشئت جسيم ألفا براوية ٩٠ نتيجة للتصادم مع احتفاظه بنفس مقدار زخمه تقريباً . فما سرجه ارتداد recoil velocity (مقداراً واتجهاً) نواة اليورانيوم ، ذات الكتلة 4×10^{-26} كـرغ ؟

بند ٨,٧

ت ٨,٢٨ بيون متعاذل زخمه $5,10 \times 10^{-10}$ كـرغ م/ث يضمحل إلى فوتونين ، أحدهما له زخم $2,94 \times 10^{-10}$ كـرغ م/ث وينبعث باتجاه متعاذل مع مسار البيون الابتدائي . (١) فما متجه الزخم للفوتون الآخر ؟ ضمن إجابتك رسماً توضيحياً . (٢) لو كان زخم البيون ، ذي الكتلة $2,4 \times 10^{-28}$ كـرغ ، يتحدد بدقة بواسطة الصيغة اللانسيية $p = mv$ (مع أن الواقع خلاف ذلك) ، فإذا ستكون سرعته قبل الاضمحلال ؟
 فرع اختياري : استخدم المعادلة ٢١,٢٥ لإيجاد سرعة البيون قبل اضمحلاله .

ت ٨,٢٩ قذيفة مدفعية منطلقة في مسار أفقي بسرعة ٨٠٠ م/ث تنفجر إلى ثلاث شظايا . فتكون كتلة الشظية الأولى ١٥ كـرغ وتنطلق أفقياً إلى الأمام بسرعة ١٠٠٠ م/ث ؛ كما تنطلق الشظية الثانية ، ذات الكتلة ١٠ كـرغ ، أفقياً إلى الأمام بسرعة ٩٠٠ م/ث ؛ بينما تكون كتلة الشظية الثالثة ٥ كـرغ . فما سرجهتها مباشرة بعد الانفجار ؟

ت ٨,٣٠ يتحدد تعريف الارتداد للكتلة بالمعادلة ٢,١٠ . (١) اشتق هذه المعادلة من قانون حفظ الزخم . (٢) تحت أي الشروط تسري هذه المعادلة ؟ (٣) يمكن تطبيقها على عربات تتحرك فوق مجرى هوائي . فلماذا ؟

ت ٨,٣١ مركبتان فضائيتان ملتصقتان docked ، كتلة إحداها ١٥٠٠ كـرغ والأخرى ٢٥٠٠ كـرغ ، فصلتا بواسطة شحنة ناسفة موضوعة بينهما . فيعطي الانفجار دفعا مقداره ١٠٠٠ ن ث للمركبة ذات الكتلة الأصغر . فما السرعة النسبية لابتعاد المركبتين عن بعضهما البعض ؟ (افرض أنها تفصلان باتجاه الخط الواصل بين مركز كتلتيهما .)

ت ٨,٣٢ يحدث تصادم مباشر بين شاحنة كتلتها ١٠٠٠٠ كـرغ تسير بسرعة ٦٠ ميلاً/س وسيارة ركاب كتلتها

بند ٨,٨

١٠٠٠ كـرغ تسير بسرعة ٨٠ ميلاً/س في الاتجاه المُمَاكس . إذا التحت السَّيَّارة والشَّاحنة معاً عند لحظة الاصطدام ، ففي أيَّ اتَّجاه وبأيَّ سرعة ينطلق الحُطَام wreckage مباشرةً بعد الاصطدام ؟ ما التَّغْيَر في سرَّجة سَيَّارة الرُّكَّاب ؟ وما التَّغْيَر في سرَّجة الشَّاحنة ؟ (ملاحظة : يمكن جُلَّ هذا التَّمرين بدون تحويل الوَحَدَات .)

ت ٨,٣٣ فئاة كتلتها ٥٠ كـرغ واقفة فوق زلَّاجَتين ice skates تلتقط كرة كتلتها ٠,٥ كـرغ كانت تتحرَّك ، قبل التقاطها مباشرة ، بسرعة ١٥ م/ث وباتَّجاه يصنع زاوية ٣٠ مع الاتَّجاه الأفقي . فما سرعة الفئاة بعد التقاط الكرة ، إذا أمكن إهمال الاحتكاك مع الجليد ؟

ت ٨,٣٤ تُطلَقُ بندقيةُ رصاصةٍ كتلتها ٠,٢٥ كـرغ بسرَّجة فُوهية muzzle velocity مقدارها ٧٠٠ م/ث (حوالي ماخ ٢ Mach 2) . تُصيب الرَّصاصةُ قطعةَ خشب كتلتها ١ كـرغ ، فتندغم فيها وتنطلق . الاثنان معاً بسرعة ١٤,٨ م/ث . (١) فكُم تفقد الرَّصاصةُ من الزَّخم ما بين لحظة انطلاقها من ماسورة البندقية ولحظة ارتطامها بقطعة الخشب ؟ عبَّر عن إجابتك بَوَحَدَات كـرغ م/ث وكسبِية مثوية من الزَّخم الابتدائي . (٢) ماذا حَدَثَ للزَّخم « المفقود » ؟

ت ٨,٣٥ سَيَّارة شحَن صغيرة pickup truck كتلتها ٢٠٠٠ كـرغ ، بما فيه حمولتها ، تتحرَّك بسرعة ٦ م/ث بدون تشغيل محرَّكها . يقذف رجل واقف في الجُزء الخلفي منها كيسَ رُمْل كتلته ٥٠ كـرغ بسرعة ١ م/ث نسبة إلى سَيَّارة الشَّحَن . فما سرعة السَيَّارة بعد قذف الكيس (أ) مباشرة إلى الخلف ؛ أو (ب) مباشرة إلى الجانب ؟

ت ٨,٣٦ زلَّاجة صاروخ rocket sled كتلتها ٣٠٠٠ كـرغ تتحرَّك باحتكاك مُهْمَل وسرعة ثابتة مقدارها ٢٥٠ م/ث فوق مجموعة من القضبان . وعند نقطة معينة تنغمر مِفْرَعة scoop على الزلَّاجة في حوض ماء بين القضبان فتغرف منه الماء إلى خزان فارغ على الزلَّاجة . فما سرعة الزلَّاجة بعد أن يكون قد تجمَّع ١ م^٣ من الماء في الخزان ؟

ت ٨,٣٧ يحدث اصطدام أَقَلَّ تدميراً إلى حدِّ ما من ذلك الموصوف في تمرين ٨,٣٢ بين زَوْج من السَيَّارات ، كتلة كلِّ منهما ٢ × ١٠ كـرغ ، إحداها مسافرة باتَّجاه الشَّمال بسرعة ١٥ ميلاً/س ، والأخرى مسافرة باتَّجاه الشَّرْق بسرعة ٢٠ ميلاً/س . فما سرَّجة مركز كتلة النِّظام (مقداراً واتَّجهاً) قبل ، وأثناء ، وبعد التَّصادم ؟

ت ٨,٣٨ كما هو مبين في شكل ٨,١٩ ، ينحرف نيوترون بزاوية ٣٠ عندما يصطدم ببروتون ساكن ؛ بينما يرتدُّ البروتون بزاوية ٦٠ مع الاتَّجاه الابتدائي للنيوترون . السَّرعَة الابتدائية للنيوترون $v_1 = 4 \times 10^6$ م/ث ؛ وكتلة الجسيمين متساوية تقريباً . (١) عبَّر عن قانون حفظ الزَّخم بدلالة المركَّبات وحلِّ المعادلتين الناتجتين لإيجاد السَّرعَتين النَّهائيتين v_1 و v_2 . (٢) هل تكون طاقة الحركة محفوظةً في هذا التَّصادم ؟

٠ أيَّ حوالي ضعف سرعة الصَّوت في الهواء تحت الشُّروط المعيارية .

(المشرف)

ت ٨,٣٩ (١) بدءاً بمعادلات حفظ الزخم ، قُم بالعمليات الجبرية اللازمة لاشتقاق الصيغة ٨,٦٣ التي تُحدد كتلة غاز العادم اللازمة لتغيير سرجه صاروخ . (٢) لماذا تسري هذه العلاقة فقط عندما تكون $v_{ex} \ll \Delta v$ ؟

ت ٨,٤٠ من الضروري ، أثناء إحدى الرحلات الى القمر ، إجراء تصحيح مقداره ٢ م/ث في سرعة سفينة الفضاء . فإذا كانت سرعة غازات العادم $v_{ex} = ٣١٠ م/ث$ ، فما النسبة المئوية من كتلة السفينة التي يجب الاستغناء عنها كعادم ؟

ت ٨,٤١ أعد ترتيب المعادلة ٨,٦٧ للتعبير عن الكتلة النهائية m_2 لصاروخ كدالة في الكتلة الابتدائية m_1 والتغير في السرعة ، $v_2 - v_1$. أرسم رسماً بيانياً تخطيطياً يبين طبيعة هذه الدالة ، وناقشها عند نهايتين : (أ) $v_2 - v_1 \ll v_{ex}$ ؛ و (ب) $v_2 - v_1 \gg v_{ex}$.

ت ٨,٤٢ صاروخ كتلته $١٠٠٠ كغ$ على منصة الإطلاق ينفث عادمًا سرعته $v_{ex} = ٢,٥ \times ٣١٠ م/ث$. (١) فما معدل تدفق العادم (بوحدة كغ/ث) اللازم لدفع الصاروخ بتسارع مقداره $٠,٥ g$ ؟ (٢) ما الكتلة المتبقية من الصاروخ بعد دقيقة واحدة ؟ وما التسارع عندئذ ؟ (اهمل تغير تسارع الجاذبية مع الارتفاع .)

ت ٨,٤٣ مركز كتلة نظام ثنائي الجسم مثبت عند نقطة الأصل . بين أن متجهي الموضع للجسمين يتحددان بواسطة $r_1 = -(m_2/M)r$ و $r_2 = (m_1/M)r$ ، حيث $M = m_1 + m_2$ و $r = r_2 - r_1$.

ت ٨,٤٤ (١) أثبت أن الكتلة المختزلة μ لجسمين كتلتاهما m_1 و m_2 هي أقل من أصغر الكتلتين . (٢) أثبت أن الكتلة المختزلة لنظام ثنائي الجسم كتلته الكلية ثابتة تكون أكبر ما يمكن إذا كانت الكتلتان m_1 و m_2 متساويتين . (٣) إذا كانت $m_1 \ll m_2$ ، أثبت أن

$$\mu \cong m_1(1 - (m_1/m_2)).$$

مسائل

م ٨,١ بتحدد زخم الكترون عند لحظة معينة بالعلاقة $p = p_0$ ؛ كما يتأثر في نفس الوقت بقوة $F = F_0$ (حيث i و j متجهتا وحدة باتجاهي x و y على الترتيب) . فما معدل تغير زخم الإلكترون ؟ (٢) ما معدل تغير الزاوية التي تحدد اتجاه الزخم ؟ (٣) وما معدل تغير مقدار الزخم ؟ (٤) إذا بقيت F ثابتة ، فأبدي معدلات التغير الثلاثة هذه بظل ثابتاً ؟ وإيها ، إن وجد ، يتغير ؟

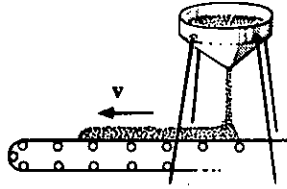
م ٨,٢ في لعبة كرة القاعدة تقرب كرة سريعة من الهدف بسرعة ٤٥ م/ث . يتصدى لها حامل المضرب فيضربها ؛ وتبرح الكرة مضربةً بزاوية ٤٥° مع الاتجاه الأفقي حيث يتم تلقفها عند مركز الملعب على بعد ١٢٠ م عن الهدف . افرض أن كتلة كرة القاعدة هي ٠,١٤٥ كغ واهمل احتكاك الهواء . (١) فما زخم الكرة قبل إصابتها بالمضرب مباشرة ؟ (٢) وما زخمها بعد أن ضربت مباشرة ؟ (٣) ما الدفع الذي أعطي (أ) من المضرب إلى الكرة ؛ و (ب) من الكرة إلى المضرب ؟ (٤) قدر زمن تلامس الكرة بالمضرب واحسب القوة المتوسطة F التي يؤثر بها المضرب على الكرة .

م ٨,٣ قُسم نظام مركب من عدة جسيمات إلى جزئين : جزء كتلته M_1 ومتجه مركز كتلته R_1 ، وجزء كتلته M_2 ومتجه مركز كتلته R_2 . أثبت أن متجه مركز كتلة النظام بأكمله يتحدد بالعلاقة

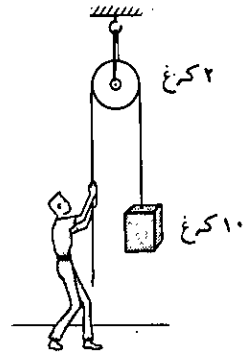
$$r_c = \frac{M_1 R_1 + M_2 R_2}{M_1 + M_2} .$$

م ٨,٤ يتكون نظام من ثلاثة أجسام يمكن اعتبارها كما لو كانت جسيمات . في لحظة معينة ، يقع الجسم ١ ، ذو الكتلة ٣ كـرغ ، عند نقطة الأصل ، ويكون تسارعه $a_1 = (2i + 2j) \text{ m/sec}^2$ ؛ كما يقع الجسم ٢ ، ذو الكتلة ١ كـرغ ، عند $x = ٥$ ، $y = ٧$ صفراً ، ويكون تسارعه $a_2 = 4i \text{ m/sec}^2$ ؛ بينما يقع الجسم ٣ ، ذو الكتلة ٢ كـرغ ، عند $x = ٣$ صفراً ، $y = ٣$. وتساوي القوة الكلية الخارجية المؤثرة على النظام صفراً . أكتب ما تستطيعه عن (أ) موقع مركز الكتلة ؛ (ب) سرجهة مركز الكتلة ؛ (ج) تسارع مركز الكتلة ؛ (د) سرجهات الأجسام الثلاثة ؛ و (هـ) تسارع الجسم ٣ .

م ٨,٥ برفع رجل علبة كتلتها ١٠ كـرغ باستخدام بكرة كتلتها ٢ كـرغ وجبل كتلته مهملة (أنظر شكل ٨,٢٦) . (١) فما القوة إلى أعلى التي يؤثر بها خطاف التعليق إذا (أ) كانت العلبة ساكنة ؛ (ب) ارتفعت العلبة بسرعة ثابتة مقدارها ٠,٥ م/ث ؛ (ج) عانت العلبة تسارع ١,٢ م/ث^٢ إلى أعلى ؛ و (د) أفلت الرجل الحبل من يده ؟ (٢) وما القوة التي يؤثر بها الحبل على الرجل في الحالات (أ) ؛ (ب) ؛ و (ج) ؟ (إعتبر أن البكرة عديمة الاحتكاك .)



شكل ٨,٢٧ : مسألة ٨,٦ .



شكل ٨,٢٦ : مسألة ٨,٥ .

م ٨,٦ بدءاً عند الزمن $t = ٠$ صفراً ، تسقط نشارة خشب sawdust بمعدل ثابت على حزام متحرك للنقل conveyer belt (أنظر شكل ٨,٢٧) . وتكون كتلة النشارة على الحزام $m(t) = \alpha t$ ، حيث α ثابت . (١) فما القوة اللازمة للإبقاء على حركة الحزام بسرعة ثابتة v ؟ (٢) ما قيمة التكامل $\int_0^t F dt$ ؟ وما أهميته ؟

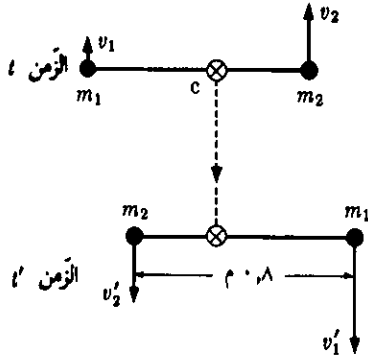
م ٨,٧ وعاء فارغ كتلته M موضوع في الخارج على ميزان حساس مدرج بوحدات النيوتن . عند الزمن $t = t_1$ يبدأ المطر بالسقوط ، وتأخذ قطرات المطر التي كتلة كل منها m وسرعتها v_0 بالسقوط في الوعاء بمعدل n قطرة في الثانية . عند $t = t_2$ يتوقف سقوط المطر . (١) أوجد صيغة تحدد قراءة الميزان $F(t)$ عند الزمن $t_1 < t < t_2$. (٢) أرسم رسماً بيانياً دقيقاً يبين قراءة الميزان كدالة في الزمن ، على أن يشتمل الرسم على أزمنة قبل t_1 وبعد t_2 . بين السات ذات الأهمية الخاصة في

الرسم البياني . (تلميح : قوة الجاذبية هي واحدة من اثنتين من القوى المؤثرة على الميزان .)

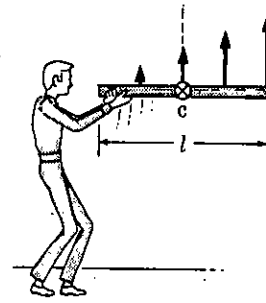
٨,٨ م حركة نظام يتسارع بقوة الجاذبية
يُمسك رجل بقضيب فيلزي (معدني) طوله l عند أحد طرفيه ويرميه في الهواء بحيث تكون سرجه الطرف الأقرب إليه صفراً عند اللحظة التي يبرح فيها القضيب يده (أنظر شكل ٨,٢٨). فإذا أتم القضيب n دورة قبل أن يُمسك به عند نفس المستوى الذي قُذف منه ، بين أن الارتفاع الذي يبلغه مركز كتلته (مقاساً من نقطة إطلاقه) هو

$$h = \frac{\pi}{4} nl.$$

(تلميح : حركة القضيب نسبةً إلى مركز كتلته هي نفسها كما لو لم تؤثر قوة الجاذبية .)



شكل ٨,٢٩ : مسألة ٨,٩ .



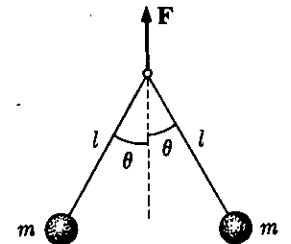
شكل ٨,٢٨ : مسألة ٨,٨ .

٨,٩ م تتصل كتلتان m_1 و m_2 معاً بواسطة قضيب خفيف طوله 0.8 م وكتلته مهملة . عندما يدور هذا النظام ويسقط في مجال الجاذبية الأرضية ، يتبع مركز كتلته مساراً مستقيماً رأسياً (أنظر شكل ٨,٢٩ أعلاه) . فعند الزمن t ، يكون اتجاهها سرجهتي الكتلتين كما هو مبين ومقدارهما $v_1 = 0.4$ م/ث و $v_2 = 1.6$ م/ث ؛ أما عند الزمن $t' = t + 1.41$ sec ، فيصبح اتجاهها سرجهتي الكتلتين كما هو مبين ومقدارهما $v_1' = 28.5$ م/ث و $v_2' = 12.5$ م/ث . (١) إذا كانت $m_1 + m_2 = 8$ kg ، فما قيمة كلٍّ من الكتلتين m_1 و m_2 على حدة ؟ (٢) وما عدد الدورات التي أتمها النظام بين t و t' ؟

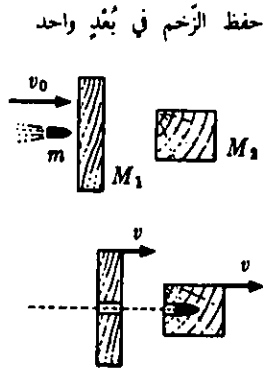
٨,١٠ م تتكون لعبة طفل من كرتين لدائبتين ، كتلة كلٍّ منها m ، وتتصل كلٌّ منهما بحلقة صغيرة بواسطة وتر طوله l (أنظر شكل ٨,٣٠). (١) أثبت أنه إذا أثر طفل بقوة رأسية F مقدارها $2mg$ على الحلقة وكان الوتران يصنعان زاويتين متساويتين θ مع الاتجاه الرأسي ، كان مقدار تسارع كلٍّ من الكرتين $a = g \tan \theta$. (٢) ما اتجاه تسارع كلٍّ من الكرتين ؟ (٣) إذا كانت الزاوية الابتدائية التي يصنعها كلٍّ من الوترين مع الاتجاه الرأسي هي θ_0 ، فما المسافة الرأسية التي تتحركها الحلقة حتى تجتمع الكرتان معاً ؟ (اهمل نصف قطر الكرتين في هذه الحالة) . (تلميحان : يمكن اعتبار الحلقة بمفردها كنظام كتلته صفر . كذلك من المفيد التفكير بمركز كتلة النظام برمته .) فرع اختياري : إذا كان مقدار القوة الرأسية المؤثرة $F = 2\gamma mg$ ، بين أن تسارع كلٍّ من الكرتين هو

$$a = g\sqrt{(1 - \gamma)^2 + (\gamma \tan \theta)^2}.$$

كرتان لدائبتان على وتر



شكل ٨,٣٠ : مسألة ٨,١٠ .



شكل ٨,٣١ : مسألة ٨,١١

م ٨,١١ كما هو مبين في شكل ٨,٣١ ، تخترق رصاصة كتلتها m وسرعتها الابتدائية v_0 قطعة خشب كتلتها M_1 ، وتنفرس في قطعة أخرى من الخشب كتلتها M_2 . تكون قطعتا الخشب ساكنتين قبل أن تُصَدَّما ، بينما تُشَاهَدُ كلتاها تتحرك بعد ذلك بنفس السرعة v .
 (١) أوجد تعبيراً جبرياً يُحدِّد السرعة النهائية v .
 (٢) احسب قيمة هذا التعبير إذا كانت $m = ٢$ غ ، و $v_0 = ٦٠٠$ م/ث ، و $M_1 = M_2 = ١$ كغ .
 (٣) أوجد سرعة الرصاصة بين قطعتي الخشب جبرياً وعددياً على حدٍ سواء .

م ٨,١٢ لاعبا كرة قاعدة يحاولان التدريب على سطح بحيرة متجمدة حيث الاحتكاك مهملاً . فيرميها قاذف الكرة pitcher بسرعة ٤٠ م/ث نسبة إلى نفسه ؛ بينما يضربها حامل المضرب batter فيعيدنها إلى قاذفها بسرعة ٤٠ م/ث نسبة إلى حامل المضرب . كتلة كرة القاعدة ٠,١٤ كغ وكتلة كل لاعب ٧٠ كغ . (١) فما سرعة اقتراب الكرة المقذوفة من الهدف ؟ (٢) وما سرعة قاذف الكرة (أ) عندما تكون الكرة في الهواء ؛ و (ب) بعد أن يُمسِكَ بالكرة العائدة إليه ؟ (اهمل آثار الجاذبية ، واحتكاك الهواء ، واحتكاك الجليد .)

حفظ الزخم في بُعْدَيْن

م ٨,١٣ عندما تضرب كرة بلياردو متحركة (A) كرة بلياردو ساكنة (B) بأية طريقة عدا التصادم المباشر ، تكون سرجتها الكرتين متعامدتين تقريباً . استخدم هذه الحقيقة مع قانون حفظ الزخم لاشتقاق علاقة تُحدِّد سرعة الكرة A بعد التصادم بدلالة سرعتها الابتدائية v_0 وزاوية انحرافها θ .

صاروخ في مجال الجاذبية

م ٨,١٤ اشتقت المعادلتان ٨,٦٥ و ٨,٦٧ لصاروخ حر من قوى الجاذبية . اعتبر بدلاً من ذلك صاروخاً يتحرك رأسياً في مجال الجاذبية الأرضية . (اهمل اعتماد تسارع الجاذبية على الارتفاع .) اشتق معادلة تفاضلية للحركة شبيهة بالمعادلة ٨,٦٥ ، وكاملها للحصول على تعميم للمعادلة ٨,٦٧ . (تلميح : تشمل هاتان المعادلتان الزمن بالإضافة إلى السرعة والكتلة .)

الدفع النوعي

م ٨,١٥ كثيراً ما يستخدم مهندسو الصواريخ كمية الدفع النوعي specific impulse ، التي يرمز إليها عادة بالحرف I_{sp} ، لقياس فعالية وقود معين للصواريخ . ويُعرف الدفع النوعي بالعلاقة

$$I_{sp} = \frac{v_{ex}}{g}$$

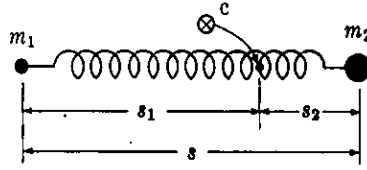
كما يُقاس بالثواني . أثبت الصفتين التاليتين للدفع النوعي . (١) دسر الصاروخ يساوي I_{sp} مضروباً في وزن الوقود المستنفذ في الثانية . (٢) إذا كان صاروخ قد ارتفع لتوه فوق منصة الإطلاق بحيث يستطيع حمل كتلته بصعوبة (الدسر mg) ، فإن I_{sp} هو الزمن اللازم كي يهبط وزن الصاروخ إلى $1/e$ من قيمته الابتدائية .

نظام ثنائي الجسم

م ٨,١٦ متجه الموضع لمركز كتلة نظام ثنائي الجسم هو r_c ويتحرك بسرجهة ثابتة v_c . (١) عمم المعادلات ٨,٧٥ - ٨,٨٠ لتغطية هذه الحالة . أي هذه المعادلات لا يحتاج إلى تغيير ؟ (٢) إذا كان النظام معزولاً بحيث أن $F_1 + F_2 = 0$ ، بين أن $F_2 = dp/dt$ ، حيث p زخم الجسمين المفرد الفعال (أنظر المعادلة ٨,٨١) .



شكل ٨,٣٣ : مسألة ٨,١٨ .



شكل ٨,٣٢ : مسألة ٨,١٧ .

م ٨,١٧ كتلتان غير متساويتين m_1 و m_2 تتصلان بزنبرك ، طوله عند الاتزان s_0 وثابت الزنبرك له k ، وتهتزتان على امتداد خط مستقيم . وكما هو مبين في شكل ٨,٣٢ ، فإن المسافة بينها تكون $s = s_1 + s_2$ ، حيث s_1 و s_2 هما بعداهما ، على الترتيب ، عن مركز كتلتها الساكن . (١) كون وحل معضلة الجسم المفرد الفعال لإيجاد $s(t)$. (٢) ما دورة الاهتزاز ؟ (٣) وما دالتا الموضع $s_1(t)$ و $s_2(t)$ ؟ (تلميح : الكمية $s - s_0$ هي متغير مفيد .)

م ٨,١٨ يقف رامي كرات حديدية shot-putter عند أحد طرفي عربة مسطحة خفيفة (أنظر شكل ٨,٣٣) . فيقذف الكرات على امتداد طول العربة مرتين : الأولى والعربة مثبتة في موقعها ؛ ثم والعربة حرة الحركة على قضبان أفقية باحتكاك مهمَل . في كلتا التجربتين كان للكرة ، بعد تركها يد القاذف ، نفس السرجة (مقداراً واتجهاً) نسبة إليه . في أي التجربتين ، إن وجدت ، تقطع القذيفة مسافة أكبر على امتداد سطح العربة ؟ برّر إجابتك بحرص .

رامي كرات حديدية على عربة متحركة

م ٨,١٩ (ملاحظة : تعني كلمة « سرجة » في هذه المسألة مركبة x للسرجة .) تتحرك الكرة ١ ، ذات الكتلة m_1 ، على امتداد محور x بسرجة موجبة v_0 نحو الكرة ٢ الساكنة ابتداءً ، ذات الكتلة m_2 . فتتحرك الكرتان بعد التصادم على امتداد محور x بسرجتين v_1 و v_2 على الترتيب . (١) أكتب معادلة تعبر عن حفظ الزخم في التصادم . (٢) هل تسري هذه المعادلة إذا كانت الكرتان من الفولاذ steel ؟ إذا كانتا من المعجون putty ؟ (٣) باعتبار v_0 ثابتة في معادلة حفظ الزخم ، أرسم رسماً بيانياً للسرجة v_2 ضد v_1 . ضع علامة عند نقطتي تقاطع المنحنى مع محوري v_1 و v_2 . (٤) كل نقطة على المنحنى في المستوى $v_1 v_2$ تمثل قيمتين للكميتين v_1 و v_2 تحققان شرط حفظ الزخم . لكن هناك شرطاً آخر يتعين على v_1 و v_2 تحقيقه إذا كانت الكرتان غير قابلتين للاختراق impenetrable . فما هذا الشرط ؟ بين كيف يقسم هذا الشرط المنحنى إلى جزأين يمثلان حالتين نهائيتين للحركة أحدهما فيزيائية (ممكنة) وأخرى لافيزيائية nonphysical (غير ممكنة) . (٥) بتوفر شرط عدم الاختراق ، ما القيم الصغرى والعظمى الممكنة للسرجة v_1 ؟ للسرجة v_2 ؟ (ملاحظة : ستهضاف اعتبارات طاقة لهذه المسألة في المسألتين ١٠,٢٦ و ١٠,٢٧ .)

تصادم ثنائي الجسم في بُعد واحد

م ٨,٢٠ في أحد أطر الإسناد ، يكون لفئة من n جسيمات كتلتها $m_1, m_2, m_3, \dots$ ، السرجات $v_1, v_2, v_3, \dots$. يتحرك إطار إسناد آخر بسرجة ثابتة v_0 بالنسبة إلى الإطار الأول . (١) أثبت أن الزخم الكلي للنظام ثابت في أحد الإطارين إذا كان ثابتاً في الآخر . (٢) هل الزخم كمية فيزيائية لامتغيرة invariant (أي هي نفسها في أطر الإسناد المختلفة) ؟ وهل قانون حفظ الزخم لامتغير ؟

لا تغيّر قانون حفظ



٩. الزخم الزاوي

Angular Momentum

الزخم الزاوي هو واحدٌ من تلك المفاهيم الأساسية في الميكانيكا التي برهنت أنها نبتٌ دائمٌ الاخضرار، حتى أن جذوره أعمق امتداداً في الفيزياء المعاصرة منها في الفيزياء الكلاسيكية التي أدت إلى ولادته. ونحن معنيون في هذا الباب بتعريفه وتطبيقاته في المعضلات الميكانيكية وحفظه.

٩,١ مفهوم الزخم الزاوي The Concept of Angular Momentum

الزخم الزاوي كميةٌ متجهة* . ويُعرَّف، ككمية مشتقة، بدلالة المفاهيم المألوفة للكتلة، والسرعة، والمسافة. والرمز المعتاد للزخم الزاوي هو L ؛ ومعادلته التعريفية هي

الزخم الزاوي لجسيم

$$L = mr \times v, \quad (٩,١)$$

حيث m كتلة الجسيم، و r متجه الموضع له، و v سرعته. كذلك يمكن التعبير عن الزخم الزاوي، بصورة أكثر اقتضاباً، بدلالة زخم الجسيم p :

تعريف مكافئ

$$L = r \times p. \quad (٩,٢)$$

وفي المعادلتين ٩,١ و ٩,٢، r هو متجه الموضع للجسيم نسبةً إلى نقطة أصلٍ اعتباطية. ويعني هذا أن الزخم الزاوي، مقداراً واتجهاً على حدٍ سواء، قد يعتمد على اختيار نقطة الأصل. بالرغم من ذلك، فإنه مفهومٌ مفيدٌ جداً، كما سيظهر لنا في هذا الباب. وكما هو مبين في شكل ٩,١، يكون الزخم الزاوي عمودياً على مستوى r و v ، وتحدد قاعدة اليد اليمنى لحاصل الضرب الاتجاهي اتجاهه على امتداد هذا الخط العمودي. أما مقدار L فهو

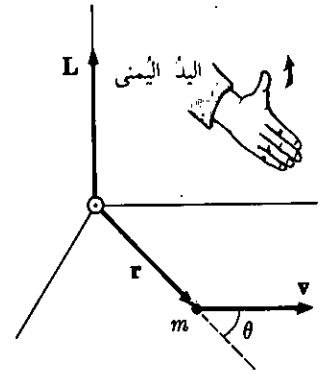
$$L = mrv \sin \theta = rp \sin \theta, \quad (٩,٣)$$

* وبعبارة أصح، فهو متجه محوري axial vector (أنظر بند ٦,٨).

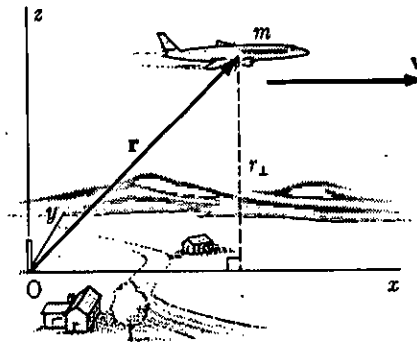
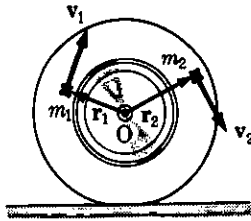
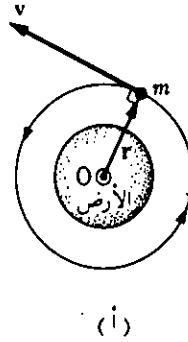
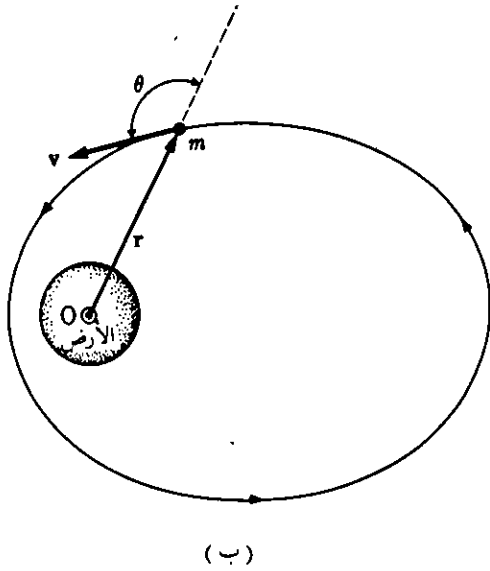
حيث θ هي الزاوية الصغرى بين $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$. وأن اختيار $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ بدلاً من $\mathbf{p} \times \mathbf{r}$ ، لتعريف $\mathbf{L}$ إن هو إلا عُرِفَ اعتباطيً *arbitrary convention*، شبيه بالاختيار المعياري لنظام إحداثي يميني.

وإذا كانت السرجة $\mathbf{v}$ عموديةً على متجه الموضع $\mathbf{r}$ ، كما هو الحال لحركة دائرية حول نقطة الإسناد [شكل ٩,٢ (أ)]، يكون مقدار الزخم الزاوي

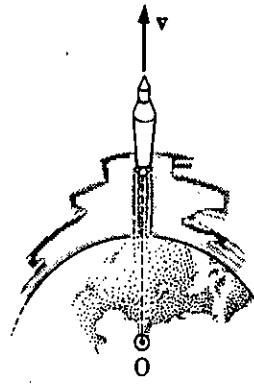
$$L = mrv = rp \quad (\mathbf{r} \perp \mathbf{v}). \quad (٩,٤)$$



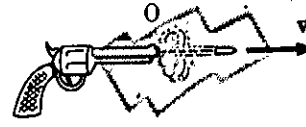
شكل ٩,١ : يُعرّف الزخم الزاوي لجسيم، نسبةً إلى نقطة أصل اعتباطية، بواسطة صيغة حاصل الضرب الاتجاهي $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$.



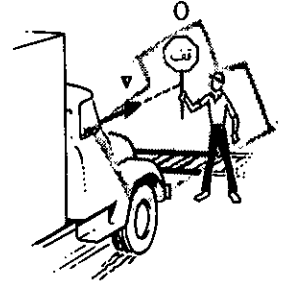
شكل ٩,٢ : أمثلة على حركة ذات زخم زاوي. (أ) قمر صناعي في مدار دائري، و (ب) قمر صناعي في مدار إهليلجي. ويمثل مركز الأرض أنسب نقطة إسناد لكلتا الحالتين. (ج) للطائرة المتحركة في خط مستقيم زخم زاوي نسبةً إلى نقطة على الأرض. (د) وفي دولابٍ دائر، يساهم كل جزء من المادة بنصيبه في الزخم الزاوي الكلي. ... نقطة الإسناد اعتباطية في كل واحد من هذه الأمثلة. أنظر أيضاً شكل ٢,٥.



(جـ)

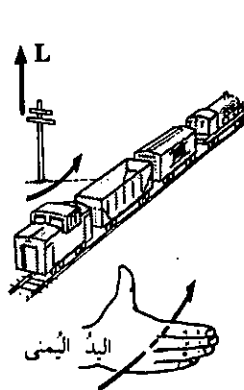


(ب)

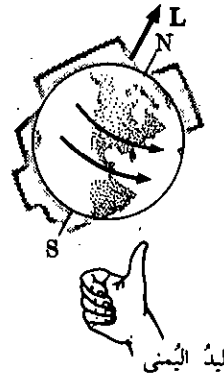


(أ)

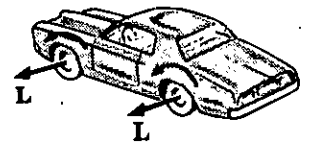
شكل ٩,٣ : أمثلة على حركة بدون زخم زاوي. فليس للشاحنة زخم زاوي بالنسبة إلى إشارة الوقوف ، ولا للرصاص بالنسبة إلى ماسورة البندقية ، ولا للصاروخ المنطلق رأسياً بالنسبة إلى مركز الأرض . لكن يكون لكل زخم زاوي بالنسبة إلى نقطة أصلي أخرى .



(جـ)



(ب)



(أ)

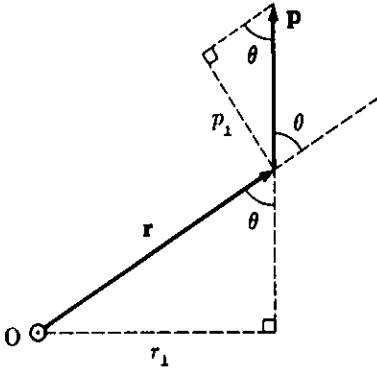
شكل ٩,٤ : اتجاه الزخم الزاوي. للدواب الدائرة وللأرض الدائرة زخم زاوي على امتداد محور الدوران . كذلك يكون للقطار زخم زاوي عمودي على خط يوصله مع نقطة الإسناد .

من ناحية أخرى ، إذا كانت السرجة متجهة تماماً نحو نقطة الإسناد أو بعيداً عنها [أي إذا كان r و v متوازيين] (شكل ٩,٣) ، فإن حاصل الضرب الاتجاهي $r \times v$ يتلاشى ويكون

$$L = 0 \quad (r \parallel v). \quad (٩,٥)$$

أما بالنسبة لاتجاهات متوسطة للسرجة [الشكلان ٩,٢ (ب) و ٩,٢ (جـ)] ، فإن العامل $\sin \theta$ في المعادلة ٩,٣ يجعل مقدار L بين صفر و rp . ويؤكد شكل ٩,٤ الخاصية الاتجاهية الهامة للزخم الزاوي .

وتكون طرق بديلة مفيدة أحياناً لكتابة المعادلة ٩,٣ ... لاحظ ، مثلاً ، أن $r \sin \theta$ هي



شكل ٩,٥ : تعريف $r_{\perp}$ و $p_{\perp}$ ، المقيدان أحياناً في التعبير عن الزخم الزاوي (أنظر المعادلتين ٩,٦ و ٩,٧).

نفسها $r_{\perp}$ ، أي مركبة r العمودية على p (شكل ٩,٥) . وبذلك ، يمكن كتابة مقدار L على الصورة :

$$L = r_{\perp} p. \quad (٩,٦)$$

وثمة تعبير مكافئ آخر هو

تعبير آخران للمقدار L

$$L = r p_{\perp}, \quad (٩,٧)$$

حيث $p_{\perp}$ مركبة p العمودية على r (شكل ٩,٥) . ويمكن إعطاء المعادلة ٩,٧ تأويلاً فيزيائياً طريفاً ؛ حيث أن الزخم الزاوي يقيس خاصية دورانية للحركة . فإذا تحرك جسيم في خط مستقيم متجهاً نحو (أو مبتعداً عن) نقطة ما ، فإنه لا يميل إلى الدوران حول تلك النقطة . وعلى ذلك ، فلا يكون له زخم زاوي بالنسبة إلى تلك النقطة المعينة . أما إذا تحرك الجسيم متعامداً مع الخط الذي يصله مع نقطة الإسناد ، فإن قابليته للدوران حول تلك النقطة تكون أقصى ما يمكن . وفي تلك الحالة ، تتخذ المركبة العمودية $p_{\perp}$ قيمتها القصوى . وبين هذين الحدين ، يساهم جزء معين من الزخم — ممثلاً بمركبته العمودية — في القابلية للدوران ؛ في حين أن جزءاً آخر ، هو مركبته الموازية للمتجه r ، لا يفعل ذلك . وأبسط طريقة للتعرف على ما نسبه هنا قابلية الدوران هي تصوّر حركة خط وهمي مرسوم من نقطة الإسناد إلى الجسيم . فإذا دار هذا الخط عندما يتحرك الجسيم ، كان للجسيم زخم زاوي . أما إذا لم يدّر ، بل اكتفى بالامتداد أو الانكماش عند حركة الجسيم ، فلا يكون للجسيم زخم زاوي .

وكما يتضح من التعريف ، فإن البعد الفيزيائي للزخم الزاوي هو حاصل ضرب أبعاد الكتلة ، والمسافة ، والسرعة ؛ كما أن وحدته في النظام الدولي SI هي كـ غ م^٢/ث . ولم يطلق على هذا الائتلاف من الوحدات اسم جديد لذاته (بخلاف ، مثلاً ، ١ كـ غ م/ث^٢ ، الذي يساوي ١ نيوتن) . ويحتوي بند ٢,١١ على بحث وصفي عن الزخم الزاوي . فمن الأفضل أن نفكر في «مدلول» الزخم الزاوي على أنه تمثيل لشدة الحركة الدورانية ، ومقياس للجهد اللازم لبدء أو إيقاف مثل هذه الحركة .

أما أن يكون الجسيم زخم زاوي دون أن يدور فعلاً حول نقطة ، فيتضح من خلال المثال على الحركة بسرعة ثابتة في خط مستقيم تصور جسيماً يتحرك رأسياً إلى أعلى بسرعة v ماراً بنقطة P ، بحيث تساوي مسافة أدنى نقطة اقتراب له من P الكمية b (شكل ٩,٦) . عند نقطة الاقتراب الدنيا هذه ، الموسومة بالحرف A ، تكون r متعامدة مع v ؛ وبموجب المعادلة ٩,٣ أو المعادلة ٩,٦ ، يكون مقدار الزخم الزاوي

$$L_A = m v b. \quad (٩,٨)$$

أما اتجاه L_A فيكون إلى أعلى ، متعامداً مع مستوى الصفحة . وفيما بعد ، عند النقطة B ، يكون الجسيم على بُعد أكبر r عن النقطة P ؛ إلا أن العامل $\sin \theta$ يكون أصغر ، بحيث يظل الناتج $r \sin \theta$ مساوياً للمسافة b . باستخدام هذا المنطق ، أو مباشرة من المعادلة ٩,٦ ، نجد أن

$$L_B = m v b, \quad (٩,٩)$$

... مساوياً لمقدار L_A ؛ كما أن اتجاه L_B يكون أيضاً إلى أعلى متعامداً مع مستوى الصفحة . بناءً على ذلك ، يمكننا كتابة المتساوية الاتجاهية

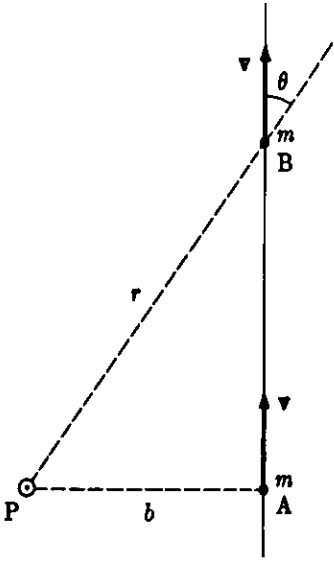
$$L_A = L_B. \quad (٩,١٠)$$

له زخم زاوي ثابت

وبما أن النقطة B تمثل أية نقطة على الإطلاق على امتداد مسار الجسيم ، فإن الزخم الزاوي يكون ثابتاً . وبدلالة المعادلة التعريفية ٩,١ ، ينتج هذا الثبوت لأن الزيادة في مقدار r ، عندما يتحرك الجسيم إلى أعلى مبتعداً عن النقطة A ، تعادل تماماً النقصان في الزاوية بين r و v ، بحيث يظل حاصل الضرب الاتجاهي $r \times v$ ثابتاً .

يبين هذا المثال البسيط للحركة بسرجهة ثابتة سمتين هامتين للزخم الزاوي . فهو يبين ، أولاً ، أن تعريف الزخم الزاوي ، رغم تعقيده ، يمكن أن يكون مفيداً لأنه يؤدي إلى النتيجة بأن الزخم الزاوي ثابت في حالة الحركة القصورية بسرجهة ثابتة . لاحظ أن الزخم الزاوي للجسيم المتحرك بانتظام يختلف بالنسبة إلى نقاط الإسناد المختلفة ؛ لكنه لا يتغير مع الزمن بالنسبة إلى نقطة إسناد معينة . كذلك يبين المثال ، ثانياً ، أن الزخم الزاوي قد يرافق الحركة اللادورانية . على كل حال ، فإن هناك شيئاً يدور ؛ وذلك الشيء هو الخط الوهمي الذي يصل نقطة الإسناد مع الجسيم . ويدور هذا الخط باتجاه معاكس لعقربي الساعة في شكل ٩,٦ عندما يتحرك الجسيم . وبدون هذا الدوران ، لا وجود للزخم الزاوي .

ومن بين أمثلة الحركة ذات الزخم الزاوي ، ليس ما هو أبسط رياضياً من الدوران المنتظم لجسيم في دائرة [شكل ٩,٢ (أ)] . وتفترض هذه البساطة اختيار مركز الدائرة كنقطة الإسناد . فهذا الاختيار ، يكون اتجاه الزخم الزاوي على امتداد محور الدائرة كما يكون مقداره ثابتاً :



شكل ٩,٩ : الحركة في خط مستقيم بسرجهه ثابتة .
فيكون للجسيم زخم زاوي ثابت بالنسبة إلى النقطة

P

$$L = mvr = pr, \quad (٩,١١)$$

يكون له زخم زاوي ثابت بالنسبة إلى المركز

حيث r نصف قطر الدائرة . ويمكن استخدام هذه المعادلة لحساب الزخم الزاوي للأرض حول الشمس إلى درجة كافية من الدقة ، أو لرائد فضاء في مدار دائري حول الأرض ، أو لحجر يدور عند طرف حبل .

■ مثال ١ : إن الإلكترون عند أطراف الذرة يبعد - في المتوسط - حوالي نصف أنغستروم ($٠,٥ \times ١٠^{-١٠}$ م) عن النواة ، ويتحرك بسرعة تقارب جزءاً واحداً بالثمة من سرعة الضوء ، أو ٣×١٠^8 م/ث . فما الزخم الزاوي للإلكترون بالنسبة إلى النواة ؟

بما أن طرق الميكانيكا الكلاسيكية لا يسري مفعولها - بصورة عامة - في العالم دون المجهرى الذي تحكمه ميكانيكا الكم ° ، فإن المعادلة ٩,١١ لا تزودنا - في أحسن الأحوال - إلا بمجرد تقدير غير دقيق لزخم الإلكترون ؛ إذ تُعطينا ، للحركة الدائرية ،

$$L = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 3 \times 10^8 \text{ m/sec} \times 0.5 \times 10^{-10} \text{ m} \\ = 1.37 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{sec}.$$

والواقع أنه ، في العالم دون المجهرى (وفي العالم بمقياسه الكبير أيضاً) ، يرد الزخم الزاوي المداري دائماً بوحدات ثابت بلانك مقسوماً على 2π (ومقداره $h = ١,٠٥ \times ١٠^{-٣٤}$ كـ غ م^٢/ث) . فيمكن أن يُساوي الزخم الزاوي للإلكترون h ، أو $2h$ ، أو $3h$ ، لكن ليس القيمة المحسوبة ، التي هي حوالي $1.3h$. على كل حال ، فالقيمة المحسوبة قد أعطتنا الرتبة الصحيحة للمقدار .

أهمية الثابت h

° فالمعادلة ٩,١ ، مثلاً ، لا تنطبق أبداً على الجسيمات العديمة الكتلة ، التي يمكن أن يكون لها زخم زاوي ، رغم كون كتلتها صغراً . $m = \text{صغراً}$

■ مثال ٢ : كتلة الطائرة المبيّنة في شكل ٩,٢ (ج) هي ١٠ كغ وسرعتها ٢٥٠ م/ث . فإذا كان ارتفاعها ٨ كم ومسافتها الأفقية عن نقطة الأصل المختارة ٨ كم أيضاً ، فما زخمها الزاوي بالنسبة إلى نقطة الأصل هذه ؟

مقدار L من المعادلة ٩,٦ هو

$$L = r_{\perp} p = 8 \times 10^3 \text{ m} \times 10^5 \text{ kg} \times 250 \text{ m/sec} \\ = 2 \times 10^{11} \text{ kg m}^2/\text{sec}.$$

(فلا أثر للمسافة الأفقية .) أمّا اتّجاهه فأفقيّ - إلى الشمال ، مثلاً ، إذا كانت الطائرة نظير باتجاه الشرق . ويمكن معالجة نفس المثال بصورة أكثر منهجية باستخدام المتجهات . . . قم باختيار محور x بحيث يوازي السّرجة v ، ومحور z بحيث يكون رأسياً إلى أعلى كما في الشكل . عند ذلك

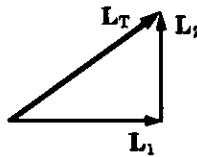
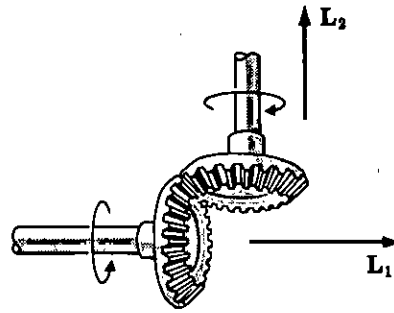
$$L = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} = m(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times v\mathbf{i},$$

حيث $x = z = 8 \text{ km}$. وباستخدام المعادلة ٦,٦٨ نجد أنّ

$$L = mxv\mathbf{i} \times \mathbf{i} + mzv\mathbf{k} \times \mathbf{i}.$$

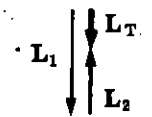
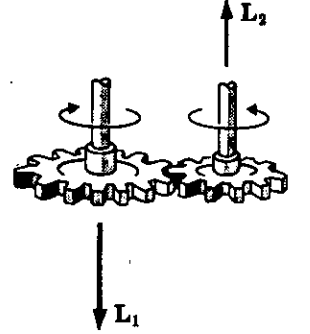
وبما أنّ حاصلَي الضرب الاتجاهيّين لمتجهات الوحدة هما $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$ و $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ ، فإنّ الجواب النهائي هو

$$L = mzv\mathbf{j},$$



$$L_T = L_1 + L_2$$

(ب)



$$L_T = L_1 + L_2$$

(أ)

شكل ٩,٧ : الجمع الاتجاهي للزخم الزاوي . (أ) الزخم الزاوي الكلي لهذا الزوج من التروس gears صغير في مقداره ، ويكون اتّجاهه إلى أسفل . (ب) اتجاه الزخم الزاوي الكلي لهذا الزوج من التروس ليس على امتداد أي من المحورين .

باتجاه محور y وبمقدار 2×10^{11} كغ م²/ث .

تُجمع الزخام كالتجهات

إن الطبيعة الاتجاهية للزخم الزاوي من الأهمية بمكان . وعلى وجه الخصوص ، فإن اثنين أو أكثر من الزخام الزاوية تُجمع جمعاً اتجاهياً . ونُدلل على مثل هذا الجمع في شكل ٩،٧ . فحاصل جمع زخمين زاويين متساويين ومتضادين يساوي صفراً ، تماماً كحاصل جمع قوتين أو زخمين متساويين ومتضادين (أنظر شكل ٤،٣) .

٩،٢ الزخم الزاوي للأنظمة The Angular Momentum of Systems

معظم أمثلة الحركة الدورانية التي نصادفها في العالم بمقياسه الكبير ليست حركة دورانية للجسيمات ؛ بل هي حركة دورانية لأجسام تشكل أنظمة مكونة من العديد من الجسيمات أو الأجزاء . وحتى في العالم بمقياسه الصغير ، فإنه يجب النظر إلى غزل الجسيم المفرد على أنه دوران لبينة ما . وسنعالج في هذا البند الزخم الزاوي للأنظمة بشكل عام . وفي سياق ذلك ، سنستطيع إثبات النظرية التالية : إذا كان مركز كتلة نظام من الجسيمات في حالة سكون ، فإن الزخم الزاوي للنظام يظل على حاله بالنسبة إلى جميع نقاط الإسناد . فالزخم الزاوي لجسيم مفرد متحرك يعتمد دائماً على اختيار نقطة الإسناد ؛ بل قد يكون متغيراً بالنسبة إلى نقطة إسناد معينة ، وثابتاً بالنسبة إلى أخرى . على صعيد آخر ، فإنه يمكن تعريف الزخم الزاوي لاثنتين أو أكثر من الجسيمات بصورة فريدة - واحدة بالنسبة إلى جميع نقاط الإسناد - وذلك في إطار إسناد يكون فيه مركز الكتلة ساكناً . ومع أن إثبات هذه العبارة معقد بعض الشيء ، إلا أنه يخدم كمثال طريف على قوة التفاضل والتكامل الاتجاهي والجبر الاتجاهي .

نظرية هامة

اعتبر فئة من الجسيمات كتلتها m_1 ، m_2 ، m_3 ، ... ومتجهات مواضعها r_1 ، r_2 ، r_3 ، ... وكما يظهر في شكل ٩،٨ ، فإنه يمكن التعبير عن كل متجه موضع كمجموع متجه مركز الكتلة ، r_c ، مع متجه الموضع للجسيم نسبة إلى مركز الكتلة . فبالنسبة للجسيم i ، نكتب

$$r_i = r_c + r'_i \quad (٩،١٢)$$

ويمكن كتابة الزخم الزاوي لنظام الجسيمات ، بالنسبة إلى نقطة الأصل المختارة اعتباطاً ، كالمجموع

$$L = \sum_i m_i r_i \times v_i \quad (٩،١٣)$$

حيث v_i سرجهة الجسيم i . وبتعويض المعادلة ٩،١٢ في المعادلة ٩،١٣ ، نجد أن

$$L = \sum_i m_i (r_c + r'_i) \times v_i \quad (٩،١٤)$$

ويمكن إعادة كتابة صيغة L هذه على الصورة :

$$L = L_1 + L_2, \quad (9,15)$$

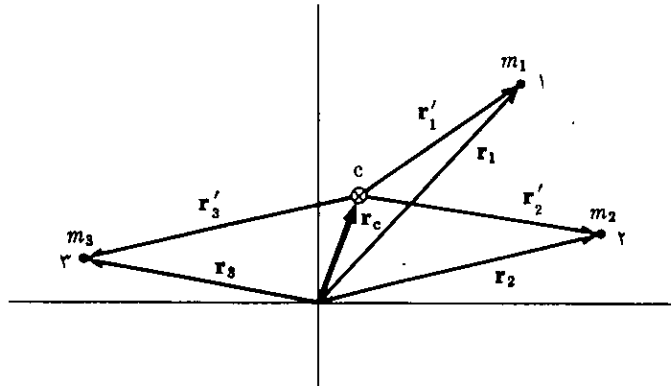
حيث

$$L_1 = r_c \times \sum_i m_i v_i,$$

$$L_2 = \sum_i m_i r'_i \times v_i.$$

لاحظ أنه بالإمكان إخراج المتجه r_c من المجموع المعبر عن L_1 . ولتبسيط L_1 أكثر، نستخدم المعادلة ٨,١٨، التي تكافئ

$$\sum_i m_i v_i = M v_c. \quad (9,16)$$



شكل ٩,٨ : متجه الموضع لكل جسيم في نظام، ما يمكن كتابته كمجموع متجه الموضع لمركز الكتلة ومتجه الموضع للجسيم نسبة إلى مركز الكتلة : $r_i = r_c + r'_i$.

M هنا هي الكتلة الكلية ($M = \sum_i m_i$) و v_c سرعته مركز الكتلة. لذلك، فإن

$$L_1 = M r_c \times v_c. \quad (9,17)$$

ولمعالجة L_2 ، نلاحظ أن

$$v_i = \frac{d}{dt} (r_c + r'_i) = v_c + v'_i; \quad (9,18)$$

وبذلك يمكننا الكتابة :

الزخم الزاوي الكلي يمكن قسمته
إلى جزأين

يُعبّر عن الجزء الأول بدلالة متغيرات
مركز الكتلة

$$L_2 = \sum_i m_i \mathbf{r}_i' \times (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i')$$

$$= \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i' \right) \times \mathbf{v}_c + \sum_i m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i' .$$

... ما هي الكمية $\sum_i m_i \mathbf{r}_i'$ ؟ ... إذا قَسَمْنَاها على M ، فإنها تُحدِّدُ مَتَجَّةَ مركز الكتلة نسبةً إلى مركز الكتلة ! وعلى ذلك فإنها يجب أن تُساويَ صفرًا . (تجدُ طريقةً أخرى مقترحةً في تمرين ٩,١١ لإثبات تَلاشيها .) لذا ، تكون الكمية L_2

$$L_2 = \sum_i m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i' . \quad (٩,١٩)$$

يُعبَّرُ عن الجزء الثاني نسبةً إلى مركز الكتلة

وبالتالي يكون الزخم الزاوي الكلي للنظام ، $L_1 + L_2$ ،

$$L = M \mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_c + \sum_i m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i' . \quad (٩,٢٠)$$

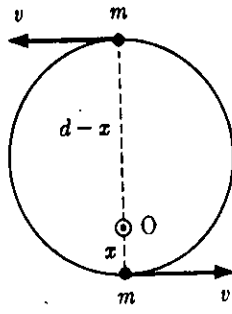
اعتبر الآن ماذا يحدثُ إذا تغيَّرتُ نقطةُ الأصلِ للنظامِ الإحداثي . . . يتضح من شكل ٩,٨ أن مَتَجَّةَ الموضع لمركز الكتلة $\mathbf{r}_c$ يتغيَّرُ ؛ بينما لا تتغيَّرُ مَتَجَّهاتُ الموضع النسبية $\mathbf{r}_i'$ ، كما لا تتغيَّرُ مشتقاتُها الزمنية $\mathbf{v}_i'$. وعلى ذلك ، ففي التعبير العام للزخم الزاوي ، المعادلة ٩,٢٠ ، يعتمدُ الحدُّ الأولُ على موقع نقطة الأصل (نقطة الإسناد لتعريف الزخم الزاوي) ؛ بينما لا يعتمد الحدُّ الثاني على النقطة المذكورة . ولإتمام برهان النظرية الواردة في بداية هذا البند ، علينا فقط اعتبار الحالة الخاصة التي يكونُ فيها مركز الكتلة ساكنًا . عند ذلك فإن $\mathbf{v}_c = 0$ ، ويتلاشى الحدُّ الأولُ في المعادلة ٩,٢٠ . فيكون الزخم الزاوي الكلي مساويًا للحدِّ الثاني ، الذي لا يعتمد على اختيار نقطة الأصل . وللتعبير عن ذلك بصورة أخرى نقول : إذا كان مركز الكتلة ساكنًا ، فإنه يمكن حساب الزخم الزاوي بالنسبة إلى أية نقطة إسناد ، وتكون النتيجة واحدة في جميع الحالات .

إذا كانت $\mathbf{v}_c = 0$ ، فإن $L = L_2$ يعتمدُ على اختيار نقطة الأصل

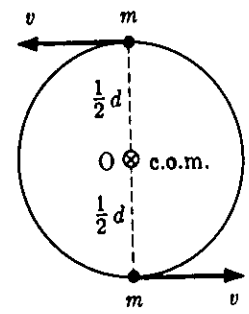
■ مثال : يمكن التَّدليلُ على النتيجة العامة السابقة بنظام بسيط . . . جسيَّان متساويا الكتلة يدوران حول النقطة الثابتة عند منتصف المسافة بينهما (شكل ٩,٩) . المسافة بينهما d ؛ وكتلة كلٍّ منها m ، وسرعته v ، كما أنه على بُعد $d/2$ عن مركز الكتلة الساكن . وبذلك يكون مقدار الزخم الزاوي لكل جسيم بالنسبة إلى النقطة الوسطى :

$$L_1 = L_2 = \frac{1}{2} m v d$$

وبما أنَّ للزَّخْمَيْنِ نفسَ الاتجاه (عموديٌّ على مستوى الصَّفحةِ إلى أعلى في شكل ٩,٩) بالإضافة إلى نفس المقدار ، فإنَّ مقدارَي المتَّجهَيْنِ يُجمَعَانِ عددِيًّا للحصول على المقدار الكلي :



(ب)



(أ)

شكل ٩,٩ : يكون لجسيمين متساويي الكتلة ، يدوران حول مركز كتلتها الساكن ، نفس الزخم الزاوي بالنسبة إلى أية نقطة . وبدل هذا على نظريته عامة : إذا كانت $v_c = 0$ ، فإن L_{total} لا يعتمد على اختيار نقطة الأصل .

$$L = L_1 + L_2 = mvd. \quad (٩,٢١)$$

ويساوي هذا المقدار الزخم الزاوي الكلي لزوج الجسيمات بالنسبة إلى النقطة الواقعة في منتصف المسافة بينهما . إعتبر الآن نقطة إسناد تقع عند موضع أحد الجسيمين . فلا يكون لهذا الجسيم زخم زاوي بالنسبة إلى موقعه ذاته ($r = 0$) . أما الجسيم الثاني ، الذي يبعد مسافة d ، فيكون زخمه الزاوي mvd . ويكون مجموع الزخمين mvd مرة ثانية . وأخيراً اختر نقطة إسناد متوسطة تبعد مسافة x عن أحد الجسيمين و $d - x$ عن الآخر [شكل ٩,٩ (ب)] . فيكون الزخمان الزاويان بالنسبة إلى نقطة الإسناد هذه :

$$L_1 = mvx,$$

$$L_2 = mv(d - x).$$

كما يكون للمجموع نفس القيمة مرة أخرى :

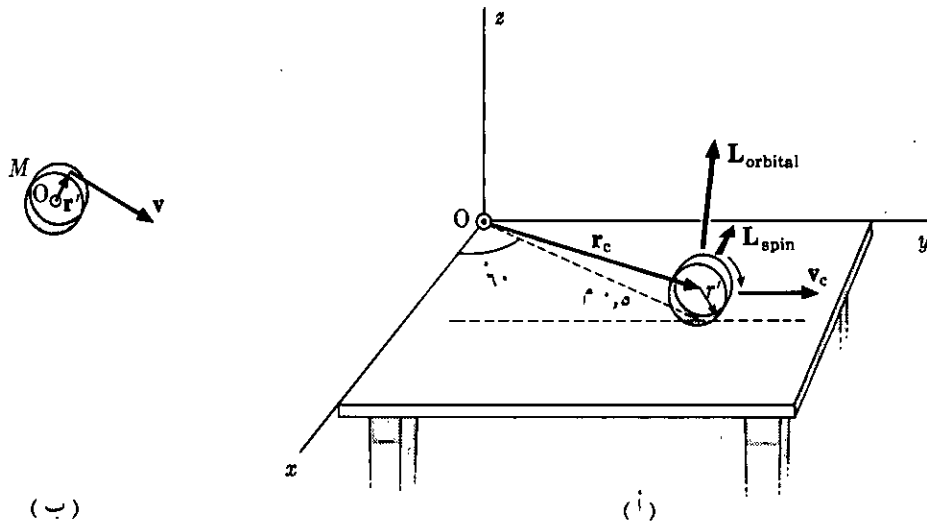
$$L = L_1 + L_2 = mvd.$$

٩,٣ الزخم الزاوي المداري والزخم الزاوي المغزلي

Orbital Angular Momentum and Spin Angular Momentum

وفقاً للمعادلة ٩,٢٠ ، يمكن قسمة الزخم الزاوي الكلي لنظام ما إلى حدين مختلفي الشكل تماماً . أما الأول فيحتوي فقط على الكتلة الكلية وخواص مركز الكتلة ؛ ويسمى الزخم الزاوي الدوراني . وأما الثاني فهو الزخم الزاوي للنظام نسبة إلى مركز كتلته ؛ ويسمى هذا بالزخم الزاوي المغزلي ، أو غالباً مجرد الغزل . ولتخصيص نتائج البند السابق ، باستخدام هذين الاسمين ، نجد أن :

$$L = L_{orbital} + L_{spin}; \quad (٩,٢٢)$$



شكل ٩،١٠ : طُوقٌ يَنْدَحْرَجُ عَلَى سَطْحٍ مَبْضَدَةٍ . (أ) فِي إِطَارِ إِسْنَادِ الْمُخْتَبِرِ ، الَّذِي نَقَعَ فِيهِ نَقْطَةُ الْأَصْلِ عِنْدَ إِجْدَى زَوَايَا الْمَبْضَدَةِ ، يَكُونُ الزَّخْمُ الْمَغْزَلِيُّ L_{spin} مُتَّجِهاً عَلَى امْتِدَادِ مَحْوَرِ الطُّوقِ ؛ بَيْنَمَا يَكُونُ الزَّخْمُ الْمَدَارِيُّ $L_{orbital}$ مَائِلاً قَلِيلاً عَنِ الْإِتِّجَاهِ الرَّأْسِيِّ (بِاتِّجَاهٍ مُتَعَامِدٍ مَعَ مَسْتَوَى r_c وَ v_c) . (ب) يُحَسَّبُ الزَّخْمُ الزَّائِي الْمَغْزَلِيُّ بِاعْتِبَارِ الْحَرَكَةِ فِي إِطَارِ إِسْنَادِ نَقَعَ فِيهِ نَقْطَةُ الْأَصْلِ عِنْدَ مَرْكَزِ كَلَّةِ الطُّوقِ .

$$L_{orbital} = M r_c \times v_c, \quad (٩,٢٣)$$

إِسْمَانُ جَدِيدَانِ لِنَوْعِي الزَّخْمِ الزَّائِي

$$L_{spin} = \sum_i m_i r'_i \times v'_i. \quad (٩,٢٤)$$

إِنَّ L_{spin} مُسْتَقِلٌّ عَنِ اخْتِيَارِ نَقْطَةِ الْأَصْلِ

وَالْعَزْلُ هُوَ الزَّخْمُ الزَّائِي لِنِظَامٍ مُحَسَّباً بِالنِّسْبَةِ إِلَى مَرْكَزِ الْكَلَّةِ ، سَوَاءً كَانَ مَرْكَزُ الْكَلَّةِ سَاكِناً أَوْ مُتَحَرِّكاً ؛ إِذْ أَنَّهُ خَاصِيَّةٌ ذَاتِيَّةٌ لِلنِّظَامِ ، مُسْتَقِلَّةٌ عَنِ نَقْطَةِ إِسْنَادِ الْمَشَاهِدِ . فَإِذَا كَانَ جِسْمٌ مَا - مِثْلاً ، خُذْ رُوفَ top أَوْ مِرْوَحَةَ (مِدْسَرَة) propeller طَائِرَةٍ جَائِيَةٍ فِي مَوْقِعِهَا - يَدُورُ حَوْلَ مَحْوَرٍ سَاكِنٍ يَمُرُّ بِمَرْكَزِ كَلَّتِهِ ، فَإِنَّ زَخْمَهُ الزَّائِي الْمَغْزَلِيَّ يَكُونُ مُسَاوِياً لَزَخْمِهِ الزَّائِي الْكَلِّيِّ . وَبِصُورَةٍ أَعَمَّ ، فَقَدْ يَكُونُ مَرْكَزُ الْكَلَّةِ مُتَحَرِّكاً ؛ وَفِي هَذِهِ الْحَالَةِ يَكُونُ الْعَزْلُ فَقْطَ جِزْءاً مِنَ الْمَجْمُوعِ . عَلَى كُلِّ حَالٍ ، فَإِنَّ الْعَزْلَ ذَاتَهُ مُسْتَقِلٌّ عَنِ الْحَرَكَةِ الْجَزْمِيَّةِ . فَالزَّخْمُ الزَّائِي الْمَغْزَلِيَّ لِلْأَرْضِ ، مِثْلاً ، لَا يَعْتَمِدُ عَلَى السَّرْعَةِ الْمَدَارِيَّةِ لِلْأَرْضِ ؛ وَيُحَسَّبُ كَمَا لَوْ كَانَ مَحْوَرُ الْأَرْضِ سَاكِناً .

إِنَّ التَّشَابُهَ وَاضِحٌ بَيْنَ الْمَعَادِلَةِ ٩،٢٣ ، الَّتِي تُعَرِّفُ الزَّخْمَ الزَّائِي الْمَدَارِيَّ لِنِظَامٍ ، وَالْمَعَادِلَةِ ٩،١ ، الَّتِي تُعَرِّفُ الزَّخْمَ الزَّائِي الْجَسِيمَ مُفْرَدٍ . وَعَلَى ذَلِكَ ، نَسْتَطِيعُ أَنْ نَقُولَ إِنَّ الزَّخْمَ الزَّائِي الْمَدَارِيَّ لِنِظَامٍ يُسَاوِي الزَّخْمَ الزَّائِي لَجُسِيمٍ كَلَّتُهُ M مَوْضُوعٍ عِنْدَ مَرْكَزِ الْكَلَّةِ . فَلِكُلِّ تَحْسِبٍ الزَّخْمِ الزَّائِي الْمَدَارِيَّ لِلْأَرْضِ بِالنِّسْبَةِ إِلَى الشَّمْسِ ، مِثْلاً ، اسْتَبْدَلَ الْأَرْضَ بِجُسِيمٍ كَلَّتُهُ M

لِإِيجَادِ $L_{orbital}$ ، إِعتَبِرِ النِّظَامَ كَنَقْطَةٍ عِنْدَ مَرْكَزِ الْكَلَّةِ

موضوع عند مركزها . وبما أن الزخم الكلي P لنظام يساوي Mv_c (المعادلة ٨,٢٢) ، فإنه يمكن تعريف الزخم الزاوي المداري أيضاً بالعلاقة

$$L_{\text{orbital}} = r_c \times P, \quad (٩,٢٥)$$

التي تشبه إلى حد كبير المعادلة ٩,٢ للجسيم . فالزخم الزاوي المداري ، مثله مثل الزخم الزاوي لجسيم ، يعتمد على نقطة الإسناد المختارة .

■ مثال : طوق hoop نصف قطره ٦ سـم وكتلته ٠,٣ كـرغ يتدحرج على سطح منضدة بسرعة ٤٠ سـم/ث . وكما هو مبين في شكل ٩,١٠ (أ) ، فإن حركته مُسندة إلى نظام إحداثي ديكارتي تقع نقطة أصله عند الزاوية الخلفية اليسرى للمنضدة ؛ كما أن طول الخط المرسوم من نقطة الأصل إلى نقطة تلامس الطوق مع المنضدة يساوي ٥٠ سـم ويصنع زاوية ٦٠ مع المحور x . فما الزخم الزاوي الدوراني والمغزلي ، بالنسبة إلى نقطة الأصل المختارة ؟ وما الزخم الزاوي الكلي ؟

تبدو هذه المسألة معقدة لأول وهلة ؛ إلا أنها ستبدو سهلة في ضوء معالجة منهجية . لنحدد أولاً خواص مركز الكتلة (بوحداث م كـث) :

$$r_c = 0.5 \cos(60 \text{ deg}) \mathbf{i} + 0.5 \sin(60 \text{ deg}) \mathbf{j} + 0.06 \mathbf{k},$$

$$v_c = 0.4 \mathbf{j} \text{ m/sec.}$$

وبذلك يكون الزخم الزاوي المداري

$$L_{\text{orbital}} = Mr_c \times v_c$$

$$= 0.3(0.25\mathbf{i} + 0.433\mathbf{j} + 0.06\mathbf{k}) \times 0.4\mathbf{j}.$$

وبما أن $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ، $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$ ، و $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ ، فإن النتيجة تكون :

$$L_{\text{orbital}} = (0.030\mathbf{k} - 0.0072\mathbf{i}) \text{ kg m}^2/\text{sec.}$$

وهذا متجه مقداره ٠,٣٠٩ كـرغ م^٢/ث ، ويميل قليلاً بمنأى عن الاتجاه الرأسي .

أما لإيجاد L_{spin} فنعتبر الحركة نسبة إلى مركز الكتلة إن هذه حركة دائرية منتظمة . ويقع كل عنصر كتلة على نفس البعد عن مركز الكتلة $r' = ٠,٠٦$ م ؛ كما يتحرك كل عنصر كتلة ، نسبة إلى مركز الكتلة ، بنفس السرعة $v' = ٠,٤$ م/ث ، حيث يتعامد v' مع r' [شكل ٩,١٠ (ب)] . كذلك في المعادلة ٩,٢٤ يكون $r_i \times v_i$ هو نفسه لكل عنصر كتلة ؛ وهكذا ، فإن

$$L_{\text{spin}} = Mr' \times v'.$$

وهذا متجه في الاتجاه السالب لمحور x ومقداره $Mr'v'$:

$$L_{spin} = -0.0072i \text{ kg m}^2/\text{sec}.$$

وهو، بالطبع، لا يعتمد على موقع نقطة الأصل. أما الزخم الزاوي الكلي،
 $L_{orbital} + L_{spin}$ ، فيكون

$$L = (0.030k - 0.0144i) \text{ kg m}^2/\text{sec}.$$

لقد وجدَ تقسيمُ الزخم الزاوي إلى جزء مداري وآخر مغزلي فائدةً كبيرةً في دنيا
 الجسيمات. فلمعظم الجسيمات الأولية غزلٌ يُشكّلُ خاصيّةً ذاتيّةً ثابتةً للجسيم. بالإضافة إلى
 ذلك، فقد يمتلك أيّ جسيم زخماً زاوياً مدارياً بالنسبة إلى أية نقطة إسناد (أنظر شكل ٤،٤).
 وفي صنف طريف من تصادمات الجسيمات، تدعى بتصادمات الغزل المنقلب
 spin-flip collisions، يتغيّر اتجاه الزخم الزاوي المغزلي أثناء التصادم. ونظراً للطبيعة الاتجاهية
 للزخم الزاوي وقانون حفظ الزخم الزاوي الذي تخضع له هذه التصادمات، يجب أن يتلازم
 انقلابُ غزلٍ ما مع تغيّر في الزخم الزاوي المداري - في المقدار أو الاتجاه أو في كليهما - كي يبقى
 الزخم الزاوي الكلي ثابتاً.

عندما يكون L_{total} ثابتاً، يُمكن
 أن يُعوّض تغيّر L_{spin} و $L_{orbital}$
 أحدهما الآخر

ويؤلّف نظامُ الأرض - القمر مثلاً آخر مُثيراً للاهتمام على التبادل بين الغزل والزخم الزاوي
 المداري. فموجب النظرية الحالية، كان للقمر فيما مضى غزلٌ أكبر وزخمٌ زاوي مداري أقل
 بالنسبة إلى الأرض ممّا هو عليه حالياً. أمّا الآن، فيغزل القمر على محوره مرةً واحدةً فقط أثناء
 رحلته حول الأرض كلّ ٢٧ يوماً؛ كما أنّ زخمه الزاوي المداري بالنسبة إلى الأرض يزيد كثيراً
 على زخمه الزاوي المغزلي.

٩،٤ عزومُ القصور Moments of Inertia

يمكن اعتبار أيّ جسم صلب - كرة بلياردو؛ خذروف؛ دولاب سيارة - كنظام
 جسيمات. فإذا كان الجسم يدور حول محور، فإنّ كلّ دقيقة مادّية مجهرية في الجسم تكون بمثابة
 جسيم يتحرّك في مسار دائري ويساهمُ بنصيبه المجهرى في الزخم الزاوي الكلي للجسم بأكمله
 [شكل ٩،٢ (د)]. وحساب التّكامل، كونه معيّناً بجمع عددٍ لانهائي من المساهمات المتناهية
 الصّغر، هو الأداة الرياضيّة اللاّزمة لحساب الزخم الزاوي الكلي لجسم ممتدّ extended أيّاً كان
 شكله.

□ الدّورانُ حول محورٍ اعتباطي ثابت Rotation About an Arbitrary Fixed Axis

إذا كان جسم جاسي يدور حول محور اعتباطي ثابت، يمكن أن نسمّيه المحور z ؛
 كذلك إذا كانت نقطة الإسناد لتعريف الزخم الزاوي تقع على هذا المحور؛ فإنّ مركبة الزخم

الزَاوِيَّ على امتداد المحور تتناسب مع السَّرعَة الزَاوِيَّة للجسم :

تعريف عزم القصور

$$L_z = I\omega. \quad (9,26)$$

ويسمى ثابتُ التَّنَاسُب I عَزْمَ الْقُصُورِ للجسم . ويعتمد عزمُ القصور هذا على حجم وشكل وكتلة الجسم ، وعلى موقع محور الدوران ؛ لكنه مستقلٌّ عن معدَّل الدوران . والوَحدة الدَّوَلِيَّة للكمِّيَّة I هي كـرغ م^٢.

سندلُّ أولاً على المعادلة ٩,٢٦ بمثال بسيط ، ثم نقوم بعد ذلك باشتقاق (١) يُثَبِّتُ تناسُبَ L_z مع ω ، و (٢) يُعطينا صيغةً عامَّةً لتعيين I .

■ مثال ١ : نتركز كتلة دُولَابٍ دَرَاجَةٍ مثاليٍّ أو طَوَّقٍ في دائرة نصف قطرها R . ويدورُ الطَّوَّقُ حول محور يمر بمركزه على نَحْوٍ متعامد مع مستواه (شكل ٩,١١) . فما عزم قصور الطَّوَّق ؟

للحصول على I ، علينا إيجاد L_z ثم قسمتها على ω إنَّ مركزَ الطَّوَّقِ ، الذي هو بالطبع مركز الكتلة أيضاً ، يشكِّل اختياراً مناسباً لنقطة الأصل . دَعِ τ تدلُّ على كتلة وَحْدَةٍ الأطوال من محيط rim الطَّوَّقِ بحيث تكون الكتلة التي نَحْوِهَا مسافةً صغيرةً ds :

$$dm = \tau ds.$$

وهذه الكتلة الصَّغيرة ، المتحرِّكة بسرعة v ، لها زخم زاويّ dL ، باتجاه محور z . أمَّا مقداره فهو

$$dL = dL_z = vR dm = vR\tau ds.$$

والمركبة الكليَّة للزخم الزَاوِيّ ، L_z ، هي مجموع مثل هذه المساهمات المتناهية الصَّغر ؛ أيَّ أنَّها تشكِّل التَّكامل :

$$L_z = \int dL_z = vR\tau \int_0^{2\pi R} ds. \quad (9,27)$$

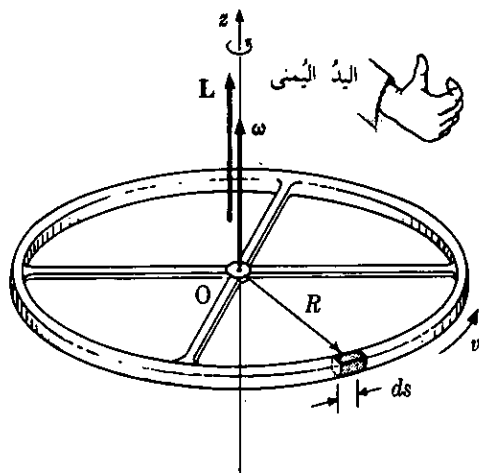
ولا يعتمد أيُّ من الكمِّيَّات v ، R ، و τ على s ، المسافة المقاسة حول المحيط . فَيُعطينا التَّكاملُ على اليمين ببساطة المقدارَ $2\pi R$ ؛ بحيث أنَّ

$$L_z = 2\pi vR^2\tau.$$

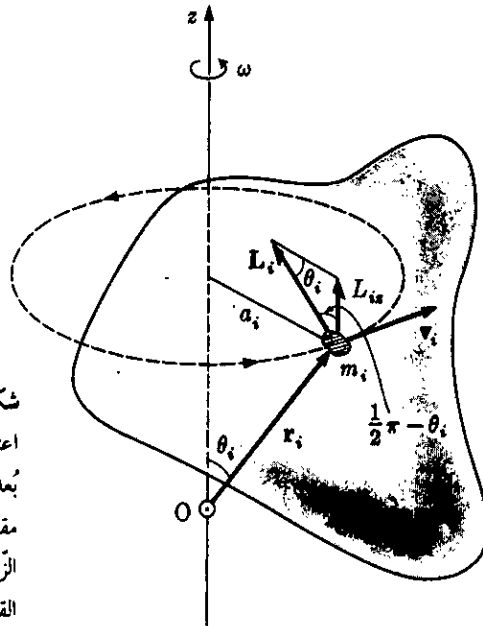
وبما أنَّ كتلة الدُولَابِ M تساوي $2\pi R\tau$ ، فإنَّ الكمِّيَّة L_z - التي هي ، في هذا المثال ، عبارة عن مقدار الزخم الزَاوِيّ الكليّ - يمكن كتابتها ، دون أدنى استغراب ،

الزخم الزَاوِيّ المِعْزَلِيّ لِطَوَّقٍ

$$L_z = L = MvR. \quad (9,28)$$



شكل ٩،١١ : دولاب يدور : يقع معظم كتلته تقريباً على بُعد ثابت R عن مركزه ؛ كما تقع الكتلة dm ضمن المسافة الصغيرة ds . وبالنسبة لاتجاه الدوران المبين ، يكون L متجهاً إلى أعلى بموازاة المحور .



شكل ٩،١٢ : جسم جاسي يدور حول محور z المختار اعتباطاً عنصر كتلة معين m_i في الجسم ، على بُعد a_i عن المحور ، له مركبة زخم زاوي باتجاه محور z مقدارها $L_{iz} = m_i a_i^2 \omega$ ، كما أن مركبة z للزخم الزاوي الكلي تتناسب مع ω ، وثابت التناسب هو عزم القصور (المعادلة ٩،٣٦ أو ٩،٣٧) .

وهذه هي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بمعالجات تختلف قليلاً ، والتي سبق استخدامها في مثال البند السابق . ولإدخال ω في الصورة ، نلاحظ أن سرعة المحيط v ترتبط بالسرعة الزاوية بالعلاقة

$$v = \omega R.$$

وبتعويض هذه الصيغة في المعادلة ٩،٢٨ ، نجد أن

$$L_z = MR^2 \omega, \quad (٩،٢٩)$$

التي ندلُّ على تناسب L_z مع ω ، وتبينُ (بالمقارنة مع معادلة ٩،٢٦) أن زخم القصور هو

$$I = MR^2 \quad (\text{دولاب رقيق أو طوق}) \quad (٩،٣٠)$$

عزم قصور طوق حول محور تماثله الأسطواني

إن الطوق إن هو إلا حالة خاصة تتحرك فيها كل المادة بنفس السرعة . غير أنه ، بصورة أعم ، تتحرك الأجزاء المختلفة لجسم يدور بسرعات مختلفة . وإنها السرعة الزاوية ω ، وليست السرعة v ، هي التي تكون ثابتة لجميع أجزاء الجسم .

الحالة العامة : أي جسم جاسي
وأي محور ثابت

اعتبر الآن الحالة العامة : جسم جاسي ، كتلته موزعة حسباً اتفق ، يدور حول محور مختار اعتباراً (شكل ٩,١٢) . لمعالجة هذه الحركة ، من المناسب اعتبار الجسم الجاسي كمجموعة من الجسيمات . ففي شكل ٩,١٢ ، يتحرك الجسيم i ، ذو الكتلة m_i ، في مسار دائري نصف قطره a_i حول المحور عندما يدور الجسم . ويكون الزخم الزاوي لهذا الجسم ، نسبة إلى نقطة أصل تقع على المحور :

$$L_i = m_i r_i \times v_i .$$

وبما أن v_i متعامدة مع r_i ، فإن مقدار L_i هو

$$L_i = m_i r_i v_i . \quad (٩,٣١)$$

كذلك ، كما هو مبين في شكل ٩,١٢ ، إذا كان r_i يصنع زاوية θ_i مع محور z ، فإن L_i يصنع زاوية $\theta_i - \frac{1}{2}\pi$ مع هذا المحور . وتكون ، بالتالي ، مركبة z للزخم الزاوي L_i :

$$\begin{aligned} L_{iz} &= L_i \cos(\theta_i - \frac{1}{2}\pi) = L_i \sin \theta_i \\ &= m_i r_i v_i \sin \theta_i . \end{aligned} \quad (٩,٣٢)$$

من المفيد الآن استبدال كميتين كما يلي :
أولاً : نلاحظ أن نصف القطر a_i للدائرة التي يتبعها الجسيم i هو

$$a_i = r_i \sin \theta_i . \quad (٩,٣٣)$$

وثانياً : نستفيد من العلاقة التي تربط بين السرعة والسرعة الزاوية لهذا المسار الدائري :

$$v_i = a_i \omega . \quad (٩,٣٤)$$

فإذا استخدمنا المعادلتين ٩,٣٣ و ٩,٣٤ للتعويض عن r_i و v_i في المعادلة ٩,٣٢ ، نجد أن

$$L_{iz} = m_i a_i^2 \omega .$$

وبالجمع لكل الجسيمات ، نحصل على مركبة z الكلية للزخم الزاوي ،

$$L_z = \left(\sum m_i a_i^2 \right) \omega . \quad (٩,٣٥)$$

وثمة سِمَتان هامتان لهذه المعادلة : الأولى أنها تُبين أن L_z لا تعتمد على موقع نقطة الأصل ، التي قد تقع في أي مكان على محور الدوران . والثانية أنها تثبت تناسب L_z مع ω ؛ حيث أن الكمية بين القوسين تعتمد فقط على توزيع الكتلة نسبة إلى المحور ، وليس على السرعة الزاوية . وهذه الكمية ، هي بالتعريف ، عزم القصور للجسم :

إثبات أن $L_z \sim \omega$

$$I = \sum_i m_i a_i^2. \quad (9,36)$$

وإذا كنّا نعالجُ توزيعاً مستمراً للكتلة ، فإنّ هذا الجمعُ يؤوّلُ إلى تكامل :

$$I = \int a^2 dm. \quad (9,37)$$

(وهذا تكاملٌ محدودٌ ينبغي أن يشملَ حدّاه الجسمَ بأكمله .) ورغم اختلاف الصّورة ، فإنّ هاتين الصّيغتين الهامّتين تنطلقان بنفس الشّيء : لحساب عزم قصور ، اضرب كلّ عنصر كتلة في مربّع بعده عن المحور ، واجمع لكلّ أجزاء الجسم .

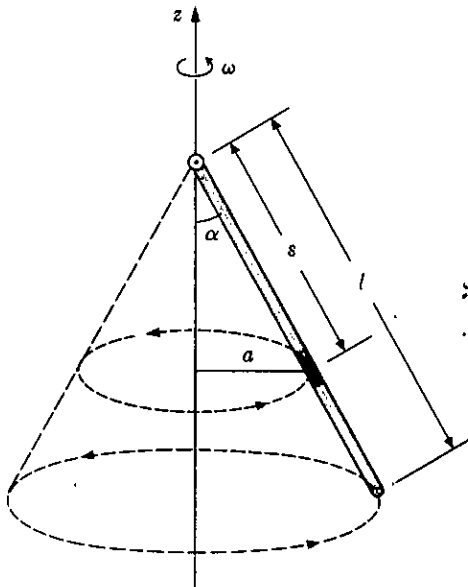
■ مثال ٢ : بيّن أنّ عزم قصور طوق ، كما هو مُعطى بالمعادلة ٩,٣٠ ، ينتج مباشرة عن صيغة I العامّة ، في المعادلة ٩,٣٦ .

بما أنّ كلّ الكتلة في الطّوق هي على نفس البُعد عن المحور ، $a_i = R$ ، فإنّه يمكنُ إخراج العامل a_i^2 من المجموع في المعادلة ٩,٣٦ ؛ حيث تُعطينا هذه الخطوة

$$I = R^2 \sum_i m_i .$$

والجمع الباقي يساوي كتلة الطّوق الكليّة . وهكذا ، فإنّ $I = MR^2$ - على اتّفاقٍ مع نتيجة المعادلة ٩,٣٠ .

■ مثال ٣ : قضيب رفيع ، مُثبّت على محور عند أحد طرفيه ، يتأرجح على سطح مخروطيّ cone (شكل ٩,١٣) . فما عزم قصوره ؟



شكل ٩,١٣ : رسم توضيحيّ لحساب عزم قصور قضيب مُثبّت على محور عند أحد طرفيه ، ويتأرجح بزاوية ثابتة α .

ليكن طول القضيب l ، وكتلته M ، وزاوية ميله عن المحور α . بمقدورنا أن نُعبّر عن جزء الكتلة الصغير dm على بُعد s عن نقطة الارتكاز بالعلاقة

$$dm = \tau ds,$$

حيث τ كتلة وحدة الأطوال (وتساوي M/l) . ويكون بُعد هذا الجزء الصغير من المادة عن المحور :

$$a = s \sin \alpha.$$

باستخدام هذين التعبيرين في المعادلة ٩,٣٧ ، نجد أن

$$I = \tau \sin^2 \alpha \int_0^l s^2 ds, \quad (٩,٣٨)$$

حيث يجري التكامل على امتداد القضيب كله ، من $s = 0$ صفرًا إلى l . ويساوي هذا التكامل $l^3/3$ ؛ وعليه ، فإن

$$I = \frac{1}{3} \tau \sin^2 \alpha l^3.$$

وأخيراً ، بتعويض M/l بدلاً من τ ، نجد أن

$$I = \frac{1}{3} M l^2 \sin^2 \alpha; \quad (٩,٣٩)$$

عزم قصور قضيب مُثبت على محور عند أحد طرفيه

أي أن عزم القصور يُساوي صفرًا عندما تكون $\alpha = 0$ صفرًا (حيث فرضنا أن مساحة مقطع القضيب العرضي مهملة) ، وتساوي قيمته العظمى $\frac{1}{3} M l^2$ عندما تصبح $\alpha = \frac{1}{2} \pi$. لاحظ الظهور المتميز في المعادلة ٩,٣٩ لحاصل ضرب الكتلة في مربع المسافة . ■

□ الدَّورَانُ حول محور تماثلٍ (تناسقي) Rotation About a Symmetry Axis

بالاختيار المناسب للمحاور ، يمكن استبدال المعادلة ٩,٢٦ بالمعادلة الاتجاهية

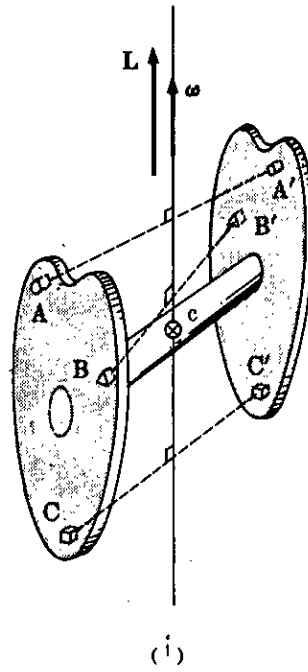
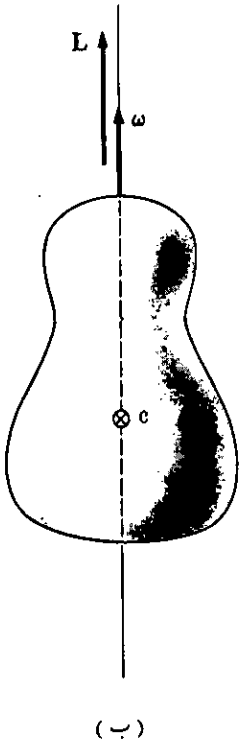
معادلة صالحة لمحاور خاصة

$$L = I\omega, \quad (٩,٤٠)$$

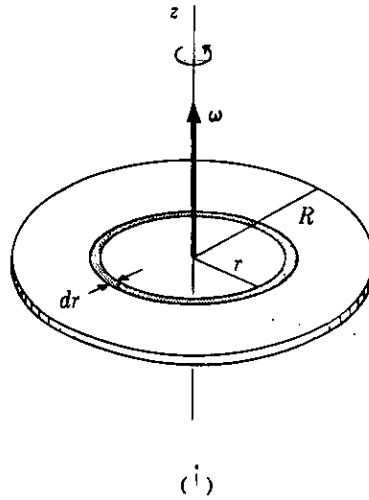
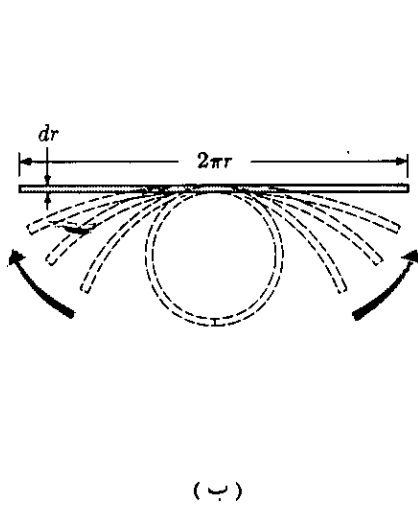
حيث ω هي السَّرْجَهة الزاوية ؛ وهي متجه مقداره يساوي السرعة الزاوية ω واتجاهه يكون على امتداد محور الدوران ، حسبما هو مُعرَّف بقاعدة اليد اليمنى (شكل ٩,١١) . وعندما تسري المعادلة ٩,٤٠ ، كما هو الحال بالنسبة للطوق في شكل ٩,١١ ، فإن اتجاه الزخم الزاوي L يكون أيضاً على امتداد المحور ، موازياً للمتجه ω . أما عزم القصور فيحمل نفس المعنى في المعادلة ٩,٤٠ كما في المعادلة ٩,٢٦ ، ويظل محدداً إما بواسطة المعادلة ٩,٣٦ أو ٩,٣٧ .

تعريف محور التماثل

ويقال إن لجسم محور تماثل إذا كانت العملية الافتراضية الكامنة في عكس كل نقطة



شكل ٩،١٤ : محوراً تماثل . (أ) لكل عنصر كتلة A ، B ، أو C في هذا الجسم ، يوجد عنصر منظر A' ، B' ، أو C' ناتج عن الانعكاس خلال محور التماثل . فلا يتغير الجسم بالدوران حول محور تماثله بزاوية 180° . (ب) هذا الجسم ذو تماثل أسطواني . فلا يتغير بالدوران حول محور تماثله بأية زاوية . ويتوازي الزخم الزاوي والسرعة الزاوية لكلا الجسمين (المعادلة ٩،٤٠) . لاحظ أن مركزي الكتلة يقعان على محوري التماثل .



شكل ٩،١٥ : قرص منتظم يدور حول محور تماثله الأسطواني . (أ) يمكن معالجة القرص كسلسلة من الأطواق بأنصاف أقطار تتفاوت من $r = 0$ إلى $r = R$. (ب) وضع طوق ذي اتساع منتهي الصغر على استقامته يبين أن مساحته تساوي $2\pi r dr$.

مادّية خلال المحور تترك الجسم دون تغيير . فالطّوق في شكل ٩,١١ له محور تماثل (في الواقع أكثر من واحد)؛ كما يظهر مثالان آخريان في شكل ٩,١٤ . ومن الحالات التي تصفها المعادلة ٩,٤٠ بدوّ دوران جسم متماثل حول محور تماثله . ويكون مركز الكتلة ساكناً في هذا النوع من الحركة . وعلى ذلك ، فإنّ الزخم الزاوي الكلي L هو نفسه L_{spin} ، ولا يعتمد على اختيار نقطة الأصل . على كلّ حال ، فمن المناسب عادةً وضع نقطة الأصل عند مركز الكتلة .

■ مثال ٤ : ما عزم قصور قرص disk نصف قطره R يدور حول محور تماثله الأسطواني (شكل ٩,١٥) ؟

يمكن اعتبار القرص كسلسلة من الأطواق بنصف قطر متغيّر ، كلّ منها له سُمكٌ متناهٍ في الصّغر dr . فإذا كانت σ تدلّ على كتلة وُحْدَةِ المساحة (بحيث أنّ $M = \pi R^2 \sigma$) ، فإنّ الكتلة في طوقٍ محصور بين r و $r + dr$ هي

$$dm = 2\pi r dr \times \sigma.$$

كما أنّ بُعد هذه الكتلة عن المحور هو $a = r$. وبالتّعويض عن a و dm في المعادلة ٩,٣٧ (مع وضع حدّي التكامل المناسبين) ، نجد أنّ

$$I = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr.$$

وإجراء التكامل يُعطي

$$I = \frac{2\pi\sigma}{4} r^4 \Big|_0^R = \frac{1}{2}\pi\sigma R^4. \quad (٩,٤١)$$

وكخطوة أخيرة ، فمن المناسب التعبير عن I بدلالة الكتلة الكلية M ، بدلاً من كتلة وُحْدَةِ المساحة σ ، حيث ترتبطان بالعلاقة

$$M = \pi R^2 \sigma. \quad (٩,٤٢)$$

فتكون النتيجة :

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad (\text{قرص}) \quad (٩,٤٣)$$

عزم القصور لقرص حول محور تماثله الأسطواني

وبما أنّ هذا هو عزم القصور حول محور تماثل ، فإنّ المعادلة الاتجاهيّة $L = I\omega$ تكون سارية المفعول .

كذلك نودّ أن نذكّر - بدون برهان - نتيجةً أخرى مفيدة . فعزم قصور كرة منتظمة uniform sphere ، كتلتها M ونصف قطرها R ، تدور حول محور يمر بمركزها هو

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \quad (\text{كرة}) \quad (٩,٤٤)$$

واحدى طرق تقدير أهمية مفهوم عزم القصور تكمن في مقارنة صيغة الزخم ، $p = mv$ ، وصيغة الزخم الزاوي حول محور تماثل ، $L = I\omega$. فالزخم يتغير بتناسب طردي مع السرعة v ؛ كما أن الزخم الزاوي يتغير طردياً مع السرعة الزاوية ω . وبذلك فإن عزم القصور I ، كالكتلة m ، هو خاصية قصورية للجسم . فإحدى الكميتين (m) تقيس مقاومة الجسم لتغير في السرعة ، بينما تقيس الأخرى (I) مقاومة الجسم لتغير في السرعة الزاوية .

عزم القصور هو النظير الدوراني للكتلة

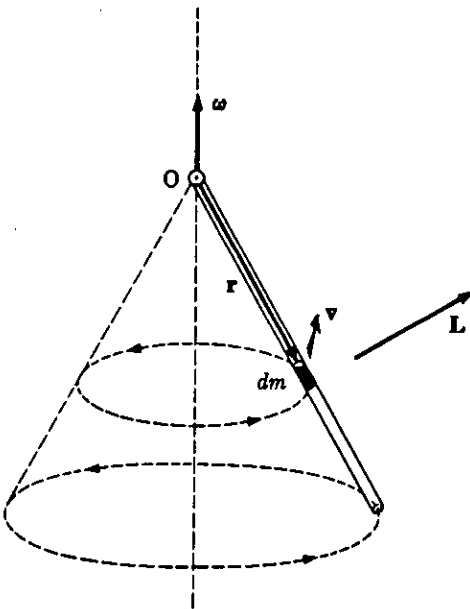
* الدوران حول محور مواز لمحور تماثل

Rotation About An Axis Parallel to a Symmetry Axis

كي نرى أن المتجهين L و ω لا يكونان متوازيين دائماً ، يكفي فقط التدقيق في القضيب المثبت على محور عند أحد طرفيه الوارد في مثال ٣ . فكما هو مبين في شكل ٩,١٦ ، تنتج السرعة الزاوية رأسياً ؛ بينما يتجه الزخم الزاوي لكل جزء من القضيب - وبالتالي للقضيب برمته - بزاوية عن الاتجاه الرأسي ، ويغير اتجاهه مع تأرجح القضيب .

L لا يوازي ω دائماً

إن دراسة وافية للحركة الدورانية للأجسام الجاسئة تقع خارج نطاق هذا الكتاب . وبصورة عامة ، يكون عزم القصور ما يُدعى بكمية ممتدة tensor quantity . فهو لا يتصرف في الواقع ككمية قياسية إلا بالنسبة لمحاور دوران معينة ، تدعى بالمحاور الرئيسية principal axes .



شكل ٩,١٦ : مثال على حركة لا يتوازي فيها الزخم الزاوي والسرعة الزاوية (نفس الشيء كما في شكل ٩,١٣) .

$L = I\omega$ للمحاور الرئيسية

وعندها تكون المعادلة ٩,٤٠ صحيحة. أما في المعادلة ٩,٢٦ ، التي تسري على أي محور ثابت ، فتتحدد I بكمية عددية ، إلا أنه من غير الضروري أن تكون كمية قياسية .

أمثلة على محاور رئيسية

إن أي محور تماثل لجسم هو محور رئيسي ، كما تبين الأشكال ٩,١١ ، ٩,١٤ ، ٩,١٥ ، ٩,١٧ (أ) . وأي محور عمودي على مستوى تماثل هو أيضاً محور رئيسي ، بشرط اختيار نقطة الأصل عند تقاطع المحور ومستوى التماثل [الشكلان ٩,١٧ (ب) و ٩,١٨] . كذلك يُدلل شكل ٩,١٨ على الحقيقة بأن محوراً موازياً لمحور تماثل هو محور رئيسي إذا كانت نقطة الأصل تقع على المحور عند النقطة الأقرب من مركز الكتلة .

دعنا ندرس بالتفصيل المثال المبين في شكل ٩,١٨ قرص كتلته M ونصف قطره R يُثبت عند نقطة على حافته بمحور عمودي على مستوى القرص . ويدور القرص حول هذا المحور بسرعة زاوية ω . نرغب في إيجاد الزخم الزاوي بالنسبة إلى النقطة التي يلامس عندها المحور القرص ، وعزم القصور لنفس هذا الاختيار لنقطة الأصل . ومع أنه يمكن استخدام المعادلة ٩,٣٧ ، إلا أن تطبيقها صعب في هذا المثال . فبدلاً من استخدامها ، نعود إلى المعادلة ٩,٢٢ ونكتب الزخم الزاوي للقرص على الصورة :

$$L = L_{\text{orbital}} + L_{\text{spin}}.$$

(١) يُعرف الزخم الزاوي المداري بالمعادلة ٩,٢٣ . والتدقيق في شكل ٩,١٨ يبين أن $r_c \times v_c$ يتجه رأسياً إلى أعلى ، موازياً للسرجة الزاوية ω . وبذلك ، يكون للزخم المداري L_{orbital} نفس هذا الاتجاه . أما مقداره فهو

$$L_{\text{orbital}} = Mr_c v_c \sin(90 \text{ deg}) = Mr_c v_c.$$

وبما أن $r_c = R$ و $v_c = R\omega$ ، فإنه يمكننا الكتابة :

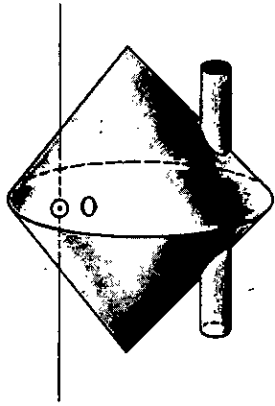
$$L_{\text{orbital}} = MR^2\omega.$$

وككمية متجهة ، يكون

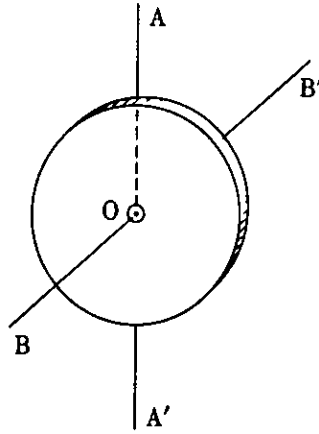
$$L_{\text{orbital}} = MR^2\omega. \quad (٩,٤٥)$$

(٢) الزخم الزاوي المغزلي : هو الزخم الزاوي للجسم نسبة إلى مركز كتلته . وبما أنه يدور حول مركز كتلته مرة لكل دورة له حول المحور ، فإن سرجته الزاوية نسبة إلى مركز الكتلة هي ω أيضاً . وعلى ذلك ، يكون زخمه الزاوي المغزلي هو نفسه لقرص يدور حول مركز ثابت . وبناء على المعادلة ٩,٤٣ ، فإن هذا يساوي

• نقترب - في الواقع - ثلاثة محاور رئيسية (أو أحياناً أكثر) بكل نقطة في جسم جاسي . ونذكر هنا بعض الحالات الخاصة فقط .

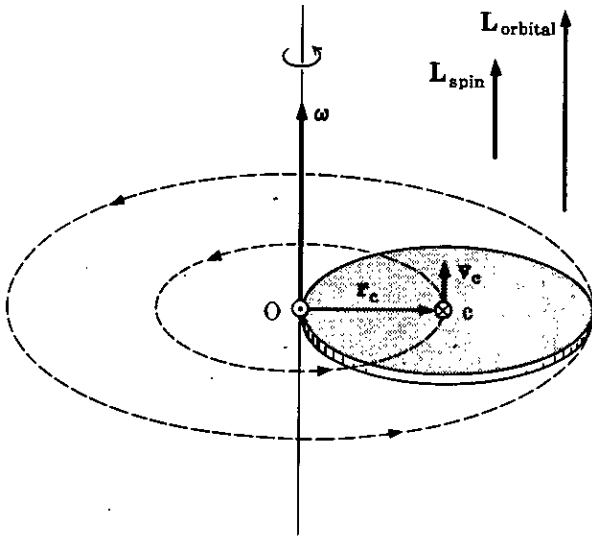


(ب)



(أ)

شكل ٩,١٧ : أمثلة على المحاور الرئيسية :
(أ) كما هو مبين لقرص ، فإن خط تماثل انعكاسي (AA') أو خط تماثل أسطواني (BB') هو محور رئيسي .
(ب) الخط العمودي على مستوى تماثل هو محور رئيسي إذا كانت نقطة الأصل تقع عند نقطة تقاطع الخط مع مستوى التماثل .



شكل ٩,١٨ : قرص يدور حول محور عند طرفه متعامد مع مستوى القرص . للقرص زخم زاوي مداري وزخم زاوي مغزلي على حد سواء ؛ كما أن عزم قصوره ثلاثة أمثال عزم قصور القرص في شكل ٩,١٥ .

$$L_{\text{spin}} = \frac{1}{2}MR^2\omega. \quad (٩,٤٦)$$

وجمع المعادلتين ٩,٤٥ و ٩,٤٦ يُعطينا الزخم الزاوي الكلي للقرص ،

$$L = \frac{3}{2}MR^2\omega. \quad (٩,٤٧)$$

ولهذه نفس صورة المعادلة ٩,٤٠ ؛ وتبين أن المحور هو بالفعل محور رئيسي عند اختيار نقطة الأصل عند حافة القرص . أما عزم القصور فهو :

$$I = \frac{3}{2}MR^2. \quad (٩,٤٨)$$

عزم القصور للقرص في شكل ٩,١٨

فنبقى المحور من المركز إلى حافة القرص ، يزيدُ عزمُ القصور بعاملٍ مقداره ٣ .

٩,٥ العزمُ الدوراني وقانونُ تغيرِ الزخمِ الزاوي

Torque and the Law of Angular Momentum Change

مراجعة للنقاط الرئيسية حتى الآن

لقد تمَّ في البنود الأربعة السابقة تعريفُ مفهومِ الزخمِ الزاويِّ بإسهاب ؛ إلا أنه لم يوضعُ بعد في سياق قانون فيزيائي . وفيما يلي تلخيصُ للنقاط الرئيسية التي جرى تأكيدُها حتى الآن :

(١) يُعرَّفُ الزخمُ الزاويُّ لجسيمٍ بالنسبة إلى نقطة ، الذي هو مقياسٌ لشدة ميله للدوران حول تلك النقطة ، بدلالة كتلة وسرعة الجسيم وموقعه نسبةً إلى نقطة الإسناد . وببساطة أكبر ، يمكن تعريفه بدلالة زخم الجسيم وموقعه . (٢) للجسيم الذي يتحركُ بسرعة ثابتة في خطٍّ مستقيم زخمٌ زاويٌّ ثابتٌ بالنسبة إلى أيِّ نقطة ثابتة ؛ كما أن للجسيم الذي يتحركُ بسرعة ثابتة في دائرة زخمًا زاويًا ثابتًا بالنسبة إلى مركز الدائرة . (٣) الزخمُ الزاويُّ مفهومٌ اتجاهيٌّ . واتجاهه هو الاتجاه المحوري كما يُعرَّفُ بقاعدة اليد اليمنى . (٤) الزخمُ الزاويُّ لنظامٍ هو المجموعُ الاتجاهيُّ للزخامِ الزاويِّ للأجزاء المكوِّنة للنظام . (٥) من المناسب فصلُ الزخمِ الزاويِّ لجسمٍ ماديٍّ إلى جزءٍ مِعْزَلِيٍّ وجزءٍ مداريٍّ . والعِزْل هو الزخمُ الزاويُّ للجسم بالنسبة إلى مركز كتلته . أما الزخمُ الزاويُّ المداري ، وهو الزخمُ الزاويُّ الإضافي الذي ينشأ عن حركة مركز الكتلة ، فيحسبُ كما لو أن كلَّ كتلة الجسم مركَّزة عند مركز الكتلة . (٦) يتناسبُ الزخمُ الزاويُّ للجسم مع سرعته الزاوية عند الدوران حول محاورٍ معيَّنة تدعى المحاور الرئيسية ؛ ويدعى ثابت التناسب بعزم القصور .

وتبقى أسئلة هامة تتطلبُ الإجابة : تحت أيِّ ظروف يكون الزخمُ الزاويُّ محفوظاً ؟ وماذا نحتاج لتغيير الزخمِ الزاويِّ لنظام ؟ ثم ما هو قانون تغيرِ الزخمِ الزاويِّ ؟ ... إذا أمكن الإجابة عن السؤال الثالث ، فإنَّ الإجابة عن السؤالين الأولين تتبعُ فوراً . وسنستكشف في هذا البند القانون الكلاسيكي لتغيرِ الزخمِ الزاويِّ .

بما أن الزخمَ الزاويَّ يُعرَّفُ رياضياً بدلالة مفاهيم سبق تأسيسُها ، فليس عجباً أن نعلم أن قانونَ تغييره يمكن اشتقاقه رياضياً من قوانين نيوتن دون الحاجة إلى أساس تجريبي جديد . فنبداً بمفاضلة كلٍّ من طرفي المعادلة ٩,١ بالنسبة إلى الزمن :

$$\frac{dL}{dt} = m \frac{dr}{dt} \times v + mr \times \frac{dv}{dt} . \quad (٩,٤٩)$$

وبما أن $v = dr/dt$ ، فإنَّ الحدَّ الأولَ على اليمين يحتوي على $v \times v$ ، الذي يساوي صفراً . كذلك ، بما أن $a = dv/dt$ ، فإنه يمكن كتابة الحدَّ الثاني على الصورة $mr \times a$ ، التي هي نفس الصورة

$$r \times (ma) .$$

وباستخدام قانون نيوتن الثاني ، يمكن استبدال الكتلة في التسارع بالقوة ، بحيث تصبح المعادلة

٩,٤٩ :

$$\frac{dL}{dt} = r \times F. \quad (٩,٥٠)$$

نتيجة لقانون نيوتن الثاني

وهذا هو قانون تغير الزخم الزاوي لجسيم متأثر بقوة F ... والاتلاف $r \times F$ من الأهمية بحيث يستحق اسماً لذاته . فهو يُدعى عزم الدوران ، ويُشار إليه بالرمز T :

$$T = r \times F. \quad (٩,٥١)$$

تعريف العزم الدوراني

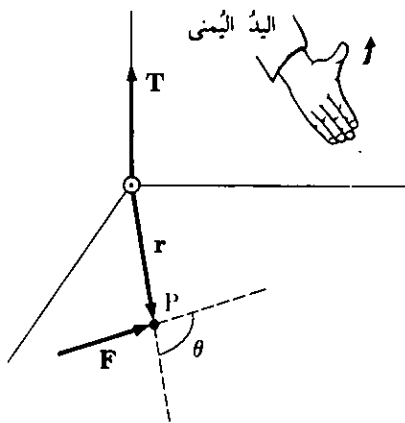
وهذا تعريف عزم الدوران : فهو كمية متجهة بُعدها الفيزيائي هو بُعْدُ القوة في المسافة ؛ ووَحْدَتُها الدولية هي نيوتن متر. ويؤول قانون تغير الزخم الزاوي بدلالة عزم الدوران إلى

$$\frac{dL}{dt} = T \quad (٩,٥٢)$$

قانون تغير الزخم الزاوي

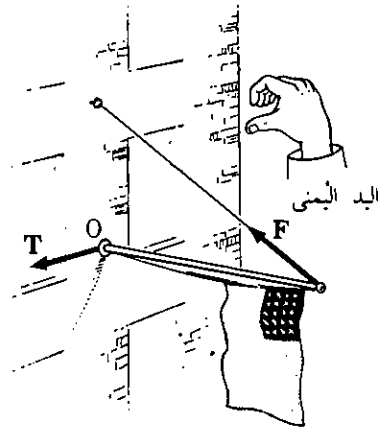
(هنا يجب إسناد L و T إلى نفس نقطة الأصل) . وتسري هذه المعادلة على الأجسام الممتدة كسريانها على الجسيمات إذا كان L يمثل الزخم الزاوي الكلي للجسم وكان T عزم الدوران الكلي المؤثر عليه .

ويبين شكل ٩,١٩ هندسياً تعريف عزم الدوران . فيعرف هذا العزم ، كالزخم الزاوي ، نسبةً إلى نقطة أصل اعتباطية . كذلك يبين شكل ٩,٢٠ بعض الأمثلة العملية على عزم الدوران ، مع تأكيد الصفة الاتجاهية لهذا المفهوم .

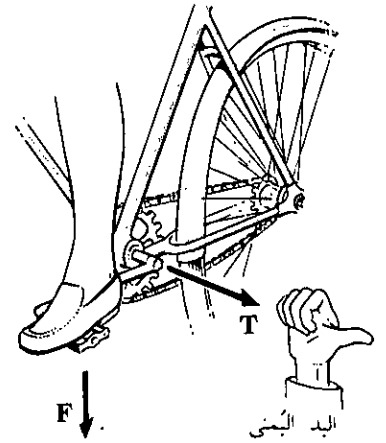


شكل ٩,١٩ : تعريف عزم الدوران تؤثر قوة F عند نقطة P ، فتحدث عزمًا $T = r \times F$ بالنسبة إلى نقطة الأصل .

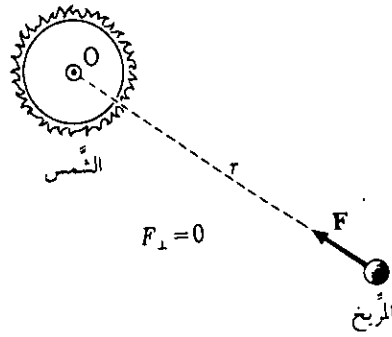
■ مثال : في شكل ٩,٢٠ (ب) ، يساوي طول ساري العَلَم $٣ م$ ، وتؤثر القوة ، ذات المقدار $٢٠٠ ن$ ، بزاوية تصنع ٣٠ مع الساري . فما عزم الدوران بالنسبة إلى النقطة O ، حيث يلامس الساري البناية ؟ ولماذا لا يُغير هذا العزم الزخم الزاوي لساري العَلَم ؟



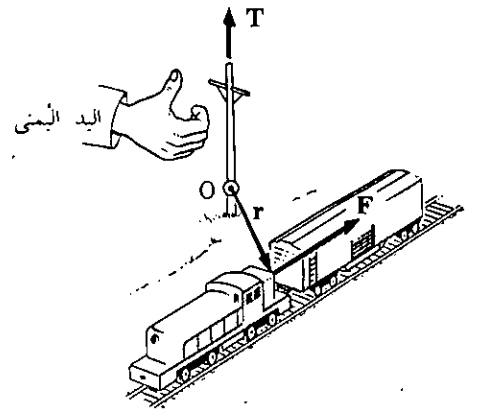
(ب)



(ا)

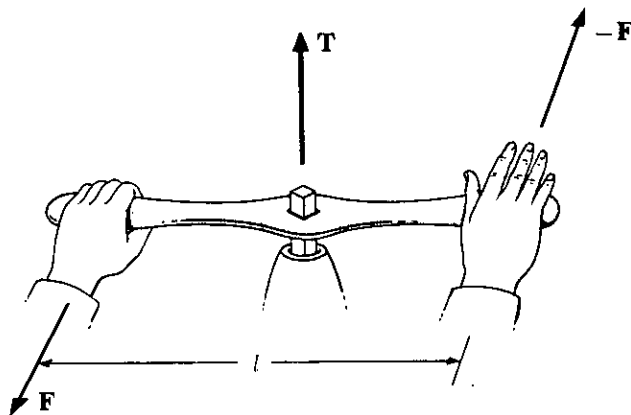


(د)



(ج)

شكل ٩،٢٠ : الطبيعة الاتجاهية لعزم الدوران . (أ) قوة تؤثر على دواة دراجة ، فتحدث عزماً محورياً إلى اليسار . (ب) تحدث قوة سلك التثبيت guy wire عزماً أفقياً كما هو مبين ، وذلك بالنسبة إلى نقطة عند قاعدة ساري العلم . (ج) تحدث قاطرة تجر عربة شحن عزماً رأسياً إذا اخترت نقطة الأصل على أحد جانبي المسار . (د) لا تحدث قوة جاذبية الشمس على المريخ أي عزم ، بالنسبة إلى مركز الشمس .



شكل ٩،٢١ : يحدث زوج من القوى المتساوية والمتضادة ، والتي لا تؤثر على امتداد نفس الخط المستقيم ، عزماً يسمى ازدواجاً .

من التعريف في المعادلة ٩,٥١ ، يكون مقدار عزم الدوران

$$T = 3 \text{ m} \times 200 \text{ N} \times \sin (150 \text{ deg}) \\ = 300 \text{ N m} ;$$

كما يكون اتجاهه عمودياً على المستوى الذي يحتوي على r و F ، حسبها هو مبين في الشكل .
وإذا كان للساري أن يظل ساكناً ، فإنه يجب أن تؤثر قوة أخرى أو أكثر ، كي تجعل العزم
الدوراني الكلي يتلاشى . فالجاذبية ، التي تؤثر إلى أسفل على العلم والساري ، تزودنا بالعزم
اللازم المضاد .

طريقتان لوجود قوة دون عزم دوران

$$r = 0 \quad (١)$$

في العادة ، إذا أثرت قوة على جسم ، فإنها تُحدث عزم دوران . ومع ذلك ، فهناك
طريقتان قد تؤثر بهما قوة دون أن تُحدث عزمًا : (١) قد تؤثر القوة عند نقطة الأصل المختارة .
عندئذ ، بما أن $r = 0$ ، فإن المعادلة ٩,٥١ تُعطينا $T = 0$. فني شكل ٩,٢٠ (أ) ، مثلاً ،
إذا ضغط الراكب إلى أسفل على محور الدوّلاب المُسنّن sprocket بدلاً من الدّواسة pedal ، فلن
يؤثر أيّ عزم على الدّوّلاب ، ولن يحدث بالتالي أيّ تغيير للزخم الزاوي . (٢) قد تؤثر القوة
مباشرةً باتجاه ، أو بعيداً عن ، نقطة الأصل . عند ذلك يكون r موازياً للقوة F ، ويكون
 $r \times F = 0$. فكما هو مبين في شكل ٩,٢٠ (د) ، مثلاً ، لا تؤثر الشمس بأيّ عزم على
كوكب . لذا يكون الزخم الزاوي للكوكب ثابتاً نسبةً إلى مركز الشمس .^٥

$$r \text{ مواز للقوة } F \quad (٢)$$

وإذا عُزل جسمٌ وكان حرّاً من تأثير أية قوة ، فإنه يكون حرّاً من تأثير أيّ عزم أيضاً . إلا أنه
إذا أثرت قوتان أو أكثر على الجسم ، فقد يكون مجموعها صفراً ومع ذلك يكون لها محصلة عزم .
وبين شكل ٩,٢١ مثلاً على وجود عزم بدون أية محصلة قوة . فعندما لا تؤثر قوتان متساويتان
ومتضادتان على امتداد نفس الخط المستقيم ، فإنها تُحدثان عزمًا مقداره

طريقة لوجود عزم دوراني بدون قوة

$$T = lF, \quad (٩,٥٣)$$

حيث F مقدار كل من القوتين ، و l البعد العمودي بين خطي عمل القوتين . ومن الواضح أن
هذه النتيجة صحيحة للمثال في شكل ٩,٢١ ؛ إذ تُحدث كل قوة عزمًا إلى أعلى مقداره lF ،
بالنسبة إلى المحور المركزي . وستترك برهاناً أعمّ كمسألة . إن عزمًا كهذا ، ينشأ عن زوج من
القوى المتساوية والمتضادة ، يدعى أحياناً بالازدواج couple . كذلك سنترك كمسألة إثبات أن
الازدواج لا يعتمد على اختيار نقطة الأصل .

وكما أن القوة هي تعبير عن فكرة الدفع push والسحب pull صيغ كمفهوم مقداري ، فإن

^٥ بالنسبة لكوكب كروي ، يكون الزخم الزاوي المداري والزخم الزاوي المغزلي ثابتاً - كل على حدة . أما بالنسبة لكوكب غير
كروي ، فإن كلاً من الزخم الزاوي المداري والمغزلي يتغير ببطء ، مع أن مجموعها يظل ثابتاً (أنظر بند ١١,٥) .

عزم الدوران هو تعبير عن فكرة اللي twist صيغ بصورة علمية دقيقة ونافعة . وعلاقة العزم بالزخم الزاوي هي نفس علاقة القوة بالزخم العادي . فالقوة هي ما يغير الزخم ؛ وبالمثل ، فالعزم هو ما يغير الزخم الزاوي . ويكون الزخم محفوظاً في حالة انعدام القوة ، تماماً كما يكون الزخم الزاوي محفوظاً في حالة انعدام العزم . ويلخص جدول ٩,١ هذه وغيرها من المتوازيات ذات العلاقة في الميكانيكا .

جدول ٩,١ : بعض المتوازيات في الميكانيكا

الخاصية	الانتقال	الدوران
خاصية القصور	الكتلة : M	عزم القصور : I
سمة الحركة	سرعة مركز الكتلة : v_c الزخم : $P = Mv_c$	السرعة الزاوية : ω الزخم الزاوي حول محور رئيسي : $L = I\omega$
الحافز للتغير	القوة : F	عزم الدوران : T
قانون التغير	$F = \frac{dP}{dt}$	$T = \frac{dL}{dt}$
شرط الحفظ	انعدام القوة الخارجية	انعدام العزم الخارجي

٩,٦ الدوران حول محور ثابت Rotation About a Fixed Axis

يحدث الدوران حول محور ثابت في كثير من الأدوات العملية التي تتضمن دواليب وبكرات pulleys وتروس نقل الحركة gears وأعمدة الإدارة shafts . وستنقص اهتمامنا هنا على الدوران حول محور رئيسي ، كمحور تماثل . ففي هذه الحالة ، تقع المتجهات الهامة كلها - السرعة الزاوية ، وعزم الدوران ، والزخم الزاوي - على امتداد نفس الخط المستقيم ، الذي يكون محور الدوران ؛ ونحتاج عندئذ فقط إلى اعتبار المركبات على امتداد هذا الخط .

□ سرعة زاوية ثابتة Constant Angular Velocity

إن التشابه بين دوران جسم بسرعة زاوية ثابتة ω_0 والحركة المنتظمة لجسيم في دائرة لهو من الكبر للدرجة لا نحتاج معها إلى مزيد من البحث . فزاوية دوران الجسم تزداد خطياً مع الزمن :

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t. \quad (9,54)$$

والمشتقة الزمنية للزاوية هي ، بالطبع ، السرعة الزاوية الثابتة ω_0 :

حالة خاصة هامة : ω و T و L
تقع على امتداد نفس الخط المستقيم

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0. \quad (9,55)$$

كما يكون الزخم الزاوي للجسم ثابتاً :

$$L = I\omega_0; \quad (9,56)$$

فيجب أن يُساوي عزم الدوران المؤثر عليه صفراً (حيث أن $T = dL/dt$).

□ تسارع زاوي ثابت Constant Angular Acceleration

لنفرض أن السرعة الزاوية لجسم تتغير مع الزمن بمعدل ثابت . عندئذ نستطيع كتابتها على الصورة :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \quad (9,57)$$

حيث الكمية α هي التسارع الزاوي :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (9,58)$$

تعريف التسارع الزاوي

وَوَحْدَتُهَا هي مسم/ث^٢ . radian/sec^2 . (بما أن α و ω هما في الواقع مركبتا متجهين وليسا مقدارين ، فيمكن أن تكونا موجبتين أو سالبتين .) وتكون الزاوية ، كدالة في الزمن لهذه الحركة ،

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2. \quad (9,59)$$

والتشابه واضح مع الحركة ذات التسارع المنتظم في خط مستقيم . (أنظر المعادلات (9,55-9,57) .

ويتغير الزخم الزاوي للجسم خطياً مع الزمن لتناسبه مع السرجة الزاوية . فتتحدد مركبته بالعلاقة

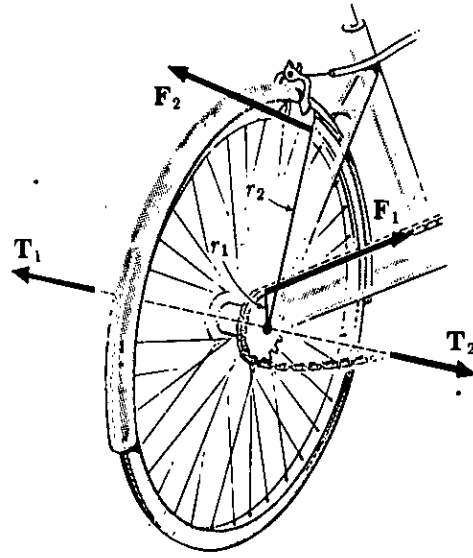
$$L = I\omega = I\omega_0 + I\alpha t. \quad (9,60)$$

وأخيراً ، بمفاضلة هذا التعبير بالنسبة إلى الزمن ، فإننا نحصل على مركبة عزم الدوران ،

$$T = I\alpha. \quad (9,61)$$

علاقة العزم بالتسارع الزاوي

ولهذه المعادلة شبه هام بقانون نيوتن الثاني ، $F = ma$. فكما أن القوة الثابتة تُحدث تسارعاً



شكل ٩,٢٢ : القوى وعزوم الدوران المؤثرة على الدوّالِب الخلفي للدراجة .

ثابتاً ، فإنَّ العزْمُ الثَّابِتُ يُحْدِثُ تسارعاً زائِداً ثابتاً . ونستطيعُ بذلك أنْ نُصِفَ إلى جدولِ المتوازيات ٩,١ التسارعَ a والتسارعَ الزاويَّ α . ونلاحظُ عبوراً أنَّه ، بالنسبةِ لأيّةِ حركةٍ حولِ محورٍ رئيسيٍّ ، سواءً أكانتْ بتسارعٍ ثابتٍ أم لا ، فإنَّ المعادلةَ

شبه كبير بالعلاقة $F = Ma$

$$T = I\alpha \quad (٩,٦٢)$$

تكونُ صحيحةً . ويشيرُ المتجهُ α باتجاه محور الدوران ، موازياً للكمية ω إذا كانت السرعةُ الزاويةُ في تزايد ، ومعاكساً لها إذا كانت السرعةُ الزاويةُ في تناقص .

التسارع الزاوي كميّة متجهة

وكمثالٍ للدراسة ، إعتبرْ دراجةً معلقةً بحيث يدورُ دُولابُها بحريّة دون أنْ يلامسَ الأرض . ولنركّزْ الانتباهَ على الدُولابِ الخلفيِّ على أنَّه النظامُ موضعُ الاهتمام (شكل ٩,٢٢) فيمكنُ التأثيرُ بقوة F_1 على الدُولابِ المسننِ الخلفيِّ بواسطة السلسلة ، كما يمكنُ التأثيرُ بقوة F_2 على الحافةِ بواسطة الكماحات (الفرامل) brakes . ونفترضُ أنَّ قوى الاحتكاك عند المحور صغيرةً لدرجةٍ يمكنُ معها إهمالها . فبالنسبةِ إلى مركز المحور مُختاراً كنقطة إسناد ، فإنَّ كلا من القوتين F_1 و F_2 تُحْدِثُ عزماً . وبما أنَّ اتّجاهَ كلِّ قوّةٍ هو عموديٌّ على الخطِّ الواصل بين المحور ونقطة تأثير القوّة ، فإنَّ مقدارَي العزْمين هما :

$$T_1 = F_1 r_1, \quad (٩,٦٣)$$

العزوم إذا كانت $r \perp F$

$$T_2 = F_2 r_2. \quad (٩,٦٤)$$

ويُتَّجهُ هذان العزْمانُ محوريّاً : T_1 إلى اليسار و T_2 إلى اليمين ، كما هو مبين في شكل ٩,٢٢ . وهذا يعني أنَّ أيَّ تغيّرٍ في الزخم الزاويِّ للدُولابِ الناتج عن العزْمِ T_1 يجب أنْ يُتَّجهُ محوريّاً إلى اليسار ،

وأيّ تغيّر في زخمه الزاويّ الناتج عن العزم T_2 يجب أن يتّجه محوريّاً إلى اليمين .

■ مثال ١ : افترض أنّ المواصفات الفيزيائية للدُّولاب هي

$$r_1 = 0.40 \text{ م}$$

$$r_2 = 0.316 \text{ م}$$

$$M = 2.5 \text{ كـرغ}$$

وأنّه يمكن اعتباره بصورة تقريبية كطوق نصف قطره r_2 ، بحيث يكون عزمُ قُصوره

$$I = Mr_2^2 = 0.250 \text{ kg m}^2.$$

فإذا ابتداءً الدُّولابُ من السّكون وأثّرت السّلسلةُ بقوة $F_1 = 100 \text{ ن}$ لمدة ٣ ث ، فما الزّخم الزاويّ والسرّجة الزاوية للدُّولاب ؟ وما الزاوية التي يدورها الدُّولابُ أثناء تسارعه ؟

يجب أولاً حسابُ العزم T_1 ... فنّ المعادلة ٩,٣٦ نحصل على :

$$T_1 = 100 \text{ ن} \times 0.40 \text{ م} = 40 \text{ ن م}.$$

ويساوي هذا العزمُ معدّلَ تغيّر الزّخم الزاويّ (المعادلة ٩,٥٢) ؛ فيكون المقدارُ

$$\frac{dL}{dt} = T_1 = 40 \text{ kg m}^2/\text{sec}^2.$$

أما التّغيّر في الزّخم الزاويّ لعزم ثابت فهو

$$\Delta L_1 = T_1 \int dt = T_1 \Delta t. \quad (9,65)$$

وحيث أنّ $\Delta t = 3 \text{ ث}$ في هذا المثال ، فإنّ

$$\Delta L_1 = 120 \text{ kg m}^2/\text{sec}.$$

وبما أنّ الزّخم الزاويّ الابتدائيّ كان صفراً ، فإنّ هذا التّغيّر في الزّخم الزاويّ هو نفسه الزّخم الزاويّ للدُّولاب بعد ٣ ث . ويتّجه إلى اليسار ، دالاً على دوران باتجاه عقربي الساعة عند النّظر إلى الدُّولاب من الجانب الأيمن . ونحصل على السّرعة الزاوية النهائيّة من المعادلة ٩,٤٠ :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{L}{I} = \frac{120 \text{ kg m}^2/\text{sec}}{0.25 \text{ kg m}^2} \\ &= 480 \text{ radian/sec}. \end{aligned}$$

أمّا للحصول على زاوية دوران الدُّولاب ، فإنّنا نحتاجُ إلى تسارعه . فنّ المعادلة ٩,٦٢ ، نجد أنّ

$$\alpha_1 = \frac{T_1}{I} = 16 \text{ radian/sec}^2.$$

وباستخدام $\theta_0 = \omega_0 = 0$ ، نُعطينا المعادلة ٩,٥٩ الزاوية :

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 = \frac{1}{2}(16)(3)^2 \\ = 72 \text{ radians,}$$

أو حوالي ١١,٥ دورة . وللتأكد من السرعة الزاوية النهائية ، يمكننا أيضاً استخدام المعادلة ٩,٥٧ ؛ حيث نجد أن

$$\omega = \alpha_1 t = (16)(3) = 48 \text{ radian/sec.}$$

■ مثال ٢ : يُغزلُ الدُّولابُ الآنَ بحريةٍ لبعضِ الوقتِ بزخمِ زاويٍّ ثابتٍ ؛ ثم تؤثر الكَمَاحاتُ بقوة ثابتة بحيث تجعل الزخمَ الزاويَّ للدُّولابِ يندو نصفَ قيمته في ٢ ث . فما قوَّة الكَمَاحِ اللازمة لإحداث ذلك ؟ وما التسارع الزاوي ؟

باتِّباعِ النهجِ المفضَّلِ بصورة عامَّة ، نحلُّ المسألة جبرياً أولاً ، ثم عددياً . فعلى العموم ، يكون التغيُّرُ في الزخمِ الزاويِّ لعزمٍ ثابت :

$$\Delta L = T \Delta t. \quad (٩,٦٦)$$

ففي المثال السابق ،

$$\Delta L_1 = T_1 \Delta t_1,$$

كذلك ، في المثال الحالي ،

$$\Delta L_2 = T_2 \Delta t_2.$$

وبما أن $\Delta L_2 = -\frac{1}{2}\Delta L_1$ ، نجدُ من هذه المعادلات أن

$$T_2 \Delta t_2 = -\frac{1}{2}T_1 \Delta t_1.$$

وبذلك يكون عزمُ الكَمَاحِ المطلوبُ

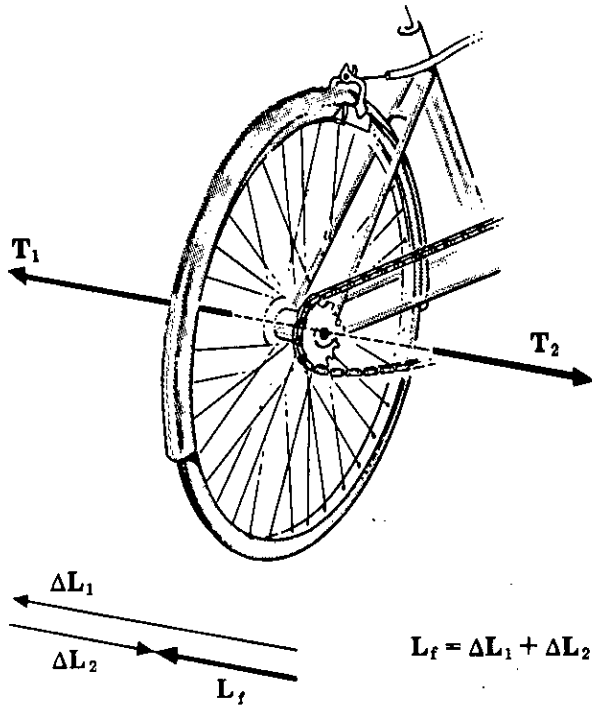
$$T_2 = -\frac{T_1 \Delta t_1}{2 \Delta t_2}.$$

وباستخدام المعادلة ٩,٦٤ ، يمكنُ إذن كتابة مقدار قوَّة الكَمَاحِ على الصُّورة :

$$F_2 = \frac{T_1 \Delta t_1}{2r_2 \Delta t_2}.$$

كذلك ، من المعادلة ٩,٦٢ ، يكونُ مقدارُ التسارعِ أثناء تأثير الكَمَاحات $\alpha_2 = T_2/I$ ، أو

$$\alpha_2 = \frac{F_2 r_2}{I}$$



شكل ٩،٢٣ : تغيرات في الزخم الزاوي
ناجمة عن تأثير عزوم دوران . فبعد أن يبدأ
الدولابُ غزلهُ بتأثير عزم T_1 ، يكتسبُ
زخماً زاوياً ΔL_1 . ثم يساهمُ عزم الكُمح
 T_2 بتغيير قدره ΔL_2 في الزخم الزاوي .
فيكونُ الزخمُ الزاوي النهائي L_f هو المجموعُ
الاتجاهي للمتجهين ΔL_1 و ΔL_2 .

ويمكننا التعويض بالقيم العددية في المعادلتين الأخيرتين : $T_1 = 4 \text{ ن م}$ ، $\Delta L_1 = 3 \text{ ث}$ ،
 $\Delta L_2 = 2 \text{ ث}$ ، $r_2 = 0,316 \text{ م}$ ، و $l = 0,250 \text{ كغ م}^2$ ؛ حيث نجدُ أنَّ

$$F_2 = 9,49 \text{ ن} ؛$$

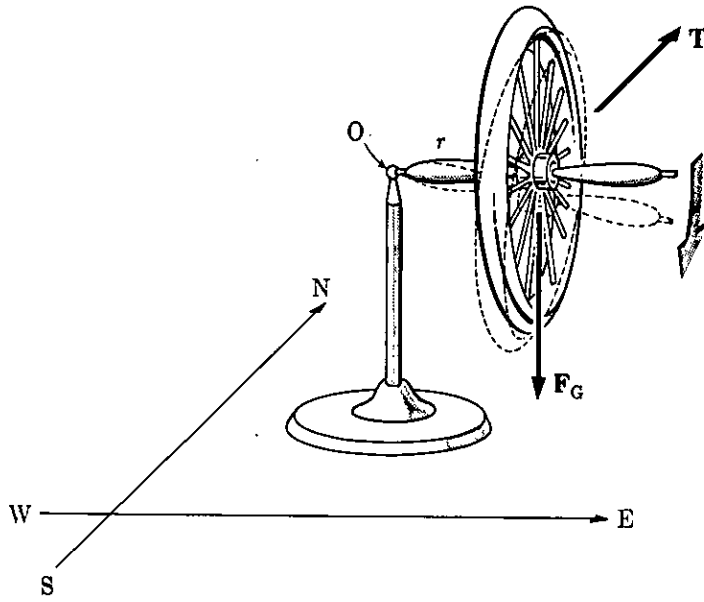
$$\alpha_2 = 12,0 \text{ مسر/ث}^2 .$$

وكما هو مبين في شكل ٩،٢٣ ، فإنَّ التَّغْيِيرَ في الزَّخْمُ الزَّاوِي الناتج عن عزم الكُمح يَتَّجِهُ إلى
اليمن ؛ لذا ، يكونُ الزَّخْمُ الزَّاوِي النهائي هو المجموعُ الاتِّجَاهِي للتَّغْيِيرَيْنِ في الزَّخْمُ الزَّاوِي :

$$L_{\text{final}} = \Delta L_1 + \Delta L_2 .$$

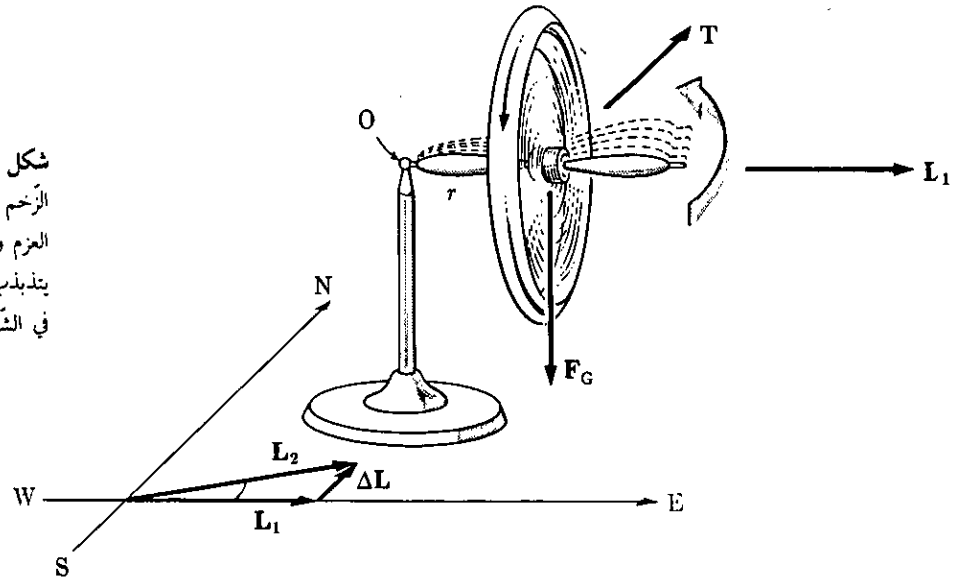
★ ٩،٧ الاستباق Precession

في أمثلة البند السابق ، لعبت الطبيعة الاتِّجَاهِيَّة للزَّخْمُ الزَّاوِي دوراً ثانوياً نوعاً ؛ حيث
أنَّ جميعَ عزوم الدَّوران والزَّخَامُ الزَّاوِيَّة كانت تَتَّجِهُ يساراً أو يميناً على امتداد نفس المحور
الثابت . أمَّا عندما لا يكون الأمرُ كذلك - كأنَّ يؤثرُ عزمٌ ، مثلاً ، على جسمٍ يَغْزِلُ باتِّجَاهٍ غَيْرِ
اتِّجَاهِ غَزْلِهِ - فتظهرُ آثارٌ جديدة تبدو مذهلةً لأوَّل وهلة ، رغم كونها نتائج مباشرة للمعادلة
٩،٥٢ .



شكل ٩,٢٤ : يسقط دولاب دراجة عن نقطة ارتكازه إذا لم يكن يُغزل ؛ فيكتسب سقوطه زحماً زاوياً باتجاه الشمال ، موازياً للعزم T الناتج عن قوة الجاذبية F_G . ونقطة الأصل المختارة هنا هي رأس عمود الارتكاز .

شكل ٩,٢٥ : استباق دولابٍ دائري . يتجه الزخم الزاوي الابتدائي شرقاً ؛ بينما يتجه العزم والتغير في الزخم الزاوي شمالاً . لذلك يتذبذب L_1 حول نقطة الارتكاز كما هو مبين في الشكل ؛ وهذه حركة تُدعى استباقاً .



إعتبر دولاب دراجة محمولاً على زوج من المقابض (شكل ٩,٢٤) ، من النوع المستخدم غالباً في المشاهدات العملية أثناء المحاضرات . فإذا لم يكن الدولاب يُغزل ووضعت طرف إحدى المقابض على ركيزة مبدئية ، كما في شكل ٩,٢٤ ، فإن الدولاب يفعل ما نتوقعه ؛ أي أنه يقع عن الركيزة . ويمكن فهم سقوطه بسهولة بدلالة متجهي عزم الدوران والزخم الزاوي . فتوخياً للدقة ، افترض أن المقبض كان - في بادئ الأمر - أفقياً باتجاه شرقي - غربي ، وأن طرفه الغربي كان يستند إلى الركيزة . فإن قوة الجاذبية إلى أسفل ، والتي يفترض أنها تؤثر عند مركز الدولاب ، تحدث عزمًا بالنسبة إلى نقطة الارتكاز . ويكون اتجاه هذا العزم أفقياً إلى الشمال ؛

سقوط دولاب من وجهة نظر جديدة

فِيُخَدِّثُ مِثْلًا لِلدَّوْرَانِ حَوْلَ مَحْوَرِ شَمَالِيٍّ - جَنُوبِيٍّ . وَيَكْتَسِبُ الدُّوْلَابُ ، نَتِيجَةً لِّذَلِكَ ، حَرَكَةً دَوْرَانِيَّةً حَوْلَ هَذَا الْمَحْوَرِ . فَتَبْدَأُ كِتْلَةُ الدُّوْلَابِ بِالْأَتَّجَاهِ رَاسِيًّا إِلَى أَسْفَلَ ، وَتَكْتَسِبُ ، بِالنِّسْبَةِ إِلَى نَقْطَةِ الْاِرْتِكَازِ ، زَخَمًا زَاوِيًّا بِاتَّجَاهِ الشَّمَالِ . وَبِسُقُوطِ الدُّوْلَابِ عَنِ الرِّكِيْزَةِ ، يَدْوَرُ ، لَيْسَ حَوْلَ مَحْوَرِهِ ، بَلْ حَوْلَ مَحْوَرِ شَمَالِيٍّ - جَنُوبِيٍّ أَدَّى إِلَيْهِ اتَّجَاهُ عَزْمِ الْجَاذِبِيَّةِ .

قَدْ يَبْدُو هَذَا الْوَصْفُ لِسُقُوطِ الدُّوْلَابِ الْبَسِيطِ عَنِ رِكِيْزَتِهِ وَصِفًا مُطَوَّلًا لَا ضَرُورَةَ لَهُ ؛ إِلَّا أَنَّهُ تَمْهِيدٌ مُفِيدٌ جَدًّا لَمَّا سَيَتَّبَعُ مِنْ نِقَاشٍ عَنِ وَضْعٍ جَدِيدٍ لِنَفَرَضْ أَنَّ الدُّوْلَابَ بَدَأَ بِالْعَزْلِ حَوْلَ مَحْوَرِهِ قَبْلَ وَضْعِهِ ، كَالسَّابِقِ ، بِحَيْثُ يَقَعُ الطَّرْفُ الْغَرْبِيُّ لِمَقْبِضِهِ عَلَى نَقْطَةِ اِرْتِكَازِ . فَبِالنَّظَرِ إِلَيْهِ مِنَ الشَّرْقِ ، وَإِذَا كَانَ الدُّوْلَابُ يَدْوَرُ بِاتَّجَاهِ مَعَاكِسِ لِعَقْرَبِي السَّاعَةِ ، فَإِنَّ مَتَجَهَ زَخَمِهِ الزَّاوِيَّ يَكُونُ بِاتَّجَاهِ الشَّرْقِ . وَتَوَثَّرَ ، كَالسَّابِقِ ، نَفْسُ قُوَّةِ الْجَاذِبِيَّةِ ، مُحَدِّثَةً عَزْمًا بِاتَّجَاهِ الشَّمَالِ (شَكْل ٩،٢٥) يَتَكَوَّنُ لَدَيْنَا الْآنَ وَضْعٌ جَدِيدٌ مُثِيرٌ لِلْاهْتِمَامِ لَا يَكُونُ فِيهِ عَزْمُ الدَّوْرَانِ وَالزَّخَمِ الزَّاوِيَّ مُتَوَازِيَيْنِ ؛ غَيْرَ أَنَّ مَعْدَلَ تَغْيِيرِ الزَّخَمِ الزَّاوِيَّ يَكُونُ مُوَازِيًّا لِلْعَزْمِ (فِي الْوَاقِعِ مُسَاوِيًّا لِلْعَزْمِ) ، وَبِاتَّجَاهِ الشَّمَالِ فِي هَذِهِ الْحَالَةِ . فَإِذَا كَانَ الْمَتَجَهُ L_1 يَدُلُّ عَلَى الزَّخَمِ الزَّاوِيَّ الْاِبْتِدَائِيِّ ، وَكَانَ الْمَتَجَهُ ΔL يَدُلُّ عَلَى التَّغْيِيرِ فِي الزَّخَمِ الزَّاوِيَّ فِي فِتْرَةٍ زَمْنِيَّةٍ وَجِيزَةٍ $(\Delta L = T \Delta I)$ ، فَإِنَّ بِمَجْمُوعِهَا L_2 يَدُلُّ عَلَى الزَّخَمِ الزَّاوِيَّ لِلدُّوْلَابِ بَعْدَ هَذِهِ الْفِتْرَةِ الزَّمْنِيَّةِ :

$$L_2 = L_1 + \Delta L. \quad (٩,٦٧)$$

هَذَا الْجَمْعُ الْاِتِّجَاهِيّ - الَّذِي يَنْطَبِقُ بِحِذَافِيرِهِ فَقَطْ عِنْدَ النِّهَايَةِ $0 \rightarrow \Delta I$ - مُبَيَّنٌ فِي شَكْل ٩،٢٥ . وَلَا يُوْدِّي عَزْمُ الْجَاذِبِيَّةِ هُنَا إِلَى إِسْقَاطِ الدُّوْلَابِ عَنِ رِكِيْزَتِهِ ؛ بَلْ يَعْمَلُ عَلَى إِزَاحَةِ مَحْوَرِ الدُّوْلَابِ دَائِرِيًّا إِلَى اتَّجَاهِ جَدِيدٍ ، قَلِيلًا إِلَى شِمَالِ الشَّرْقِ فِي هَذِهِ الْحَالَةِ . وَبِمَجْرَدِ أَنْ يَتَزَاحَ الدُّوْلَابُ هَكَذَا ، يَتَزَاحُ اتَّجَاهُ عَزْمِ الْجَاذِبِيَّةِ أَيْضًا ، قَلِيلًا إِلَى غَرْبِ الشَّمَالِ . وَنَتِيجَةُ لِّذَلِكَ ، يَنْجَذِبُ الزَّخَمُ الزَّاوِيَّ الْكُلِّيُّ الْجَدِيدُ L_2 أَبْعَدَ فَأَبْعَدَ بِاتَّجَاهِ مَعَاكِسِ لِدَّوْرَانِ عَقْرَبِي السَّاعَةِ (كَمَا يُشَاهَدُ مِنْ عَلَيَّ) بِوَاسِطَةِ تَغْيِيرٍ جَدِيدٍ ΔL . وَتَسْتَمَرُّ الْعَمَلِيَّةُ بِدَوْنِ انْقِطَاعٍ ، أَوْ إِلَى أَنْ يَوْقِفَهَا الْاِحْتِكَاكُ ، فِي الْوَقْتِ الَّذِي يَتَذَبْذَبُ فِيهِ مَتَجَهُ الزَّخَمِ الزَّاوِيَّ لِلدُّوْلَابِ مَارًّا بِسَائِرِ الْاِتِّجَاهَاتِ . وَبِعَنِي هَذَا - فِيزِيَاثِيًّا - أَنَّ مَحْوَرَ الدُّوْلَابِ ، كَمَا يُشَاهَدُ مِنْ عَلَيَّ ، يَدْوَرُ بِاتَّجَاهِ مَعَاكِسِ لِعَقْرَبِي السَّاعَةِ (شَكْل ٩،٢٦) . وَدَوْرَانِ الْمَحْوَرِ هَذَا ، الَّذِي يَحْدُثُ بِمَعْدَلٍ ثَابِتٍ ، يَسْمَى اسْتِبْقَاقًا (أَوْ مَبَادَرَةً) . وَلَوْ كَانَ الدُّوْلَابُ يَغْزِلُ بِاتَّجَاهِ مَعَاكِسِ ، لَكَانَ اتَّجَاهُ الْاِسْتِبْقَاقِ مُعَاكِسًا أَيْضًا .

الدُّوْلَابُ الْغَزَالُ يَسْتَبِقُ

وَرِغْمَ أَنَّنَا لَمْ نَذْكُرْ ذَلِكَ حَتَّى الْآنَ ، فَإِنَّ نِقَاشَنَا هَذَا يَرْتَكِزُ عَلَى افْتِرَاضِ هَامٍ ، أَلَا وَهُوَ أَنَّ الزَّخَمَ الزَّاوِيَّ الْكُلِّيَّ لِلدُّوْلَابِ يَكُونُ عَلَى امْتِدَادِ مَحْوَرِهِ . وَبِعَنِي هَذَا الْاِفْتِرَاضُ ، الَّذِي اسْتُخْدِمَ بِصُورَةٍ وَاضِحَةٍ فِي شَكْل ٩،٢٥ ، أَنَّ التَّغْيِيرَاتِ فِي اتَّجَاهِ الزَّخَمِ الزَّاوِيَّ يُمْكِنُ مُعَادِلَتُهَا مَعَ التَّغْيِيرَاتِ فِي اتَّجَاهِ الْمَحْوَرِ . وَلَا يَسْرِي مَفْعُولُ هَذَا الْاِفْتِرَاضِ - فِي الْوَاقِعِ - إِلَّا إِذَا كَانَ الزَّخَمُ الزَّاوِيَّ الْمَغْزَلِيَّ أَكْبَرَ بِكَثِيرٍ مِنَ الزَّخَمِ الزَّاوِيَّ الْمَدَارِيِّ ، مِمَّا يَعْنِي تَقْرِيْبًا أَنَّ دَوْرَانَ الدُّوْلَابِ حَوْلَ

تَقْرِيْبُ اسْتُخْدِمَ فِي شَكْل ٩،٢٥ :

$$L_{spin} \gg L_{orbital}$$

مركز كتلته أسرع بكثير من دوران مركز الكتلة حول نقطة الارتكاز . عند ذلك يكون الإسباق بسيطاً ومنظماً .

وبصورة أعم ، يمكن لدولاب يرتكز كما في شكل ٩,٢٥ أن يقوم بحركة معقدة نوعاً ، يتذبذب فيها المحور إلى أعلى وإلى أسفل (أو « يترنح nutates ») عندما يستبق . على كل حال ، فمن أنواع الحركة الممكنة ، حتى بدون التقريب الذي يقتضي أن يكون الزخم المغزلي كبيراً ، الاستباق البحت ، الذي تسهل معالجته رياضياً . ويبين شكل ٩,٢٦ المنظر من على الدولاب يقوم بهذا النوع من الحركة . فيظل محوره ، وبالتالي زخمه الزاوي المغزلي ، أفقياً ؛ كما يكون العزم T أفقياً أيضاً وعمودياً على L_{spin} . ومعادلة حركة الدولاب هي :

$$T = \frac{dL}{dt} = \frac{dL_{orbital}}{dt} + \frac{dL_{spin}}{dt} . \quad (٩,٦٨)$$

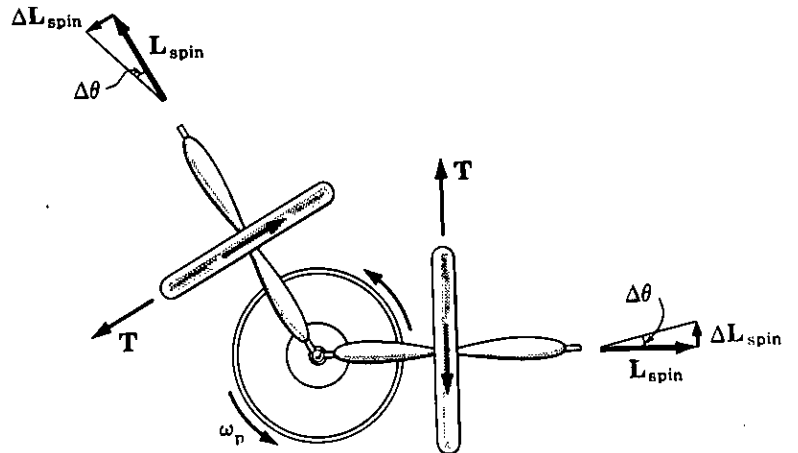
ويتجه الزخم الزاوي المداري رأسياً إلى أعلى ، متعامداً مع مستوى الصفحة في شكل ٩,٢٦ . وهوينشأ عن الإسباق ؛ كما أنه ثابت في كلا المقدار والاتجاه . وعلى ذلك ، فإن الحد الأول على يمين المعادلة ٩,٦٨ يساوي صفراً ؛ ولا يغير العزم سوى L_{spin} . ومقدار التغير ، لفترة زمنية متناهية الصغر Δt ، يساوي - من المعادلة ٩,٦٨ -

$$\Delta L_{spin} = T \Delta t . \quad (٩,٦٩)$$

وخلال هذه الفترة ، يدور المحور بزاوية $\Delta \theta$. والرجوع إلى المثلث الصغير في شكل ٩,٢٦ يبين أنه يمكن كتابة $\Delta \theta$ بالتقريب على الصورة :

$$\Delta \theta = \frac{\Delta L_{spin}}{L_{spin}} . \quad (٩,٧٠)$$

شكل ٩,٢٦ : المنظر من على الدولاب دراجية مستقيم . فيكون زخمه الزاوي المداري ، الذي يتجه رأسياً إلى أعلى متعامداً مع مستوى الصفحة ، ثابتاً . أمّا زخمه الزاوي المغزلي فيظل ثابت المقدار ، مع أن اتجاهه يتغير باستمرار . كما يتحدد التردد الزاوي للإسباق بالمعادلة ٩,٧٢ .



فتألف المعادلتان ٩,٦٩ و ٩,٧٠ لتعطينا

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{T}{L_{spin}}.$$

وفي النهاية التي تكون فيها Δt صغيرة ، تؤول النسبة على اليسار إلى سرعة الإستباق الزاوية :

$$\omega_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \quad (٩,٧١)$$

وبذلك ، نكون قد حصلنا على صيغة بسيطة جداً لمعدل الإستباق :

$$\omega_p = \frac{T}{L_{spin}}, \quad (٩,٧٢)$$

صيغة بسيطة لمعدل الإستباق

حيث T هو عزم الدوران المؤثر على الدوّاب بالنسبة إلى نقطة ارتكازه ، و L_{spin} الزخم الزاوي المغزلي ، الذي لا يعتمد على اختيار نقطة الأصل .

والواقع أنّ مشاهدة دولاب درّاجة ، مرتكز عند طرف أحد مقبضيه ، وهو يسبقُ هي خبرة جديرة بالاهتمام . فبالرغم من قدرتنا على إدراك ما يحدث ، فإنّه يبدو غريباً ألا يسقط الدوّاب عن نقطة الارتكاز . وجَمالُ هذا المثال يقبع في الطّريقة التي يبيّن فيها قوّة القانون الرّياضيّ في التّغلغل بسهولة خلال مدىّ جديد من الخبرات . فالقانون الذي يربط العزم ومعدلَ تغيّر الزّخم الزاويّ ، المبنيّ على مشاهدات تتفق تماماً مع الإدراك المألوف ، يُفسّر في الحال ظواهر جديدة كان من الممكن أن تحدّي إدراكنا المنطقيّ .

٩,٨ حفظ الزّخم الزاويّ The Conservation of Angular Momentum

تحت أيّ ظروفٍ يظلّ الزّخم الزاويّ لنظامٍ ما ثابتاً ؟ ... تزوّدنا المعادلة ٩,٥٢ بإجابة فوريّة . فإذا كان العزم الكليّ المؤثر على نظامٍ ما يساوي صفراً ، فإنّ معدلَ التّغيّر الكليّ لزمجه الزاويّ يساوي صفراً ؛ وبذلك ، يظلّ زخمه الزاويّ ثابتاً . والمعادلة ٩,٥٢ ، على صورتها المبينة ، تنطبق على أيّ جُسيم أو أيّ جزء من نظام . وللتذكير بأنّها تنطبق على النظام برُمته أيضاً ، فن الممكن أن نكتب :

$$T_{total} = \frac{dL_{total}}{dt}. \quad (٩,٧٣)$$

والحقيقة أنّه يمكننا الحصول على عبارة أكثر أهميّة وأكثر فائدة ممّا سبق عن العزم والزّخم الزاويّ إعتبر قسمَ العزم الكليّ إلى جزء داخليّ وآخر خارجيّ :

$$T_{total} = T_{int} + T_{ext}, \quad (٩,٧٤)$$

مبدأ جديد هام : مجموع العزوم
الداخلية يساوي صفراً

حيث تنشأ العزوم الخارجية من خارج النظام ؛ بينما تنشأ العزوم الداخلية من داخل النظام .
فغواص هوائي هابط في الهواء ، مثلاً ، يتعرض لعزوم خارجية من الهواء وعزوم داخلية من
عضلاته . وبناء على أفضل الأدلة العملية - أدلة ترتكز على صلاحية قانون حفظ الزخم
الزاوي - فإن مجموع العزوم الداخلية في الواقع يساوي صفراً دائماً . وهذه عبارة جديدة وهامة
عن الطبيعة . ويمكن أن نسميها بالمكافئ الدوراني لقانون نيوتن الثالث . فبسبب هذا القانون ،
الذي يؤدي مباشرة إلى الاستنتاج بأن مجموع القوى الداخلية يساوي صفراً دائماً ، يكون الزخم
محفوظاً لنظام معزول . وعلى نفس الغرار ، يؤدي تلاشي العزم الكلي الداخلي إلى حفظ الزخم
الزاوي للأنظمة المعزولة . أما للقوى المركزية - أي تلك القوى التي تؤثر على امتداد الخطوط
الواصلة بين الجسيمات - فإن قانون نيوتن الثالث يؤدي إلى تلاشي العزم الداخلي الكلي بالإضافة
إلى القوة الداخلية الكلية . لكن ، بصورة عامة ، فإن متطلب تلاشي العزم الداخلي الكلي هو
قيد أقوى على قوى الطبيعة من قانون نيوتن الثالث .

وبما أن مجموع العزوم الداخلية يساوي صفراً ، فإنه يمكن استبدال المعادلة ٩,٧٣ بالعلاقة

معادلة الحركة الدورانية لنظام

$$T_{ext} = \frac{dL_{total}}{dt} \quad (٩,٧٥)$$

وعندها يمكن صياغة قانون حفظ الزخم الزاوي على الصورة :

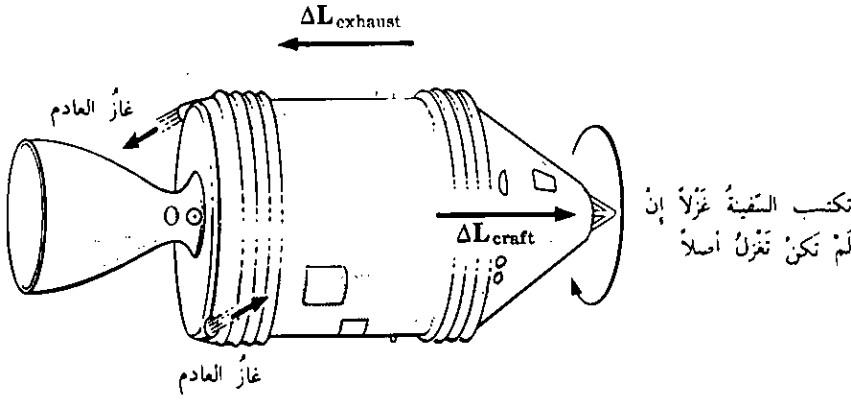
حفظ الزخم الزاوي

$$L_{total} = \text{constant} \quad \text{if} \quad T_{ext} = 0 ; \quad (٩,٧٦)$$

أي أن الزخم الزاوي الكلي لنظام يتغير فقط استجابة لعزم خارجي . فإذا هبط الغواص الهوائي
مدة من الزمن دون أن يدور جسمه [وهذا ما يدعى بغطسة التمس [swan dive] ، ثم بدأ يدور
بعدئذ ، فما ذلك إلا بسبب عزوم أثر بها الهواء على الغواص . ولو سقط في الفراغ ، لما استطاع
تغيير زخمه الزاوي بواسطة أي التواء لجسمه على الإطلاق . ° فعضلاته ، بتغيير شكله ، تستطيع
أن تحدث عزوماً في الهواء تؤثر على جسمه فتكسيه زخماً زاوياً . بيد أنه لن يفلح أي دفع ، أو
سحب ، أو كي للعضلات في الحصول على محصلة عزم داخلي .

ولنفس السبب ، ليس هناك من شيء يحدث في داخل سفينة فضاء يستطيع أن يوقف أو
يبدأ حركة دورانية منتظمة ؛ إذ يمكن إحداث ذلك فقط بنفس طريقة تغيير زخمها
- بالتخلص من بعض الكتلة . فالعادم المنبعث من فتحة مماسية (شكل ٩,٢٧) له زخم زاوي
بالنسبة إلى مركز السفينة . وبذلك تكتسب السفينة وما يتبقى فيها تغيراً مساوياً ومضاداً في الزخم

° إلا أنه يستطيع أن يغير اتجاهه بدون تغيير زخمه الزاوي . والقطعة ، التي يفقدورها أن تحط عادةً على أقدامها ، هي ماهرة في
فعل ذلك بالضبط . فبالنسبة للقطعة الهابطة ، لا يسهم الهواء بأي نصيب ذي شأن في متاورة الإنعطاف ، التي يمكن أن
تُنفذ - من حيث المبدأ - في الفراغ . وترك مسألة تفسير إنجاز القطعة الفريد للقاري (أنظر سؤال ٩,٢٧) .



شكل ٩،٢٧ : التأثير بعزم على سفينة فضاء بواسطة دفع الصواريخ الماسية . . . للنظام ككل ، السفينة والعادم معاً ، يكون الزخم الزاوي محفوظاً ؛ أي أن $\Delta L_{\text{exhaust}} + \Delta L_{\text{craft}} = 0$.

الزاوي . فالسفينة والعادم معاً كنظام واحد لا يعانيان تغييراً في الزخم الزاوي لأنها لا يتأثران بعزم خارجي . فإذا لم نعتبر العادم جزءاً من النظام ، فإنه يكون جزءاً من العالم الخارجي الذي يحدث عزمًا وتغييراً في الزخم الزاوي لما يتبقى . . . وماذا عن العادم بمفرده ؟ هل يؤثر عليه عزم خارجي ؟

يساوي L ثابتاً لسفينة الفضاء،
والعادم معاً

■ مثال : تدور سفينة الفضاء في شكل ٩،٢٧ ، والتي يساوي عزم قصورها $I = 2000 \text{ كـرغ م}^2$ ، تدور بحرية حول محور تماثلها بسرعة زاوية $\omega = 0.2 \text{ مسر/ث}$. يرغب رواد الفضاء في إيقاف هذه الحركة باستخدام منفثي تحكم control jets ، يقع كل منها على بعد $r = 1.5 \text{ م}$ عن المحور ، وينفثان معاً العادم بمعدل $dm/dt = 2 \text{ كـرغ/ث}$ بسرعة عادم $v_{\text{ex}} = 50 \text{ م/ث}$. فما مدة تشغيل المنفثين الماسيين ؟

نستطيع الشروع في الحل بصورة تقريبية إذا لاحظنا أن السرعة الماسية للصاروخ ، ωr ، أصغر بكثير من v_{ex} ، وإذا فرضنا أن كتلة العادم أقل كثيراً من كتلة سفينة الفضاء . ففي بادي الأمر ، يكون الزخم الزاوي للنظام

$$L_{\text{before}} = I\omega.$$

وأخيراً ، عند إيقاف سفينة الفضاء ، لا يتبقى سوى الزخم الزاوي لغاز العادم ذي الكتلة Δm :

$$L_{\text{after}} = \Delta m v_{\text{ex}} r.$$

ويجب أن يتساوى هذان الزخمان الزاويان ؛ لذا ، فإن

$$\Delta m = \frac{I\omega}{v_{\text{ex}} r}. \quad (9.77)$$

وبما أن dm/dt ثابت ، نستطيع أن نكتب أيضاً :

$$\Delta m = \int \left(\frac{dm}{dt} \right) dt = \left(\frac{dm}{dt} \right) \Delta t.$$

وعلى ذلك يكون الزمن اللازم

$$\Delta t = \frac{I\omega}{v_{cr}(dm/dt)}.$$

وبالتعويض بالمقادير المعطاة ، نجد أن

$$\Delta m = 5,33 \text{ كـرغ}$$

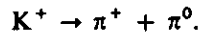
$$\Delta t = 2,67 \text{ ث.}$$

■

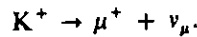
إن أبسط طريقة لتخليص نظام ما من العزم الخارجي هي تخلصه من جميع القوى الخارجية . فإن نظاماً معزولاً لا يتأثر بأية قوة خارجية ، وبالتالي بأي عزم خارجي . وينتج عن ذلك ، كقانون أساسي في الطبيعة ، أن : الزخم الزاوي الكلي لنظام معزول يكون محفوظاً . فالغواص الهوائي بدون أي هواء والسفينة الفضائية خارج نطاق الغلاف الجوي قد دلتا على هذا المبدأ . ومن السهل العثور على أمثلة في دنيا الذرات والجسيمات أيضاً . والحقيقة أن أدق فحص لقانون حفظ الزخم الزاوي إنها يحدث في العالم دون المجهرى ؛ حيث يكون العزل الحقيقي لنظام مفرد عن تأثير جميع الأنظمة الأخرى حقيقة واقعة لدرجة كبيرة وليس مجرد تجريد مثالي . ورغم كون تكمية quantization الزخم الزاوي هامة في العالم دون المجهرى وعديمة الأهمية في العالم الجاهري ، فإن حفظ الزخم الزاوي يتخذ تماماً نفس الشكل وله نفس الأهمية في كلا العالمين .^٥

معظم عمليات الجسيمات تكون معزولة

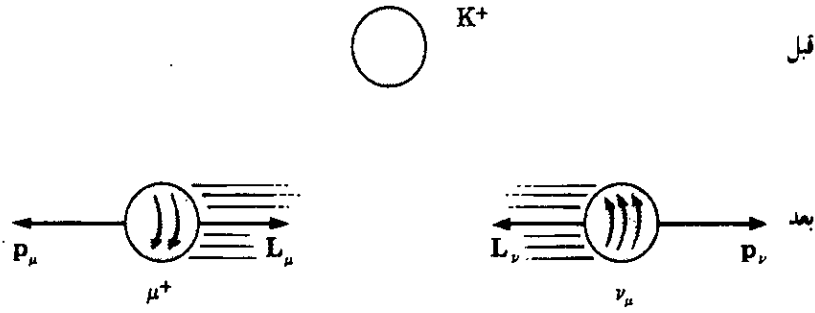
وترد أمثلة على حفظ الزخم الزاوي في تحولات الجسيمات في الباب الرابع . وكمثال آخر ، إعتبر اضمحلال كيون إلى بيونين على الصورة الآتية :



فالجسيمات الثلاثة عديمة العزل . والنسبة إلى النقطة التي كان يشغلها الكيون في البداية ، يساوي الزخم الزاوي الكلي صفراً . فيتطلب قانون حفظ الزخم الزاوي أن ينطلق البيونان بعد الاضمحلال بدون زخم زاوي مداري . وطريقة أخرى لاضمحلال الكيون الموجب هي اضمحلاله إلى ميون ونيوترينو :



٥ على كل حال ، يجب أن نعي أن قانون التغير ، المعادلة ٩,٧٥ ، هو قانون كلاسيكي يفقد صلاحيته في عالم الكم .



شكل ٩,٢٨ : قانونا حفظ في اضمحلال الكيون . فحصول كل من الزخم والزخم الزاوي للجسيمين الناتجين تساوي صفراً . ومع أنه يستحيل الكشف عن النيوتريو عادة ، إلا أنه يمكن استنتاج p_ν و L_ν من قياسات p_μ و L_μ .

فمرة أخرى يكون الزخم الزاوي الكلي صفراً ؛ إلا أن كلاً من الجسيمين الناتجين - هذه المرة - يكون له نصف وخذة كم من الغزل . ومن طبيعة النيوتريو الغازل أن يكون « يسارياً » . ويعني هذا أن زخمه الزاوي يكون دائماً معاكساً لزخمه ؛ أو ، بصورة مكافئة ، معاكساً لاتجاه انطلاقه (شكل ٩,٢٨) . ولحفظ الزخم الزاوي في هذا النمط من اضمحلال الكيون ، يتعين على الميون أن ينبعث هو الآخر في حالة حركة يسارية . فيبطل كل من الزخم والزخم الزاوي للجسيمين الناتجين مفعول بعضهما البعض .

٩,٩ قانون المساحات The Law of Areas

يكون الزخم والزخم الزاوي محفوظين للنظام المعزول الذي لا تؤثر عليه قوى خارجية . غير أن العزل ليس لازماً لحفظ الزخم الزاوي ؛ إذ أن كل ما يلزم هو تلاشي العزم الخارجي . فمن الممكن تماماً أن يتأثر نظام بقوة خارجية ، ومع ذلك يكون حرّاً من تأثير أي عزم . وبالنسبة لنوع خاص وهام جداً من القوة - القوة المركزية *central force* - يكون الزخم الزاوي محفوظاً ، مع أن النظام غير معزول وزخمه ليس ثابتاً .

يساوي L ثابتاً للقوى المركزية

اعتبر المريخ Mars ، ذلك الكوكب الذي قام كبلر بدراسته دراسة مكثفة أكثر من أي كوكب آخر ، واختار الشمس كنقطة إسناد . (بدقة أكبر ، يجب أن تكون نقطة الإسناد مركز كتلة نظام المريخ - الشمس ، الذي لا يبعد كثيراً عن مركز الشمس .) فيكون للمريخ زخم زاوي مداري بالنسبة إلى هذه النقطة . إلا أن المريخ لا يتأثر بأي عزم بالنسبة إلى نفس النقطة [شكل ٩,٢٠ (د)] . وبذلك ، يحفظ المريخ بزخم زاوي ثابت أثناء دورانه حول الشمس . وفي الواقع يكون كل من الزخم المغزلي والزخم الزاوي المداري ثابتاً على حدة ، لأن الكوكب لا يتأثر بعزم بالنسبة إلى مركزه ، كما لا يتأثر بعزم بالنسبة إلى الشمس . ونحن معنيون هنا بثبوت الزخم الزاوي المداري للكوكب .

وتُعرفُ القوَّةُ المركزيَّةُ بأنَّها قوَّةٌ تؤثرُ على امتداد الخطِّ الذي يصلُ جسيماً أو جسمًا إلى مركز قوَّة . فباختيار نقطة الأصل عند مركز القوَّة ، يكون متجه الموضع ومتجه القوَّة إما متوازيين أو متعاكسين . وفي كلا الحالتين ، يكون

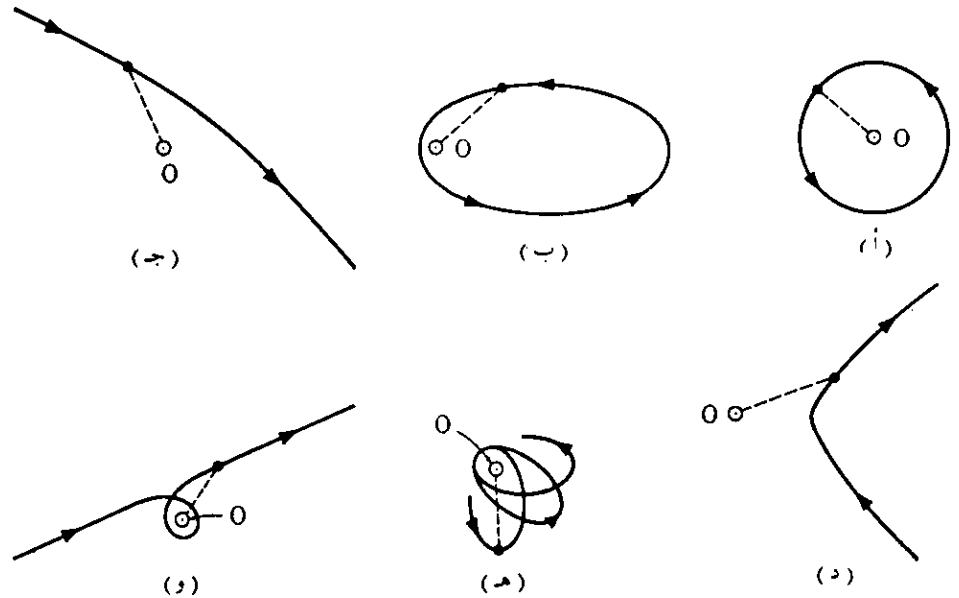
السَّبب : القوى المركزيَّة لا تُحدث عزمًا

$$T = r \times F = 0 \quad (\text{central force}). \quad (9,78)$$

لذلك يكون الزخمُ الزاوي ثابتاً بالنسبة إلى مركز القوَّة . وإنَّ الحركة الدائريَّة المنتظمة ، التي تحتاج إلى قوَّة مركزيَّة ، هي مثال خاصٌّ كثيراً ما يُذكر على الحركة المتسارعة بزخم زاوي ثابت . بيدَّ أنَّه ليس من الضروريِّ لجسم متأثر بقوَّة مركزيَّة أن يتحرَّك في دائرة ، أو حتَّى أن يتحرَّك حول مركز القوَّة . ويبيِّن شكل ٩,٢٩ بصورة تخطيطيَّة بعض أنواع الحركة في مجالات قوى مركزيَّة . فلكلِّ منها ، يكون الزخمُ الزاوي محفوظاً بالنسبة إلى مركز القوَّة . كذلك ، فإنَّ لكلِّ مدار أو مسار خاصيَّة هندسيَّة طريفةً مشتركة تدعى « قانون المساحات » .

اشتقاق قانون المساحات

ويبيِّن شكل ٩,٣٠ الرِّسم الهندسيُّ الذي يوضِّح معنى قانون المساحات . فعند لحظة معيَّنة ، يكون الجسم المتأثر بقوَّة مركزيَّة عند النِّقطة A ، على بعد r عن مركز القوَّة C ، ويتحرَّك بسرعة v . وبعد مرور فترة زمنيَّة Δt ، يكون قد وصل إلى النِّقطة B . وإذا كانت الفترة Δt قصيرةً لدرجة كافية ، أمكن تقريب القطعة الصَّغيرة AB من المدار كخطٍّ مستقيم يتم اجتيازُه بسرعة ثابتة v . ويمكننا الإشارة إلى القطعة AB بالرمز Δs . فهو يساوي حاصل ضرب السَّرعَة في الزَّمن :



شكل ٩,٢٩ : بعض أنواع الحركة الممكنة في مجالات قوى مركزيَّة تبيِّن الرِّسوم (أ) حتَّى (د) مداراتٍ دائريَّة ، وإهليلجيَّة ، وزائديَّة hyperbolic ، وهذه مدارات ممكنة عندما تتغيَّر القوَّة عكسيًّا مع مربع المسافة ($F \sim 1/r^2$) . أمَّا إذا تغيَّرت القوَّة مع المسافة بطرق أُخرى ، فإنَّ تشكيلةً لانهائيَّة من المسارات الأخرى تكون ممكنة . ويبيِّن الرِّسمان (هـ) و(و) اثنين منها .

وفي النهاية $\Delta t \rightarrow 0$ ، نحصل على

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad (٩,٨١)$$

تُتَسَحُّ المساحة بمعدل ثابت إذا كان L ثابتاً

أي أن معدل تغير المساحة - أو المعدل الذي تُتَسَحُّ به المساحة - يُساوي الزخم الزاوي للجسيم مقسوماً على ضعف كتلة الجسيم . * وإذا كانت القوة مركزية ، كان هذا المقدار ثابتاً لأي جسيم معين ، وقيمته عند لحظة ما كقيمته عند أية لحظة أخرى . ففي شكل ٩,٣٠ ، مثلاً ، تكون المساحتان CAB و CEF متساويتين إذا كانت الفترتان الزمنيةتان اللتان يستغرقهما الجسيم في قطع جزأي المدار AB و EF متساويتين . وكما يبين الشكل بوضوح ، فإن هذا يعني أن سرعة الجسيم من E إلى F أكبر منها بالضرورة من A إلى B .

إن كَوْنَ خطٍّ مرسومٍ من مركز القوة إلى الجسيم (أو الجسم) يسمح للمساحة بمعدل ثابت هو ما يدعى بقانون المساحات . ولقد قمنا باشتقاقه كنتيجة هندسية لقانون حفظ الزخم الزاوي . لكن ، تاريخياً ، لم يكن قانون المساحات نتيجة لحفظ الزخم الزاوي بل كان بالأحرى سابقاً precursor له . وكان يوهانز كبلر عام ١٦٠٩ - قبل أن يُخترَع مفهوم الزخم الزاوي ، وقبل وجود فكرة القوة المركزية ، وحتى قبل أن يدرك أن لحركة الكواكب أية علاقة بالقوة - قد اكتشف كحقيقة تجريبية أن قانون المساحات يصف بصورة صحيحة حركة كوكب المريخ حول الشمس . وكانت هذه واحدة من ثلاث خواص هامة لحركة الكواكب اكتشفها كبلر . وقوانين كبلر ، التي ربطت معاً عدداً لا يُعدُّ ولا يُحصى من المشاهدات الدقيقة للشمس والكواكب في ثلاث عبارات - أنيقة ، سيجري بحثها بصورة أوسع في الباب الحادي عشر . ولقد شكّل قانون المساحات ، بعد عشرات السنين من اكتشافه ، دعماً قوياً لاعتقاد نيوتن بانجذاب الكواكب نحو الشمس بواسطة قوة مركزية .

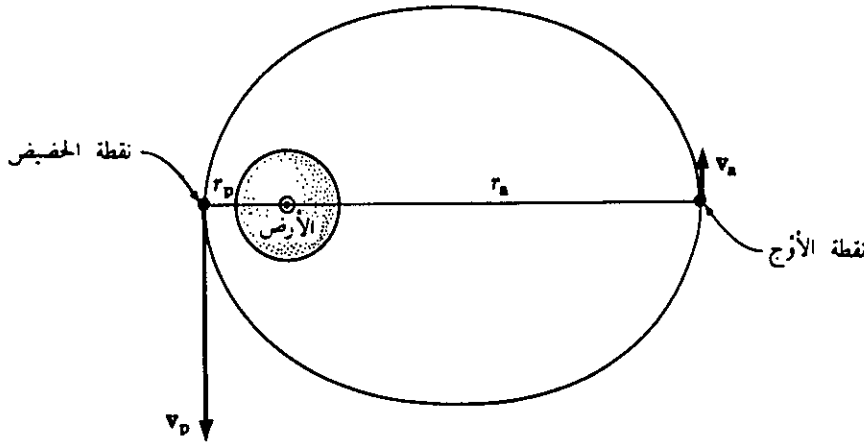
اكتشف كبلر قانون المساحات
لكوكب المريخ

يتحرك قمر صناعي أرضي عند نقطة الحضيض (أقرب نقطة) perigee ونقطة الأوج (أبعد نقطة) apogee عمودياً على الخط الذي يصله بمركز الأرض (شكل ٩,٣١) . ويمكن التعبير ببساطة عن زخمه الزاوي عند هاتين النقطتين المعيّنتين (أنظر المعادلة ٩,٤) :

$$L_p = m r_p v_p \quad (٩,٨٢)$$

$$L_a = m r_a v_a \quad (٩,٨٣)$$

* ويمكن تعريف المساحة بأنها كمية متجهة ، بحيث يكون اتجاه المتجه متعامداً مع المستوى الذي تقع فيه المساحة . مثلاً ، تكون المساحة المتجهة للمتلك CAB : $\Delta A = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \Delta t$ ، كما تكون الصيغة الاتجاهية للمعادلة ٩,٨١ : $dA/dt = L/2m$



شكل ٩،٣٩ : قرصاني عند نقطتي الحضيض والأوج النسبة بين سرعته عند هاتين النقطتين هي معكوس نسبة بُعديتي عن مركز الأرض (المعادلة ٩،٨٤) .

(حيث يشير الحرفان السفليان p و a إلى "perigee" و "apogee") . وبما أن قوة جاذبية الأرض المؤثرة على القمر الصناعي توشك أن تكون قوة مركزية ، فإن الزخم الزاوي لا يتغير إلا بقدر يسير ، ويمكن اعتبار L_p و L_a متساويتين . وتؤدي هذه المساوية إلى علاقة في منتهى البساطة بين السرعات والمسافات عند نقطتي الأوج والحضيض :

$$\frac{v_a}{v_p} = \frac{r_p}{r_a} ; \quad (٩،٨٤)$$

نسبة بسيطة لنقطتي الأوج والحضيض

فترد السرعة الصغرى عند نقطة الأوج ، والسرعة العظمى عند نقطة الحضيض .

إن تناقص السرعة عند نقطة الأوج الذي يُملئ حفظ الزخم الزاوي قد استفيد منه في اختيار المدار المناسب لبعض أقمار الاتصالات . فأكبر مؤلنبا *Molniya* السوفيتية قد أطلقت في مدارات تبعد نقطة أوجها (عن مركز الأرض) سبع مرات أكثر من بُعد نقطة الحضيض . وتُستخدم هذه في إعادة بث الرسائل relay messages عندما تكون - بصورة رئيسية - عند نقطة الأوج ومتحركة ببطء كافٍ يسمح باستخدامها بشكل مستمر لعدة ساعات . وعندما تختفي وراء الأفق وتقترب من نقطة الحضيض ، تزداد سرعتها فيكون زمن دورانها حول الجانب الآخر من الأرض ومن ثمَّ عوداً إلى وضع مُفيد أقل من الزمن الذي يلزمها لو وُضعت في مدار دائري تقريباً . وهكذا ، فالإنسان لا يستطيع نقض قانون حفظ الزخم الزاوي ؛ لكنه يستطيع استخدامه لفائدته .

مدارات بعض أقمار الاتصالات منحرفة عن المسار الدائري eccentric إلى حد بعيد

إن كبلر ، في دراسته مدارات الكواكب الستة المعروفة آنذاك ، لم يكن ليحظى بالشكيلة الواسعة من أشكال المدارات التي تُبديها الأقمار الصناعية الأرضية هذه الأيام . فكما يبدو في جدول ٩،٢ ، لا يمتلك أي من هذه الكواكب مداراً يختلف كثيراً عن الشكل الدائري . فسافة

جدول ٩,٢ : بعض خواص المدارات الكوكبية التي كانت معروفة لكبلر°

الكوكب	متوسط بعده عن الشمس بالوحدات الفلكية [†]	النسبة بين مسافتي الحضيض والأوج	النسبة بين قطري المدار الأكبر والأصغر
عطارد Mercury	٠,٣٨٧	١,٥١٨	١,٠٢٢
الزهرة Venus	٠,٧٢٣	١,٠١٤	١,٠٠٠٠٢٣
الأرض Earth	١,٠٠٠	١,٠٣٤	١,٠٠٠١٤
المريخ Mars	١,٥٢٤	١,٢٠٦	١,٠٠٤٤
المشتري Jupiter	٥,٢٠	١,١٠٢	١,٠٠١٢
زحل Saturn	٩,٥٤	١,١١٨	١,٠٠١٦

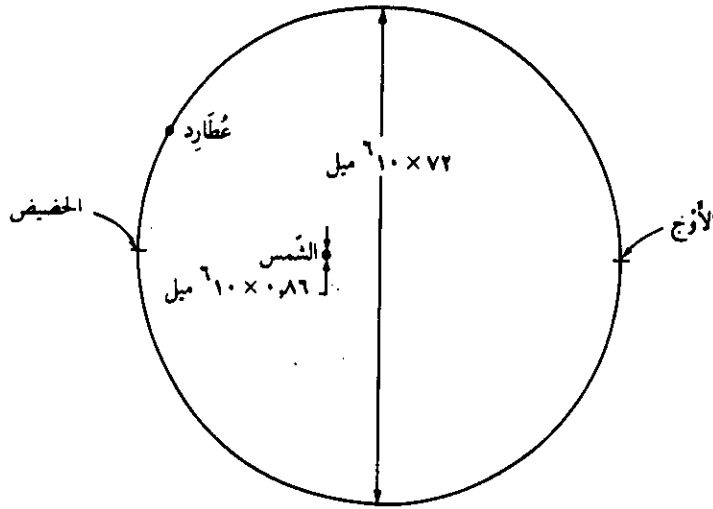
° الملاحظات المذكورة في الجدول هي القيم الحالية لهذه الكميات .

† تُعرّف الوحدة الفلكية (مرفر A.U.) بأنها متوسط المسافة بين الأرض والشمس ، وتساوي ١,٤٩٦ × ١٠^{١١} م ، أو حوالي ٩٣ مليون ميل .

مدارات الكواكب لا تختلف كثيراً عن الدوائر

أوج عطارد ، الذي يكون مداره أبعد ما يكون عن الشكل الدائري بين هذه الكواكب الستة ، هي أكبر بمقدار ٥٢ بالمئة من مسافة حضيضة (مع أن أطول قطر لمداره يكون أكبر بمقدار ٢ بالمئة فقط من أقصر قطر له - أنظر شكل ٩,٣٢) . كما أن مدار الزهرة يقرب من دائرة تامة . والمريخ ، الذي يتسطح مداره بأقل من ٠,٥ بالمئة ، يصل إلى حوالي ٢٠ بالمئة أقرب إلى الشمس عند الحضيض من عند الأوج . وإن معطيات تيخو دي براهي Tycho de Brahe التي توفرت لكبلر كانت من الدقة الكافية بحيث مكنته من اكتشاف قانون المساحات لحركة المريخ ومن أن يتحقق من صحته للكواكب المعروفة الأخرى .

إن التتبع الدقيق precision tracking للأقمار الصناعية الحديثة يزودنا يومياً بالمزيد من الاختبارات لقانون المساحات . وبالنسبة للأقمار الصناعية ، بالطبع ، يقوم قانون المساحات بدور الأدق وليس الاختبار . فعند إحدى النهايتين لأشكال المدارات ، تقع المدارات المفلطحة elongated orbits لبعض أقمار « المستكشف » الصناعية Explorer satellites ، التي لامست أطراف الغلاف الجوي على ارتفاع يزيد قليلاً على ١٠٠ ميل عن سطح الأرض عند الحضيض ، وطافت لمسافات تزيد على ١٠٠.٠٠٠ ميل - نصف المسافة إلى القمر - عند الأوج . فالمستكشف ١٨ (Explorer 18) كان يمر بنقطة الأوج على بُعد يزيد على ١٢٦.٠٠٠ ميل عن مركز الأرض وبسرعة منخفضة مقدارها حوالي ٧٨٠ ميلاً/س بالمقارنة مع سرعته التي فاقت ٢٤.٠٠٠ ميل/س عند الحضيض . أما عند النهاية الأخرى لأشكال المدارات ، فيقع المدار الدائري شبه التام لقمر اتصالات متزامن [أي يتزامن دورانه مع دوران الأرض حول محورها] synchronous . ففي عام ١٩٦٩ ، كان حضيض وأوج قمر الاتصالات الدولي Intelstat 3D ،



شكل ٩,٣٢ : مدار عطارد مرسوم بموجب مقياس الرسم ، مثله مثل مقاييس الشمس ، إلا أن عطارد مكبر جداً . وتكون سرعة عطارد عند الحضيض أكبر بحوالي ٥٢ بالمئة من سرعته عند الأوج .

عندما كان على ارتفاع يزيد على ٢٦٠٠٠ ميل عن مركز الأرض ، يختلفان بأقل من ميل واحد .^٥

ومن حسن حظ كبلر وتقدم العلوم في القرن السابع عشر أن يكون قانون المساحات قريباً جداً من التام للحركة الكوكبية . إلا أننا نعلم الآن - كما علم نيوتن في الواقع - أنه لا يوجد أي كوكب يتأثر بقوة مركزية تماماً . فمع أن المريخ ، مثلاً ، يتأثر بالشمس بصورة رئيسية ، فإنه ينجذب قليلاً في اتجاهات أخرى بواسطة المشتري ، والأرض ، وكل كوكب آخر . ولا تشكل هذه القوى الأضعف ، المعروفة باسم تراجفات perturbations ، قوى مركزية بالنسبة إلى مركز الأرض كنقطة إسناد . فبسبب هذه التراجفات ، يتأثر المريخ بعزم دوران ، فيتغير زخمه الزاوي قليلاً مع الزمن ، ولا يكون قانون المساحات قانوناً تاماً بالنسبة له . وبما أن للتراجفات آثاراً ضئيلة فقط ، فإن للنظام الشمسي بساطة تبعث على السرور لا تتوفر في غير هذه الظروف ، مما يُعتبر عاملاً حطاً للإنسان في جهوده الأولى لفهم العالم خارج نطاق الأرض . من ناحية أخرى ، تبين أخيراً أن هذه التراجفات تخدم العلم ، ولا تعيقه . فقد أمكن بواسطتها إجراء اختبارات حساسة لقانون قوة الجاذبية ؛ ولعل الأهم من ذلك أنها أدت إلى اكتشاف كوكبين جديدين - نبتون Neptune وبلوتو Pluto . أمّا كيفية حدوث ذلك فسنبحثه في الباب الحادي عشر .

التراجفات تجعل قانون المساحات غير تام

وقانون المساحات غير تام أيضاً بالنسبة للأقمار الصناعية التي تدور حول الأرض ؛ وهو

^٥ بما أن أقمار الاتصالات الصناعية تحمل صواريخ صغيرة يحري التحكم فيها من الأرض ، فمن الممكن أن يكون مدار Intelstat 3D قد اختلف الآن قليلاً . وبما أنه حركية من قوة الاحتكاك ، فإنه سيظل - على أية حال - رقيقاً للأرض على مدى الأيام .

نقصان نستطيع استخدامه في معرفة المزيد عن الأرض . فلو كانت الأرض كرة تامة تتوزع كتلتها في قشر (كروية) shells منتظمة ، لكانت القوة التي يتأثر بها قمر صناعي مركزيّة تامة . إلا أن الأرض ليست كرة تامة . فهي مسطحة عند القطبين ؛ وشكلها كمثريّ قليلاً (وهي حقيقة كشف النقاب عنها لأول مرة بواسطة الأقمار الصناعيّة) ؛ كما أن طبقاتها السطحيّة مكثلة نوعاً lumpy . لكل هذه الأسباب ، تستطيع الأرض التأثير بعزوم صغيرة على قمر صناعي ، فتغير بذلك زخمه الزاوي وتجعله ينحرف قليلاً عن متطلبات قانون المساحات . ولقد قيس هذه الانحرافات المداريّة بدقّة كافية لبعض الأقمار الصناعيّة ، بحيث كشفت عن شكل الأرض الكمثريّ وتفاصيل أخرى أدقّ عن توزيع كتلتها .

تؤثر الأرض بعزوم صغيرة على
الأقمار الصناعيّة

★ ٩,١٠ تكافؤ اتجاهات المكان The Isotropy of Space

لقد خضع مفهوم الزخم الزاوي لتطور مثير في الفيزياء . ففي البدء ، اكتشف كبلر قانون المساحات كحقيقة تجريبية قبل انضمام الزخم الزاوي إلى مفردات أو أدوات علم الفيزياء بزم طويل . ومع ذلك ، فقد ربط نيوتن قانون المساحات بفعل القوة المركزيّة دون الاستعانة بمفهوم الزخم الزاوي . ولم يُعرف الزخم الزاوي ويُستخدم في الميكانيكا إلا في القرن الثامن عشر . كما لم يُعتبر الزخم الزاوي بحق كواحد من أهمّ المفاهيم الأساسيّة في الميكانيكا إلا في القرن التاسع عشر ، عندما تمّ تطوير صياغات رياضيّة بديلة وأقوى للميكانيكا . وأخيراً ، في القرن العشرين ، انضمّ الزخم الزاوي إلى الزخم والطاقة كواحد من مفاهيم الميكانيكا المبدئية preminent . وهناك عدّة أسباب لأهمّيته الحاليّة : أحدها حفظه ، وآخر تكميئته ؛ وثالثها علاقته بتأثير بسيط للفراغ .

لماذا يُعتبر الزخم الزاوي الآن كمفهوم
رئيسي

وكما أنّ حفظ الزخم مرتبط بتجانس المكان homogeneity (عدم تمييز نقطة في المكان عن أخرى) ، بل يمكن أن يُؤسّس عليه فعلاً ، فإنّ الزخم الزاوي يرتبط بتكافؤ اتجاهات المكان (عدم تمييز اتجاه عن آخر) . فلا نتوقع من جسم معزول ساكن في المكان أن يتسارع تلقائيّاً باتجاه ما ، حيث يستلزم ذلك عدم تجانس المكان ؛ كما لا نتوقع من الجسم أن يبدأ فوراً بالدوران تلقائيّاً ، حيث يستلزم ذلك عدم تكافؤ اتجاهات المكان . فانهدام الدوران التلقائيّ يقتضي انعدام محصلة أيّ عزم داخليّ ، ممّا يعني بدوره أنّ الزخم الزاوي لنظام معزول يكون محفوظاً . وهكذا ، فإنّ تماثل sameness المكان البريّ المظهر هو الأساس وراء كل من حفظ الزخم وحفظ الزخم الزاوي (أنظر بند ٤,٨) .

إنّ سلسلة الحجج حول الزخم الزاوي تستحقّ المراجعة بشيء من التفصيل اعتبر

٥ مذكّرة : لقد احتاجت هذه المفاهيم الثلاثة جميعها إلى تعاريف جديدة في النظريات الحديثة ؛ وهي تعاريف تشمل تلك القديمة .

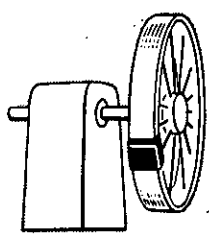
دولاباً منتظماً فيما عدا ثقلًا موضوعاً عند نقطة ما من محيطه (شكل ٩,٣٣). فإذا عُلّق قريباً من سطح الأرض وكان ساكناً في البداية ، فإنه يبدأ بالدوران « تلقائياً » إذا وُضِعَ الثقلُ عند أية نقطة غير النقطة السفلى . وليس هناك ما يدعو للعجب في ذلك ؛ إذ تؤثر قوة خارجية ، هي قوة الجاذبية ، على الدّولاب ، مُحَدِّثَةً عِزْماً خارجياً . (وثمة قوة خارجية أخرى تسند الدّولاب عند محوره ، دون أن تؤثر بعزم بالنسبة إلى المحور .) ويتغير الزخم الزاوي للدّولاب بسبب العزم الخارجي . فإذا كان ساكناً في البداية ، فإنه يبدأ بالدوران . وهكذا ، لا يكون الزخم الزاوي محفوظاً بالنسبة للدّولاب . وتوجد طريقة أخرى لوصف هذه الحالة ، هي قولنا إنه يوجد قُرب الأرض اتجاه مُفضَّل ، هو الاتجاه الرأسي لقوة الجاذبية الأرضية . فالبرَمَقُ spoke المُفضَّل - ذاك الذي يصل محور hub الدّولاب بالثقل عند الحافة - يتحرك بحيث ينطبق مع الاتجاه المُفضَّل أو يتذبذب بالتساوي حول الاتجاه المُفضَّل . أمّا في الفراغ ، بعيداً عن الأرض أو أية مؤثرات خارجية ، فيجب ألا يوجد اتجاه مُفضَّل ولا دورانٌ فوري . وعليه ، يجب أن يظل نفس الدّولاب ساكناً ، إذا وُضِعَ في موقع مناسب بعيد . وكلمة « يجب » في هذه الجملة مبنية على الفرضية الأساسية لتكافؤ اتجاهات المكان . فإذا كان للمكان صفة عدم التمييز بين الاتجاهات المسماة بالتكافؤ الاتجاهي ، فيجب ألا يبدأ أي جسم معزول بالدوران الفوري . هذه هي الخطوة الرئيسية الأولى في هذا النقاش . أمّا الثانية فهي ملاحظة أن انعدام الدوران يعني انعدام العزم . فينبغي على العزوم داخل الجسم المعزول ، أن وجدت ، أن تلغى مفعول بعضها البعض تماماً . أمّا وقد توصلنا إلى النتيجة القائلة بضرورة انعدام العزم الداخلي ، فإنه يمكننا في ختام هذا النقاش أن نسمح للجسم المعزول أن يكون دائراً ابتداءً بدلاً من أن يكون ساكناً . وحيث أنه لا يتأثر بعزم خارجي أو داخلي ، فإن زخمه الزاوي يظل ثابتاً .

يوجد قُرب الأرض اتجاه مُفضَّل

في الفراغ البعيد ، تنكافئ كل الاتجاهات

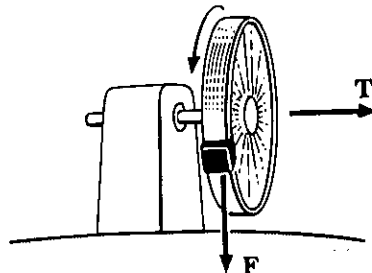
نظراً لتكافؤ الاتجاهات هذا ، ينبغي أن يكون مجموع العزوم الدورانية الداخلية صفراً

هذا النقاش ، الذي قُصِدَ منه فقط أن يكون دالاً على وجود صلة بين التكافؤ الاتجاهي للمكان وحفظ الزخم الزاوي ، هو أقل صرامة rigorous مما قد يبدو ؛ إذ أنه يُكوّن صلةً منطقيّةً محكمةً فقط للأجسام الجاسئة كالـدّولاب في شكل ٩,٣٣ . أمّا للأنظمة التي تتحرك أجزاءها نسبة



الفراغ البعيد

(ب)



الأرض

(أ)

شكل ٩,٣٣ : حفظ الزخم الزاوي والتكافؤ الاتجاهي للمكان . (أ) دولاب غير متوازن قرب الأرض يدور « تلقائياً » وزخمه الزاوي لا يكون ثابتاً . (ب) نفس الدّولاب في أعماق الفراغ لا يبدأ في الدوران تلقائياً إذا كان المكان متكافئاً للاتجاهات . وهذا يعني أنه لا يتأثر بمحصلة عزم ، مما يستلزم بدوره أن الزخم الزاوي يكون محفوظاً لنظام معزول .

إلى بعضها البعض ، فتكون الصلة بين تكافؤ الاتجاهات المكاني وحفظ الزخم الزاوي أكثر دقة
more subtle (لكن على نفس المستوى من الواقعية) . فإن انعدام أي اتجاه مفضل يقودنا فقط
إلى الاستنتاج بأن صفة دورانية ما يجب أن تكون محفوظة ؛ ويُعرف الزخم الزاوي بطريقة معينة
تجعل منه تلك الكمية المحفوظة . وليس عسيراً التفكير بكميات دورانية أخرى - كالسُرّجهة
الزاوية ، مثلاً - مما لا تكون محفوظة .

هل الزخم الزاوي محفوظ في الكون
ككل؟

ولم يوضع حفظ الزخم موضع الاختبار على قطاعات من المكان أكبر من النظام
الشمسي . وسيظل سؤالاً للمستقبل ، سؤالاً في غاية الإثارة most intriguing ، فيما إذا كان قانون
الحفظ هذا سيفشل على اتساع المجرات وما بينها . فإذا حدث ذلك ، فسيكون الإنسان قد علم
أن المكان على اتساعه ليس متكافئاً الاتجاهات تماماً ، الأمر الذي سيكون له أعمق الأثر على
تركيب الكون ككل وعلى ما إذا كان الكون محدوداً أو غير محدود .

خلاصة الأفكار والتعاريف

□ الزخم الزاوي هو كمية متجهة محورية ، ويُعرف للجسيم □ إذا كان مركز الكتلة لنظام ساكناً ، فإن $L = L_{spin}$ ،
بالعلاقة $L = mr \times v = r \times p$ ؛ كما يُعرف بالنسبة إلى الذي يكون مستقلاً عن اختيار نقطة الأصل .
نقطة أصل اعتباطية .

□ إذا كان الخطّ المرسوم من نقطة الأصل إلى جسيم يدور ، □ إذا كان جسيم جاسي يدور حول محور معينة تدعى بالمحاور
كان للجسيم زخم زاوي . الرئيسية ، كان زخمه الزاوي متناسباً مع سُرّجه الزاوية :
 $L = I\omega$

□ للجسيم الذي يتحرك بانتظام في خطّ مستقيم زخم زاوي □ إذا كانت قوتان متساويتان مقداراً ومتضادّتان اتجاهًا لا
ثابتٌ بالنسبة إلى أية نقطة أصل . تؤثران على امتداد نفس الخطّ ، فإنها تُحدثان عزمًا
□ للجسيم الذي يتحرك بانتظام في دائرة زخم زاوي ثابتٌ دورانيًا يُدعى ازدواجًا . والازدواج مستقلٌ عن اختيار
بالنسبة إلى مركز الدائرة . نقطة الأصل .

□ يمكن كتابة الزخم الزاوي الكليّ لنظام على الصورة : □ قانون تغير الزخم الزاوي للجسيم هو : $dL/dt = T$ ؛
 $L = L_{orbital} + L_{spin}$. ولنظام : $dL/dt = T_{ext}$. وهذان القانونان شبيهان

□ ينشأ $L_{orbital}$ (المحدّد بالمعادلة ٩,٢٣ أو ٩,٢٥) عن حركة □ بالقانونين $dp/dt = F$ و $dP/dt = F_{ext}$.
مركز الكتلة .

□ يرتبط التسارع الزاوي بالعزم الدوراني ، لجسم جاسي □ يدور حول محور رئيسي ، بالعلاقة $T = I\alpha$. وهذه شبيهة
بالعلاقة $F = Ma$. □ L_{spin} (المحدّد بالمعادلة ٩,٢٤) هو الزخم الزاوي نسبةً إلى
مركز الكتلة .

□ يستلزم العزم الدوراني الصّفري سَرَجَةً زاويةً ثابتة ؛ كما يستلزم العزم الدوراني الثّابت تسارعاً زاوياً ثابتاً .

□ إذا أثر عزم دورانيّ على دولاب يغزل باتجاه ليس على امتداد محوره ، فإنّ الدولابَ يَسْتَقْبِلُ . ويحدث الإِسْتِقْبَالُ المنتظم لدولاب له محور أفقيّ بالمعدل $\omega_p = T/L_{spin}$.

□ العزم الدورانيّ الدّاخلِيّ لأيّ نظام يُساوي صفراً . ويرتبط هذا المبدأ بقانون نيوتن الثّالث وتلاشي القوّة الدّاخلية ؛ إلّا أنّه يُعتبر مبدأً متميّزاً .

□ يكون الزّخمُ الزّاويّ الكلّيّ لنظامٍ محفوظاً إذا كان العزمُ الدّورانيّ الخارجيّ الإجماليّ صفراً . وعلى وجه الخصوص ، يكون الزّخمُ الزّاويّ لنظامٍ معزولٍ محفوظاً .

□ للجُسيم المتأثر بقوّة مركزيّة زخمٌ زاويّ ثابت بالنسبة إلى مركز القوّة . فلا يوجد للقوّة المركزيّة عزم دورانيّ .

□ الجُسيم الذي يتحرّك في مجال قوّة مركزيّة بزخم زاويّ L يكتسب مساحةً بالمعدل $dA/dt = L/2m$.

□ ثبوت dA/dt يدعى بقانون المساحات . وهو يسري إلى حدّ بعيد على الكواكب والأقمار الصّناعيّة .

□ الزّخم الزّاويّ مفهومٌ أساسيّ بسبب حفظه ، وَتَكَمُّيَّتِهِ ، وعلاقته بمبدأ بسيط للتّماثل .

أستلة

□ يستلزم تكافؤ اتّجاهات المكان تلاشي العزوم الدّورانيّة الدّاخلية . وخلافاً لذلك ، يُعاني جسم معزول تسارعاً زاوياً تلقائياً . فحِفْظُ الزّخم الزّاويّ يرتكز على تكافؤ الاتّجاهات المكانيّ .

□ تُدعى الكميّة I عزمُ القُصور للجسم . وتعتمدُ على اختيار المحور ؛ كما تُقاسُ بالوحدة كـغم^٢ . وهي خاصيّة قصوريّة ، شبيهة بالكتلة .

□ أيّ خطّ ذي تماثل أسطوانيّ أو تماثل انعكاسيّ إنّما هو محور رئيسيّ . كما أنّ أيّ خطّ متعامد مع مستوى تماثل يكون محوراً رئيسياً إذا كانت نقطة الأصل عند نقطة تقاطع الخطّ ومستوى التّماثل .

□ يُعرّف عزمُ القصور ، للدّوران حول محور اعتباطيّ باتجاه z ، بالعلاقة $L_z = I\omega$ ؛ حيث تزوّدنا المعادلتان ٩,٣٦ و ٩,٣٧ بصيغتين للكميّة I .

□ عزم الدّوران هو متجه محوريّ يُعرّف بالنسبة إلى نقطة أصل اعتباطيّة بالعلاقة $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

□ لا تُحدث قوّة أيّ عزم دورانيّ إذا أثرت عند نقطة الأصل أو على امتداد خطّ يمرّ بنقطة الأصل .

س ٩,١ في لعبة كرة قاعدة يقذف رام pitcher بكرة مباشرة إلى اللاّقط catcher . ناقش الزّخم الزّاويّ للكرة المتحرّكة نسبةً إلى الرّامي ، واللاّقط ، ورجل القاعدة baseman الأوّل ، ورجل القاعدة الثّالث .

بند ٩,١

س ٩,٢ تدور المروحة الرئيسيّة لطائرة عموديّة helicopter بعكس عقربيّ السّاعة عند النّظر إليها من أعلى ؛ كما تدور مروحة صغيرة عند الذّيل حول محور أفقيّ بعكس عقربيّ السّاعة عند النّظر إليها من الجانب الأيمن للطائرة . فما اتّجاهات الزّخمين الزّاويّين للمروحتين ؟ وما الاتّجاه التقريبيّ لمحّصلة زخمهما الزّاويّ ؟

س ٩,٣ هل يمكن أن يكون الزخم الزاوي صفراً لجسيم يتحرك على امتداد مسار منحني بالنسبة إلى نقطة لا تقع على المسار (أ) عند لحظة ما ؟ (ب) لفترة زمنية محدودة ؟ برّر كلنا الإجابتين .

س ٩,٤ تحت أي شروط ، إن وجدت ، يمكن أن يكون لجسيم عند لحظة ما (أ) زخم زاوي صفري بالنسبة إلى جميع نقاط الإسناد ؟ (ب) زخم زاوي لاصفري بالنسبة إلى جميع نقاط الإسناد ؟

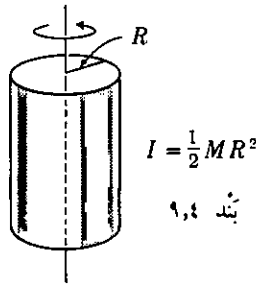
س ٩,٥ جسيم يتسارع في خط مستقيم . (١) حدّد (أ) نقطة أصل يكون الزخم الزاوي L ثابتاً بالنسبة إليها ؛ و (ب) نقطة أصل لا يكون الزخم الزاوي L ثابتاً بالنسبة إليها . (٢) هل هناك أي إطار قصوري يكون فيه زخم الجسيم p ثابتاً ؟

س ٩,٦ تُعرّف بعض الكميات المتجهة بالنسبة إلى نقطة أصل ؛ في حين أن بعضها لا يعتمد على اختيار نقطة الأصل . فإلى أي من هاتين الفئتين ينتمي كل من الكميات المتجهة الآتية : (أ) الموضع ؛ (ب) الإزاحة ؛ (ج) السرعة ؛ (د) الزخم ؛ (هـ) الزخم الزاوي ؛ و (و) القوة ؟

س ٩,٧ (١) هل يمكن أن يُساوي الزخم الزاوي لنظام صفراً بالنسبة إلى إحدى نقاط الإسناد وألا يُساوي صفراً بالنسبة إلى أخرى ؟ (٢) هل يمكن أن يكون للزخم الزاوي المداري لنظام قيم مختلفة بالنسبة إلى نقاط إسناد مختلفة ؟

س ٩,٨ تتحرك سيارة بعكس عقربي الساعة حول مسار دائري . (١) حدّد اتجاهي (أ) الزخم الزاوي المداري للسيارة بالنسبة إلى مركز المسار ؛ و (ب) الزخم الزاوي الميغزلي لواحد من الدواليب . (٢) أي الدواليب يكون زخمها الزاوي الميغزلي أكبر ؟

س ٩,٩ (١) كانت دراجة ساكنة ومرفوعة في الهواء عندما بدأ دولابها الأمامي يَغرول . فهل الزخم الزاوي للدولاب مداري أم ميغزلي أم مزيج من كليهما ؟ (٢) وُضعت الدراجة بعد ذلك على الأرض وتحركت في خط مستقيم . فهل الزخم الزاوي لدولابها الأمامي الآن مداري أم ميغزلي أم مزيج منها معاً ؟

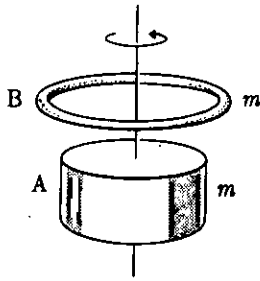


بند ٩,٤

شكل ٩,٣٤ : سؤال ٩,١٠ .

س ٩,١٠ قرص رقيق منتظم يدور حول محور تماثله الأسطواني . يتحدّد عزم قصوره بالعلاقة $I = \frac{1}{2} MR^2$ (المعادلة ٩,٤٣) . وكما هو مبين في شكل ٩,٣٤ ، فإن عزم القصور لجسم أسطواني ممتد كثافته منتظمة ويدور حول محور تماثله الأسطواني يتحدّد بنفس العلاقة . اشرح السبب لهذا « التكافؤ » بين القرص والأسطوانة .

س ٩,١١ يستطيع الوعاء الأسطواني A المرور خلال الطوق B . ويكون للجسمين نفس الكتلة ، كما يدوران حول المحور المبيّن في شكل ٩,٣٥ . لماذا نستطيع أن نتأكد من أن عزمي قصورهما يحققان اللامساوية $I_A < I_B$ ، بدون أية معرفة لتوزيع الكتلة داخل الوعاء A ؟



شكل ٩,٣٥ : سؤال ٩,١١ .

س ٩,١٢ فسّر لماذا يتعين على محور تماثل جسم جاسي أن يمرّ بالضرورة خلال مركز كتلة الجسم .

س ٩,١٣ كم عدد محاور التماثل لطوق دائري رقيق ؟ صفّها .

س ٩,١٤ كم عدد محاور التماثل لعلبة صفيح أسطوانية ؟ صفّها .

س ٩,١٥ (١) الزخم الزاوي L ثابت تقريباً لكرة قدم تتجه في حركة لولبية نحو لاعب مُستلم receiver .
فلماذا ؟ (٢) بالرغم من ذلك ، فإن محور الغزل يترنح wobbles عادة ، فلا يكون متجه السرجية
الزاوية ω ثابتاً . فسّر هذه الحقيقة . (٣) أحياناً يقذف لاعب كرة غزّالة spinning لا تترنح . فلماذا
يعني ذلك ؟

س ٩,١٦ (١) تحقق من أن طرفي المعادلة ٩,٥٢ لها نفس البعد الفيزيائي . (٢) عبّر عن الوحدة الدولية للعزم
الدوراني بدلالة الوحّدات كـ ، وم ، و ث . ما هي الكمّية الفيزيائية الهامة الأخرى التي لها نفس
بُعد العزم ؟

بند ٩,٥

س ٩,١٧ كثير من الموازين (كالموجودة في عيادات الأطباء) تُوازن ثِقلاً كبيراً بثقل صغير . اشرح عمل مثل
هذا الميزان بدلالة العزم .

س ٩,١٨ لا يتأثر جسيمٌ متحرّكٌ بانتظام في دائرة تحت تأثير قوة مركزية جابذة بأيّ عزم كما لا يتغيّر زخمه
الزاوي . إذا ربطت ثِقلاً بخيط ، فإنك تستطيع التأثير على الثقل بقوة إلى الداخل فقط على امتداد
الخيط نحو يدك . فكيف تستطيع ، إذن ، أن تجعل الثقل يقوم بحركة دائرية - بمعنى أن نُكسبه
بعضاً من الزخم الزاوي ؟

س ٩,١٩ لتكن F القوة الكلية الخارجية و T عزم الدوران الخارجي الكلي المؤثرين على نظام . أورد أمثلة
على أنظمتها (أ) $T \neq 0$ و $F = 0$ ؛ (ب) $T = 0$ و $F \neq 0$ ؛
(ج) $T \neq 0$ و $F \neq 0$ ؛ و (د) $T = 0$ و $F = 0$.

س ٩,٢٠ قسّم تأثير قوة الشمس على الأرض إلى العديد من القوى المؤثرة على أجزاء مختلفة من الأرض .
اشرح لماذا يكون عزم الدوران الكلي بالنسبة إلى مركز الشمس صفراً تماماً . (ملاحظة : لا يحتاج
هذا البرهان إلى التقريب القائل بكون الأرض ولا التقريب القائل بتساوي بُعد جميع أجزاء
الأرض عن الشمس .)

س ٩,٢١ إذا دار جسمٌ حول محور غير رئيسي ، وجب التأثير بعزم على المحور للإبقاء عليه في اتجاه ثابت . أمّا
إذا حدث الدوران حول محور تآثل ، فلا حاجة لمثل هذا العزم . فسّر هاتين الحقيقتين .

س ٩,٢٢ اقترح إجراء تجريبياً بسيطاً لقياس عزم القصور للرجل المُبين في تمرين ٩,٤٥ بالنسبة إلى محور
المائدة الدوّارة turntable التي يقف عليها .

بند ٩,٦

س ٩,٢٣ دولابان متساويا الكتلة ولهما نفس الأبعاد الفيزيائية مثبتان على مقابض متماثلة كما في شكل ٩,٢٥ .
يختلف الدولابان في أن كتلة أحدهما مركّزة قرب حافته ، في حين أن توزيع كتلة الآخر أكثر
انتظاماً . (١) إذا دار الدولابان بزخم زاوي متساو ، فأيهما (إن وُجد) يَسْتَبِقُ أسرع ؟ (٢) إذا دار
الدولابان بنفس السرجية الزاوية ، فأيهما (إن وُجد) يَسْتَبِقُ أسرع ؟

بند ٩,٧

س ٩,٢٤ ناقش الحقيقة بأنّه من السهل البقاء فوق دراجة متحرّكة ؛ بينما يصعب التوازن على دراجة ساكنة .

س ٩,٢٥ يقوم سائق بتعشيق "revs" up محرك سيارته بينما كان ينتظر تغيير ضوء إشارة المرور ، فيلاحظ بأنّ

بند ٩,٨

سَيَّارَةٌ تنحرف قليلاً إلى أحد الجانبين عندما يفعل ذلك . (١) ماذا بسبب هذه الظاهرة ؟ (٢) هل الزخم الزاوي للسيارة ، بما فيها محركها والسائق ، محفوظ ؟ هل يؤثر أي عزم دوران خارجي على السيارة ؟ (٣) هل من الممكن بناء محرك لا تحدث فيه ظاهرة الانحراف الجانبي هذه ؟

س ٩,٢٦ لماذا يُكوّر الغطَّاسون ولاعبو أرجيح السيرك trapeze artists أجسامهم إذا أرادوا عمل عدة دورات في الهواء ؟ لماذا يبدو غطَّاس أتم شقلبتين double somersault أنه يتوقّف عن الدوران عندما يبدأ جسمه بالاستقامة قبل دخوله الماء مباشرة ؟ هل يتوقّف عن الدوران فعلاً ؟

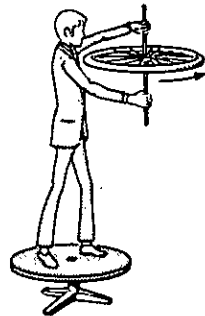
س ٩,٢٧ قطعة ساقطة بزخم زاوي صفري حول مركز كتلتها تستطيع أن تدور وتبسط على قدميها ؛ فتغير موضعتها الزاوي دون تغيير زخمها الزاوي . فكيف تستطيع ذلك ؟ (تلميح : فكّر بنصفي القطعة الأمامي والخلفي كجزأين متصليين لنظام واحد . فمن الضروري فقط أن يظل مجموع الزخمين الزاويين للجزأين صفراً .)

س ٩,٢٨ يكون لقمر صناعي مثبت فوق صاروخ على منصة الإطلاق launching pad في رأس كينيدي Cape Kennedy زخم زاوي صغير (بحكم ارتباطه بالأرض التي تدور) ؛ بينما يكون له زخم زاوي أضخم بكثير عند وضعه في مداره . وفقّ بحرص بين العبارتين : « الزخم الزاوي محفوظ » ، و « الزخم الزاوي للقمر الصناعي قد تغير » .

س ٩,٢٩ هل يتغير طول النهار عندما يتم نقل حمولة سفينة من الخام المعدني ore من آلاسكا Alaska إلى بيرو Peru . لِمَ أو لِمَ لا ؟

س ٩,٣٠ يأخذ طاقم crew رواد فضاء دراجة معهم من أجل القيام بتمارين رياضية داخل سفينة الفضاء . يركب أحد الرّواد الدّراجة في البداية ، فيطفو هو والدّراجة في وسط القمّرة midcabin ، بلا حركة بالنسبة إلى سفينة الفضاء ؛ ثم يبدأ بإدارة الدّواسات . صف الحركة الناتجة . هل يكون الزخم الزاوي محفوظاً ؟ ماذا يحدث عندما يضغظ الكمّاحات ويقف الدّولابان عن الدوران ؟

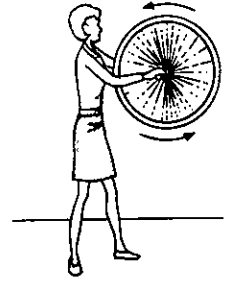
س ٩,٣١ يقف تلميذ على مائدة دوّارة خالية من الاحتكاك تقريباً وتحمل بيده دولاباً يَغرلُ كما في شكل ٩,٣٦ . في البداية ، لم تكن المائدة تدور . فإذا حدث عندما يقوم التلميذ بعمل كلّ من الأشياء الآتية على التوالي ؟ (١) يحرك محاور الدّولاب بعيداً عن محور المائدة ثم يُعيده إلى مكانه . (٢) يَقلِبُ الدّولاب رأساً على عَقب . (٣) يُعيده ثانية إلى وَضعِهِ الأصلي . (٤) يلامس الدّولاب بملابسه فيوقفه بالاحتكاك .



شكل ٩,٣٦ : سؤال ٩,٣١ .

س ٩,٣٢ هل يستطيع جسمٌ معزولٌ أن يُغيّر سَرَجَهَتُهُ الزَّائِيَّةَ ؟ وَصِّحْ إِمكَانِيَّتَهُ بِمَثَالٍ .

س ٩,٣٣ يساوي عَزَلُ البروتون $\frac{1}{18}$. فإذا اقترَبَ بروتونانِ الواحدُ مِنَ الآخرِ بَزَحَمِ زَاوِيٍّ مَدَارِيٍّ نَسْبِيٍّ مَقْدَارُهُ صَفْرٌ ، فما القِيَمَةُ العَظْمَى لِلزَّحَمِ الزَّائِيٍّ المَدَارِيٍّ النِّسْبِيِّ الَّذِي يَسْتَطِيعُ البروتونانِ أَنْ ينفَصِلَا بِهِ عَنْ بَعْضِهَا الْبَعْضُ ؟



شكل ٩,٣٧ : سؤال ٩,٣٤

س ٩,٣٤ تُسَمِّكُ فتاةٌ بدولابٍ يَغْرُلُ بواسطة مِقْبَضَيْنِ مُتَصِلَيْنِ بِمَحْوَرِهِ ، كما هو مبينٌ في شكل ٩,٣٧ . تَدْفَعُ إلى الأمام يديها اليسرى وتَجْذِبُ إلى الخلف يديها اليمنى ؛ فَيَسْتَجِيبُ المِقْبَضَانِ بِالتَّأثيرِ بقوى على يديها - لكنها ليست قوى أفقيّة . أحد المِقْبَضَيْنِ يَدْفَعُ إلى أعلى ، والآخر إلى أسفل . (١) فلماذا يحدث ذلك ؟ (٢) هل يتعارض ذلك مع قانون نيوتن الثالث ؟ (٣) إذا كان الدُولَابُ يَغْرُلُ كما هو مبينٌ ، فأَيُّ المِقْبَضَيْنِ يبدو وكأنه « يرغب في » الحركة إلى أعلى ؟ وأَيُّها « يرغب في » الحركة إلى أسفل ؟

س ٩,٣٥ يتبع جُسَيْمٌ مساراً منحنياً . فهل من الممكن أن يكونَ زَحْمُهُ الزَّائِيٌّ ثابتاً بالنسبة إلى نقطة إسناد واحدة ومتغيراً بالنسبة إلى نقطة أخرى ؟ فَسِّرْ .

بند ٩,٩

س ٩,٣٦ اشرح باستخدام رسم توضيحي لماذا تؤثرُ أَرْضٌ مُقْلَطَحَةٌ flattened earth بعزمٍ دورانيٍّ على قرص صناعيٍّ لا يقع في مدار استوائيٍّ . لماذا يتأثر قرص صناعيٍّ في مدار استوائيٍّ بعزمٍ دورانيٍّ صغيرٍ أو لا يتأثر بأيٍّ عزمٍ على الإطلاق ؟

س ٩,٣٧ (١) افترض أنك تعيش على مِنَصَّةٍ ضَخْمَةٍ تدور دون أن تعلم بدورانها . اقترح ظاهرةً واحدةً أو أكثر تجعلك تعتقد أن المكانَ غير متكافئٍ الاتجاهات nonisotropic . (٢) إنك بالفعل لتعيش على مِنَصَّةٍ هائلة تدور ، هي الأرض . فهل هناك أية ظواهر على الأرض عدا ظواهر الجاذبيّة والمغناطيسيّة تَدُلُّ - فيما يبدو - على عدم تكافؤ الاتجاهات ؟ (من المفيد التفكير بتجاربٍ تُجرى عند أو قُرْبَ القطب الشماليّ .)

بند ٩,١٠

س ٩,٣٨ يَجِدُ شخصٌ يُجري تجارِبَهُ في غرفةٍ خاليةٍ من التوافد أنه ، إذا وَضَعَ جسماً على سطحٍ أملَسَ ، يبدأ الجسم بالدوران « تلقائياً » . اقترح تفسيراً واحداً منطوقاً (راديكالياً radical) وآخر مُحَافِظاً لهذا السُّلُوكِ .

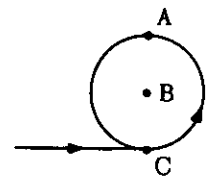
تمارين

ت ٩,١ يتحرك جُسَيْمٌ في مستوى xy . (١) بين أنه يمكن التعبير عن مركبة z لزمخه الزَّائِيٍّ بدلالة إحداثيّيه (x, y) ومركبتيّ سرجهته (v_x, v_y) على الصّورة :

$$L_z = m(xv_y - yv_x).$$

(٢) كيف يختلف L_z ومقدار L ، هذا إذا اختلفا على الإطلاق ؟

ت ٩,٢ يُحَقَّنُ بروتون $(m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ كـغ})$ كما في الرِّسْمِ التَّوضِيحِيِّ (شكل ٩,٣٨) في سِينْكروترُونٍ دائريٍّ عند النِّقْطَةِ C بِسُرْعَةٍ 10^7 م/ث . ويكون نصف قطر السِّنْكروترُونِ 50 م . فما



شكل ٩,٣٨ : تمرين ٩,٢

الزخم الزاوي الابتدائي للبروتون (أ) بالنسبة إلى النقطة A ؟ (ب) بالنسبة إلى النقطة B ؟
(ج) بالنسبة إلى النقطة C ؟ (حدد الاتجاهات بالإضافة إلى المقادير).

ت ٩,٣ جسيم متجه موضعه r وسرجهته v وزخمه الزاوي L . (١) أثبت أن $r \cdot L = 0$ وأن $r \times L$ متجه في المستوى الذي يحدده r و v . (٢) هل $r \times L$ متجه قطبي أم متجه محوري ؟

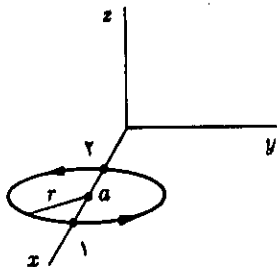
ت ٩,٤ سم أنظمة مقادير زخامها الزاوية هي بالتقريب : (أ) 10^{-34} كغ م^٢/ث ؛ (ب) 1 كغ م^٢/ث ؛ (ج) 10^{+34} كغ م^٢/ث. برز إجاباتك بحسابات تقريبية.

ت ٩,٥ بين تكافؤ المعادلتين ٩,٦ و ٩,٧ ($L = r p_{\perp}$ و $L = r_{\perp} p$). (٢) أي من الكميات r ، p ، $r_{\perp}$ و $v_{\perp}$ ثابت (أ) للحركة بسرجهته ثابتة ، كالمليئة في شكل ٩,٦ ؛ (ب) للحركة بسرعة ثابتة في دائرة حول المركز ؛ (ج) للحركة بسرعة متغيرة في دائرة حول المركز ؟

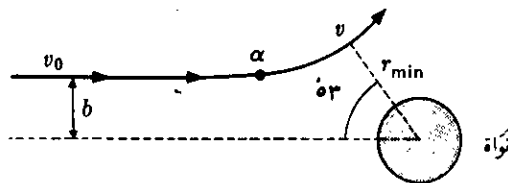
ت ٩,٦ دغ θ تمثل زاوية خط العرض لنقطة على الأرض (صفر عند خط الإستواء ، 90° عند القطب الشمالي ، و -90° عند القطب الجنوبي) ، و R نصف قطر الأرض ، و T الدورة (الزمن الدوري) لدوران الأرض . أوجد تعبيراً جبرياً للزخم الزاوي بالنسبة إلى مركز الأرض لرجل كتلته m يقف على سطح الأرض عند خط العرض θ . عبر عن الجواب بدلالة الكميات R ، θ ، m و T .

ت ٩,٧ جسيم يتحرك بزخم ثابت p (شكل ٩,٦) . زخمه الزاوي بالنسبة إلى النقطة P هو L_p ، وزخمه الزاوي بالنسبة إلى النقطة Q هو L_Q . (١) أثبت أن $L_p = L_Q + R \times p$ ، حيث R متجه الإزاحة من P إلى Q . (٢) بين برسوم تخطيطية كيف يمكن ترتيب P ، Q ، و مسار الجسيم ليكون (أ) $L_p > L_Q$ ؛ (ب) $L_p < L_Q$ ؛ (ج) $L_p = L_Q \neq 0$ ؛ (د) $L_p = L_Q = 0$.

ت ٩,٨ ينحرف جسيم ألفا سرعته الابتدائية v_0 بواسطة نواة كما هو مبين في شكل ٩,٣٩ . وينحرف ، عندما يكون على بُعد كبير عن النواة ، في خط مستقيم يبعد عن الخط الموازي المار بمركز النواة مسافة b ، غير أن أصغر مسافة اقتراب فعلية للجسيم ألفا من النواة هي r_{min} . ويكون زخمه الزاوي ثابتاً بالنسبة إلى النواة . (١) فما اتجاه متجه الزخم الزاوي ؟ (حذراً !). وما مقداره ؟ (٢) إذا كانت $r_{min} = 2b$ ، فما نسبة السرعة v عند نقطة أدنى اقتراب إلى السرعة v_0 على مسافة كبيرة ؟



شكل ٩,٤٠ : تمرين ٩,٩



شكل ٩,٣٩ : تمرين ٩,٨

ت ٩,٩ يتحرك جسيم كتلته m بسرعة ثابتة v في دائرة نصف قطرها r . وتقع الدائرة في مستوى xy . وكما هو مبين في شكل ٩,٤٠ ، فإن مركزها يقع عند النقطة $x = a$. الزخم الزاوي للجسيم بالنسبة إلى

نقطة الأصل هو L_1 عندما يقطع الجسم محور x عند النقطة ١ ، و L_2 عندما يقطع الجسم محور x عند النقطة ٢ . أثبت أن $L_1 - L_2 = 2mva$ ؛ وتأكد من أن برهانك يسري على جميع قيم a .

٩,١٠ إحداثيًا جسم كتلته m ومتحرك في مستوى xy يتحددان ، كدالة في الزمن ، بالعلاقين $x = v_0 t$ و $y = A \sin \omega t$ ، حيث v_0 ، A ، و ω ثوابت . (١) أرسم رسماً تخطيطياً لمسار الجسم . (٢) أوجد تعبيراً لمركبة z للزخم الزاوي للجسم ، L_z . (٣) عند أي الأزمنة وأي المواضع يكون $dL_z/dt = 0$ ؟

٩,١١ يمكن كتابة متجهات الموضع لمجموعة من الجسيمات ، كما هو مبين في شكل ٩,٨ ، على الصورة $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$ (التي سبق تعريفها في بند ٩,٢) . باستخدام هذه المتساوية الاتجاهية ، بين أن $\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0$.
عبر عن مدلول هذه النتيجة بالكلمات .

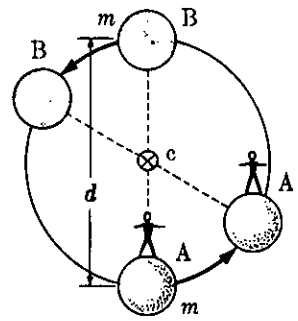
بند ٩,٢

٩,١٢ أربعة جسيمات متساوية الكتلة m لها المواضع والسرعات المبينة في الجدول التالي :

الجسيم	x	y	v_x	v_y
١	٠	٠	٠	$-v_0$
٢	a	a	$-v_0$	٠
٣	$2a$	٠	٠	v_0
٤	a	$-a$	v_0	٠

(١) أين يقع مركز كتلة هذا النظام من الجسيمات ؟ (٢) ما سرعته مركز الكتلة ؟ (٣) احسب الزخم الزاوي لكل جسم بمفرده وللنظام برمته بالنسبة إلى النقطة $x = -b$ ، $y = 0$. (٤) علّق على العلاقة بين هذه النتائج والنظرية المبرهنة في بند ٩,٢ .

٩,١٣ تخيل مراقباً A مثبتاً على أحد الجسمين في شكل ٩,٩ والمعاد رسمه هنا بمقياس أكبر . (١) إذا اعتبر A نفسه ساكناً عند مركز الكون ، فما السرعة التي يحددها للجسم B ؟ (٢) وما الزخم الزاوي الذي يحدده للجسم B ؟ لاحظ أن ذلك يختلف عن الزخم الزاوي $L = mvd$ المحسوب في المثال الوارد في بند ٩,٢ . (٣) وفّق بين هذه النتيجة والنظرية الواردة في بند ٩,٢ . (تلميح : إن التوفيق ليعتمد على حقيقة كون A متحركاً ؛ لكنه لا يعتمد على حقيقة وجوده في إطار إسناد متسارع .)



٩,١٤ جسيمن متساويي الكتلة m لها عند لحظة ما الموضعان والسرعتان الآتيتان :

بند ٩,٣

الجسيم	x	y	v_x	v_y
١	٠	٠	$-v_0$	$-v_0$
٢	٠	d	v_0	$3v_0$

- (١) أوجد موضع وسرعة مركز كتلة نظام الجسيمين هذا .
(٢) أوجد الزخم الزاوي المداري والمغزلي والكلّي للنظام .

ت ٩،١٥ جسم (dumbbell) يتكوّن من ثقلين كتلة كلّ منها ٥ كـرغ ومتصلّين بقضيب خفيف طوله ٠،٤ م أرسل في حركة مغزليّة على سطح بحيرة متجمّدة . متجه مركز كتلة هذا الجسم في نظام إحداثي على سطح البحيرة هو $\vec{r}_c = v_0 \hat{i} + y_0 \hat{j}$ ، حيث $v_0 = 2 \text{ م/ث}$ و $y_0 = 1 \text{ م}$. يغزل الجسم باتجاه عقربتي الساعة حول مركز كتلته بسرعة زاوية $\omega = 50 \text{ مـر/ث}$. أوجد زخمه الزاوي المداري والمغزلي والكلّي .

ت ٩،١٦ تدور الأرض والقمر حول مركز كتلتهما ، الذي يقع على بعد ٤٦٦٠ كـرغ عن مركز الأرض . فأيّ الجسيمين زخمه الزاوي المداري أكبر بالنسبة إلى مركز كتلتهما ؟

ت ٩،١٧ تشبّث حشرة bug كتلتها m بطرف دولاب نصف قطره a ويدور بسرعة زاوية ω حول محور ثابت . (١) أوجد ، بالنسبة إلى نقطة إسناد على المحور ، (أ) الزخم الزاوي المداري ؛ و (ب) الزخم الزاوي المغزلي للحشرة . (ملاحظة : الحشرة بمفردها هي «النظام» موضع الاهتمام . وعند إجراء الحسابات ، عامل الحشرة كجسيم نقطي .) (٢) نخطّ حشرة أخرى على الدوّلاب عند الطرف الآخر للقطر من الحشرة الأولى . أوجد الزخم الزاوي المداري والمغزلي لنظام الحشرتين ، مع الإبقاء على نقطة الأصل على المحور .

ت ٩،١٨ افترض سريان الميكانيكا الكلاسيكية بصورة تقريبية على وصف حركة الجسيمات ؛ واعتبر نيوتونا يتحرّك على امتداد خطّ مستقيم بسرعة 10^6 م/ث ماراً بـبروتون ساكن يقع عند نقطة أصل نظام إحداثي . مسافة أدنى اقتراب للنيوترون من البروتون هي $3,78 \times 10^{-13} \text{ م}$. (١) فما الزخم الزاوي المداري للنيوترون بالنسبة إلى البروتون ؟ عبّر عن إجابتك بوحّدات الكمّ $\hbar$. (٢) بين برسم نخططي طريقة انتظام غزلي النيوترون والبروتون لجعل الزخم الزاوي الكلّي لهذا النظام أكبر ما يمكن بالنسبة إلى نقطة الأصل المختارة . ما مقدار الزخم الزاوي الكلّي عند حدوث هذا الانتظام ؟

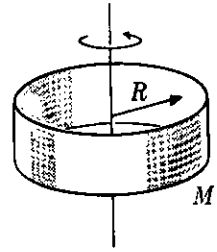
ت ٩،١٩ تُدخّر فتاة طوقاً لدائياً (بلاستيكياً) فوق ممرّ جانبي بسرعة $1,5 \text{ م/ث}$. قطر الطوق 1 م وكتلته $0,2 \text{ كـرغ}$. (١) فما السرعة الزاوية للطوق حول مركزه بوحّدات مـر/ث ؟ أورد إجابة جبريّة وعدديّة على حدّ سواء . (٢) وما الزخم الزاوي للطوق بالنسبة إلى مركزه ؟

ت ٩،٢٠ أسطوانة نصف قطرها r تندرج دون انزلاق على سطح مستو ؛ وتكون سرعة وتسارع مركز كتلتها v_c و a_c . (١) بين أنّ التسارع الزاوي للأسطوانة بالنسبة إلى مركز كتلتها هو $\alpha = a_c/r$. (٢) ما السرعة الزاوية والتسارع الزاوي بالنسبة إلى نقطة تماسها مع الأرض ؟

ت ٩،٢١ طوق نصف قطره $0,5 \text{ م}$ وكتلته 1 كـرغ يتدحرج على أرض مستوية حول مسار دائري نصف قطره 3 م ، مُتمّاً دورة كاملة في 10 ثوان ، ويظلّ رأسياً أثناء تدحرجه . (١) فما الزخم الزاوي المداري للطوق بالنسبة إلى مركز المسار الدائري ؟ وما الزخم المغزلي للطوق ؟ حدّد الاتجاهات بالإضافة إلى المقادير .

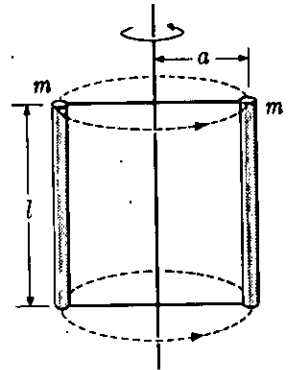
بند ٩,٤

ت ٩,٢٢ جسم جاسي اعتباري الشكل يدور بسرجه زاوية ω حول محور z الثابت. نتحرك نقطة في الجسم متجه موضعها r_i بسرجه v_i (أنظر شكل ٩,١٢). أثبت أن $v_i = \omega \times r_i$. هل تظل هذه النتيجة صحيحة إذا لم يمر محور z خلال الجسم؟



شكل ٩,٤١ : تمرين ٩,٢٤

ت ٩,٢٣ بين أن الصيغة التي نحدد عزم قصور طوق رقيق $I = MR^2$ (المعادلة ٩,٣٠)، تنتج عن الصيغة العامة $I = \int a^2 dm$ (المعادلة ٩,٣٧). ما هذا التكامل المناسب؟



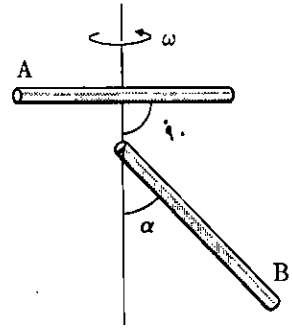
شكل ٩,٤٢ : تمرين ٩,٢٥

ت ٩,٢٤ ما عزم قصور شريط دائري يدور حول المحور المبيّن في شكل ٩,٤١؟

ت ٩,٢٥ زوج من القضبان المتوازية، كتلة كل منها m ، وطوله l ، والمسافة بينها $2a$ ، يدور حول محور مواز للقضيبين وعند منتصف المسافة بينهما (أنظر شكل ٩,٤٢). ما عزم قصور هذا الائتلاف؟

ت ٩,٢٦ قضيب رفيع كتلته M وطوله l يدور حول محور عمودي على القضيب ويمر بمنتصفه. بين أن عزم قصور القضيب هو $I = \frac{1}{12} Ml^2$.

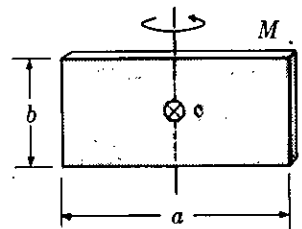
ت ٩,٢٧ قضيبان رفيعان متساويا الكتلة والطول يدوران حول محور. ويمر هذا المحور، كما هو مبين في شكل ٩,٤٣، بمنتصف القضيب A وطرف القضيب B. يصنع القضيب A زاوية ثابتة $\pi/2$ مع المحور؛ بينما يصنع القضيب B زاوية ثابتة α مع نفس المحور. ويكون للقضيبين نفس عزم القصور. (١) أوجد الزاوية α ؟ (٢) أي القضيبين يمتد لمسافة أكبر عن المحور؟ (استخدم نتائج تمرين ٩,٢٦ ومثال ٣ في بند ٩,٤).



شكل ٩,٤٣ : تمرين ٩,٢٧

ت ٩,٢٨ عزم قصور دولاب كتلته ١٠ كغ ونصف قطره الخارجي ٠,٣ م هو ٠,٢٥ كغ م^٢. (١) لو وزعت نفس الكتلة بانتظام في قرص له نفس عزم القصور، فإذا سيكون نصف قطر القرص؟ (٢) ولو تركزت نفس الكتلة عند حافة دولاب له نفس عزم القصور، فإذا سيكون نصف قطر الدّولاب؟ (٣) أي نوع من توزيع الكتلة ينبغي أن يكون للدّولاب الأصلي؟

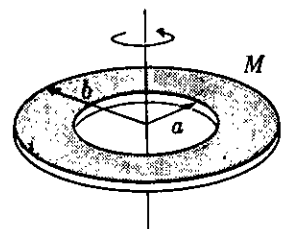
ت ٩,٢٩ تُضخ عشرة كيلوغرامات من الألومنيوم Al على شكل كرة مُضَمَّتة solid sphere. (أ) فما نصف قطر الكرة؟ (ب) وما عزم قصورها حول محور يمر بمركزها؟ (كتافة الألومنيوم هي $\rho = ٢,٧ \text{ غ/سم}^٣ = ٢,٧ \times ١٠^٣ \text{ كغ/م}^٣$). (٢) تُشكّل الآن نفس الكمية من الألومنيوم على صورة قرص دائري سمكه ١ سم. فما نصف قطره؟ وما عزم قصوره حول محور تماثله الأسطواني؟



شكل ٩,٤٤ : تمرين ٩,٣١

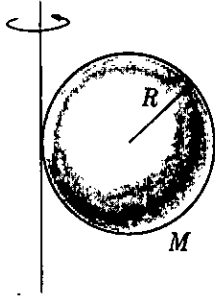
ت ٩,٣٠ أثبت الخاصية الجماعية additive property التالية لعزوم القصور: إذا كان للجسم ١ عزم قصور I_1 حول محور دوران معين وللجسم ٢ عزم قصور I_2 حول نفس المحور، فإن عزم قصور نظام الجسمين حول نفس محور الدوران هو $I = I_1 + I_2$. (تلميح: أنظر إلى المعادلة ٩,٣٦).

ت ٩,٣١ ما عزم قصور صفيحة مستطيلة منتظمة ضلعها a و b وكتلتها M تدور حول المحور المبيّن في شكل ٩,٤٤؟ لماذا لا يكون البعد b « ذا أهمية »؟



شكل ٩,٤٥ : تمرين ٩,٣٢

ت ٩,٣٢ قرص حلقي كتلته M وكتافته منتظمة، نصف قطره الداخلي a والخارجي b ، يدور حول محور تماثله الأسطواني (أنظر شكل ٩,٤٥). أوجد عزم قصوره. (تلميح: إرجع إلى مثال ٤ في بند ٩,٤).



شكل ٩,٤٦ : تمرين ٩,٣٤ .

ت ٩,٣٣ ثقلان متساويا الكتلة m تُثبت المسافة بينهما بواسطة قضيب خفيف طوله l . (١) يمر محور دوران بمركز كتلة هذا النظام . فما الزخم الزاوي الكلي للثقلين الدائريين ؟ وما عزم قصورها ؟ (٢) يزاح محور الدوران بحيث يمر خلال أحد الثقلين . احسب الزخم الزاوي الكلي للنظام كمجموع جزء مغزلي وجزء مداري . ما عزم قصور النظام حول محور الدوران المزاح هذا ؟ (في كلا الجزأين ، اعتبر المحور عمودياً على القضيب .)

ت ٩,٣٤ الزخم الزاوي المغزلي لكرة منتظمة كتلتها M ونصف قطرها R وتدور بسرجه زاوية ω هو $L = \frac{1}{2}MR^2\omega$ (أنظر المعادلة ٩,٤٤) . (١) فما الزخم الزاوي المداري لكرة تدور حول محور مماسي مع سطحها (أنظر شكل ٩,٤٦) ؟ وما زخمها الزاوي الكلي ؟ (٢) ما عزم قصور الكرة عند الدوران حول هذا المحور ؟ وبأي عامل يختلف عن عزم قصور كرة تدور حول محور يمر بمركزها ؟

ت ٩,٣٥ الحد الأدنى للعزم اللازم لإدارة دولاب نصف قطره $0,5$ م هو 2 ن م . فما الزاوية التي تؤثر بها قوة 6 ن عند حافة الدولاب للحصول على هذا الحد الأدنى من العزم ؟

ت ٩,٣٦ في شكل ٩,٢١ ، دغ $l = 0,5$ م و $F = 250$ ن .

(١) إذا كانت F و F - متعامدين مع طول المقبض ، فما مقدار العزم T الذي يؤثر به الرجل ؟
(٢) إذا لم يستطع إدارة المقبض بسبب قوة احتكاك تؤثر على بُعد $1,5$ سم عن المحور ، فما مقدار هذه القوة الاحتكاكية ؟ (٣) أيها أفضل للرجل لإدارة المقبض : أن يغير موقع يديه أو يغير اتجاهي القوتين اللتين يؤثر بهما ؟

ت ٩,٣٧ يقذف غلام حجراً كتلته $0,08$ كغ في الهواء بزاوية 45° مع الاتجاه الأفقي وبسرعة ابتدائية مقدارها 14 م/ث ، فيسقط أرضاً على بُعد 20 م ، مرة ثانية بسرعة 14 م/ث وبزاوية 45° مع الاتجاه الأفقي . (١) فما الزخم الزاوي للحجر بالنسبة إلى الغلام عند لحظة انطلاقه من يده ؟ (٢) وما زخمه الزاوي بالنسبة إلى الغلام قبل هبوطه على الأرض مباشرة ؟ (٣) لماذا يتغير الزخم الزاوي للحجر ؟

ت ٩,٣٨ حذافة (دولاب موازنة) flywheel ثقيلة احتكاكها مهملة ونصف قطرها $0,3$ م . يلف رجل حبلًا حول محيطها ثم يسحب بقوة $1,5$ ن لمدة 3 ث ، وذلك كي يجعلها تغزل . (١) فما الزخم الزاوي النهائي للحذافة ؟ (٢) إذا كان الدولاب عبارة عن قرص منتظم كتلته 40 كغ ، فما سرعته الزاوية النهائية ؟

ت ٩,٣٩ يُعرّف نصف قطر التدويم radius of gyration لجسم كتلته m بالنسبة إلى محور معين بأنه المسافة k بحيث يمكن كتابة عزم القصور بالنسبة إلى ذلك المحور على الصورة $I = mk^2$. (١) أورد أنصاف أقطار التدويم للأجسام الآتية : (أ) طوق نصف قطره r حول محور تماثله الأسطواني ؛ (ب) قرص نصف قطره r حول محور تماثله الأسطواني ؛ و (ج) كرة نصف قطرها r حول محور يمر بمركزها . (٢) فسّر « المدلول » الفيزيائي لمفهوم نصف قطر التدويم .

ت ٩,٤٠ أوجد صيغة تربط بين الزاوية والسرجه الزاوية للدوران بتسارع زاوي ثابت . هذه الصيغة ، كالمعادلة $0,58$ ، يجب ألا تحتوي على الزمن .

ت ٩,٤١ تبدأ دوالبُ طائرة ضخمة بالغزل قبل هبوط الطائرة وذلك لتقليل اهتراء الإطارات tire wear .
 افترض أن سرعة ملامسة الطائرة للأرض هي ٦٠ م/ث ، وأن نصف القطر الخارجي لكل
 دولاب ، بما فيه الإطار ، يساوي ٠,٨ م ، وكتلته ٤٠٠ كغ ، وعزم قصوره ١٨٠ كغ م^٢ .
 افترض أيضاً أن الدولاب يتسارع بانتظام من السكون إلى السرعة الزاوية اللازمة في ٢٥ ث .
 أوجد كلاً من الكميات الآتية : (أ) السرعة الزاوية النهائية للدولاب ؛ (ب) تسارعه الزاوي ؛
 (ج) عدد الدورات التي يُتمها أثناء تسارعه ؛ (د) زخمه الزاوي النهائي ؛ (هـ) عزم الدوران
 المؤثر عليه ؛ و (و) القوة اللازمة لإحداث هذا العزم إذا أثرت هذه القوة على بُعد ٠,٢ م عن محور
 الدوران .

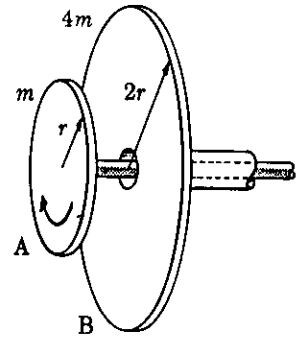
بند ٩,٧

ت ٩,٤٢ كتلة دولاب الدراجة المبينة صورته في شكل ٩,٢٥ هي ٢,٥ كغ ، والمسافة من نقطة ارتكازه إلى
 مركزه هي $r = ٠,٢$ م . (١) فما عزم دوران الجاذبية ، بالنسبة إلى نقطة ارتكازه ؟ (٢) إذا كان
 مقدار الزخم الزاوي المغزلي للدولاب $L_{spin} = ١٢$ كغ م^٢/ث ، فما زاوية استباق الدولاب في
 ١ ث ؟ (٣) هل يتحقق التقريب $L_{spin} \gg L_{orbital}$ تماماً (باعتبار نقطة الأصل عند نقطة
 الارتكاز) ؟

ت ٩,٤٣ (١) أوجد الزخم الزاوي لغاز العادم في مثال بند ٩,٨ . تحقق من أنه يساوي الزخم الزاوي
 الابتدائي لسفينة الفضاء . (٢) هل يتأثر هذا الغاز بعزم دوراني عند انبعائه ؟

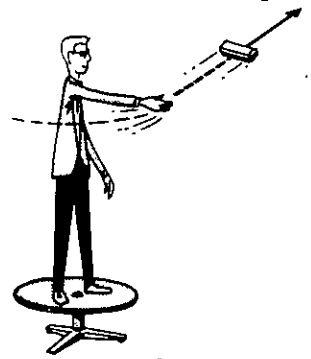
بند ٩,٨

ت ٩,٤٤ يغزل القرص A ، ذو نصف القطر r والكتلة m ، في البداية بسرعة زاوية ω حول المحور المبين في
 شكل ٩,٤٧ ، أما القرص B ، ذو نصف القطر $2r$ والكتلة $4m$ ، فيكون ساكناً في البداية . بعدئذ
 يتم تجميع القرصين معاً ويبدأان في الدوران كوحدة واحدة بسرعة زاوية ω_f . (١) أوجد ω_f ،
 على فرض أن الزخم الزاوي محفوظ . (٢) هل تحول قوى الاحتكاك بين سطحي القرصين دون
 جعل الزخم الزاوي الكلي لهذا النظام محفوظاً ؟ لِمَ أو لِمَ لا ؟



شكل ٩,٤٧ : تمرين ٩,٤٤ .

ت ٩,٤٥ مَدْرَس يقف ساكناً على مائدة دَوَّارَةٍ عديمة الاحتكاك تقريباً ويقذف مساحَة eraser مماسياً ، كما هو
 مبين في شكل ٩,٤٨ . تبحر المساحة ذات الكتلة ٠,١ كغ يَدَهُ بسرعة ١٢ م/ث على بُعد ٠,٨ م
 عن محور المائدة الدَوَّارة . (١) أوجد الزخم الزاوي الذي يكتسبه نظام المدرس والمائدة معاً .
 (٢) قَدِّر بصورة تقريبية سرعة المدرس الزاوية الناتجة . (أورد تخمينات معقولة لأية مقادير
 مطلوبة .)



شكل ٩,٤٨ : تمرين ٩,٤٥ .

ت ٩,٤٦ تلميذ واقف على مائدة دَوَّارَةٍ صغيرة ويداه ممدودتان يدور بسرعة زاوية مقدارها ٥ مس/ث .
 يجذب يديه بعد ذلك إلى الداخل لتقليل عزم قصوره . (١) أورد تقديرات معقولة لجميع المقادير
 المطلوبة واحسب سرعته الزاوية الجديدة . (٢) هل تتأثر حساباتك كثيراً إذا كان التلميذ يحمل ثقلاً
 كتلته ٢ كغ في كل يد ؟ (إذا سمحت لك الفرصة ، تأكد من استنتاجاتك تجريبياً .)

ت ٩,٤٧ يتحرك مذنبُ comet في مدار اختلافه المركزي $e = ٠,٩٠$. فإذا كانت سرعته عند أقصى بُعْدٍ له
 عن الشمس v_0 ، فما سرعته عند أدنى اقتراب له من الشمس ؟ (إرجع إلى شكل ١١,١٢ والمعادلة
 ١١,٣٦ .)

بند ٩,٩

ت ٩,٤٨ نقطة حفيف فر صناعي أرضي هي ١١٠ أميال فوق سطح الأرض ونقطة أوجه على ارتفاع ٢٢٠ ميلاً عن السطح. فما النسبة بين قيمة السرجة عند الحفيف إلى قيمتها عند الأوج ؟

ت ٩,٤٩ تتعامد سرجة فر صناعي عند الأوج مع الخط النصف قطري الذي يصل هذا القمر بمركز الأرض. هذه الحقيقة التي تبدو واضحة (أنظر شكل ٩,٣١) إنها تحتاج إلى برهان. فليهنئها ، افرض أن v ليست عمودية على r ، وبين أن هذا الفرض لا يتلاءم مع حقيقة كون القمر الصناعي عند الأوج .

مسائل

الزخم الزاوي بالنسبة إلى مركز قوة

م ٩,١ المعادلتان تصفان مسار جسم كتلته m ويتحرك في مستوى xy هما $x = a \cos \omega t$ ، $y = b \sin \omega t$. (١) أرسم رسماً تخطيطياً لمسار الجسم . (٢) أكتب تعبيرين اتجاهيين لموضع وسرجة الجسم . (٣) بين أن زخمه الزاوي ثابت ويتحدد بالعلاقة $L = mab\omega$. (٤) استخدم المعادلة ٩,٨١ لإيجاد تعبير للمساحة التي يحيط بها مسار الجسم . (إقترح : كامل المعادلة ٩,٨١ فوق فترة زمنية مناسبة .)

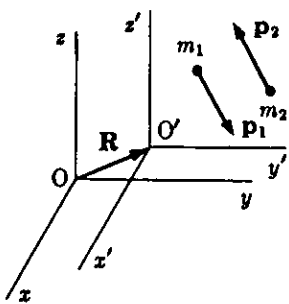
الزخم الزاوي بالنسبة إلى نقطة أخرى غير مركز القوة

م ٩,٢ (١) أوجد الزخم الزاوي للجسيم الموصوف في المسألة السابقة بالنسبة إلى النقطة $x = -d$ ، $y = 0$. (٢) ما عزم الدوران المؤثر على الجسم بالنسبة إلى هذه النقطة ؟ (٣) عند $d = a$ ، حدد نقطتي النهاية العظمى والصغرى للكمية L ، ونقطتي النهاية العظمى والصغرى للكمية T .

جسم يتحرك في ثلاثة أبعاد

م ٩,٣ غلام على دوامة مدينة الملاهي merry-go-round يتبع مساراً يتحدد بالمعادلات $x = a \cos \omega t$ ، $y = a \sin \omega t$ ، $z = d \sin 5\omega t$. تقع نقطة الأصل على المحور الرئيسي للدوامة ، وتكون $d \ll a$. (١) أورد وصفاً مقتضباً بالكلمات لمسار الغلام في المكان . (٢) أوجد تعبيراً لزخمه الزاوي L . (٣) بين أن مقدار الزخم الزاوي يتفاوت بين نهايتين عظمى وصغرى تتحددان بالعلاقين $L_{\min} = m\omega a^2 \sqrt{1 + (d/a)^2}$ و $L_{\max} = m\omega a^2 \sqrt{1 + (5d/a)^2}$. حيث m كتلة الغلام . (تلميح : الكمية L^2 تكون نهايةً عظمى أو صغرى عندما تكون L كذلك . وإنه من الأسهل التعامل مع L^2 بدلاً من L .)

أنظمة ثنائية الجسم



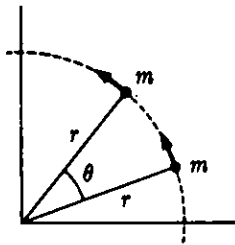
شكل ٩,٤٩ : مسألة ٩,٤ .

م ٩,٤ نظامان إحداثيان يتبعان عن بعضهما البعض إزاحة ثابتة R ، كما هو مبين في شكل ٩,٤٩ . يوجد جسيمان زخامهما الزاويان L_1 و L_2 بالنسبة إلى نقطة الأصل O ، و L'_1 و L'_2 بالنسبة إلى نقطة الأصل O' ، ويتحرك هذان الجسيمان بزخمين متساويين ومتضادتين $(p_1 = -p_2)$. (١) أثبت أن $L_1 + L_2 = L'_1 + L'_2$ ، بالرغم من كون L_1 لا يساوي L'_1 ، و L_2 لا يساوي L'_2 بصورة عامة . (٢) ماذا تستطيع القول عن مركز كتلة هذا النظام ؟

م ٩,٥ جسيمان كتلتاهما مختلفتان m_1 و m_2 يتحرك كل منهما في مدار دائري حول مركز كتلتها الثابت ، كما هو مبين في شكل ٩,٥٠ . (١) أوجد تعابير تحدد زخميها الزاويين L_1 و L_2 والنسبة L_1/L_2 . (٢) يعرف الزخم الزاوي لمعضلة الجسم المفرد الفعّال بالعلاقة $L = \mu r \times v$ ، حيث $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ، التي تساوي μ الكتلة المختزلة ، $r = r_2 - r_1$ ، $v = v_2 - v_1$ ، $r = r_2 - r_1$.

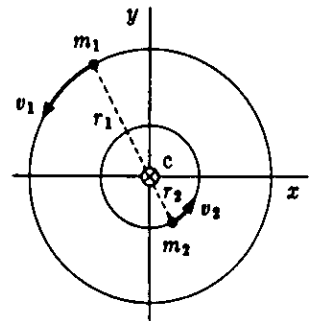
أن $L = L_1 + L_2$. (قد يكون مفيداً العودة إلى بند ٨,١١)
 نوع اختياري : أثبت المتساوية $L = L_1 + L_2$ لحركة غير دائرية للجسيمين حول مركز كتلتها
 الثابت .

م ٩,٦ طرفا قضيبين خفيفين متساويي الطول r مثبتان على محور عند نقطة الأصل ؛ بينما تثبت كتلتان
 متساويتان m عند الطرفين الآخرين للقضيبين . يدور القضيبان بسرعة زاوية ω حول نقطة الأصل
 ويحتفظان أثناء ذلك بمسافة زاوية ثابتة θ (أنظر شكل ٩,٥١) . أوجد تعابير تُحدد الزخم الزاوي
 المداري والمغزلي والكلّي للنظام ؛ ثم ناقش النهايتين $\theta = 0$ ، و $\theta = \pi$.



شكل ٩,٥١ : مسألة ٩,٦ .

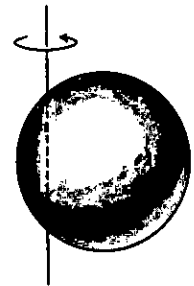
الزخم الزاوي المداري والمغزلي



شكل ٩,٥٠ : مسألة ٩,٥ .

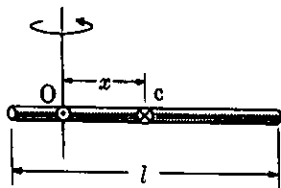
م ٩,٧ (١) كرة قطرها d وكتلتها M تدور حول محور يمر خلال الكرة ، كما في شكل ٩,٥٢ . أثبت أن عزم
 قصور الكرة يجب أن يكون على الصورة $I = \gamma M d^2$ ، حيث $\gamma < 1$. (٢) إذا كان المحور خارج
 الكرة ، فهل يجوز أن تكون γ أكبر من ١ ؟ وهل يمكن أن تساوي ١ ؟

عزوم قصور



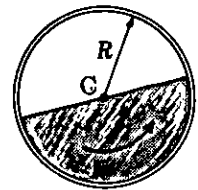
شكل ٩,٥٢ : مسألة ٩,٧ .

م ٩,٨ قضيب رفيع كتلته M وطوله l يدور حول محور عمودي على طوله (أنظر شكل ٩,٥٣) . نعد نقطة
 تقاطع المحور مع القضيب مسافة x عن مركز القضيب ؛ وتختار نقطة التقاطع هذه كنقطة أصل .
 أوجد عزم قصور القضيب كدالة في x للقيم $0 \leq x \leq l$ ؛ ثم ارسم رسماً بيانياً تخطيطياً لعزم
 القصور I ضد x .



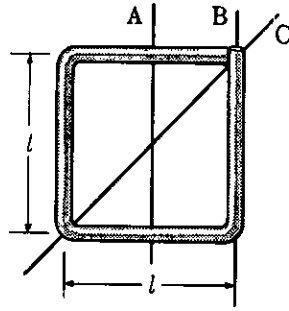
شكل ٩,٥٣ : مسألة ٩,٨ .

م ٩,٩ وُضِعَ وعاء أسطواناني مملوء حتى منتصفه بالماء على جانبه داخل ثلاجة تجميد freezer . عند وضع
 الوعاء فيما بعد في غرفة دافئة ، تذوب طبقة رقيقة من الجليد داخل الوعاء ، فنسمح لكتلة الجليد
 بالدوران داخل الوعاء (أنظر شكل ٩,٥٤) . بين أن عزم قصور كتلة الجليد بالنسبة إلى مركز الوعاء
 C هو $I = \frac{1}{2} M R^2$ (حيث M كتلة الجليد و R نصف القطر الداخلي للوعاء) .

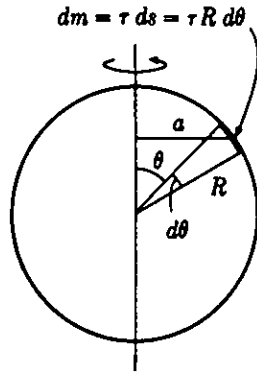


شكل ٩,٥٤ : مسألة ٩,٩ .

م ٩,١٠ قضيب فيلزي (معدني) منتظم كتلته M وطوله l تُثَبَّتْ على شكل مربع (أنظر شكل ٩,٥٥) . فما
 عزم قصوره عند الدوران حول (أ) المحور A ؟ (ب) المحور B ؟ (ج) المحور C ؟



شكل ٩,٥٥ : مسألة ٩,١٠ .



شكل ٩,٥٦ : مسألة ٩,١١ .

٩,١١ م طوق رقيق نصف قطره R وكتلته M يدور حول محور يقع في مستواه ويمر بمركزه . ترمز τ إلى كتلة وحدة الأطوال من الطوق ($\tau = M/2\pi R$) . أثبت أن عزم القصور هو

$$I = \frac{1}{2}MR^2.$$

(إقتراح : استخدم المعادلة ٩,٣٧ مع التعبير الوارد في شكل ٩,٥٦ لعنصر الكتلة dm . قد يكون من الضروري الرجوع إلى جدول تكاملات محدودة .)

٩,١٢ م قرص رقيق منتظم نصف قطره R وكتلته M يدور حول محور يقع في مستواه ويمر بمركزه . ترمز σ إلى كتلة وحدة المساحات من القرص ($\sigma = M/\pi R^2$) . أثبت أن عزم قصوره هو

$$I = \frac{1}{2}MR^2.$$

(إقتراح : استخدم المعادلة ٩,٣٧ مع التعبير الوارد في شكل ٩,٥٧ لعنصر الكتلة dm على بُعد a عن المحور . قد يكون ضرورياً الرجوع إلى جدول تكاملات محدودة .)

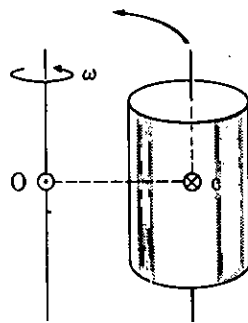
نظرية محور رئيسي

٩,١٣ م جسم يدور حول محور مواز لأحد محاور تماثله ، كما في شكل ٩,٥٨ . تقع نقطة الأصل على محور الدوران . برهن أن محور الدوران هذا هو محور رئيسي (أي محور يكون L بالنسبة له موازياً للسرجه الزاوية ω) إذا كان الخط الذي يصل O ومركز كتلة الجسم متعامداً مع المحور . (تلميح : استخدم العلاقة $L = L_{\text{orbital}} + L_{\text{spin}}$.)

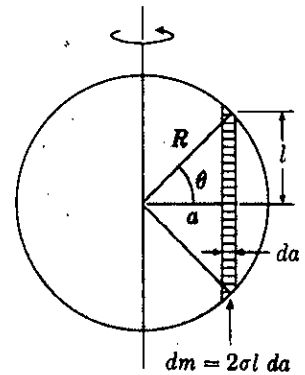
نظرية المحور الموازي

٩,١٤ م جسم كتلته M يدور حول محور اعتباطي ثابت . برهن أن عزم قصوره يتحدد بالعلاقة

$$I = I_0 + Mb^2,$$

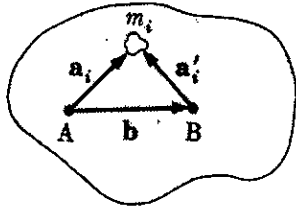


شكل ٩,٥٨ : مسألة ٩,١٣ .



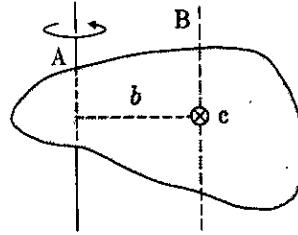
شكل ٩,٥٧ : مسألة ٩,١٢ .

حيث I_0 عزم قصوره حول محور مواز B يمر بمركز الكتلة و b المسافة بين هذين المحورين . (لاحظ أن $I \geq I_0$) . الطريقة : ابدأ بالمعادلة ٩,٣٦ . وكما هو مبين في الشكلين ٩,٥٩ و ٩,٦٠ ، من الملائم استحداث متجهات الإزاحة a_i من المحور A إلى عنصر كتلة m_i ، و a'_i من المحور B إلى عنصر الكتلة ، و b من المحور A إلى المحور B . تذكر أن $a_i^2 = a_i \cdot a'_i + b^2$.
 فرع اختياري : أعد البرهان مستخدماً المعادلة ٩,٣٧ .



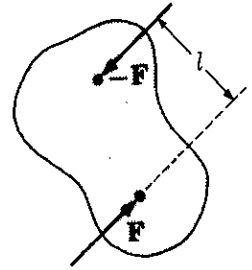
منظر علوي

شكل ٩,٦٠ : مسألة ٩,١٥ و ٩,١٤ .



منظر جانبي

شكل ٩,٥٩ : مسألة ٩,١٥ و ٩,١٤ .



شكل ٩,٦١ : مسألة ٩,١٦ .

م ٩,١٥ استخدم نتائج تم الحصول عليها في البندين ٩,٢ و ٩,٣ لإثبات نظرية المحور الموازي الواردة في مسألة ٩,١٤ . دَعِ محوَر A يكون محوَر z وابدأ من مركبة z في المعادلة ٩,٢٢ . لاحظ أن عزم القصور حول محوَر A أكبر من عزم القصور حول محوَر B نظراً للمساهمة الإضافية للزخم الزاوي المداري .

م ٩,١٦ (١) أثبت أن عزم الدوران « لازدواج » (قوتين متساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه) لا يعتمد على اختيار نقطة الأصل . (٢) بين أن مقدار العزم هو $T = IF$ ، حيث F مقدار كل من القوتين و I المسافة بين خطي عملي القوتين (أنظر شكل ٩,٦١) .

عزم الدوران لازدواج

م ٩,١٧ قُدِّرَتْ كرتة كتلتها m بسرعة ابتدائية v_0 وبزاوية θ مع الاتجاه الأفقي . اجعل نقطة الأصل لنظام إحداثي عند نقطة إطلاق الكرة ، بحيث يكون محور x أفقياً ، ومحور y رأسياً ، ومسار الكرة في مستوى xy . اعمل مقاومة الهواء . (١) أكتب تعابير تحدد $x(t)$ ، $y(t)$ ، $v_x(t)$ ، و $v_y(t)$. (٢) أوجد صيغة للزخم الزاوي للكرة $L = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. (٣) تحدث قوة الجاذبية على الكرة عزماً دورانياً . أوجد هذا العزم . لاحظ أنه يعتمد على الزمن . (٤) كامل المعادلة $T = dL/dt$ بالنسبة إلى الزمن من أجل الحصول على تعبير للكمية L . قارن جوابي الجزئين ٢ و ٤ .

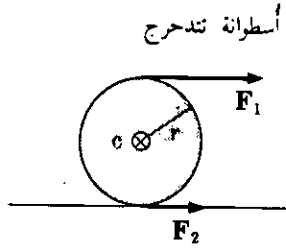
الزخم الزاوي لقذيفة

م ٩,١٨ (١) اشتق المعادلة التي تربط العزم الدوراني بالتسارع الزاوي ، $T = I\alpha$. أوضح سبب مربانها فقط على الدوران حول محور رئيسي . (٢) ما هي المعادلة الوثيقة الصلة التي تسري على الدوران حول أي محور ثابت ؟ (تلميح : قارن المعادلتين ٩,٢٦ و ٩,٤٠) .

الصيغة الدورانية لقانون نيوتن الثاني

م ٩,١٩ ضُربَ قضيب رأسي منتصب على الأرض ضربة دفعية impulsive blow أفقية عند طرفه العلوي . فإذا أهمل الاحتكاك ، ما اتجاه حركة الطرف السفلي من القضيب مباشرة بعد الضربة ؟ برّر إجابتك بدقة .

دفع يحدث دورانياً وانتقالاً



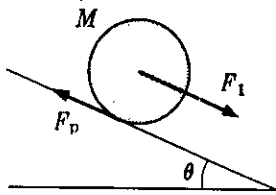
شكل ٩،٦٢ : مسألة ٩،٢٠ .

٩،٢٠ م أسطوانة كتلتها M ونصف قطرها r تتدحرج بدون انزلاق على سطح أفقي . تؤثر قوة أفقية مقدارها F_1 عند أعلى الأسطوانة ، كما تؤثر قوة مركبتها الأفقية F_2 عند نقطة تلامس الأسطوانة مع السطح (أنظر شكل ٩،٦٢) . (١) أوجد تعبيرين لتسارع مركز كتلة الأسطوانة ولتسارعها الزاوي حول مركز كتلتها . (٢) بين ، مع الأخذ بالاعتبار الشرط بأن الأسطوانة لا تنزلق ، أن نسبة المركبتين الأفقيتين للقوة هي :

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{(Mr^2/I) - 1}{(Mr^2/I) + 1}$$

حيث I عزم قصور الأسطوانة . (٣) عبّر عن النتيجة نفسها بدلالة نصف قطر التدويم للأسطوانة ، الذي عُرِفَ في تمرين ٩،٣٩ .

٩،٢١ م افترض أن القوة الأفقية F_1 في المسألة السابقة تؤثر عند المحور المركزي للأسطوانة بدلاً من أعلاها . أوجد تعبيراً للنسبة F_2/F_1 . لاحظ أن F_2/F_1 سالبة .



شكل ٩،٦٣ : مسألة ٩،٢٢ .

٩،٢٢ م تتدحرج أسطوانة أسفل سطح مائل بدون انزلاق . ويمكن اعتبار أن مركبة قوة الجاذبية الموازية للسطح ، التي تساوي $F_1 = Mg \sin \theta$ ، تؤثر عند مركز كتلة الأسطوانة (أنظر شكل ٩،٦٣) . F_p هي مركبة القوة إلى أعلى التي يؤثر بها السطح على الأسطوانة . استخدم النتيجة التي حصلت عليها في المسألة السابقة لإيجاد محصلة مركبة القوة إلى أسفل ، $F_1 - F_p$ ، وتسارع مركز كتلة الأسطوانة . قارن هذا التسارع مع تسارع جسم ينزلق دون احتكاك أسفل نفس المستوى .

الاستباق

٩،٢٣ م يستيق الجيروسكوبُ الغازلُ spinning gyroscope المبين في شكل ٩،٦٤ ، والذي يميل محوره بزاوية ثابتة α مع الاتجاه الرأسي ، بمعدل ثابت حول محور رأسي . (١) أثبت أن معدل تغير زخمه الزاوي المغزلي يتحدد بالعلاقة

$$\frac{dL_{spin}}{dt} = \omega_p \times L_{spin}$$

حيث ω_p هي السرجة الزاوية للاستباق . (إقترح : عالج كلاً من المقادير والاتجاهات على حدة) . (٢) أثبت أن المعادلة المماثلة شكلاً ،

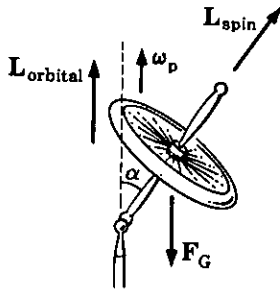
$$\frac{dL}{dt} = \omega_p \times L$$

نسري على الزخم الزاوي الكلي L .

٩،٢٤ م (١) برهن أن سرعة الاستباق الزاوية لـ الجيروسكوب المسألة السابقة هي

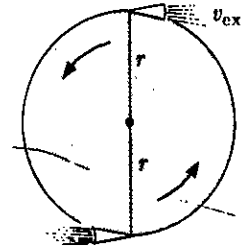
$$\omega_p = \frac{T}{L_{spin} \sin \alpha}$$

حيث T مقدار العزم الدوراني للجاذبية المؤثر على الجيروسكوب . (نعم هذه النتيجة المعادلة ٩،٧٢) . (٢) كيف تعتمد T على الزاوية α ؟ وما محصلة اعتماد ω_p على α ؟



شكل ٩،٦٤ : مسألة ٩،٢٣ .

صاروخ يدور



شكل ٩,٦٥ : مسألة ٩,٢٥

م ٩,٢٥ جسم ذو تماثل أسطواني (قد يكون سفينة فضاء أو دولاب نار) يدور بسبب انبعاث غاز عادم من زوج من الفوهات المماسية تقعان عند طرفي أحد الأقطار (أنظر شكل ٩,٦٥). المسافة بين كل فوهة ومركز الجسم هي r وسرعة غاز العادم نسبة إلى الفوهة هي v_{ex} . كَوْنُ معادلة تُعبر عن حفظ الزخم الزاوي لفترة زمنية قصيرة بين t و $t + \Delta t$ ؛ واشتق منها المعادلة التفاضلية

$$\frac{d\omega}{dm} = - \frac{v_{ex} r}{I}.$$

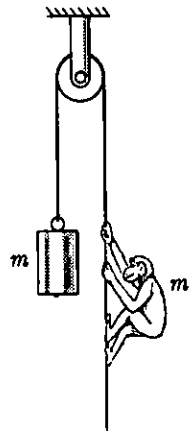
حيث m كتلة الجسم ، و I عزم قصوره (مُتغير) ، و ω سرعته الزاوية . افرض أن غاز العادم مخزون عند طرف الجسم قبل انبعاثه . علق على العلاقة بين هذه المعادلة والمعادلة ٩,٧٧ . (ملاحظة : من المفيد الاطلاع على المعالجة الماثلة في بند ٨,١٠)

م ٩,٢٦ كتلة كروية من الغاز ذات أبعاد فلكية ، دائرة بسرعة زاوية ابتدائية ω_0 ، تنقلص ببطء تحت تأثير الجذب المتبادل لمكوناتها . (١) فما سرعتها الزاوية عندما ينكمش نصف قطرها إلى نصف قيمته الابتدائية ؟ افرض للتبسيط أن لكتلة الغاز كثافة منتظمة وأنها تدور كجسم صلب (لجميع الأجزاء نفس السرجية الزاوية عند نفس اللحظة) . (٢) بين أن التسارع المركزي الجاذب لعنصر كتلة عند الطرف الخارجي للغاز يتناسب مع $1/r^3$ ، حيث r نصف قطر الكرة . تتناسب قوة الجاذبية على نفس عنصر الكتلة مع $1/r^2$. ناقش نتائج حقيقة اختلاف اعتماد هاتين الكميتين على نصف القطر .

انكماش غيمة سديمية nebula

م ٩,٢٧ يمر حبل فوق بكرة ويتدلى عند طرفيه . مُثِّبٌ عند أحد طرفي الحبل يُقَلُّ توازن (counterweight) m ؛ بينما يُمسك بالطرف الآخر قرد ذو كتلة مساوية m (أنظر شكل ٩,٢٦) . يُمكن إهمال كتلتي البكرة والحبل . (١) ليكن النظام موضع الاهتمام مكوناً من البكرة والحبل ونقل التوازن والقرد . فما القوى الخارجية المؤثرة على هذا النظام ؟ هل من الممكن أن يكون مجموع هذه القوى صفراً ؟ وهل من الضروري أن يكون مجموعها صفراً ؟ (٢) ما عزم الدوران الكلي الخارجي بالنسبة إلى محور البكرة ؟ (٣) إذا بدأ القرد بالصعود إلى أعلى بسرعة v نسبة إلى البكرة ، فما سرعة حركة الحبل ، وبأي اتجاه تكون ؟

قرد على حبل



شكل ٩,٢٦ : مسألة ٩,٢٧

م ٩,٢٨ في البداية ، يكون القرد في الشكل السابق ساكناً ومقابلاً تماماً لنقل التوازن . ثم يُقَلُّ الحبل ويُسَقَطُ بعد أن يكون قد تسلق إلى أعلى لعدة ثوانٍ . (١) فما القوة اللازمة لثبيت البكرة (أ) قبل أن يبدأ القرد بالصعود ، (ب) أثناء صعوده بسرعة ثابتة v نسبة إلى البكرة ، و (ج) بعد أن يُقَلُّ الحبل ؟ (٢) أيها يصل الأرض أولاً : القرد أم نقل التوازن ؟ افرض أن للقرد مركبة سرجية إلى أعلى عندما أفلت الحبل .

م ٩,٢٩ استبدل القرد ذو الكتلة m في مسألة ٩,٢٧ بقرد آخر كتلته $2m$. وكان يُقَلُّ التوازن ساكناً في البداية ؛ ثم أفلت . (١) فما عزم الدوران الكلي المؤثر على النظام بالنسبة إلى محور البكرة ؟ (٢) كأمل المعادلة $dL/dt = T$ (بشرط ابتدائي مناسب) لإيجاد $L(t)$ ، أي الزخم الزاوي للنظام . (٣) هل

• في الأصل : Fourth of July pinwheel ؛ وهو ضرب من الألعاب النارية على شكل دولاب صغير يدور - فور إشعال الفيل - نتيجة لألسنة اللهب الملونة التي تنبعث من فوهات مماسية موجودة على محيط الدولاب . ودولاب النار هذا مألوف في احتفالات عيد الاستقلال في الولايات المتحدة الأمريكية (الرابع من تموز) .

(المترجم)

يستطيع القرد أن يتحرك بشكل يظل معه ثقل التوازن ساكناً ؟ إن أمكن ذلك ، فكيف يتحرك ؟
(٤) هل يستطيع القرد الوصول إلى البكرة ؟ فسر المنطق الذي تستخدمه .

الزخم الزاوي للكوكب

م ٩,٣٠ اعتبر نظاماً شمسياً مثالياً يتكون من مركز ثابت لقوة جاذبة وكوكب كروي مفرد يَغرلُ حول محوره ويدور حول مركز القوة . (١) اشرح سبب كون كل من الزخم الزاوي الميغزلي والزخم الزاوي المداري ثابتاً على حدة . (٢) تصور الآن أن الكوكب قد تشوه إلى شكل غير كروي (لدرجة كبيرة إن شئت) . فسر لماذا لا يكون زخمه الزاوي الميغزلي ثابتاً بالضرورة .



١٠. الطاقة

Energy

الطاقة مفهوم رئيسي في الفيزياء والكيمياء وعلم الأحياء - بل في كل حقل من العلوم الطبيعية ، بالإضافة إلى الهندسة والقضايا العملية . * وتتميز بتعدد الأشكال وقانون حفظ يوحّد أشكالها المتعددة . ومنذ بدايتها المتواضعة كمفهوم ثانوي في الميكانيكا ، نمت الطاقة إلى ما قد يكون أهم فكرة توحيد unifying idea في العلوم الطبيعية .

حفظ الطاقة يوحّد أشكال الطاقة المتعددة

يُبين شكل ١٠,١ على نحو تخطيطي بعض المداخلات interconnections الموجودة بين أشكال الطاقة المختلفة . ولقد سبقت دراسة طاقة الكتلة mass energy والطاقة الحركية في التحوّلات الجسيمية في الباب الرابع . وسيكون التركيز الرئيسي في هذا الباب على السّات الميكانيكية للطاقة ، المحاطة بخط متقطع في شكل ١٠,١ : الشغل ، والطاقة الحركية ، وطاقة الوضع . وسنردّ الطاقة مراراً على هذه الأشكال وسواها في الأبواب اللاحقة .

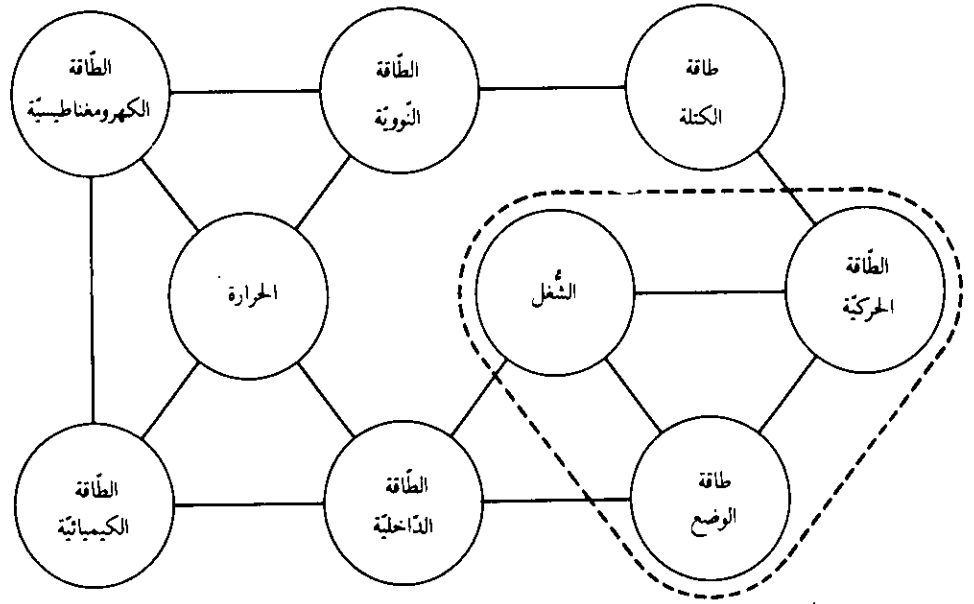
١٠,١ الشغل المبذول بواسطة قوّة ثابتة Work Done by a Constant Force

نبدأ بتعريف مفهوم الشغل للحالة الخاصة التي تؤثر فيها قوّة ثابتة على جسم . وستظهر فائدة هذا المفهوم بجلاء في البند التالي ، حيث تُبنى صلة بين الشغل والطاقة الحركية ؛ كما سيتمّ تعميم تعريف الشغل في بند ١٠,٣ ليشمل قوى اعتباطية . وسنقصر اهتمامنا ، في البنود الثلاثة الأولى ، على حركة الجسيمات المفردة أو الأجسام الجاسئة حركة انتقالية بدون دَوْران (هذان النوعان من الحركة متكافئان ميكانيكياً) ؛ في حين أننا سنتناول بالدراسة أنظمة الجسيمات في بند ١٠,٤ ، والحركة الدورانية في بند ١٠,٩ .

* مثال : يتناسب الناتج القومي الإجمالي لبلد ما ، لدرجة كافية من التقريب ، مع « استهلاكه » من الطاقة . أنظر : س . فرد سينجر ، « إنتاج الطاقة البشرية كعملية في المحيط الحيوي » :

S. Fred Singer, "Human Energy Production as a Process in the Biosphere,"

مجلة Scientific American ، عدد أيلول ، ١٩٧٠ .



شكل ١٠،١ : بعض أشكال الطاقة ، وبعض مداخلها . ليست كل هذه الأشكال متميزة بجلاء : فالطاقة الداخلية هي جزئياً طاقة حركية جزيئية ، والطاقة الكيميائية المخزنة يمكن اعتبارها طاقة وضع ذرية ، كما أن تغيرات الكتلة ترافق تقريباً جميع تغيرات الطاقة الأخرى . ويحيط الخط المتقطع بأشكال الطاقة ذات الأهمية في الميكانيكا الجاهريّة macroscopic mechanics . أما الحرارة والشغل ، في وسط الشغل ، فهي نمطان لانتقال الطاقة .

إذا عانى جسمٌ متأثر بقوة ثابتة F إزاحةً s ، فإن الشغل الذي بذلته القوة F على الجسم يُعرّف بأنه حاصل الضرب القياسي للقوة F والإزاحة s :

تعريف للشغل

$$W = F \cdot s \quad (\text{constant } F). \quad (10,1)$$

ويبين هذا التعريف على الفور عدّة أشياء هامة عن الشغل . فهو كمية قياسية ؛ ووحدته في النظام الدولي هي نيوتن متر ، التي هي نفس الوحدة مثل كـرغ م^٢/ث^٢ ؛ وكما أوضحنا سابقاً ، فإن ائتلاف الوحدات هذا يُدعى بالجول (ج) (joule (J) :

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2/\text{sec}^2. \quad (10,2)$$

$$1 \text{ ج} = 1 \text{ ن م} = 1 \text{ كـرغ م}^2/\text{ث}^2.$$

كذلك لا يُعرّف الشغل عند لحظة أو نقطة بل على امتداد فترة ؛ وهو يتضمّن كلاً من القوة المؤثرة يُعرّف الشغل على امتداد فترة

بما أننا نفترض حركة انتقالية فقط ، فإن الإزاحة s هي نفسها لكل نقطة في الجسم . أما لو اعتبرنا أنواع الحركة الأكثر شمولاً ، فلنكانت s إزاحة النقطة التي تؤثر عندها القوة .

على الجسم وحركة الجسم. ° وباستخدام تعريف حاصل الضرب القياسي، نستطيع كتابة

$$W = Fs \cos \theta \quad (\text{constant } F). \quad (10,3)$$

فإذا كانت الزاوية θ بين F و s أقل من $\pi/2$ ، فإن W يكون موجباً؛ أي أن القوة الخارجية تبذل شغلاً موجباً على الجسم [شكل ١٠,٢ (أ)]. وإذا كانت θ أكبر من $\pi/2$ ، فإن القوة تُعاكس الحركة بصورة عامة ويكون W سالباً [شكل ١٠,٢ (ب)]. ونُصِفُ W السالب إِمَاماً بقولنا إن القوة تبذل شغلاً سالباً على الجسم أو بقولنا إن الجسم يبذل شغلاً على محيطه.

أهمية الشغل السالب والموجب

■ مثال ١ : مقدار متجه الإزاحة s لكرة السلة في شكل ١٠,٢ (ب) هو ٤ م؛ كما يصنع زاوية ٥٥° مع الاتجاه الأفقي. فإذا كانت كتلة كرة السلة m ، ٠,٦ كـرغ، فما مقدار الشغل الذي تبذله قوة الجاذبية mg على الجسم؟

نستطيع استخدام المعادلة ١٠,٣؛ حيث نجد أن

$$\begin{aligned} W &= mgs \cos (135 \text{ deg}) \\ &= 0.6 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/sec}^2 \times 4 \text{ m} \times (-0.707) \\ &= -16.6 \text{ J}. \end{aligned}$$

ويُبدلُ هذا المثال على السهولة الخاصة لتعريف الشغل بالنسبة لقوة ثابتة؛ إذ يتطلبُ الحسابُ مُجرّدَ معرفة الإزاحة الكلية s ، وليس المسار المنحني الحقيقي للكرة. ■

■ مثال ٢ : يجرُّ غلامٌ عربةً بقوة مقدارها ٢٥ ن باتجاه ٣٥° فوق الاتجاه الأفقي (شكل ١٠,٣). فإذا تحركت العربة أفقياً إلى الأمام مسافة $d = ٢$ م، فما الشغل الذي يبذله الغلام على العربة؟

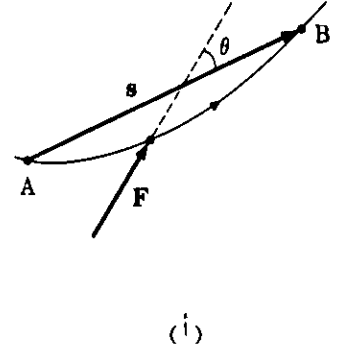
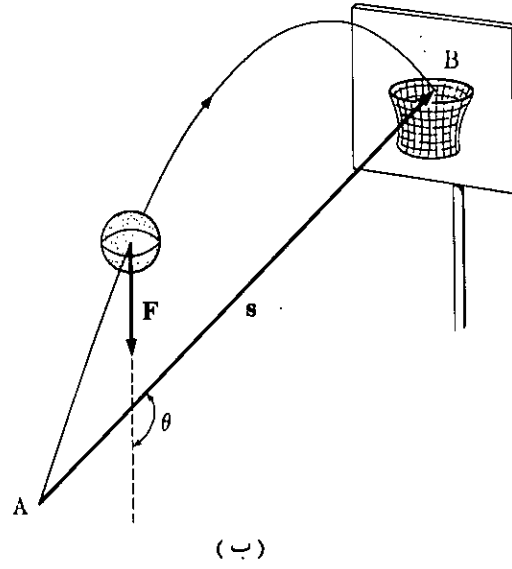
مرةً أخرى، الأبسط هو استخدام المعادلة ١٠,٣؛ حيث نجد أن

$$\begin{aligned} W &= Fd \cos (35 \text{ deg}) \\ &= 25 \text{ N} \times 2 \text{ m} \times 0.819 \\ &= +41 \text{ J}. \end{aligned}$$

ومن المهم أن نلاحظ في هذا المثال أنه يمكنُ حسابُ الشغل المبذول على الجسم بواسطة قوة معينة في نفس الوقت الذي قد يتأثر فيه الجسم بقوى أخرى، معروفة أو غير معروفة. فبحركة العربة إلى الأمام، مثلاً، تبذل قوى الاحتكاك شغلاً سالباً عليها. ■

يمكنُ تعريفُ الشغل لكل قوة على حدة

هناك تشابه طريف بين الكمية القياسية الشغل والكمية المتجهة الدفع $impulse$. تذكرُ أن الدفع يُعرّفُ بقوة ثابتة بالملاقة $I = F \Delta t$ ؛ أي حاصل ضرب قوة في فترة زمنية. وكما سئى، فإن أثر الشغل هو تغيير الطاقة؛ في حين أن أثر الدفع هو تغيير الزخم.



شكل ١٠،٢ : الشغل الموجب والسالب . (أ) يتحرك جسيم من A إلى B على امتداد مسار منحني تحت تأثير قوة ثابتة F . فتتبع الإزاحة s زاوية θ مع F ، ويكون الشغل - المعروف بالعلاقة $-F \cdot s$ - موجباً ، حيث أن $\cos \theta > 0$. (ب) تتبع كرة سلة المنحنى AB تحت تأثير قوة الجاذبية الثابتة F . وبما أن $\cos \theta < 0$ ، فإن الشغل المبذول على كرة السلة يكون سالباً .

■ مثال ٣ : كتلة العربة $m = ٥$ كـرغ . فما الشغل الذي تبذله عليها قوة الجاذبية عندما تتحرك إلى الأمام ٢ م ؟

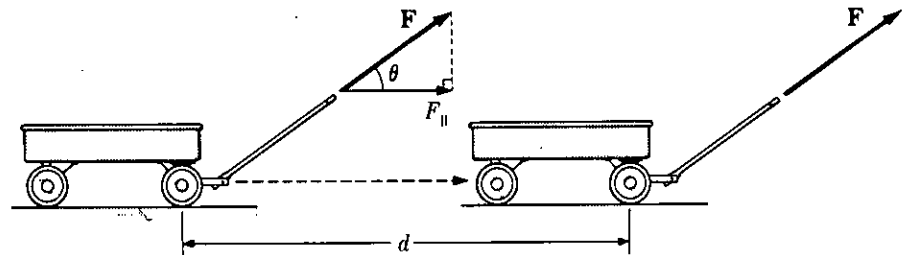
لا قيمة في الواقع لكتلة العربة ؛ إذ أن الجاذبية لا تبذل شغلاً . وبما أن F_{grav} عمودية على s ، فإن

$$W_{\text{grav}} = F_{\text{grav}} \cdot s = 0.$$

ثلاث طرق للحصول على شغل صفري

فيتلاشى الشغل تحت ثلاثة شروط : إذا انعدمت القوة (كما في الحركة الحرة لجسم معزول) ؛ وإذا انعدمت الإزاحة (كما في حالة اختزال قوى متضادة بحيث يظل الجسم ساكناً) ؛ وإذا تعامدت القوة مع الإزاحة (كما في هذا المثال لقوة الجاذبية على العربة) . ■

وكما هو متوّه به في شرح شكل ١٠،٣ ، فإنه يمكن كتابة الشغل الذي تبذله قوة ثابتة على الصورة :



شكل ١٠،٣ : يمكن حساب الشغل الذي تبذله قوة ما حتى إن لم تكن هذه القوة الوحيدة المؤثرة على النظام . ففي هذا المثال ، يكون الشغل $Fd \cos \theta = F_{\parallel} d$.

$$W = F_{\parallel} d, \quad (١٠,٤)$$

حيث d مقدار الإزاحة و $F_{\parallel}$ مركبة F باتجاه s . وبالتعبير عن هذا بالكلمات ، نستطيع القول إن ذلك الجزء من القوة الذي يؤثر باتجاه الإزاحة هو الذي يساهم في الشغل فقط .

١٠,٢ الشغل والطاقة الحركية للحركة الأحادية البعد

Work and Kinetic Energy for One-Dimensional Motion

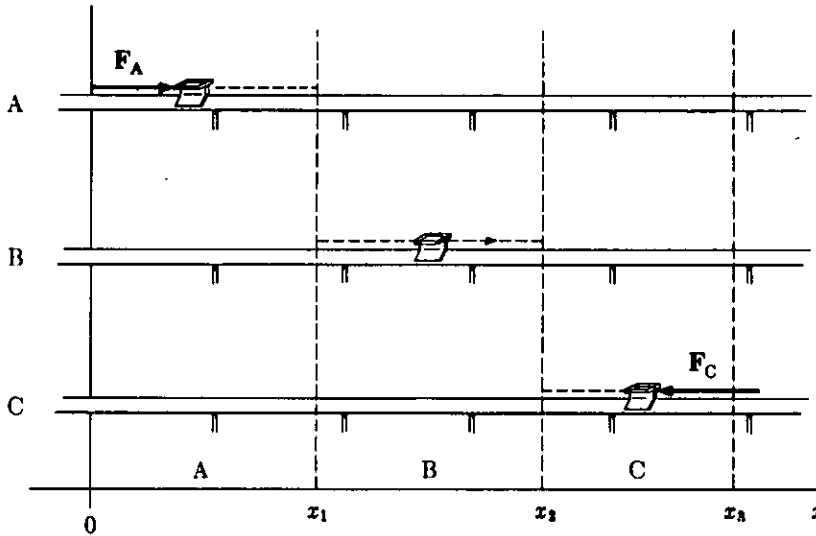
إعتبر التجربة المثالية التالية البالغة البساطة ، والتي نعطينا دليلاً على فائدة مفهوم الشغل . دُفِعت عربة ، على مسار أفقي أملس ، بقوة ثابتة F_A لفترة ما ، ثم تركت لتتزلق بحرية فترة زمنية أخرى ، ثم تباطأت وأوقفت بواسطة قوة ثابتة F_C ، تختلف في مقدارها عن قوة التسارع F_A . ولأغراض النقاش ، سنقسم الحركة إلى أجزاء ثلاثة : A ، B ، و C ، كما هو موضح في شكل ١٠,٤ .

في الجزء A من الحركة ، تتسارع العربة بانتظام ، بدءاً من السكون عند نقطة الأصل . وعلى ذلك يمكن الربط بين سرّجتها وموضعها بالمعادلة ٥,٥٤ :

$$v^2 = 2a_A x, \quad (١٠,٥)$$

حيث a_A مركبة x للتسارع . وبما أن $a_A = F_A/m$ ، فإنه يمكن أيضاً كتابة هذه المعادلة

$$v^2 = 2 \left(\frac{F_A}{m} \right) x.$$



شكل ١٠,٤ : مثال الحركة المُستخدَم في إيجاد العلاقة بين الشغل والطاقة الحركية . عربة تتسارع بقوة ثابتة F_A من $x=0$ إلى x_1 ، ثم تُترك لتتزلق بحرية من x_1 إلى x_2 ، وأخيراً يجري إيقافها بواسطة قوة ثابتة F_C تؤثر بين x_2 و x_3 .

وبإعادة الترتيب نجد أنَّ

$$\frac{1}{2}mv^2 = F_A x \quad (\text{part A}). \quad (10,6)$$

وتمثل الكمية على اليمين الشغل الذي أنجزته القوة F_A عند إزاحة العربة من 0 إلى x . أما على اليسار، فتوجد الطاقة الحركية K للعربة عند النقطة x ، والتي تساوي التغير في الطاقة الحركية ΔK من 0 إلى x . وعلى ذلك نستطيع أن نكتب النتيجة الهامة التالية للفترة 0 إلى x :

التغير في الطاقة الحركية يُعادل عَصْلَة
الشغل المبذول

$$\Delta K = W \quad (\text{part A}); \quad (10,7)$$

أي أنَّ التغير في الطاقة الحركية للعربة يُساوي الشغل الذي بُدِلَ عليها. وإذا طبقنا المعادلة 10,7 على الجزء A برُمْتِهِ، أَمْكِنُ كتابتها

$$\Delta K_A = W_A, \quad (10,8)$$

حيث $\Delta K_A = \frac{1}{2}mv_1^2$ هي الطاقة الحركية عند x_1 (أنظر شكل 10,4)، و $W_A = F_A x_1$ هو الشغل الكلي المبذول في الجزء A.

في الجزء B من الحركة، لا تؤثر أية قوة باتجاه الحركة؛ وبذلك ينعدم الشغل:

$$W_B = 0. \quad (10,9)$$

فخلال هذا الجزء من الحركة، تتركز العربة بسرجهة ثابتة؛ وعلى ذلك لا تتغير طاقتها الحركية:

$$\Delta K_B = 0 \quad (\text{part B}). \quad (10,10)$$

ومن الواضح أنه يمكن كتابة ذلك

$$\Delta K_B = W_B, \quad (10,11)$$

بنفس صورة المعادلة 10,8.

ولربط السرجية بالموضع أثناء مرحلة التباطؤ، المثلة بالجزء C، نحتاج إلى المعادلة 10,5، حيث تعطينا

$$v^2 - v_2^2 = 2a_C(x - x_2). \quad (10,12)$$

ونستطيع كالسابق استبدال a_c بالمقدار F_c/m - (حيث أن مركبة x للتسارع سالبة) ، ومن ثم ضرب طرفي المعادلة ١٠,١٢ بالمقدار $\frac{1}{2}m$ لنحصل على

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_2^2) = -F_c \cdot (x - x_2). \quad (١٠,١٣)$$

دعنا نضع $x = x_3$ ونعتبر الجزء C كله. فيصبح الطرف الأيمن لهذه المعادلة $-F_c \cdot (x_3 - x_2)$ ، مما يساوي الشغل في الجزء C :

$$W_c = F_c \cdot s_c = -F_c \cdot (x_3 - x_2). \quad (١٠,١٤)$$

كما يصبح الطرف الأيسر التغير الكلي في الطاقة الحركية في الجزء C (الذي يساوي $\frac{1}{2}mv_2^2 -$ ؛ حيث أن $v_3 = 0$). لذلك نجد أن

$$\Delta K_c = W_c. \quad (١٠,١٥)$$

فيساوي الشغل والتغير في الطاقة الحركية يسري لكل جزء من الحركة - بل إنه لصحيح لكل جزء منها صغر وللحركة ككل. فللحركة برمتها ، التي تبدأ وتنتهي بالسكون ، يكون

$$\Delta K_T = \Delta K_A + \Delta K_B + \Delta K_C = 0. \quad (١٠,١٦)$$

كما يتعين على الشغل الكلي أن يتلاشى أيضاً :

$$W_T = W_A + W_B + W_C = W_A + W_C = 0.$$

فالشغل الموجب W_A يتوازن تماماً مع الشغل السالب W_C .

نستطيع التوصل إلى عدة استنتاجات من هذا المثال البسيط :

(١) الشغل مقياس مفيد للجهود اللازم لتحريك أو إيقاف جسم . فالشغل اللازم لإعطاء العربة سرجهة معينة في الجزء A يساوي ويضاد الشغل المبذول في إيقاف العربة في الجزء C ، بغض النظر عن المقادير النسبية للقوتين F_A و F_c . (٢) الطاقة الحركية خاصية قياسية scalar property للحركة ترتبط بالشغل ببساطة كبيرة . فالتغير في الطاقة الحركية لجسم جاسي في أية فترة يساوي الشغل المبذول على الجسم في تلك الفترة بواسطة محصلة القوة المؤثرة على الجسم . (٣) نلاحظ في هذا المثال التلميح إلى قانون حفظ ؛ فالشغل المبذول في الجزء A يستعاد بالكامل في الجزء C . والصورة التي توجي بها المعادلات الرياضية السابقة هي أن الشغل

التلميح إلى قانون الحفظ : الشغل مستعاد

* كما نرى أن حاصل الجمع في المعادلة ١٠,١٦ يتلاشى ، إستخدم :

$$\Delta K_C = -\frac{1}{2}mv_2^2 \quad ; \quad \Delta K_B = 0 \quad ; \quad \Delta K_A = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

المُوجِبَ في الجزء A يُصِيفُ شيئاً إلى العربة ، شيئاً نستطيعُ تسميته بالطاقة ؛ وأنَّ هذه الطاقة تظلُّ محفوظةً أثناء الحركة الحرة في الجزء B ؛ كما وأنَّ الشغلَّ السَّالبَ في الجزء C يَطْرَحُ هذه الطاقة من العربة .

ومن المهمُّ أنَّ نعيَّ أنَّ العلاقة بين الشغلِّ والطاقة الحركية ،

$$\Delta K = W,$$

يكون $\Delta K = W$ لأيِّ جزء من الحركة شرط أن يكون الشغل W الكليُّ الناتج عن كلِّ القوى

تَصِحُّ فقط إذا حُسِبَ الشغلُّ باستخدام القوة الكلية المؤثرة على الجسم . ففي المثالِ المبين في شكل ١٠،٣ ، مثلاً ، يبذلُ الفتي شغلاً على العربة ؛ إلا أنَّه من غير الضروري أن تزيد الطاقة الحركية للعربة ، حيث تؤثر عليها قوى أخرى أيضاً .

■ مثال ١ : كرة كتلتها m أُسْقِطَتْ من السكون من ارتفاع h [شكل ١٠،٥ (أ)] . فما السرعة التي ترتطمُ بها بالأرض ؟

بما أنَّ قوة الجاذبية والإزاحة متوازيتان ، يكون

$$W = F \cdot s = Fh = mgh, \quad (١٠،١٩)$$

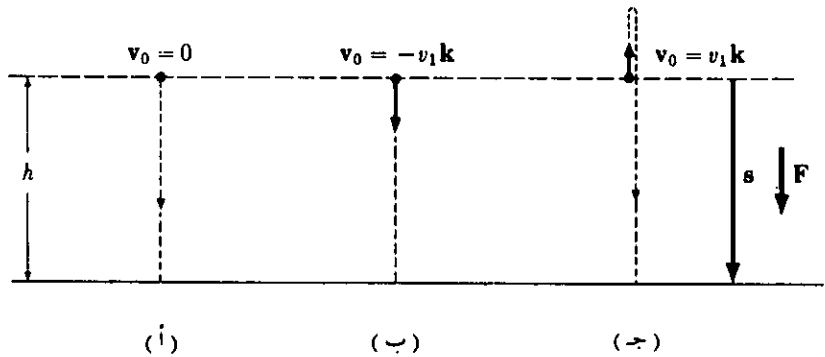
الشغل الذي تبذله قوة الجاذبية

كمية موجبة . (نفترض أنَّ احتكاك الهواء مهمَل .) لتكن K_f الطاقة الحركية النهائية . فتحدّد بالشغل المبذول :

$$\Delta K = K_f = W.$$

ضع $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ و $W = mgh$ ؛ ثم أوجد السرعة النهائية ،

$$v_f = \sqrt{2gh}. \quad (١٠،٢٠)$$



شكل ١٠،٥ : (أ) كرة تُسْقِطُ من السكون على ارتفاع h . (ب) كرة تُقَذَفُ إلى أسفل من نفس الارتفاع . (ج) كرة تُقَذَفُ إلى أعلى من نفس الارتفاع التغيُّر في الطاقة الحركية متساوٍ لكلِّ مثالٍ من هذه الأمثلة .

ويمكن أيضاً الحصول على هذه النتيجة مباشرة من قانون نيوتن الثاني ؛ يَبْدَأُ أَنْ المعادلة ١٠,١٨ تَرْوَدُنَا بِأَبْسَطِ طَرِيقَةٍ لِلْحَصُولِ عَلَيْهَا . فَلَسْقُوطُ ١ م ، تكون $v_f = 4,43$ م/ث ، بَغْضِ النَّظَرِ عَنِ الْكَلَّةِ . أَمَّا لِلارْتِفَاعَاتِ الْآخَرَى ، فَتَنَاسَبُ v_f مَعَ $\sqrt{h}$.

■ مثال ٢ : قُدِّفَتْ كُرَّةٌ إِلَى أَسْفَلِ مِنْ نَفْسِ الْارْتِفَاعِ h بِسَرْعَةٍ ابْتِدَائِيَّةٍ v_1 [شكل ١٠,٥ (ب)] . فَبَايَ سَرْعَةٍ تَرْتَظُمُ الْكُرَّةُ بِالْأَرْضِ ؟

الشَّغْلُ ، وَبِالتَّالِيِ التَّغْيِيرُ فِي الطَّاقَةِ الْحَرَكِيَّةِ ، هُوَ نَفْسُهُ كَمَا فِي الْمَثَالِ السَّابِقِ . فَتَسْتَطِيعُ أَنْ نَكْتُبَ

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh.$$

وَيَكُونُ الْحَلُّ لِّلْسَرْعَةِ v_f :

$$v_f = \sqrt{v_1^2 + 2gh}. \quad (١٠,٢١)$$

إِفْرَضِ أَنْ $h = ١$ م ، وَأَنَّ $v_1 = ١٠$ م/ث . عِنْدَئِذٍ تَكُونُ $v_f = ١٠,٩$ م/ث . وَلَا يُضَيَّفُ الشَّغْلُ إِلَى السَّرْعَةِ سِوَى الْقَلِيلِ نَسْبِيًّا .

■ مثال ٣ : بَدَأَ بِنَفْسِ الْارْتِفَاعِ h ، قُدِّفَتْ كُرَّةٌ إِلَى أَعْلَى [شكل ١٠,٥ (ج)] . فَمَاذَا يَحِبُّ أَنْ تَكُونَ السَّرْعَةُ الْابْتِدَائِيَّةُ v_1 حَتَّى تَرْتَظُمَ بِالْأَرْضِ بِسَرْعَةِ $2v_1$ ؟

بِالرَّغْمِ مِنَ الْمَسَارِ الْأَطْوَلِ لِلْكُرَّةِ ، فَإِنَّ مُحْصَلَةَ الْإِزَاحَةِ تَكُونُ هِيَ نَفْسَهَا كَمَا فِي الْمَثَالَيْنِ السَّابِقَيْنِ ،

$$s = -hk$$

(حَيْثُ k مُتَّجُهُ الْوَحْدَةِ إِلَى أَعْلَى) . وَعَلَى ذَلِكَ ، يَكُونُ الشَّغْلُ وَالتَّغْيِيرُ فِي الطَّاقَةِ الْحَرَكِيَّةِ نَفْسَ الشَّيْءِ أَيْضًا . فَتَتَّخِذُ الْمَعَادِلَةُ ١٠,١٨ الصُّورَةَ :

$$\frac{1}{2}m(2v_1)^2 - \frac{1}{2}m(v_1)^2 = mgh.$$

وَيَكُونُ الْحَلُّ لِّلْسَرْعَةِ v_1 :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{3}gh}.$$

وَمِنْ السَّهْلِ ، بِاسْتِخْدَامِ الْمَعَادِلَةِ ١٠,١٨ ثَانِيَةً ، إِيجَادُ أَقْصَى ارْتِفَاعٍ تَبْلُغُهُ هَذِهِ الْكُرَّةُ .

١٠,٣ الشَّغْلُ وَالطَّاقَةُ الْحَرَكِيَّةُ لِلْحَرَكَةِ الْعَامَّةِ لِجُسَيْمٍ

Work And Kinetic Energy for the General Motion of a Particle

يُعَرَّفُ الشَّغْلُ الَّذِي تَبْذُلُهُ قُوَّةٌ غَيْرُ ثَابِتَةٍ لِإِزَاحَةٍ مُتَنَاهِيَةِ الصَّغْرِ ds بِالْعَلَاَقَةِ

التعريف العام للشغل

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (١٠,٢٢)$$

وَيُمَثِّلُ هَذَا أَعْمَرُ تَعْرِيفَ الشَّغْلِ فِي الْفِيزِيَاءِ . وَهُوَ يَسْتَلْزِمُ أَنَّ تَزَايُدًا مَحْدُودًا (وَبِالْتَّالِي يُمَكِّنُ قِيَاسَهُ) مِنَ الشَّغْلِ يَجِبُ أَنْ يُعَبَّرَ عَنْهُ عَلَى صُورَةٍ تَكَامُلٍ .

□ الْحَرَكَةُ الْإِعْتَابِيَّةُ فِي بُعْدٍ وَاحِدٍ Arbitrary Motion in One Dimension

قَبْلَ أَنْ نَتَفَحَّصَ لَزُومَاتِ الْمَعَادِلَةِ ١٠,٢٢ فِي ثَلَاثَةِ أَبْعَادٍ ، دَعْنَا نَقُومَ بِدِرَاسَةِ الْحَرَكَةِ فِي بُعْدٍ وَاحِدٍ لِحَسْبِمْ يَتَحَرَّكُ عَلَى امْتِدَادٍ مَحْوَرٍ x . (كَمَا فِي الْبُودِ السَّابِقَةِ ، فَإِنَّ التَّحْلِيلَ يَنْطَبِقُ أَيْضًا عَلَى الْحَرَكَةِ الْإِنْتِقَالِيَّةِ لِلْجِسْمِ جَاسِيًا .) عِنْدَئِذٍ ، بِمَا أَنَّ $ds = dx$ ، فَإِنَّ

$$dW = F_x dx. \quad (١٠,٢٣)$$

لَا حَظَّ أَنَّ هَذَا يَظَلُّ صَحِيحًا حَتَّى لَوْ كَانَتْ F_x وَ/أَوْ F_y لَا تَسَاوِي صَفْرًا (إِرْجِعْ إِلَى الْمَعَادِلَةِ ٦,٦١) . بِالطَّبَعِ ، إِذَا كَانَ جُسِيمٌ يَتَحَرَّكُ عَلَى امْتِدَادٍ مَحْوَرٍ x فَقَطْ ، فَإِنَّ الْقُوَّةَ الْكَلْبِيَّةَ الْمُؤَثِّرَةَ عَلَيْهِ يَجِبُ أَنْ تَكُونَ بِاتِّجَاهِ x . عَلَى كُلِّ حَالٍ ، فَقَدْ نَرُغِبُ فِي إِيجَادِ الشَّغْلِ الَّذِي تَبْذُلُهُ وَاحِدَةٌ مِنْ بَيْنِ مَجْمُوعَةٍ مِنَ الْقُوَى ؛ وَلَيْسَ مِنَ الضَّرُورِيِّ أَنْ تَكُونَ تِلْكَ الْقُوَّةُ مُوَازِيَةً لِمَحْوَرٍ x .

لِلْحَصُولِ مِنَ الْمَعَادِلَةِ ١٠,٢٣ عَلَى الشَّغْلِ فِي فِتْرَةٍ مَحْدُودَةٍ ، عَلَيْنَا تَجْمِيعُ الْمَسَاهِمَاتِ الْمُتَنَاهِيَةِ الصَّغِيرِ - بِمَعْنَى أَنَّ نُجْرِيَ تَكَامُلًا . فَيَكُونُ الشَّغْلُ لِلْإِزَاحَةِ مِنْ x_1 إِلَى x_2

الشَّغْلُ فِي بُعْدٍ وَاحِدٍ

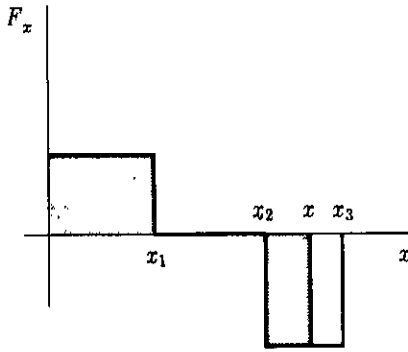
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx. \quad (١٠,٢٤)$$

وَبَيَانِيًا ، فَإِنَّ الشَّغْلَ هُوَ الْمَسَاحَةُ تَحْتَ مَنْحَنِ فِي رَسْمٍ بَيَانِيٍّ بَيْنَ F_x وَ x (شَكْل ١٠,٦) . وَلَا نَحْتَاجُ لِحَسَابِهِ إِلَى مَعْرِفَةِ تَفَاصِيلِ الْحَرَكَةِ ، كَالسَّرْعَةِ أَوِ الزَّمَنِ اللَّازِمِ لِلإِنْتِقَالِ مِنْ x_1 إِلَى x_2 . وَبَيِّنُ شَكْلُ ١٠,٦ (أ) دَالَّةً إِعْتَابِيَّةً لِلْقُوَّةِ ؛ كَمَا يَبَيِّنُ شَكْلُ ١٠,٦ (ب) دَالَّةً الْقُوَّةِ الَّتِي تَصِفُ الْمَثَالَ الْمُبَيَّنَ فِي شَكْل ١٠,٤ . فَتُعْطِي الْمَسَاحَةُ الْمُظَلَّلَةَ (الْمَوْجِبَةُ جُزْئِيًّا ، وَالسَّالِبَةُ جُزْئِيًّا) الشَّغْلَ الْمَبْذُولَ مِنْ $x = 0$ إِلَى قِيَمَةٍ مَا لِلْمَتَغَيِّرِ x تَقَعُ بَيْنَ x_2 وَ x_3 .

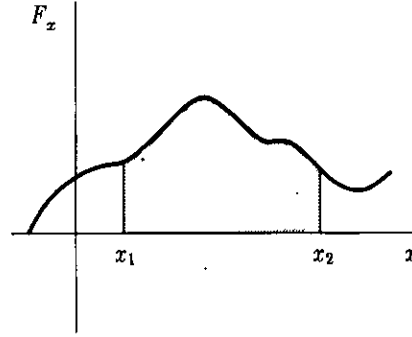
■ مِثَال ١ . أُطْلِقَ صَارُوخٌ كَتَلُهُ ١٠ كِغْرَ رَاسِيًّا إِلَى أَعْلَى . وَتَكُونُ مَرَكَبَةُ قُوَّةِ الْجَاذِبِيَّةِ الْمُؤَثِّرَةِ عَلَيْهِ إِلَى أَعْلَى

$$F_r = -mg_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad (١٠,٢٥)$$

حَيْثُ r بُعْدُ الصَّارُوخِ عَنْ مَرَكَزِ الْأَرْضِ ، وَ R نِصْفُ قَطْرِ الْأَرْضِ ، وَ mg_0 وَزْنُ الصَّارُوخِ عَلَى سَطْحِ الْأَرْضِ . فَإِذَا أَهْمِلَ تَغْيِيرُ كَتَلَةِ الصَّارُوخِ ، وَإِذَا أَفْلَتَ الصَّارُوخُ مِنَ الْأَرْضِ ، فَمَا



(ب)



(أ)

شكل ١٠,٦ : يُساوي الشغل للحركة في بُعد واحد المساحة تحت منحنى في رسم بياني بين F_x و x . (أ) قوة اعتباطية : الشغل المبذول خلال إزاحة من x_1 إلى x_2 هو $\int_{x_1}^{x_2} F_x dx$. (ب) القوة اللازمة للحركة الميَّنة في شكل ١٠,٤ : تساوي المساحة الكلية للإزاحة من 0 إلى x_3 صفراً .

الشغل الذي تبذله قوة الجاذبية على الصاروخ (أنظر شكل ١٠,٧) ؟

يَتَطَلَّبُ الحسابُ تحديدَ قيمة تكامل الشغل (المعادلة ١٠,٢٤) لقانون القوة المعين (المعادلة ١٠,٢٥) :

$$W = \int_R^\infty F_r dr$$

$$= -mg_0 R^2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

والتكامل غير المحدود ، $\int (1/r^2) dr$ ، هو $-1/r$ (إن لم تكن هذه نتيجة مألوفة ، تحقق منها بالتفاضل) . وقيمتُهُ بين الحدين R و ∞ هي $+1/R$. وعلى ذلك يكون الشغل

$$W = -mg_0 R.$$

وعلى وجه الخصوص ، للقيم $m = 10^4$ كـغ ، $g_0 = 9,8$ م/ث^٢ ، و $R = 6,37 \times 10^6$ م ،

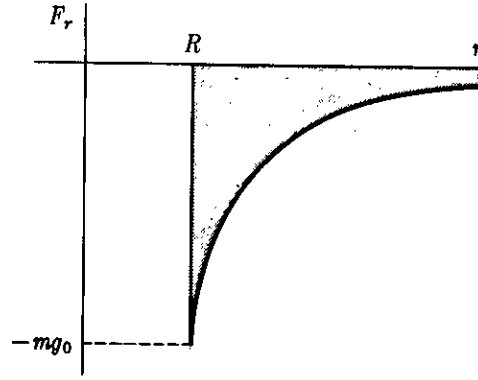
$$W = -6,24 \times 10^{11} \text{ ج .}$$

هذا هو الشغل السالب الذي تبذله الجاذبية . وحتى يُقْلَتِ الصَّاروخُ من نطاقِ جاذبية الأرض ، على دَفْعِ الصَّاروخِ أَنْ يُنْجِزَ على الأقل نفس هذا المقدار من الشغل الموجب . ■

الشغل اللازم للإفلات من الأرض

ونستطيع بالعودة إلى المعادلة ١٠,٢٤ أَنْ نَسْتَقَ علاقةَ عامَّةَ بين الشغل والطاقة الحركية في بُعد واحد . فإذا كانت الآن مركبة x للقوة الكلية ، فإنها ترتبط بالتسارع من خلال قانون نيوتن الثاني :

$$F_x = m \frac{dv_x}{dt}$$



شكل ١٠,٧ : يُسأَرُ صاروخٌ من سطح الأرض إلى ما لا نهاية . فَيَسَاوِي الشَّغْلُ الَّذِي تَبْدُلُهُ عَلَيْهِ الجاذبيَّةُ (وهو سالب) المساحةَ المُظَلَّلَةَ تحت منحنى قوَّة التَّربيعِ العَكْسِيِّ.

وبما أنَّ الحركةَ تَحْدُثُ في بُعْدٍ واحدٍ ، فإنَّه يُمْكِنُ التَّعْبِيرُ عن v_x إما كدالةٍ في t أو في x . فإذا اعتُبرتْ كدالةً في x ، فإنَّ قاعدةَ السُّلْسُلَةِ chain rule في التَّفَاضُلِ تُعْطِي للتَّسَارُعِ

$$\frac{d}{dt} [v_x(x)] = \frac{dv_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} . \quad (١٠,٢٦)$$

والعاملُ الثاني إلى اليمين هو مجرد v_x ؛ وبذلك يُمْكِنُ إعادةُ التَّعْبِيرِ عن قانونِ نيوتن الثاني على الصُّورة :

$$F_x = m v_x \frac{dv_x}{dx} . \quad (١٠,٢٧)$$

ويمكن كتابة الطرف الأيمن من هذه المعادلة كمشتقة كلية total derivative ، ممَّا يُؤدِّي إلى الشكل الطَّرِيف الآتي لقانونِ نيوتن الثاني (في بُعْدٍ واحدٍ) :

صورةٌ جديدةٌ لقانونِ نيوتن الثاني

$$F_x = \frac{d}{dx} (\frac{1}{2} m v_x^2) . \quad (١٠,٢٨)$$

وتمثِّلُ المقدَّارُ بَيْنَ القَوْسَيْنِ التَّعْبِيرَ المألوفَ للطَّاقَةِ الحركيَّةِ . وعلى ذلك تَتَّخِذُ المعادلةُ ١٠,٢٨ الصُّورة :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dK}{dx} dx .$$

ويُساوِي التَّكاملُ K نَفْسَهَا ؛ وعلى ذلك يكون

$$W = K_2 - K_1 = \Delta K . \quad (١٠,٢٩)$$

من هنا ، فإنَّ نتيجةَ البندِ الأخير - يُساوِي الشَّغْلُ التَّغْيِيرَ في الطَّاقَةِ الحركيَّةِ - تكونُ صحيحةً ليس لقوَّةٍ ثابتةٍ فحسب بل لأَيَّةِ قوَّةٍ في بُعْدٍ واحدٍ مُذَكَّرة : صلاحيةُ هذا التَّعْبِيرِ تَتَطَلَّبُ حسابَ الشَّغْلِ باستخدامِ القوَّةِ الكليَّةِ .

★ الحركة الاعباطية في ثلاثة أبعاد * Arbitrary Motion in Three Dimensions

تقودنا المعادلة ١٠,٢٢ شكلياً إلى التعبير التكاملي للشغل :

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (10,30)$$

فكرة التكامل الخطي

وَيُدْعَى هذا بالتكامل الخطي *line integral* لأنه يجب تعيين قيمته على امتداد المسار الفعلي ، أو خط في المكان (ليس ضرورياً أن يكون خطاً مستقيماً) ، يتبعه الجسم موضع الدراسة عند إزاحته من r_1 إلى r_2 . إن هذا ليس بالأمر العسير فيزيائياً . فلابية إزاحة إضافية Δs على امتداد المسار ، يُحسب الشغل الإضافي ، $\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}$ ، وتُجمع هذه الكميات القياسية لتحديد الشغل الكلي (شكل ١٠,٨) . أما رياضياً ، فإن التكامل الخطي مفهوم صعب نوعاً ما ؛ وبحته باستفاضة يخرج عن نطاق الكتاب الحالي . وتظهر بعض الأمثلة الخاصة على التكامل الخطي التي تسهل معالجتها في بند ١٠,١٠ ، ولاحقاً في البابين ١٥ و ١٦ . ونرغب هنا في أن يُبين أن العلاقة التي سبقت دراستها بين الشغل والطاقة الحركية هي نتيجة عامة للمعادلة ١٠,٣٠ .

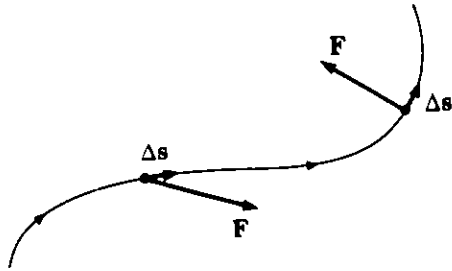
إعتبر جسماً يتبع مساراً ما في المكان (شكل ١٠,٨) . في فترة زمنية متناهية الصغر تكون إزاحته مجرد حاصل ضرب سرجهته في الفترة الزمنية :

$$ds = v dt. \quad (10,31)$$

وبذلك يكون تزايد الشغل

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt. \quad (10,32)$$

فإذا كانت $\mathbf{F}$ القوة الكلية المؤثرة على الجسم ، فإننا نستطيع استخدام قانون نيوتن الثاني ؛



شكل ١٠,٨ : الشغل بصورة عامة الشغل الإضافي المبذول لكل إزاحة متناهية الصغر Δs لجسم على امتداد مساره هو $\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}$. وجمع هذه المساهمات المتناهية الصغر يقود إلى فكرة التكامل الخطي .

• يمكن تأجيل دراسة هذا البند الفرعي لحين الوصول إلى بند ١٠,١٠ ؛ كما يمكن حذفه إذا حُذِفَ بند ١٠,١٠ .

فَسَتَبْدُلُ F بالمقدار $m dv/dt$ للحصول على

$$dW = m \frac{dv}{dt} \cdot v dt.$$

يَتَبَيَّنُ أَنَّ الكَمِيَّةَ المضروبةَ في dt هي المشتقة الزمنية للطاقة الحركية. لإثبات ذلك اكتب
 $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv \cdot v$. فَمَشَقَّتُهَا الزمنية هي

$$\frac{d}{dt} (\frac{1}{2}mv \cdot v) = \frac{1}{2}m \left(\frac{dv}{dt} \cdot v + v \cdot \frac{dv}{dt} \right).$$

وبما أَنَّ حاصل الضرب القياسي تبادلي commutative ، فَإِنَّ الحَدَّيْنِ داخل القوسَيْنِ متساويان ،
 ويكون

$$\frac{dK}{dt} = m \frac{dv}{dt} \cdot v. \quad (١٠,٣٣)$$

وعلى ذلك ، فَإِنَّ الشَّغْلَ الإضافيَّ هو

$$dW = \frac{dK}{dt} dt; \quad (١٠,٣٤)$$

أَيُّ لَقَدْ حَوَّلْنَا التَّعْبِيرَ $F \cdot ds$ بطريقة تجعلُ بالإمكان كتابة المعادلة ١٠,٣٠ على الصورة :

الشَّغْلُ كَمُكْمَلٍ على الزمن

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dK}{dt} dt,$$

تماماً كما في حالة الحركة في بُعدٍ واحد . ويتبع من ذلك أَنَّ التَّغْيَرَ في الطاقة الحركية يُسَاوِي الشَّغْلَ
 المبذولَ ،

$$\Delta K = W; \quad (١٠,٣٥)$$

الشَّرْطَانِ اللَّذَانِ يَكُونُ بِمُوجِبِهَا
 $\Delta K = W$ صحيحاً

وهي نتيجة نرى الآن بآنها صحيحة بصورة عامة لأية قوة وللحركة في ثلاثة أبعاد ، بشرط توافر
 الشرطين الآتيين : (١) يُحَسَبُ الشَّغْلُ باستخدام القوة الكلية . (٢) يتكوَّن النظامُ من جُسَيْمٍ ،
 أو من جسم جاسي في حركة انتقالية بدون دوران . ويمكنُ أَنْ يَكُونَ المظهرُ البسيطُ للمعادلة
 ١٠,٣٥ خادعاً في بعض الأمثلة العملية ؛ إذ ليس من الضروري أَنْ يَكُونَ حسابُ W بسيطاً .

■ مثال ٢ : يَتَحَرَّكُ جُسَيْمٌ في دائرة تحت تأثير قوة تؤثر باتجاه مركز الدائرة . فما مقدار التَّغْيَرِ في
 سرعتها خلال دَوْرَةٍ واحدة؟

إثبات أَنَّ $v = 0$ ثابتاً للحركة الدائرية
 تحت تأثير قوة مركزية

بما أَنَّ القوةَ عموديةً على الإزاحة دائماً ، فَإِنَّ $F \cdot ds = 0$ ، ويكون الشَّغْلُ صفراً لأيَّة
 إزاحة . لذا ، فَإِنَّ $\Delta K = 0$ ؛ أَيُّ أَنَّ الطاقةَ الحركيةَ لا تَتَغَيَّرُ ؛ وبالتالي تظلُّ السرعةُ ثابتةً .
 فالحركة الدائرية تحت تأثير قوة مركزية لا يمكنُ أَنْ تكونَ سوى حركةٍ دائرية منتظمة .

■ مثال ٣ : الطاقة الحركية لقمر صناعي عند الأوج على بُعد ١٠ ٠٠٠ ميل عن مركز الأرض هي K_a . فما مقدار الشغل الذي تبذله قوة جاذبية الأرض عليه عندما ينتقل إلى الحضيض على بُعد ٥٠٠٠ ميل عن مركز الأرض ؟

نستطيع العمل في هذه الحالة بصورة « عكسية » من الطاقة الحركية إلى الشغل . فيفيدنا قانون المساحات (أنظر المعادلة ٩,٨٤) بأن سرعة هذا القمر الصناعي عند الحضيض هي ضعف سرعته عند الأوج . وعلى ذلك ، تكون طاقته الحركية عند الحضيض $K_p = 4K_a$. فيجب أن يكون الشغل الذي تبذله قوة الجاذبية $\Delta K = K_p - K_a$ ؛ أو

$$W = 3K_a$$

وهي كمية موجبة . كما يكون شغل الجاذبية ، عندما يعود القمر إلى الأوج ، $-3K_a$ ، جاعلاً الشغل الكلي خلال دورة كاملة يساوي صفراً . ■

★ ١٠,٤ الشغل والطاقة الحركية لنظام من الجسيمات

Work and Kinetic Energy for a System of Particles

عَلِمْنَا في البابين الثامن والتاسع أنه لِمِن المفيد ، وَلِمِن السهولة المُستغربة في بعض الوجوه ، أن نتقصى خواص نظام اعتباطي لأي عددٍ من الجسيمات المتحركة تحت تأثير قوى اعتباطية (أنظر شكل ٨,٢ أو ٨,٧) . لِنَتَّبِعْ هذا المسلك الآن مع مفهومَي الشغل والطاقة الحركية .

اعتبر تزايداً زمنياً dt يتأثر خلاله الجسيم i في النظام بقوة كلية F_i (مجموع القوى الداخلية والخارجية المؤثرة عليه على حد سواء) ، كما يُعاني إزاحة ds_i . فيكون الشغل المبذول على هذا الجسيم :

$$dW_i = F_i \cdot ds_i. \quad (١٠,٣٦)$$

وبما أن $ds_i = v_i dt$ ؛ كذلك حيث أنه ، من قانون نيوتن الثاني ، $F_i = m_i dv_i/dt$ ؛ فإنه يمكن كتابة هذا التزايد من الشغل على الصورة :

$$dW_i = m_i \frac{dv_i}{dt} \cdot v_i dt.$$

ويمكن تطبيق الاشتقاق الذي تلا المعادلة ١٠,٣٢ ثانياً ، للحصول على مكافئ المعادلة ١٠,٣٤ :

$$dW_i = \frac{dK_i}{dt} dt. \quad (١٠,٣٧)$$

ويكون الشغل الكلي المبذول على النظام خلال هذه الفترة الزمنية (وهي كمية ما زالت متناهية الصغر) هو المجموع

معالجة العديد من الجسيمات توازي
معالجة جسيم مفرد

$$dW_T = \sum_i dW_i. \quad (١٠,٣٨)$$

وَيَجْمَعُ كَلا طَرَفَيِ الْمَعَادِلَةِ ١٠,٣٧ ، بِحِثِّ يَشْمَلَا جَمِيعَ جُسَيْمَاتِ النِّظَامِ ($i = ١$ إِلَى N) ، نَجِدُ أَنَّ

$$dW_T = \frac{dK_T}{dt} dt, \quad (١٠,٣٩)$$

حَيْثُ K_T هِيَ الطَّاقَةُ الْحَرَكِيَّةُ الْكُلِّيَّةُ ،

$$K_T = \sum_i K_i. \quad (١٠,٤٠)$$

وَأَخِيرًا (بِاتِّبَاعِ مَنْطِقٍ مُوَازِلًا وَرَدَّ أَدْنَى الْمَعَادِلَةِ ١٠,٣٤) ، يَكُونُ الشَّغْلُ الْكُلِّي الْمَبْدُولُ فِي زَمَنِ مُتَوَاهِ ، t_1 ، إِلَى t_2 ،

$$W_T = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dK_T}{dt} dt, \quad (١٠,٤١)$$

الَّذِي يَقُودُ إِلَى

$$\Delta K_T = W_T; \quad (١٠,٤٢)$$

أَيُّ أَنَّ التَّغْيِيرَ فِي الطَّاقَةِ الْحَرَكِيَّةِ لِلنِّظَامِ يُسَاوِي الشَّغْلَ الْكُلِّي الْمَبْدُولَ عَلَى جَمِيعِ أَجْزَاءِ النِّظَامِ خِلَالِ أَيَّةِ فِتْرَةٍ زَمَنِيَّةٍ .

وَيَبْدُو هَذِهِ النَّتِيجَةُ (الْمَعَادِلَةُ ١٠,٤٢) فِي غَايَةِ الْبَسَاطَةِ وَالْعُمُومِيَّةِ . إِلَّا أَنَّهَا عَلَى هَذِهِ الصُّورَةِ أَقْلُ نَفْعًا مِمَّا قَدْ يَبْدُو لِأَوَّلِ وَهَلَةِ . وَأَحَدُ أَسْبَابِ ذَلِكَ هُوَ أَنَّ الطَّاقَةَ الْحَرَكِيَّةَ الْكُلِّيَّةَ لَيْسَ لَهَا تِلْكَ الْخَوَاصُّ الْبَسِيطَةُ الَّتِي يَتَّسِمُ بِهَا الزَّخْمُ الْكُلِّي . فَلَا وَجُودَ ، مِثْلًا ، لِإِطَارِ إِسْنَادٍ تَسَاوِي فِيهِ الطَّاقَةُ الْحَرَكِيَّةُ لِلنِّظَامِ عَامً صَفْرًا . وَهَنَكَ سَبَبٌ آخَرُ هُوَ أَنَّ الْقُوَى الدَّاخِلِيَّةَ تَسْتَطِيعُ بِذَلِكَ شَغْلَ عَلَى النِّظَامِ . فَيُمْكِنُ بِذَلِكَ شَغْلُ كَمَا قَدْ تَغْيِيرُ الطَّاقَةِ الْحَرَكِيَّةِ الْكُلِّيَّةِ ، حَتَّى لَوْ كَانَ النِّظَامُ مُعْزُولًا . وَيُمْكِنُ التَّدْلِيلُ عَلَى هَذِهِ الْحَقِيقَةِ بِاسْتِخْدَامِ نِظَامِ ثَنَائِي الْجُسَيْمِ لِتَكُنِ الْقَوَاتَانِ عَلَى الْجُسَيْمَيْنِ F_1 وَ $-F_1$. فَيَكُونُ الشَّغْلُ الْمَبْدُولُ عَلَى النِّظَامِ فِي الزَّمَنِ dt

$$dW_T = F_1 \cdot ds_1 - F_1 \cdot ds_2.$$

وَمَا أَنَّهُ لَيْسَ ضَرُورِيًّا أَنْ تَتَسَاوَى الْإِزَاحَتَانِ ، فَلَا دَاعِي لَأَنْ يُسَاوِيَ الشَّغْلُ صَفْرًا . (فَكَّرْ ، عَلَى سَبِيلِ الْمَثَالِ ، بِزُجُجٍ مِنْ الْجُسَيْمَاتِ الْمَشْحُونَةِ الَّتِي تَتَجَاذِبُ مَعًا . فَقَدْ يَبْدُو كُلُّ مِنْهَا شَغْلًا مُوجِبًا عَلَى الْآخَرِ ، بِحِثِّ تَنَمُّو طَاقَتِهَاا الْحَرَكِيَّةِ مَعَ الزَّمَنِ .) وَنَحْتَاجُ إِلَى مَفْهُومٍ جَدِيدٍ ، هُوَ طَاقَةُ الْوَضْعِ (بَنْد ١٠,٧) ، كَيْ نَضَعُ الْمَعَادِلَةَ ١٠,٤٢ عَلَى صُورَةٍ أَكْثَرَ فَائِدَةً .

□ الحركة الانتقالية لجسم جاسي Translational Motion of a Rigid Body

يُمكنُ اعتبارُ الجسمِ الجاسي كمجموعةٍ من جسيماتٍ عديدةٍ ذاتِ علاقةٍ مكانيةٍ ثابتةٍ .
فإذا قامَ الجسمُ بحركةٍ انتقاليةٍ ، فإنَّ كلَّ جسيمٍ فيه يعاني نفسَ الإزاحة :

$$ds_1 = ds_2 = ds_3 = \dots \quad (١٠,٤٣)$$

وعلى ذلك يُمكنُ وضعُ كلِّ إزاحةٍ ds_i مساويةً لإزاحةٍ مركز الكتلة ds_c . ويكونُ الشغلُ الكليُّ
المبدولُ على الجسمِ

$$\begin{aligned} dW_T &= \sum_i F_i \cdot ds_i \\ &= \sum_i F_i \cdot ds_c \\ &= F_T \cdot ds_c, \end{aligned}$$

حيث F_T هي القوة الكلية . وبما أنَّ القوى الداخلية تتلاشى ، فإنَّ $F_T = F_{ext}$ ، ويكونُ تزايدُ
الشغلِ

$$dW_T = F_{ext} \cdot ds_c. \quad (١٠,٤٤)$$

وتكافئُ هذه تماماً المعادلةَ ١٠,٢٢ ، التي تُحددُ الشغلَ المبدولَ على جُسيمٍ مفردٍ .

وبما أنَّ كلَّ جزءٍ من الجسمِ الجاسي له نفسُ الإزاحة ، فكلُّ جزءٍ له نفسُ السَّرجةِ ،
 v_c ، وتكونُ الطاقةُ الحركيةُ الكليةُ

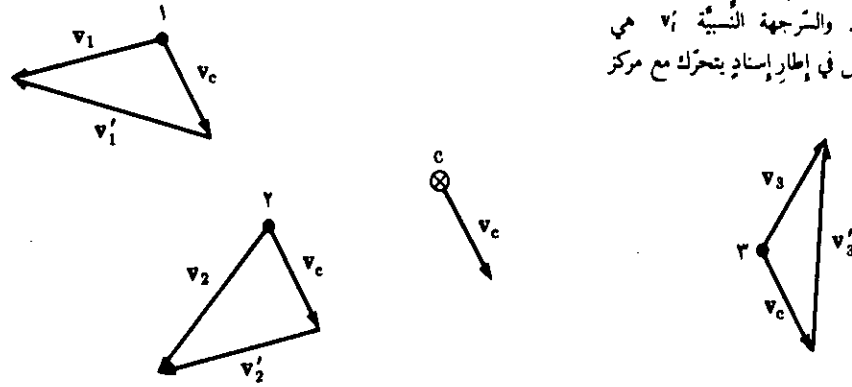
$$\begin{aligned} K_T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_c^2, \\ K_T &= \frac{1}{2} M v_c^2. \end{aligned} \quad (١٠,٤٥)$$

وهذه أيضاً لها نفسُ الصُّورةِ كالطاقة الحركية لجُسيمٍ مفردٍ . والتَّشبيهُتانِ المُعبرَ عنهما بالمعادلتينِ
١٠,٤٤ و ١٠,٤٥ تبرران الأمثلةَ الواردةَ في البنود السابقة ، والتي عُولجَ فيها جسمٌ جاسيٌ يتحركُ
بدونِ دَوْرانٍ كجُسيمٍ مفردٍ .

الحركة الانتقالية لجسم جاسي
تكافئُ حركةَ جُسيمٍ مفردٍ

والواقع أنَّ قطعةً صلبةً من المادَّةِ تختلفُ بطريقةٍ هامَّةٍ عن جسمٍ جاسيٍّ مثاليٍّ : فعلى
المستوى الذريِّ ، تهتزُّ مكوناتُها الذريَّةُ ويكونُ لها قدرٌ كبيرٌ من الطاقة الحركية ، حتى عندما تكونُ
 $v_c = 0$ ، ممَّا يجعلُ المعادلةَ ١٠,٤٥ تُمثِّلُ مجردَ جزءٍ من الطاقة الحركية الكلية - في التَّطبيقِ
العمليِّ ، جزءٌ يسيرٌ فقط . على كلِّ حال ، إذا أُهْمِلَ تشويهُ وانضغاطُ الجسمِ ، فإنَّ الشغلَ
الذي تَبْدُلُهُ القوى الخارجيّةُ يُؤوَلُ بصورةٍ رئيسيّةٍ إلى ما يمكنُ تسميتهُ « بالطاقة الحركية

شكل ١٠,٩ : يمكن التعبير عن سرجهة أي جسيم في نظام كمجموع سرجهة مركز الكتلة وسرجهة نسبية (المعادلة ١٠,٤٧). والسرجهة النسبية v_i' هي السرجهة التي قد تُقاس في إطار إسناد يتحرك مع مركز الكتلة.



الانتقالية $\frac{1}{2} M v_c^2$ ، وليس إلى الطاقة الاهتزازية الذرية atomic vibrational energy . عندئذ ، يمكن إهمال الطاقة الداخلية ، فَيَعَالَجُ الجسم الصلبُ بنجاح كجسم جاسي مثالي . وبالنسبة للأجسام الصلبة الحقيقية ، تُعَيَّرُ المعادلتان ١٠,٤٤ و ١٠,٤٥ تقريبين يمكن تبريرهما بالتجربة .*

□ الطاقة الحركية بوجه عام Kinetic Energy in General

الطاقة الحركية لنظام هي مجموع الطاقات الحركية لمكوناته الجزئية . وبما أن الطاقة الحركية كمية قياسية ، وليست كمية متجهة ، وحيث أنه لم يكن غير الممكن أبداً أن تكون سالبة ، فإن أي طاقتين حركيتين تأتلفان دائماً لتعطي طاقة حركية أكبر . ويكون لنظام طاقة حركية صفرية فقط إذا كانت جميع مكوناته الجزئية ساكنة .

غير أن الطاقة الحركية لنظام ما لتتسم بسمة تبسيطية واحدة ؛ إذ يمكن فصلها إلى جزأين : طاقة حركية داخلية وطاقة حركية جرمية . ونستطيع ، كما هو مبين في شكل ٩,٨ ، أن نكتب موضع كل جسيم كموضع مركز الكتلة مُضافاً إليه موضع الجسيم بالنسبة إلى مركز الكتلة :

$$r_i = r_c + r_i'. \quad (١٠,٤٦)$$

وتُعطينا المشتقة الزمنية لهذه المعادلة علاقةً مشابهةً للسرجهة (أنظر شكل ١٠,٩) :

* إن تصحيحات هذا التقريب ، التي تتضمن أثر الشغل الخارجي على الطاقة الداخلية على المستوى الذري ، نعملنا بعيداً عن موضوع الميكانيكا إلى موضوع الديناميكا الحرارية .

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}'_i. \quad (١٠,٤٧)$$

أما الطاقة الحركية الكلية للنظام فهي

$$\begin{aligned} K_T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}'_i). \end{aligned} \quad (١٠,٤٨)$$

ويمكن كتابة حاصل الضرب القياسي الذي يظهر هنا كمجموع ثلاثة حدود terms بحيث تصبح الطاقة الحركية

$$K_T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_c^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2.$$

في أول هذه الحدود الثلاثة ، الكتل فقط هي التي تُجمع . وهذا الحد هو نفسه الذي وجدناه سابقاً لجسم جاسي :

$$K_I = \frac{1}{2} M v_c^2. \quad (١٠,٤٩)$$

ونسبى هذه بالطاقة الحركية الانتقالية *translational kinetic energy* . ويتبين أن الحد الثاني يكون صفراً ؛ إذ يمكن كتابته على الصورة :

$$K_{II} = \mathbf{v}_c \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}'_i.$$

فبمقدورنا التعرف على هذا المجموع كسرجهة مركز الكتلة نسبةً إلى مركز الكتلة ، التي تساوي بالضرورة صفراً :

$$K_{II} = 0. \quad (١٠,٥٠)$$

أما الحد الثالث ،

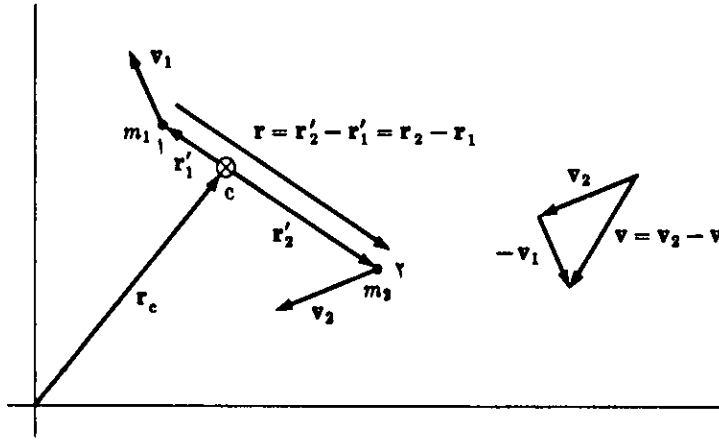
$$K_{III} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2, \quad (١٠,٥١)$$

فيساوي الطاقة الحركية نسبةً إلى مركز الكتلة ، التي هي مزيج من طاقة حركية دورانية *rotational kinetic energy* (بند ١٠,٩) وطاقة حركية داخلية *internal kinetic energy* (كاهترزاز الجزيئات) . وباختصار ، فإن

$$K_T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2. \quad (١٠,٥٢)$$

وللجسم الجاسي المثالي الخاضع لحركة انتقالية ، يكون الحد الثاني صفراً (قارن المعادلة ١٠,٤٥) .

يمكن قسمة الطاقة الحركية إلى جزء انتقالي وجزء نسبةً إلى مركز الكتلة



شكل ١٠,١٠ : نظامٌ ثنائيُّ الجُسيم ... منجّه
الموضع النسبيّ r يساوي $r_2 - r_1$ كما تكون
السّرجة النسبيّة $v = v_2 - v_1$ أما الطّاقة الحركيّة
للنظام فتحدّد بالمعادلة ١٠,٥٨ .

ويزوّدنا نظامٌ ثنائيُّ الجُسيم بحالةٍ خاصّةٍ طريفة (شكل ١٠,١٠) . فنعرّف منجّه الموضع
النسبيّ ومنجّه السّرجة النسبيّة بالعلاقين :

$$r = r_2 - r_1, \quad (١٠,٥٣)$$

$$v = v_2 - v_1. \quad (١٠,٥٤)$$

وبتغيير طفيفٍ في الرّموز ، تزوّدنا المعادلتان ٨,٧٧ و ٨,٧٨ بالسّرجتين نسبةً إلى مركز الكتلة ،

$$v'_1 = - \frac{m_2}{M} v, \quad (١٠,٥٥)$$

$$v'_2 = + \frac{m_1}{M} v. \quad (١٠,٥٦)$$

وتعويض هذين التعبيرين في المعادلة

$$K_{III} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

يقودُ إلى

$$K_{III} = \frac{1}{2} \mu v^2,$$

حيث μ هي الكتلة المختزلة (المعادلة ٨,٧٤) :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}. \quad (١٠,٥٧)$$

وعلى ذلك ، فإنّ الطّاقة الحركيّة الكليّة لنظامٍ ثنائيِّ الجُسيم هي

الطّاقة الحركيّة لنظامٍ ثنائيِّ الجُسيم

$$K_T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \mu v^2; \quad (١٠,٥٨)$$

أيّ أنّ الطّاقة الحركيّة الدّاخلية تكون مثلَ طاقةٍ جُسيمٍ مفردٍ كتلته μ يتحرّك بالسّرجة النسبيّة

١٠,٥ الشغل كوسيلة لانتقال الطاقة Work as a Mode of Energy Transfer

تعريف الطاقة

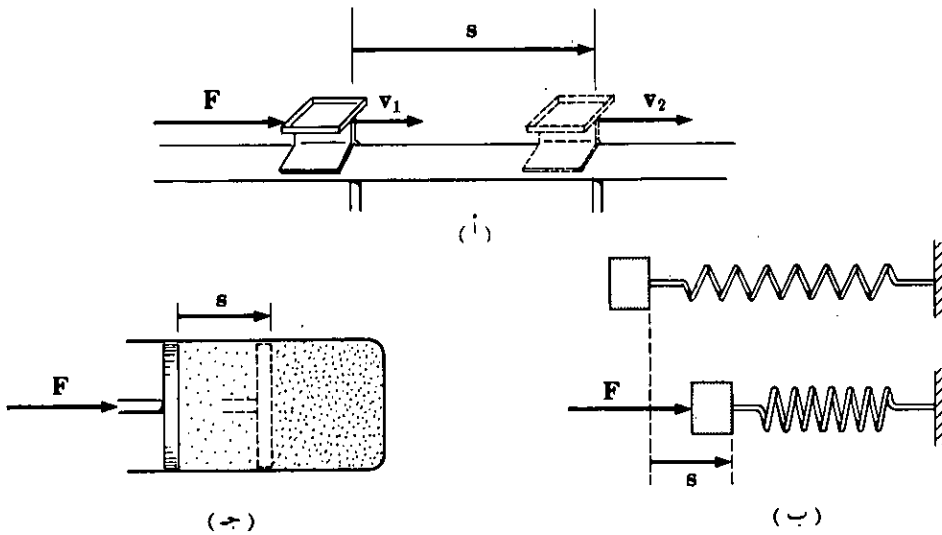
إنَّ إحدى طرق تعريف الطاقة بصورة عامّة هي أنَّها ذلك الشّيء القادر على إنجاز شغل . وليس كلُّ أنواع الطاقة تتحوّل مباشرة أو بسهولة إلى شغل ؛ لكنّها جميعاً تستطيع ، من خلال سلسلة مناسبة من التّحوّلات ، أن تظهر على صورة شغل . فإذا بُدِّلَ شغلٌ على جسم (أو نظام) ، اكتسب هذا قدراً من الطاقة يُساوي الشغل المبذول (ربّما ، لكن ليس بالضرورة ، على صورة طاقة حركيّة) . ويمكن التعبير بالرموز عن هذه العلاقة بين التّغير في الطاقة والشغل بواسطة معادلة تُعمّم المعادلة ١٠,٣٥ :

$$\Delta E = W. \quad (١٠,٥٩)$$

الشغل يُعبّر الطاقة

والعلاقة بين الطاقة والشغل ، على هذه الصّورة ، تخلو من القيود التي تلت المعادلة ١٠,٣٥ . فالشغل المقرّن بأيّة قوّة مفردة ، مثلاً ، يُضيف طاقةً إلى نظام (إذا كان W موجباً) أو يطرح طاقةً (إذا كان W سالباً) ، حتّى لو كانت هناك قوّة أخرى تؤثر في نفس الوقت .

ويبيّن شكل ١٠,١١ ثلاثة أنواع من الطاقة يمكن إضافتها إلى نظام يبدّل شغلٍ عليه . فالقوّة الخارجيّة المؤثرة على جسم جاسي متحرّك بدون احتكاك تُضيف طاقةً حركيّةً [شكل ١٠,١١ (أ)] ؛ والقوّة التي تضغط زنبركاً تُضيف طاقةً وضعٍ (كامنة) [شكل



شكل ١٠,١١ : تغيّر الشغل والطاقة . (أ) يُضيف الشغل طاقةً حركيّةً إلى عربةٍ متزلّقة . (ب) يُضيف الشغل طاقةً وضعٍ إلى زنبرك . (ج) يُضيف الشغل طاقةً داخليةً إلى غاز .

• وثمة عبارة أعمّ حتّى من هذه ، ألا وهي القانون الأوّل للديناميكا الحرارية ، الذي يُعبّر عنه بالمعادلة $\Delta E = W + Q$: التّعبير في طاقة نظام ما يُساوي الشغل المبذول عليه زائد الحرارة (Q) المُضافة إليه . وسوف لا نعتبر الحرارة في هذا الباب .

١٠,١١ (ب) ؛ كما أَنَّ القوَّة التي تُحرِّكُ مَكْبَساً piston لضغطِ غاز تضيفُ ما يُدعى بالطَّاقة الدَّاخِلِيَّة - وهي في الواقع مزيجٌ من الطَّاقة الحركيَّة وطاقة الوضع على المستوى الجزيئيّ [شكل ١٠,١١ (ج)]. وتستطيعُ الطَّاقة ، في هذه الأمثلة الثلاثة جميعها ، أَنْ تظهرَ ثانيةً على صورة شغل .

إنَّ حقيقةَ حديثنا عن إضافةِ الطَّاقةِ إلى نظام أو طرحها منه لا تعني أَنَّ الطَّاقة تُعتبرُ بأيِّ معنى كِمَادَةً اعتياديَّة . فيمكنُ تسميتها في أحسن الأحوال بأنَّها خاصيَّةٌ أو صفةٌ مُميِّزة للنَّظام . ومع ذلك ، فلتكون صورة ذهنيَّة عن الفرق بين الطَّاقة والشغل ، يكون مفيداً أَنْ نفكرَ بالطَّاقة على أنَّها مادَّة substance وبالشغل على أَنَّهُ فِعْلٌ action . فالنَّظام يملكُ طاقةً ؛ كما يستطيع إنجاز شغل . كذلك يكون للنَّظام عند أيَّة لحظة محتوًى content طاقيٍّ معيَّن . ويمكن تحويلُ جزءٍ من هذه الطَّاقة أو كلِّها إلى فاعليَّة activity الشغل . فبمعنى من المعاني ، يكون الشغلُ مجردَ صورةٍ أُخرى للطَّاقة ؛ إذ يمكنُ تحويلُهُ بدون أيَّة خسارة من وإلى طاقة . كذلك ، بمعنى آخر وأعمق ، فإنَّ الشغلَ هو فقط المقياسُ الفعَّالُ للطَّاقة وليس بذاته صورةً للطَّاقة . فمن الأفضل اعتباره كطريقةٍ لتحويلِ الطَّاقة من صورةٍ إلى أخرى .

طُرُقُ النَّظَرِ إِلَى الطَّاقة

ونستطيع توضيحَ دَوْرِ الشغلِ كَوَسْطٍ للتَّبادل بأنَّ نَعْتَبِرَ ثانيةً العربةَ المتزلقةَ المبيَّنة في شكل ١٠,٤ . في البداية ، يُبدَلُ شغلٌ عليها ، فتزدادُ طاقتها الحركيَّة تبعاً لذلك . ولا بدَّ من أَنَّ يكون قد تمَّ تزويدُ هذا الشغلِ بواسطة شيءٍ آخر . وأياً كان مصدرُ هذا الشغل ، فيمكن أَنْ نفترض حدوثَ نقصٍ في الطَّاقة في مكانٍ ما من أجلِ إتاحة هذا الشغل . ويتوجَّبُ على هذا النقص الآخر في الطَّاقة المجهولِ الهويَّة أَنْ يُساوِيَ مقدارَهُ الشغلِ المبذول ، الذي يُساوِي بدوره الطَّاقة الحركيَّة التي اكتسبتها العربة . وبتخطي فكرة الشغلِ المتوسطة ، فإنَّنا نستطيع القولَ ببساطة إنَّ العربة تكتسبُ طاقةً حركيَّةً لأنَّ الطَّاقة تنقلُ من خارجِ النَّظام إلى داخله (حيث « النَّظام » هنا هو العربة المتزلقة بمفردها) . ويكونُ الشغلُ ناقلاً للطَّاقة ، ووسطاً للتَّبادل ، عند النَّظر إليه بهذه الطَّريقة . كذلك ، في الجزء C من الحركة ، يجبُ تعويضُ النقص في الطَّاقة الحركيَّة بكسبٍ مساوٍ للطَّاقة في المحيط المتفاعِل ، ويكونُ الشغلُ مقياساً للطَّاقة المنقولة . وتوحي وجهةُ النَّظر هذه بصياغةٍ قويَّة لقانون حفظِ الطَّاقة لا تقتصر على الأنظمة المعزولة ؛ إذ نفترض أنَّ أيَّ تغيُّرٍ للطَّاقة في نظام يُساوِي تماماً تغيُّراً مقابلاً للطَّاقة خارجِ النَّظام . وببساطة أكبر نقولُ : إنَّ فقدانَ الطَّاقة في أيِّ مكانٍ يُعَوِّضُهُ دائماً كسبُ مساوٍ للطَّاقة في مكانٍ آخر . وهذا القانون الذي تدعُّمُهُ التجربة بوفرة قد اقتضى تعميمَ مفهومِ الطَّاقة ليشملَ ، بالإضافة إلى الميكانيكا ، كلَّ نظريَّة طُوِّرت لاحقاً وكلَّ فرعٍ من فروعِ العلم .

قانون حفظ الطاقة

□ القُدْرَةُ Power

عندما تنقلُ الطَّاقة إلى أو من نظامٍ ، فإنَّ المعدَّل الذي تُنقلُ به يُدعى بالقُدْرَةُ ، التي يرمزُ

إليها عادةً بالحرف P :

$$P = \frac{dE}{dt} \quad (١٠,٦٠)$$

تعريف القدرة

والوَحدةُ الدَّوليةُ للقدرة هي الواط (و W) :

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/sec} = 1 \text{ kg m}^2/\text{sec}^3. \quad (١٠,٦١)$$

$$١ \text{ و} = ١ \text{ ج/ث} = ١ \text{ كـرغ م}^٢/\text{ث}^٣.$$

وهذه الوَحدةُ مألُوفةٌ من تقديراتِ المصابيح والأجهزة الكهربائية . فصباحٌ ضوئيُّ قدرتهُ ١٠٠ واطٌ هو ذلك المصباحُ الذي [عند وصله بالفَلْطِيَّة (الجهد الكهربائي) المناسبة] يُحوِّلُ الطاقةَ الكهربائيةَ إلى طاقةٍ حراريَّةٍ وضوئيَّةٍ بمعدل ١٠٠ ج/ث .

وعندما تؤثر قوَّةٌ على جسيمٍ ، تكون القدرةُ المبذولةُ على الجسيمِ

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{ds}{dt},$$

أو

$$P = F \cdot v. \quad (١٠,٦٢)$$

القدرةُ المبذولةُ على جسيمٍ متحركٍ

ويُتبع هذا مباشرةً من التعريفِ الأساسيِّ للشُّغلِ المحدَّد بالمعادلة ١٠,٢٢ .

■ مثال ١ : يؤثر حصانٌ معيَّنٌ بمركبةٍ قوَّةً أفقيَّةٍ مقدارها ٢٠٠ ن . فما السُّرعةُ التي يجبُ أن يتحرَّكَ بها الحصانُ لِيُزوِّدنا بقدرةٍ حصانٍ واحدٍ horsepower (٧٤٦ و) ؟

بما أنَّ F و v متوازيان ، يمكن كتابةُ المعادلةِ ١٠,٦٢ ، لهذا المثال ، على الصُّورة :

$$٧٤٦ \text{ و} = ٢٠٠ \times v.$$

وبذلك تكون السُّرعةُ المطلوبة

$$v = ٣,٧٣ \text{ م/ث} ;$$

أو حوالي ٠,٨٣ ميل / س .

■ مثال ٢ : قاطرةٌ كهربائيَّةٌ تستطيعُ استخدامَ مُحركاتها الكهربائية للكمَح braking . فتعملُ المُحرَّكاتُ عند ذلك كمولِّداتٍ generators للتغذية المرتدَّة feedback للقدرة الكهربائية إلى الخطِّ الكهربائيِّ . فإذا بدأت قاطرةٌ ، كتلتها ١٥٠ ٠٠٠ كـرغ وتتحرَّك بسرعة ٦٠ ميلاً/س ، بالتباطؤ

بمعدل ٥,٠ م/ث^٢ ، فما القدرة القصوى التي تستطيع تزويدها للخط الكهربائي ؟
إنَّ حاصل ضرب كتلتها في تسارعها يُحدِّدُ القوة التي يجب أن تكون مؤثرة عليها :

$$F = 150,000 \text{ kg} \times 0.5 \text{ m/sec}^2$$

$$= 75,000 \text{ N.}$$

وبما أنَّ F مضادة للسَّرجة v ، فإنَّ المعادلة ١٠,٦٢ تُعطينا

$$P = -75,000 \text{ N} \times 60 \text{ mile/hr} \times 0.447 \frac{\text{m/sec}}{\text{mile/hr}}$$

$$= -2.01 \times 10^6 \text{ W.}$$

وتعني الإشارة السالبة أنَّ شغلاً سالباً يُبذلُ على القاطرة ؛ وهذه طريقة أخرى للقول إنَّ القاطرة تُبذلُ شغلاً على محيطها . فإذا عاد كلُّ هذا الشغل إلى الخط الكهربائي ، فسيكون ذلك بمعدل حوالي ٢ ميغاواط (مغ و MW) ، أو حوالي ٢٧٠٠ قدرة حصان . ■

١٠,٦ حفظ الشغل Conservation of Work

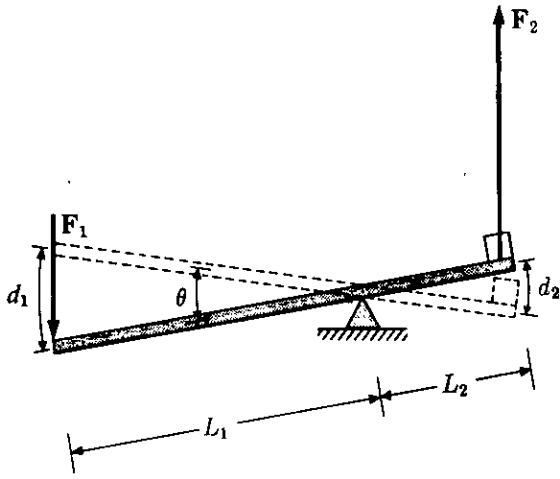
تعملُ بعضُ الأجهزة الميكانيكية كمُحوِّلات transformers للشغل بدون أن تكون خازنات وسيطة intermediary storers للطاقة ؛ إذ يُبذلُ شغلٌ على الجهاز فيبذلُ هذا شغلاً في نفس اللحظة . وإذا كانت الطاقة الحرارية الناتجة عن قوى الاحتكاك صغيرة لدرجة كافية ، كان الشغل الخارجُ (الناتج) output work ، بتقريب جيد ، مساوياً للشغل الداخلُ (التَّوَجُّ) input work . وإن دراسة الروافع levers والبكرات pulleys ، التي هي أدوات من هذا النوع ، قد زوَّدتنا بالمؤشرات الأولى عن فكرة حفظ الطاقة .

... تتكوَّن الرافعة البسيطة من قضيب جاسي مُثبت على محور عند نقطة ما ليس من الضروري أن تكون مركزه (شكل ١٠,١٢) . لتكن المسافتان من المحور إلى طرفي الرافعة L_1 و L_2 . فإذا أثرت قوة F_1 لتحريك الطرف الأيسر من الرافعة مسافة d_1 ، كان الشغل المبذول على الرافعة $F_1 d_1$. وإذا أُجري ترتيبٌ أثر بموجبه الطرف الآخر للرافعة بقوة F_2 على جسمٍ آخر أثناء حركة ذلك الطرف مسافة d_2 ، كان الشغل الخارجُ مساوياً $F_2 d_2$. (نفترض أنَّ القوى تؤثر باتجاه مواز للحركة .) وفي حالة انعدام تبدد dissipation الطاقة بالاحتكاك ، يتساوى الشغل الداخلُ مع الشغل الخارجُ :

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 . \quad (١٠,٦٣)$$

من ناحية أخرى ، تكون القوتان الداخلة والخارجة غير متساويتين . فبدلاً من ذلك ، تكون نسبتها معكوس نسبة مسافتي التحرك :

للرافعة يكون الشغل الداخل $\cong$ الشغل الخارج



شكل ١٠،١٢ : الرافعة البسيطة يُساوي الشغل
الداخل الشغل الخارج .

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1} \quad (١٠،٦٤)$$

وتتناسب مسافتنا التحرك، بدورهما، مع طولَي ذراع الرافعة . فإذا دارت الرافعة بزاوية θ (بالوحدات الدائرية radians)، تحرك طرفها الأيسر مسافة

$$d_1 = \theta L_1;$$

بينما يتحرك طرفها الأيمن مسافة

$$d_2 = \theta L_2.$$

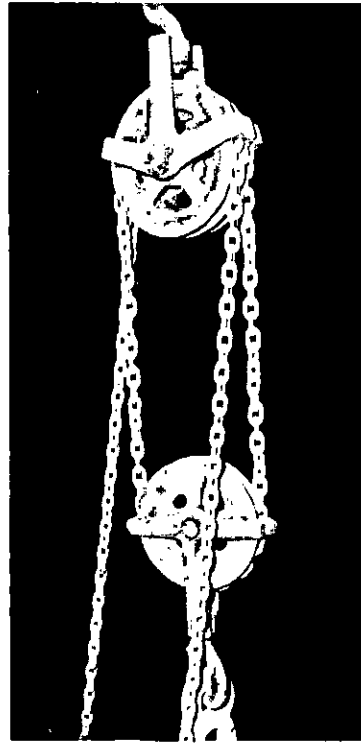
لذلك تكون النسبة d_2/d_1 مساوية للنسبة L_2/L_1 . والغرض العادي للرافعة هو الحصول على قوة خارجية أكبر من القوة الداخلة. وتُدعى نسبة القوة الخارجة إلى القوة الداخلة بالفائدة الآلية mechanical advantage (M.A.) للرافعة . وبالرموز،

$$M.A. = \frac{F_2}{F_1} = \frac{L_1}{L_2} \quad (١٠،٦٥)$$

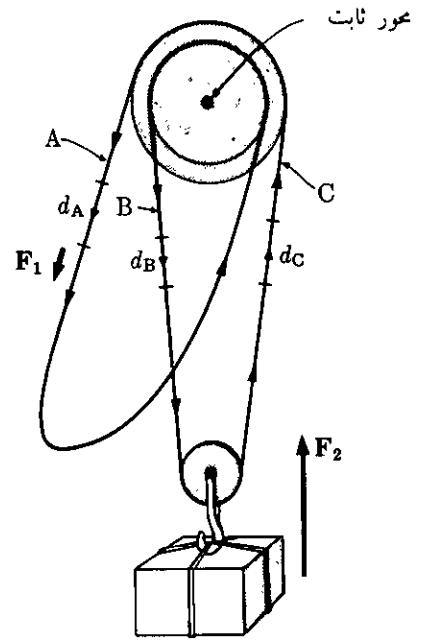
الفائدة الآلية للرافعة

ومن الواضح أنه، نظراً لحفظ الشغل، تؤثر القوة الأكبر خلال المسافة الأصغر. فللرافعة الميَّنة في شكل ١٠،١٢، حيث الطول L_1 ضعف الطول L_2 ، فائدة آلية مقدارها ٢. ورؤي أن أرخميدس Archimedes، الذي كان أول من اكتشف قانون الرافعة المُمثل بالمعادلة ١٠،٦٥ حوالي ٢٥٠ ق. م.، قد تأثر بالمقدار اللامحدود الممكن للفائدة الآلية حتى أنه أعلن قائلاً: « أعطوني نقطة ارتكاز fulcrum أستند إليها، وسأحرك لكم الأرض. » وإنه لم ين المعقول تماماً أن أرخميدس قد تقوّه بذلك فعلاً؛ إذ أن العبارة تُبسط اللثام عن خاصيتين مألوفتين للعالم الخلاق: حماسه للموضوع وقدرته على استقراء استنتاجه من دنيا المألوف الذي اكتشف فيه قانون إلى عالم جديد قد يكون فيه للقانون قوة جديدة أو يخضع فيه لاختبارات جديدة.

ويمكن تأسيس قانون أرخميدس للرافعة إما على فكرة توازن عزمي دوران أو



(ب)



(أ)

شكل ١٠، ١٣ : رافعة السلسلة تضاعف القوة . (أ) مبدأ عملها : بينا تؤثر القوة F_1 خلال مسافة d_A ، ترفع القوة الأكبر بكثير ، F_2 ، الحِمل لمسافة أصغر بكثير ، $\frac{1}{2}(d_C - d_B)$. (ب) رافعة السلسلة أثناء عملها .
(مصدر الصورة : ل . ل . بومونك وابنه : L. L. Baumunk & Son .)

فكرة تساوي الشغل الداخِل والخارج . ويتساوى هذان النهجان في البساطة بالنسبة للرافعة . إلا أنه لفهم معظم الأدوات الأخرى ، فإن فكرة حفظ الشغل هي بالتأكيد الأبسط والأفيد والأعم . إعتبر ، على سبيل المثال ، تطبيقها على عمل رافعة السلسلة chain hoist . في رافعة السلسلة ، يُثبت زوج من البكرات ، يختلف محيط الواحدة منهما عن الأخرى قليلاً ، على نفس عمود الإدارة الثابت . وتتصل أسفلها ، كما هو مبين في شكل ١٠، ١٣ ، بكرة متحركة تحمل الثقل المراد رفعه . وتؤثر القوة الداخلة F_1 على السلسلة الخارجة من البكرة العليا الكبرى ؛ بينا يتأثر الحِمل المراد رفعه بالقوة الخارجة F_2 بواسطة البكرة السفلى . وما يهمنا هو الفائدة الآتية ، التي هي نسبة القوتين F_2/F_1 في شكل ١٠، ١٣ ، نسم ثلاثة مقاطع من السلسلة بالأحرف A ، B ، و C . فعند سحب المقطع A إلى أسفل مسافة d_A ، يتحرك المقطع B مسافة d_B إلى أسفل ؛ بينا يتحرك المقطع C مسافة d_C إلى أعلى ، وتتحرك البكرة السفلى مسافة $\frac{1}{2}(d_C - d_B)$ إلى أعلى ؛ حيث ينقص طول المقطعين B و C ، الحاملين للبكرة السفلى ، ما يساوي $d_C - d_B$ وينقسم مناصفة بين الجانبين - مما يوضح وجود العامل $\frac{1}{2}$. ويمكن التعبير عن حفظ الشغل بالتساوية

$$F_1 d_A = \frac{1}{2} F_2 (d_C - d_B).$$

وهكذا تكون الفائدة الآلية

$$M.A. = \frac{F_2}{F_1} = \frac{2d_A}{(d_C - d_B)}.$$

إعتبر الآن الحركات التي تتم أثناء دورة كاملة لعمود الإدارة العلوي. فيتحرك المقطع C إلى أعلى والمقطع A إلى أسفل خلال نفس المسافة L_1 ، التي هي محيط البكرة الخارجية. وفي نفس الوقت، يتحرك الجزء B إلى أسفل مسافة L_2 ، التي تساوي محيط البكرة الداخلية. لذلك يمكن إعادة التعبير عن الفائدة الآلية بدلالة هذين المحيطين:

$$M.A. = \frac{2L_1}{(L_1 - L_2)}. \quad (١٠,٦٦)$$

الفائدة الآلية لرافعة السلسلة

فإذا كان الفرق بين المحيطين $L_1 - L_2$ ، أصغر بكثير من المحيط الخارجي L_1 ، كانت الفائدة الآلية كبيرة جداً. فعند زيارتك القادمة لكراج سيارات، راقب رافعة سلسلة ولاحظ الحركة الكبيرة لجزء السلسلة A اللازم للحصول على حركة صغيرة للبكرة السفلى وحملها.

ومن الأدوات الأخرى التي توضح مبدأ حفظ الشغل المبرمة (المشد اللولبي) vise التي كثيراً ما توجد فوق طاولات المشاغل workbenches البيتية. وترك تفسير عملها كتمرين للقارئ. والمبدأ هو نفسه لجميع أدوات مضاعفة القوة من هذا القبيل: فإن حاصل ضرب القوة الداخلة في مسافة تأثيرها تساوي القوة الخارجة في مسافة تأثيرها. وما حفظ الشغل هذا إلا حالة خاصة جداً لقانون حفظ الطاقة العام. وهو يتطلب، لسريان مفعوله، ألا تختزل الأداة أية طاقة وألا تحول أي شغل (أو، عملياً، سوى شغل ضئيل جداً) إلى طاقة تستحيل استعادتها، كالطاقة الحرارية؛ بحيث يتسنى ظهور الشغل الداخلي مباشرة كشغل خارج مساو.

١٠,٧ طاقة الوضع في بُعد واحد Potential Energy in One Dimension

عندما تستقل مضعداً كهربائياً، تتأثر بنوعين مختلفتين تماماً من القوى: أحدهما قوة الجاذبية، التي تعتمد قليلاً جداً على ارتفاعك فوق سطح الأرض، لكنها لا تعتمد على سرجة أو تسارع المصعد، أو على أية سِمَاتٍ أخرى للحركة؛ أما الآخر فهو القوة الناتجة عن تأثير أرضية المضعد، وتحدد هذه بتسارع المصعد، الذي قد يعتمد على عمر وحالة محرك المصعد، وعدد ركاب المضعد، وما إذا ضغط أحدكم على زر معين. ويمكن تسمية هاتين القوتين بالأساسية واللاأساسية؛ إلا أن الآتي يعتبر تمييزاً أفضل:

قوى نمط ١: تلك التي تعتمد على الموضع فقط - موضع نظام برميته أو مواضع أجزائه.

نمطان من القوى

قوى نمط ٢ : تلك التي تعتمد على متغيرات أخرى (بما فيها أحياناً نزوات إنسانٍ أو تقلبات آلة) .

فقوة الجاذبية والقوة الكهربائية بين جسيمين مشحونين هما قوتان من نمط ١ ؛ في حين أن معظم قوى الدفع والسحب الناشئة عن الناس والآلات هي قوى من نمط ٢ . ومرد التمييز بين هذين النوعين من القوى هو أن صورة من الطاقة - هي طاقة الوضع - تُلازم عادةً قوى من نمط ١ . وعلى ذلك تستحق هذه القوى أن تتميز وأن تُدرس على حدة .*

وكمثال آخر على التمييز بين هذين النمطين من القوى ، اعتبر كتلة مرتبطة بزنبرك ، كما هو مبين في شكل ١٠,١١ (ب) . فإذا دُفعت الكتلة إلى اليمين باليد ، فإنها تتأثر بقوة من نمط ٢ ؛ كما تتأثر في نفس الوقت بقوة مضادة من الزنبرك المضغوط . وهذه قوة من نمط ١ لأنها تعتمد فقط على إزاحة الكتلة بعيداً عن مركز أترانها .

للحركة في بُعد واحد ، تُلازم طاقة الوضع قوى من نمط ١

أما بالنسبة للحركة المحصورة في بُعد واحد ، فيمكن دائماً لطاقة الوضع أن تُلازم قوة من نمط ١ تعتمد على الموضع . (ستجري مناقشة الحالة الأكثر تعقيداً بعض الشيء في ثلاثة أبعاد في بند ١٠,١٠) . وفي هذا البند سنعرّف طاقة الوضع الأحادية البعد بصورة عامة ، ثم نوضح كيفية انطباق الفكرة على الجاذبية قرب الأرض وعلى المُدبذب التوافقي .

إعتبر جُسيماً يتحرك على امتداد محور x ؛ حيث يتأثر بقوة $F_x^{(1)}(x)$ ، من نمط ١ ، تعتمد فقط على الموضع x للجسيم ، كما يتأثر بقوة $F_x^{(2)}$ ، من نمط ٢ ، تعتمد على متغيرات أخرى . فيعاني الجسيم ، عند إزاحته من x_1 إلى x_2 ، تغيراً في الطاقة الحركية مساوياً للشغل المبذول عليه (المعادلة ١٠,٢٩) :

$$\Delta K = W = W_1 + W_2 ; \quad (10,67)$$

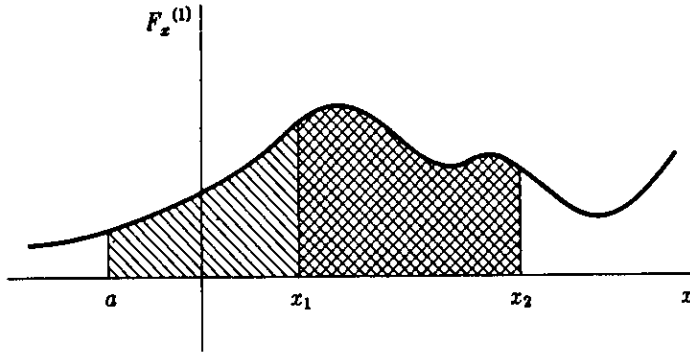
حيث تكون مساهمة جزأي الشغل

$$W_1 = \int_{x_1}^{x_2} F_x^{(1)}(x) dx, \quad (10,68)$$

$$W_2 = \int_{x_1}^{x_2} F_x^{(2)} dx. \quad (10,69)$$

ولحساب W_2 ، لسوف نحتاج إلى معرفة أكثر مما قد تحدّد حتى الآن عن طبيعة $F_x^{(2)}$ وعن الطريقة التي تحرك بها الجسيم من x_1 إلى x_2 . أما لحساب W_1 ، فلسنا بحاجة إلى معرفة أية قوى نمط ١

يمكن اختزال قوة من نمط ٢ ، من حيث المبدأ ، إلى قوى من نمط ١ . فإن دفعاً باليد أو قوة احتكاك ، مثلاً ، نجد تفسيرها النهائي بدلالة القوى الكهربائية بين الذرات .



شكل ١٠,١٤ : تُعرَّف طاقة الوضع ، لقوة في بُعد واحد معتمدة على الموضع x فقط ، بالعلاقة $U(x) = -\int_a^x F_x^{(1)}(x') dx'$ ، التي تساوي سالب المساحة تحت منحنى القوة بين x و a . وموقع a هو النقطة المختارة جغرافياً حيث $U = 0$. أما المساحة المظللة بالخطوط المتعارضة cross-hatched بين x_1 و x_2 فهي الفرق في المساحة بين a و x_2 والمساحة بين a و x_1 .

تفاصيل عن الحركة ؛ إذ بمجرد معرفة دالة القوة $F_x^{(1)}(x)$ ، يتحدد W_1 كتكامل بسيط (أنظر شكل ١٠,٦) . ففكر بقوة اعتباطية ، لكن محدودة لأغراضنا الحالية ، كتلك الموضحة بيانياً في شكل ١٠,١٤ . فإنه يمكن استخدام المساحة تحت هذا المنحنى البياني من حد أدنى ثابت $x = a$ ، إلى حد أعلى متغير x ، في تعريف دالة جديدة ، $-U(x)$:

$$-U(x) = \int_a^x F_x^{(1)}(x') dx'. \quad (10.70) \quad \text{تعريف طاقة الوضع.}$$

ويُساوي التكامل ، بالطبع ، الشغل المقرون بإزاحة من a إلى x . وسيُوضح سبب اختيار الإشارة السالبة فيما بعد . ونُدعى الكمية U بطاقة الوضع (أو الطاقة الكامنة) potential energy المقترنة بالقوة $F_x^{(1)}(x)$. دعنا نستخدم الآن المتساوية الآتية التي تسري لأي مكامل $f(x)$ (integrand) :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_a^{x_2} f(x) dx - \int_a^{x_1} f(x) dx.$$

ويتضح المدلول البياني لهذه المتساوية في شكل ١٠,١٤ . وبفضلها نستطيع الكتابة (باستخدام المعادلتين ١٠,٦٨ و ١٠,٧٠) :

$$W_1 = -[U(x_2) - U(x_1)] = -\Delta U; \quad (10.71)$$

أي أن الشغل المقترن بالإزاحة من x_1 إلى x_2 يُساوي سالب التغير لطاقة الوضع بين x_1 إلى x_2 . علاقة الشغل بطاقة الوضع

وإن التعريف المحدد بالمعادلة ١٠,٧٠ قد يجعل طاقة الوضع تبدو أنها ليست أكثر من اسم جديد لسالب الشغل . غير أنه يوجد ، في الواقع ، فرق مفاهيمي هام بين طاقة الوضع

يمكن اعتبار وجود طاقة الوضع عند نقطة

والشغل ؛ إذ يُعرَّف الشغل W_1 لفترة x_1 إلى x_2 ؛ بينما تُعرَّف طاقة الوضع عند نقطة * فمن نقطة لأخرى ، يكون لدينا كمية من الشغل ، لكن تغير في طاقة الوضع .

وإذا استُبدِل W_1 بالمقدار $-\Delta U$ (من المعادلة ١٠,٧١) أمكن كتابة المعادلة ١٠,٦٧ على الصورة :

$$\Delta K = -\Delta U + W_2.$$

فنبقى الحد ΔU من الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر نجد أن

$$\Delta K + \Delta U = W_2,$$

أو

$$\Delta(K + U) = W_2. \quad (١٠,٧٢)$$

ويُوضَّح هذا سبب اختيار إشارة سالبة في تعريف U . فيظهر في الطرف الأيسر للمعادلة ١٠,٧٢ مجموع حدّين للطاقة :

الطاقة الحركية ، K : وهي طاقة حركة ؛

وطاقة الوضع ، U : وهي طاقة موضع .

ويمكن أن نطلق على مجموع هاتين الطائفتين اسم الطاقة الميكانيكية E (mechanical energy) :

تعريف الطاقة الميكانيكية

$$E = K + U. \quad (١٠,٧٣)$$

(يُستخدَم نفس الرمز E غالباً لأنواع أخرى من الطاقة أيضاً .) من هنا ، فإن المعادلة ١٠,٧٢ مكتوبة على الصورة

الشغل الذي تبذله قوى Σ يُغيّر الطاقة الميكانيكية

$$\Delta E = W_2, \quad (١٠,٧٤)$$

تنص على أن تغير الطاقة الميكانيكية لنظام ما (الطاقة الحركية مضافاً إليها طاقة الوضع) يساوي الشغل الذي تبذله على النظام أية قوى تأثيرها غير مشمول بطاقة الوضع . وفي حالة عدم وجود قوى من نمط Σ تساهم في شغل إضافي كهذا ، فإننا نحصل على قانون حفظ الطاقة الميكانيكية ،

تكون E محفوظة عندما توصف جميع القوى بدلالة طاقة وضع

$$\Delta E = 0, \quad (١٠,٧٥)$$

* على كل حال ، أنظر النقاش على الصفحة التالية .

أو

$$E = K + U = \text{constant}. \quad (10,76)$$

ويمكن الحصول على صيغة مباشرة بين طاقة الوضع والقوة باعتبار إزاحة متناهية الصغر dx . فتصبح المعادلة ١٠,٧١

$$dW_1 = -dU.$$

ومن المعادلة ١٠,٢٣ ، نجد أن $dW_1 = F_x dx$ ؛ وعلى ذلك تكون

$$dU = -F_x dx. \quad (10,77)$$

فإذا كانت U دالة محددة في x ، فإن هذه العلاقة التفاضلية تكافئ

$$\frac{dU}{dx} = -F_x. \quad (10,78)$$

تساوي القوة سالب تدرج طاقة الوضع

وبما أن المشتقة بالنسبة لإحداثي الموضع غالباً ما تدعى تدرجاً gradient ، فإنه يمكننا القول إن القوة هي سالب تدرج طاقة الوضع . وهذا النوع من القوة ، الذي يمكن إقرانه بطاقة وضع ، يدعى بقوة **محافظة** conservative . فعندما تكون القوى الوحيدة المؤثرة هي القوى المحافظة ، يسري مفعول قانون حفظ الطاقة ، المنصوص عليه بالمعادلة ١٠,٧٦ .

تعريف القوة المحافظة

وأخيراً ، فإن دور الحد الاعتباري a للتكامل في المعادلة ١٠,٧٠ يتطلب تعليقاً . فأي اختيار في المدى الذي تكون فيه $F_x^{(1)}$ محددة يكون مقبولاً . وهذا يعني أن مقدار U يعتمد على اختيار a . فإذا تغير a ، تغيرت U بمقدار ثابت . لذا تكون طاقة الوضع U اعتبارية ضمن حدود ثابت إضافي . فدالة أخرى ،

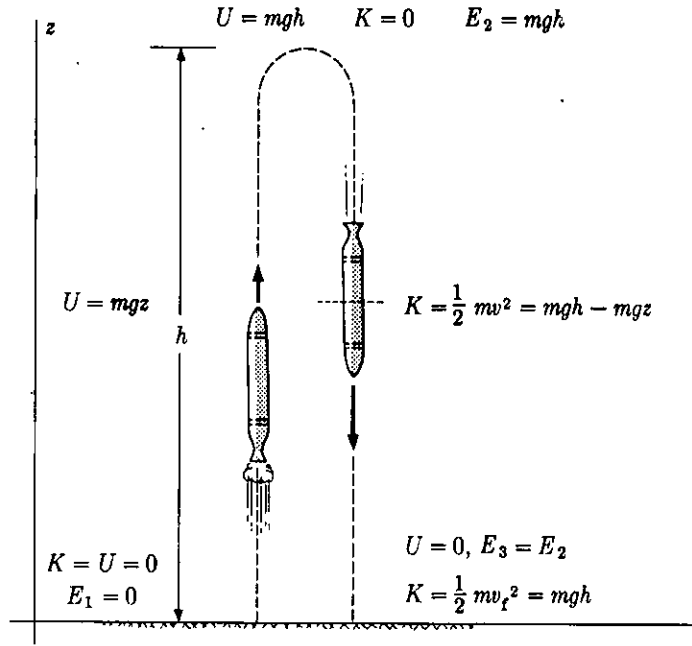
$$U' = U + A,$$

حيث A ثابت ، تكون أيضاً دالة مقبولة لطاقة الوضع . وتتوافق هذه الاعتبارية مع المعادلة ١٠,٧٨ ، حيث أن $dU'/dx = dU/dx$. وإن أهمية a تكمن في كونها قيمة x التي تُعرف عندها U بأنها مساوية للصفر . وليس لهذا الصفر الاعتباري (الاختياري) أي أثر في المعضلات الفيزيائية ، لأن التغيرات فقط في طاقة الوضع هي التي تكون مهمة . مثلاً ، تشير المعادلة الأساسية ١٠,٧٢ فقط إلى تغير الطاقة . فإذا كانت الطاقة الميكانيكية محفوظة (المعادلة ١٠,٧٦) ، فإنه يمكن تعديل مقدار الثابت E كي يعكس الصفر الاعتباري لطاقة الوضع U .

إن موقع صفر طاقة الوضع اعتباري

لقد كان ما تقدم من نقاش شكلياً وعمماً إلى حد ما . ولتوضيح معناه ، سنلجأ إلى بعض الأمثلة المحددة .

* يظهر تعريف أعم للتدرج في الحاشية على صفحة ٥١٦ .



شكل ١٠،١٥ : طاقة وضع الجاذبية عند رفع صاروخ ببطء شديد مسافة h ، فإنه يكتسب طاقة وضع مقدارها mgh ، تساوي بدورها الشغل المبذول في رفعه . وفي السقوط العرّ خلال نفس المسافة عندما لا يكون المحرك مشغلاً ، يكتسب الصاروخ طاقة حركية مساوية لما يخسره من طاقة وضع .

□ الجاذبية قُرب الأرض Gravity Near The Earth

اعتبر صاروخاً أُطلق رأسياً إلى أعلى (شكل ١٠،١٥) . فإذا اختير محور z ليشير إلى أعلى ، فإن قوة الجاذبية المؤثرة على الصاروخ تكون

$$F_1 = -mgk.$$

وهذه قوة من نمط ١ ؛ فيمكن اشتقاق طاقة وضع منها اختر صفر طاقة الوضع ليكون عند $z = 0$. حينئذٍ (من المعادلة ١٠،٧٠) ،

$$\begin{aligned} U(z) &= - \int_0^z F_{1z} dz' \\ &= +mg \int_0^z dz' = mgz. \end{aligned} \quad (١٠،٧٩)$$

وإذا كان صفر طاقة الوضع ، بدلاً من ذلك ، عند $z = a$ ، كانت طاقة الوضع

$$U' = mg(z - a). \quad (١٠،٨٠)$$

وهذه دالة هامة لطاقة الوضع ، تنطبق في الواقع على الحركة الثنائية والثلاثية الأبعاد قُرب سطح الأرض ، كانتطابقها على الحركة الأحادية البعد .

أما دَفْعُ thrust الصَّاروخِ فهو قُوَّةٌ من نَمَطِ ٢ :

$$F_2 = F_2 k. \quad (١٠,٨١)$$

دَفْعُ الصَّاروخِ هو قُوَّةٌ من نَمَطِ ٢

فعند إزاحة الصَّاروخِ إلى أعلى من $z = 0$ إلى $z = h$ ، تَبَدَّلُ هذه القُوَّةُ شُغْلاً على الصَّاروخِ يتحدَّدُ بالعلاقة

$$W_2 = \int_0^h F_2 dz. \quad (١٠,٨٢)$$

« وَيُضَافُ » هذا الشُّغْلُ إلى طاقة الصَّاروخِ الميكانيكيَّةِ ، أي طاقته الحركيَّةِ مضافاً إليها طاقة الوضع . ففي هذا المثال ، إذا استخدمنا $U = mgz$ ، تتخذُ المعادلةُ ١٠,٧٢ الصورةَ :

$$\Delta E = \Delta(\frac{1}{2}mv^2 + mgh) = W_2. \quad (١٠,٨٣)$$

■ مثال ١ : نتيجة لخلل في المحرك ، يكادُ دَفْعُ الصَّاروخِ لا يقوى على رَفْعِهِ . فَيَتَرَنِّحُ الصَّاروخُ أثناء صعوده ، حتَّى يبلغَ ارتفاعاً مقداره h بطاقة حركيَّةٍ مُهمَلَةٍ (شكل ١٠,١٥) . فما الشُّغْلُ المبذولُ ؟ وأيُّ تحويلٍ يحدثُ للطَّاقة ؟

في البداية ، عند مستوى سطح الأرض ، تكونُ $K = 0$ و $U = 0$ ؛ لذا ، فإنَّ

$$E_1 = 0 \quad (z = 0).$$

وعند ارتفاع h ، تَظَلُّ K صفراً ، و $U = mgh$ ؛ وهكذا ، فإنَّ

$$E_2 = mgh \quad (z = h).$$

وعليه ، يكون $\Delta E = E_2 - E_1 = mgh$ ، الذي يَجِبُ أَنْ يُساوِيَ الشُّغْلَ المبذولَ بواسطة دَفْعِ الصَّاروخِ :

$$W_2 = mgh.$$

ويمكنُ التَّأكُّدُ من هذا باستخدام المعادلة ١٠,٨٢ . فإذا كان الدَّفْعُ يكادُ يُساوي الوزنَ (أو يزيدُ عليه قليلاً) ، فإنَّ $F_2 = mg$ ، ويُعطينا التَّكاملُ المعروفُ للشُّغْلِ W_2 المقدارَ mgh . لكنْ ، بصورةٍ أعمَّ ، لربَّما كانت F_2 تارةً أكبرَ وتارةً أخرى أصغرَ من mg ؛ غَيْرَ أَنَّهُ لا مناصَّ من أَنْ تَظَلَّ W_2 تُساوي mgh . ويتحوَّلُ الشُّغْلُ بِأكمله ، في هذا المثال ، إلى طاقة وضع . فبحكم تغيير موضعه ، فقد اكتسبَ الصَّاروخُ طاقةً بالرَّغمِ من كَوْنِ سرعته عند ارتفاع h هي نفسُها كما كانت عند سطح الأرض .

لاحظْ أَنَّ الجاذبيَّةَ قد بَدَلَتْ شُغْلاً سالِباً على الصَّاروخِ أثناء صعوده . فالشُّغْلُ الكلِّيُّ ، $W_1 + W_2$ ، الناتجُ عن الجاذبيَّةِ ودَفْعِ الصَّاروخِ ، يساوي صفراً - ممَّا يُفسِّرُ التَّغْيِيرَ الصُّفْرِيَّ للطَّاقة الحركيَّةِ . ومن المهمِّ أَنْ نَجْتَنِبَ « الحسابَ المزدوجَ double counting » . فإذا كان قد تَمَّ

خَطَرُ الحِسابِ المزدوجِ

اعتبارُ الجاذبيَّةِ بواسطة دالةِ طاقة وضع ، فيجب عدمُ حسابها ثانيةً عند تقدير الشغلِ الذي بذلته .

■ مثال ٢ : يتوقَّفُ محرَّكُ الصَّاروخِ عند ارتفاع h ، فيعودُ ثانيةً إلى الأرض (شكل ١٥، ١٠) . فما سرعةُ ارتطامه بالأرض إذا أهملَ احتكاكُ الهواءِ ؟

لا تؤثرُ قوى من نمط ٢ خلالَ هذا الجزءِ من الحركة . لذلك تكونُ الطَّاقةُ الميكانيكيَّةُ محفوظةً . فعند بدءِ الهبوطِ ، تكونُ

$$E_2 = K + U = 0 + mgh = mgh.$$

أما عند نهايةِ الهبوطِ ، فتكونُ

$$E_3 = K + U = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_f^2.$$

وبما أنَّ $E_2 = E_3$ ، فإنَّه يمكنُ مساواةَ هذين المقدارين ، للحصولِ على السرعةِ النهائيَّةِ ،

$$v_f = \sqrt{2gh}.$$

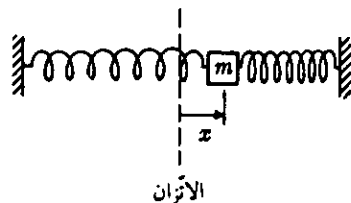
وهذه هي نفسُ المعادلةِ ١٠، ٢٠ ، التي اشتقَّتْ بطريقةٍ مختلفةٍ قليلاً . وفي هذا المثال ، تتحوَّلُ طاقة الوضعِ إلى طاقة حركيَّة .

إنَّ دراسةَ الجاذبيَّةِ هذه تُوجي بأنَّ حفظَ الطَّاقةِ لا يقتضي أن يكونَ النظامُ معزولاً . فيمكنُ اعتبارُ الصَّاروخِ وَحدَهُ بمثابةَ النظامِ موضعِ الاهتمامِ ؛ وفي هذه الحالة تكونُ قوَّةُ الجاذبيَّةِ قوَّةً خارجيَّةً . وعلى صعيدٍ آخر ، يمكنُ اعتبارُ الصَّاروخِ والأرض معاً كنظامٍ واحدٍ . عندئذٍ تكونُ قوَّةُ الجاذبيَّةِ قوَّةً داخليَّةً . وفي كلتا الحالتين ، يتَّخذ قانونُ الحفظ نفسَ الصَّورة . وإنَّ هذه لمسألة دقيقة نوعاً . في الواقع لا تكونُ الطَّاقةُ محفوظةً تماماً إلا لنظامٍ معزول . أمَّا السببُ وراءَ تركِ الأرض خارجَ النظامِ ، فهو أنَّ الطَّاقةَ المقترنة باستجابتها لحركة الصَّاروخِ تكونُ مهملةً . فلو كان للصَّاروخِ والأرض كتلتان متقاربتان نوعاً ، لتأثرت حركة أحدهما تأثراً كبيراً بحركة الآخر ، ولأصبحَ ضرورياً إبقاء كليهما في النظامِ بغية تطبيقِ قانونِ حفظِ الطَّاقةِ .

تكون الطَّاقةُ محفوظةً أحياناً بصورةٍ تقريبيةٍ في نظامٍ غير معزول

□ المذبذبُ التوافقيُّ The Harmonic Oscillator

يُبينُ شكلُ ١٠، ١٦ مذبذباً توافقياً مثاليًا . فيتضمَّنُ النظامُ الزنبركين ؛ لكننا نفترض أنَّ كتلتيهما مهملتان بالمقارنة مع الكتلة m . وعلى ذلك ، تكونُ الطَّاقةُ الحركيَّةُ الإجماليَّةُ



الانحراف
 $x = \text{صفر}$

شكل ١٠، ١٦ : مذبذب توافقي مثالي .

$K = \frac{1}{2}mv^2$ ، حيث v سرعة الكتلة . كما تكون القوة المُرْجَعَةُ للزَبرَكَيْنِ

$$F_x = -kx. \quad (١٠,٨٤)$$

قوة مُحَافِظَة

وبما أنَّ هذه قوَّة تعتمدُ على الموضع (نمط ١) في بُعدٍ واحد ، فإنَّها تكون قوَّة مُحَافِظَة . ومن المناسب اعتبارُ صفرِ طاقةِ الوضعِ عند $x = 0$. عندئذٍ ، نجدُ من المعادلة ١٠,٧٠ أنَّ

$$U(x) = - \int_0^x (-kx') dx', \quad \text{أو}$$

$$U(x) = +\frac{1}{2}kx^2. \quad (١٠,٨٥)$$

طاقة وضع المذبذب التوافقي

فطاقة الوضع هي دالة تربيعية في x . وعلى ذلك ، تكون العلاقة العامة للشغل مع الطاقة (المعادلة ١٠,٧٢) للمذبذب التوافقي

$$\Delta E = \Delta(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2) = W_2, \quad (١٠,٨٦)$$

حيث W_2 هو الشغل الداخِل من أي مصدر خلاف الزَبرَكَيْنِ .

■ مثال ٣ : تبدأ الكتلة المبيَّنة في شكل ١٠,١٦ من السكون عند إزاحة x_0 عن موضع اتزانها ، وتندذب بحرية . فما أقصى سرعة تحرُّرها ، وأين يحدث ذلك ؟ وما مقدار الشغل الخارجيّ اللازم لإيقاف الكتلة عند $x = 0$ صفرًا ؟

يكون للكتلة طاقة أثناء تذبذبها الحرّ ؛ وهذه يجب أن تساوي طاقتها الابتدائية ،

$$E = K_0 + U_0 = \frac{1}{2}kx_0^2.$$

كذلك ، عند أية لحظة لاحقة ، يُعبَّر عن حفظ الطاقة بالعلاقة

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2. \quad (١٠,٨٧)$$

فيكون كلا حدّي الطرف الأيسر موجباً أو صفرًا ؛ كما يكون مجموعها ثابتاً . لذا ينبغي أن تُحرَز الطاقة الحركية أقصى قيمتها عند نقطة النهاية الصغرى لطاقة الوضع ، التي هي $x = 0$ صفرًا . عند هذه النقطة ، تكون

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}kx_0^2.$$

وهكذا ، فإنَّ السرعةَ العظمى (عند $x = 0$ صفرًا) هي

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} x_0. \quad (١٠,٨٨)$$

تكون السرعةُ عظمى حينما تكون U صغرى

وإذا أوقفت الكتلة بعد ذلك عند نقطة الأصل ($v = 0$ و $x = 0$ صفرًا) ، فإن طاقتها النهائية تكون صفرًا ؛ كما يكون التغير في طاقتها

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 0 - \frac{1}{2}kx_0^2.$$

وهذا بدوره هو الشغل اللازم بذله لإيقافها (المعادلة ١٠,٧٤) :

$$W_2 = -\frac{1}{2}kx_0^2.$$

وتعني الإشارة السالبة أن الطاقة تنتقل من المذبذب إلى محيطه . ■

١٠,٨ حفظ الطاقة الميكانيكية في بُعد واحد ؛ الرسم الطاقي

Conservation of Mechanical Energy in One Dimension; Energy Diagrams

في البند السابق ، قدمنا حفظ الطاقة الميكانيكية :

$$E = K + U = \text{constant},$$

الذي يسري مفعوله عندما نؤخذ كل القوى المؤثرة بالاعتبار عن طريق طاقة الوضع U . ونود هنا أن نوسع هذا الموضوع ، موجّهين انتباهنا بصورة خاصة إلى الدور الذي يلعبه الرسم الطاقي (مخطط الطاقة) .

□ الجاذبية قرب الأرض Gravity Near the Earth

في رسم طاقي للحركة الأحادية البعد ، تُعَيّن الطاقة رأسيًا ، والمسافة أفقيًا . فللمحركة قرب سطح الأرض ، دعنا نختار ثانية محور z بحيث يتجه رأسيًا إلى أعلى ، ونقطة أصله عند مستوى الأرض ؛ ولنكتب طاقة الوضع على الصورة :

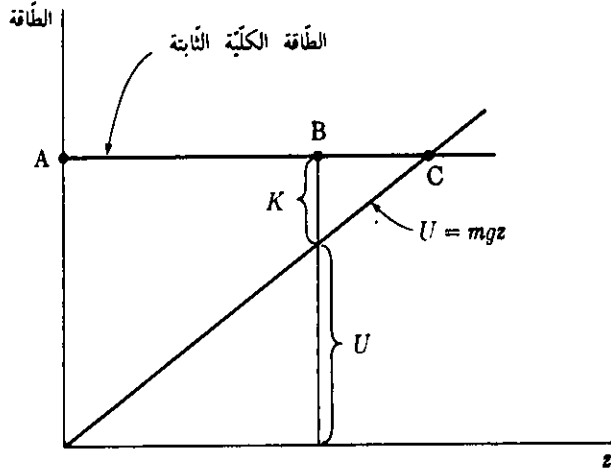
$$U = mgz.$$

منحنى طاقة الوضع : ميله يحدد القوة

في الرسم الطاقي ، أرسم أولاً دالة طاقة الوضع $U(z)$ ، التي تكون في هذه الحالة عبارة عن خط مستقيم ميله mg ويمر بنقطة الأصل (شكل ١٠,١٧) . فيحدد هذا الميل ، وفقًا للمعادلة ١٠,٧٨ ، مقدار القوة . أرسم بعد ذلك خطًا أفقيًا يساوي ارتفاعه الطاقة الكلية E . فيكون هذا الخط أفقيًا لأن الطاقة E واحدة عند كل المسافات z . وأخيرًا ، يمكن رسم خط رأسي يصل أية نقطة على منحنى طاقة الوضع (أو ، في هذه الحالة ، خط طاقة الوضع) بالنقطة التي تقع مباشرة فوقها على خط الطاقة . ويحدد طول هذا الخط الرأسي مقدار الطاقة الحركية ، حيث يساوي الفرق بين الطاقة الكلية وطاقة الوضع .

إن الرسم الطاقي أكثر تجريدًا لدرجة كبيرة من الصورة الفيزيائية للحركة الفعلية . ويعود ذلك جزئيًا إلى كون المسافات الرأسية في الرسم تُستخدَم لقياس أكثر من كمية واحدة ، وجزئيًا لأن الرسم المفرد يُمثّل أكثر من مثال واحد للحركة . على كل حال ، فإن للرسم الطاقي بساطة ذاتية ، ودراسته الدقيقة سيؤدي أكلها . فهو بطريقته الخاصة صورة للحركة . فإذا قُدِّفَت كرة

الرسم الطاقي : أداة مساعدة مفيدة للتحليل



شكل ١٠، ١٧ : الرسم الطاقوي للحركة الرأسية قرب سطح الأرض . ونحدد النقطة C نقطة تحول للحركة .

قاعدة رأسيًا إلى أعلى بطاقة كلية E ، كانت هذه الطاقة كلها في بادئ الأمر على صورة طاقة حركية ، تتحول تدريجيًا إلى طاقة وضع عند ارتفاع الكرة . وينظر ارتفاع الكرة الحركة إلى اليمين في الرسم الطاقوي ، إلى أن يتقاطع خط طاقة الوضع مع خط الطاقة الكلية (من A إلى B إلى C) . نقطة التقاطع هذه ، حيث $K = 0$ ، تدعى نقطة تحول turning point للحركة . وهي تحدد أقصى ارتفاع ممكن لقيمة الطاقة المعطاة . وثمة حركة أخرى يمكن وصفها باستخدام نفس الرسم هي تلك الخاصة بكرة أسقطت من هذا الارتفاع الأقصى ؛ حيث تتحرك إلى اليسار في الرسم ، من C إلى B إلى A . على صعيد آخر ، فقد تبدأ كرة لها نفس الطاقة الكلية (وبالتالي نفس الرسم الطاقوي) عند ارتفاع أقل وتنفذ إلى أسفل بدرجة ابتدائية ، بحيث يكون لها - في بادئ الأمر - بعض الطاقة الحركية وبعض طاقة الوضع . فيكون تقدمها في الرسم الطاقوي من B إلى A فقط .

نقطة التحول حيث $K = 0$ صفرًا

إن لأنواع الحركة المتباينة التي سبق وصفها شروطًا ابتدائية مختلفة لكن نفس الطاقة . فيحدد أقصى ارتفاع ، لطاقة معينة ، بتقاطع خط الطاقة مع خط طاقة الوضع ، رغم عدم ضرورة بلوغ هذا الارتفاع الأقصى دائمًا . أما بالنسبة لطاقة مختلفة ، فلا يقتضي الرسم سوى تعديل طفيف ؛ إذ نزيح ببساطة خط الطاقة الأفقي إلى أعلى أو إلى أسفل كي نصل إلى مستوى جديد . ولطاقات أكبر ، يزداد الارتفاع الأقصى طرديًا مع الطاقة . وكي نلخص ما تقدم نقول : إن فوائد الرسم الطاقوي هي أنه يبين في لحظة خاطفة حدود الحركة (في هذا المثال الارتفاع الأقصى) ؛ ويصف في نفس الوقت أنواعًا من الحركة بشروط ابتدائية مختلفة ؛ ويبين تصويريًا النسبة بين مقدار الطاقة الحركية وطاقة الوضع عند أية نقطة ؛ كما يعطينا القوة من ميل منحني طاقة الوضع ؛ ويكشف ببساطة أثر تغيير الطاقة . أما إحدى نقائصه فهي أنه لا يبين مباشرة سرعة حدوث الحركة من أحد أجزاء الرسم إلى آخر ؛ ومع ذلك فهو يعطينا مباشرة الطاقة الحركية ، التي ترتبط بسهولة مع السرعة .

■ مثال ١ : يَسْقُطُ جِسْمٌ مِنَ السُّكُونِ . فهل يَتِمَكَّنُ مَبْدَأُ حِفْظِ الطَّاقَةِ مِنْ تَحْدِيدِ تَفَاصِيلِ الحَرَكَةِ كَافَّةً ؟

الجواب هو نعم . فطاقةُ الجسمِ ، إذا بدأ من السُّكُونِ عند $z = z_0$ ، هي $E = mgz_0$. عندئذٍ تُعْطِي معادلةَ حِفْظِ الطَّاقَةِ ، $K + U = E$ ،

المعادلة (E = ثابتاً) تُعْطِي معادلةً
تفاضليَّةً

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + mgz = mgz_0. \quad (١٠,٨٩)$$

وهذه معادلةٌ تفاضليَّة من الرتبة الأولى يُحَدِّدُ حَلُّهَا $z(t)$ ، أي الموضع كدالة في الزَّمن . ونجدُ من هذه المعادلة أنَّ

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{2g(z_0 - z)}.$$

(لماذا اخترنا الجذرَ التَّربيعيَّ السَّالِبَ في هذا المثال ؟) وعلى ذلك ، تكونُ مشتقَّةُ الزَّمنِ بالنسبة إلى الإحداثيِّ z :

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{2g(z_0 - z)}}.$$

ويمكن تعويضُ هذه المشتقَّة في المعادلة

$$t = \int \left(\frac{dt}{dz} \right) dz$$

لنُعْطِينَا

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{dz}{\sqrt{z_0 - z}}. \quad (١٠,٩٠)$$

كذلك ، يمكن معاملَةُ التَّكَامُلِ إلى اليمين كتكاملٍ غَيْرِ مُحْدودٍ ، بحيث يُعَدَّلُ ثَابِتُ التَّكَامُلِ فيها بعد ليتلاءم مع الشرط الحديّ . فبتغيير المتغير إلى $s = z_0 - z$ (التي هي مسافة السُّقُوط) ، نجدُ أنَّ

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int s^{-1/2} ds \\ &= \frac{2}{\sqrt{2g}} (\sqrt{s} + C), \end{aligned}$$

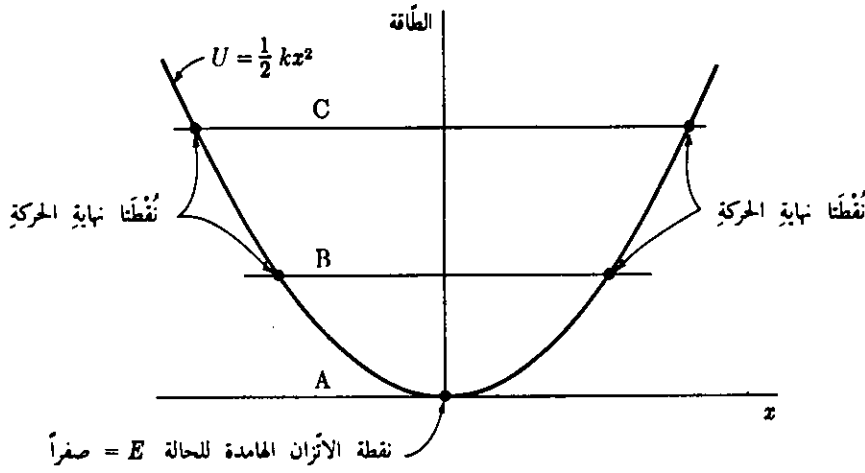
حيث C ثابتُ التَّكَامُلِ . ولإستيفاء شرطنا الابتدائيّ - الذي هو $s = 0$ عند $t = 0$ - ينبغي وضعُ الثَّابِتِ C مساوياً للصَّفر . عندئذٍ ، تتَّخَذُ الإزاحة كدالة في الزَّمن شكلاً مألوفاً هو :

$$s = z_0 - z = \frac{1}{2}gt^2.$$

وإنَّ التَّطْبِيقَ المَبَاشِرَ لقانون نيوتن الثَّاني ، لهذا المثال المَعْيَن ، أَسْهَلُ نوعاً من استخدام قانون حفظ الطَّاقَةِ . أما في أمثلةٍ أُخَرى ، فقد يوفِّرُ حِفْظُ الطَّاقَةِ أَسْهَلَ الطَّرِيقِ إلى الحَلِّ .

■

نتيجة مألوفة أمكن الوصول إليها
بنتج جديد



شكل ١٠,١٨ : الرسم الطاقّي للمذبذب التوافقي. فيكون منحنى طاقة الوضع عبارة عن قطع مكافئ. وتدلّ الخطوط A و B و C على ثلاثة مقادير مختلفة للطاقة الكلية.

□ المذبذب التوافقي The Harmonic Oscillator

يُبين شكل ١٠,١٨ الرسم الطاقّي للمذبذب التوافقي. فيمثل المنحنى الدّاكنُ heavy curve دالة طاقة الوضع

$$U = \frac{1}{2}kx^2.$$

وهذه عبارة عن قطع مكافئ. ويدلّ ميلها الموجب المتزايد لقيم $x > 0$ على قوّة تتجه إلى اليسار، وبتزايد مقدارها طردياً مع x ؛ بينما يدلّ ميلها السالب لقيم $x < 0$ على قوّة متجهة إلى اليمين. أمّا عند النقطة $x = 0$ ، حيث تساوي القوّة صفرًا، فيساوي ميل الدالة $U(x)$ صفرًا أيضًا.

وللطاقة الصّفرية، يكون المذبذب هامدًا quiescent عند نقطة المنتصف (خطّ الطاقة A). أمّا بالنسبة لأية طاقة أكبر، فإنّه يتحرّك ذهاباً وإياباً بين نقطتي تحوّل في الرسم الطاقّي المتماثل. وتكون طاقته الكلية E ، عند هذين الحدين، مساوية لطاقة وضعه:

$$\frac{1}{2}kx_{\text{limit}}^2 = E.$$

وبذلك تكون الإزاحة الحديّة

$$x_{\text{limit}} = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

ويمكن تعريف الاتّساع بأنّه يُساوي مقدار x_{limit} :

$$A = |x_{\text{limit}}| = + \sqrt{\frac{2E}{k}}. \quad (١٠,٩١)$$

اتّساع المذبذب التوافقي

فضاءة الطاقة (أي إزاحة خط الطاقة B إلى خط الطاقة C) يضرب اتساع الذبذبة بالمقدار $\sqrt{2}$.

والكمية k إن هي إلا ثابت « قساوة stiffness » . فيتسيم زنبرك لين بقيمة صغيرة للثابت k ؛ بينما يتسيم زنبرك أقسى بقيمة أكبر لهذا الثابت . وبموجب المعادلة ١٠,٨٥ ، فإن قيمة أكبر للثابت k تسبب تزايداً أسرع في منحني طاقة الوضع . وهذا يسبب بدوره ، لنفس الطاقة ، اتساعاً أصغر للذبذبة (المعادلة ١٠,٩١) .

وتكون معادلة حفظ الطاقة للمذبذب التوافقي على الصورة :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E.$$

فيحول التعويض $v = dx/dt$ هذه إلى معادلة تفاضلية :

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E. \quad (10,92)$$

نحصل ثانية على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى باستخدام العلاقة $(E = \text{ثابت})$

ومجرد النظر إلى الرسم الطاقوي ، نستطيع الاستنتاج أن المذبذب ينبغي أن يقوم بحركة دورية متائلة حول $x = 0$. ونتركها كمسألة للقارئ أن يثبت أن حل المعادلة ١٠,٩٢ هو

$$x = A \sin(\omega t + \phi), \quad (10,93)$$

حيث يتحدد A بالمعادلة ١٠,٩١ ، و ω بالعلاقة

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

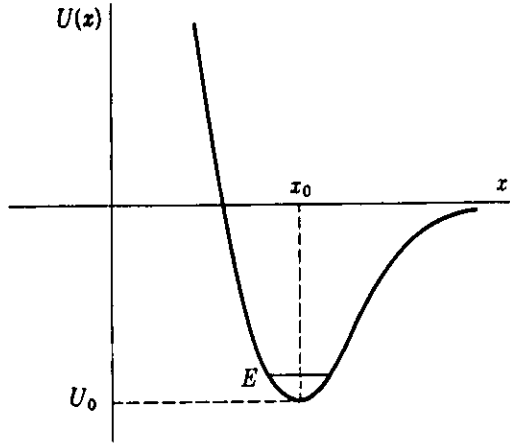
وحيث ϕ ثابت اعتباطي . وهذا هو نفس الحل المعطى في المعادلة ٧,٣٥ . تذكر أننا حصلنا عليه سابقاً من المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية المعبرة عن قانون نيوتن الثاني :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

بالمفارقة ، فإن معادلة الطاقة تُفضي إلى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى .

★ الذبذبات الصغيرة بصورة عامة Small Oscillations in General

لقد أكدنا سابقاً أن العديد من الأنظمة المتذبذبة تتصرف كمذبذبات توافقية . ويساعد الرسم الطاقوي على فهم سبب ذلك إعتبر دالة طاقة وضع اعتباطية $U(x)$ (شكل ١٠,١٩) . فإذا كان لهذه الدالة قيمة صغرى عند نقطة ما x_0 ، وإذا لم تتلاش المشتقة الثانية d^2U/dx^2 عند تلك النقطة ، فإن الدالة $U(x)$ تشبه بالقرب من x_0 دالة القطع المكافئ للمذبذب التوافقي . وإذا لم يكن للنظام الموصوف بهذه الدالة طاقة E أكبر بكثير من القيمة الصغرى لطاقة الوضع U_0 (أنظر الشكل) ، فإنه يتذبذب توافقياً حول x_0 .



شكل ١٠،١٩ : دالة طاقة وضع لها قيمة صغرى U_0 ، تقترب عندها الدالة إلى حد بعيد من قطع مكافئ . فلطاقة $E > U_0$ تزيد كثيراً على U_0 ، يتذبذب النظام تذبذباً توافقياً بسيطاً تقريباً . وتمثل الدالة المعينة هنا طاقة الوضع داخل جزيء ثنائي الذرة : حيث x هي المسافة بين النواتين ، و x_0 المسافة بينها عند الاتزان . ونستطيع التوابع أن تتذبذباً توافقياً .

ونستطيع بلورة هذه الأفكار مقدارياً بالاستعانة بمفكوك متسلسلة تيلور Taylor series expansion لطاقة الوضع U حول النقطة x_0 :

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

متسلسلة تيلور للدالة عند قيمتها الصغرى

وبما أن النقطة x_0 قد اختيرت بحيث يكون للدالة $U(x)$ قيمة صغرى عندها ، فإن $(dU/dx) = 0$ عند x_0 . وعلى ذلك ، فإن متسلسلة تيلور تعطينا ، كتقريب للدالة $U(x)$ لقيم x القريبة من x_0 ،

$$U(x) \cong U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} (x - x_0)^2. \quad (10,94)$$

وتكافئ هذه تماماً شكل طاقة وضع المذبذب التوافقي ،

$$U = \frac{1}{2} kx^2 ;$$

لكنها تختلف فقط في أن صغرى U و x قد أزيحا shifted . ويكون ثابت القوة لطاقة الوضع الاعتبارية

$$k = \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0}. \quad (10,95)$$

فإذا كان فرق الطاقة ، $E - U_0$ ، صغيراً لدرجة كافية ، انحصرت الحركة في مدى ضيق لقيم x بالقرب من x_0 (أنظر شكل ١٠،١٩) ، ويكون الحد التالي في متسلسلة تيلور ،

$$\frac{1}{6} \left(\frac{d^3 U}{dx^3} \right)_{x_0} (x - x_0)^3,$$

التذبذب بالقرب من القيمة الصغرى لطاقة وضع يكون توافقياً

مُهَمَلًا . عند ذلك يقوم النظام ، أياً كان ، بحركة توافقية بسيطة . أمّا إذا لم يكن الحد التكميلي cubic term مهملاً ، فيقال إن التذبذب لا توافقي anharmonic . وهو يكون عندئذٍ أكثر تعقيداً ولا يمكن وصفه بدالة جيب .

□ الجاذبية على نطاق واسع Gravity in the Large

يتأثر الجسم ذو الكتلة m ، عندما يكون فوق سطح الأرض ، بمركبة قوة نصفقطرية (نصف قطرية) للجاذبية مقدارها

قوة الجاذبية خارج الأرض

$$F_r = - \frac{mgR^2}{r^2}, \quad (10,96)$$

حيث g تسارع الجاذبية عند سطح الأرض ، و R نصف قطر الأرض ، و r بُعد الجسم عن مركز الأرض . ويُعطينا هذا التعبير النتيجة الصحيحة $F_r = -mg$ للقيمة $r \cong R$ ؛ كما يُعطينا الاعتماد التربيعي العكسي على r لقيم r الأكبر . (تُحدد المعادلة ١١,١٠ تعبيراً جوهرياً أكثر لقوة الجاذبية .) فإذا اعتبرنا حركة باتجاه خط نصفقطري ، أمكننا أن نكتب لطاقة الوضع :

$$U = - \int_a^r F_r(r') dr'.$$

وبتعمد الطرف الأيمن من المعادلة ١٠,٩٦ للقوة F_r ، نجد أن

$$U = +mgR^2 \int_a^r \frac{dr'}{r'^2} = -mgR^2 \left. \frac{1}{r'} \right|_a^r = -mgR^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

ومن المتعارف عليه جعل $a = \infty$ ، الأمر الذي يضع صفر طاقة الوضع عند ما لانهاية . وهذا الاختيار ، تتخذ الدالة $U(r)$ شكلاً بسيطاً :

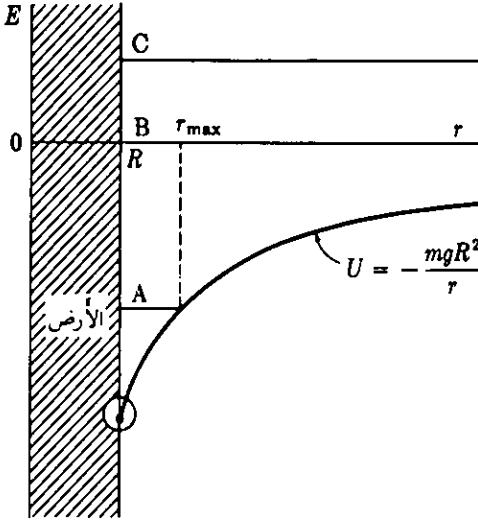
طاقة وضع الجاذبية خارج الأرض

$$U(r) = - \frac{mgR^2}{r}. \quad (10,97)$$

ويظهر منحنى دالة طاقة الوضع هذه في شكل ١٠,٢٠ (الذي يسري فقط لقيم $r \geq R$) . وتحيط الدائرة الصغيرة المبينة في هذا الرسم قُرب $r = R$ بالمنطقة التي يسري فيها مفعول التقريب الخطي

$$U \cong mg(r - R) + \text{constant} \quad (10,98)$$

(أمّا قضية إثبات تكافؤ المعادلتين ١٠,٩٧ و ١٠,٩٨ للقيم $r - R \ll R$ ، فنتركها كمسألة للقارئ .) ففي هذه المنطقة المحاطة بالدائرة ، يقارب الخط البياني المستقيم في شكل ١٠,١٧



شكل ١٠,٢٠ : الرسم الطاقى لجسم متأثر بجاذبية الأرض . وقد اختير المقياس الرأسى لجعل
صفر طاقة الوضع عند ما لا نهاية ؛ بينما يقبى المقياس الأفقى المسافة من مركز الأرض . ويمثل
الجزء المظلل باطن الأرض يقترن خط الطاقة A بحركة صاروخ أطلق رأسياً وارتفع مسافة
نصف قطريته عظمى r_{max} ؛ كما يقترن خط الطاقة B ($E = 0$) بحركة صاروخ يستطيع بالكاد
الإفلات من الأرض ؛ بينما يصف خط الطاقة C صاروخاً يفلت ويبقى لديه مزيد من الطاقة .

لدرجة كافية منحنى القِطْع الزائد hyperbola المرسوم في شكل ١٠,٢٠ .

مثلاً ، لصاروخ أطلق رأسياً ، تكون معادلة الحركة (أثناء حركته الحرة)

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgR^2}{r} = E.$$

فَلْيَقِيم $E < 0$ (خط الطاقة A في الشكل أعلاه) ، يوجد نصف قطر أعظم ، نحصل عليه
بوضع $v = 0$ صفرًا :

$$-\frac{mgR^2}{r_{max}} = E,$$

حيث نجد أنَّ

$$r_{max} = -\frac{mgR^2}{E}. \quad (10,99)$$

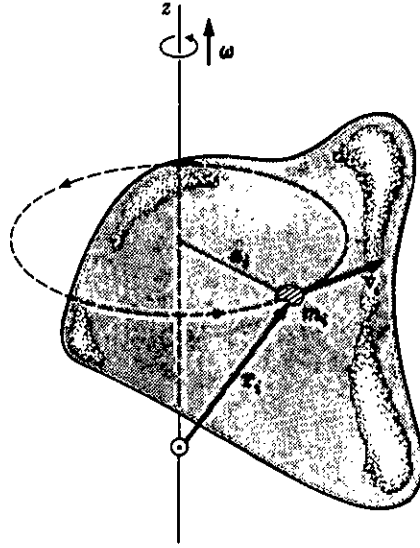
وواضح أنَّ هذا يتطلب طاقة سالبة كي يكون ذا معنى . وكما يتضح من الرسم الطاقى ، فلا
يوجد حد أعلى للحركة النصفقطرية إذا كانت $E \geq 0$. فللطاقة الموجبة (خط الطاقة C) ،
يبتعد الصاروخ بحرية إلى ما لا نهاية بطاقة وضع نهائية تقترب من الصفر ، وطاقة حركية نهائية
تقترب من E ، بحيث تكون سرعته النهائية

$E < 0$: تكون الحركة محدودة

$E \geq 0$: تكون الحركة غير
محدودة

$$v_f = \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (10,100)$$

■ مثال ٢ : أعطي صاروخ نبضة تسارع قصيرة قرب سطح الأرض ، ثم انطلق رأسياً إلى أعلى
بدون تشغيل محركاته . فما السرعة الصغرى التي يجب أن يمتلكها عندما يبدأ بالصعود كي يفلت
من الأرض ؟ ... تُدعى هذه سرعة الإفلات escape speed .



شكل ١٠,٢١ : الطاقة الدورانية ... فكما في شكل ٩,١٢ ، يدور هنا جسم جاسي حول محور اعتباطي ثابت . فيكون لعنصر كتلته m_i طاقة حركية مقدارها $K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 m_i r_i^2$. أما الطاقة الحركية الكلية للجسم فتحدد بالمعادلة ١٠,١٠٥ .

واضح من الرسم الطاقوي أن الشرط المطلوب هو $E = 0$ (خط الطاقة B) . فلأية طاقة E أقل ، لا يستطيع الصاروخ الإفلات ؛ ولأية طاقة E أكبر ، فإنه يفلت مع الاحتفاظ بفائض من الطاقة الحركية . فإذا أهمل الصعود الرأسى للصاروخ أثناء مرحلة تسارعه ، أمكن كتابة معادلة الطاقة عند $r \cong R$ على الصورة :

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - mgR = 0.$$

والحل هو

$$v_{esc} = \sqrt{2gR}. \quad (١٠,١٠١)$$

سرعة الإفلات من الأرض

وبالتعويض عن $g = ٩,٨٠ \text{ م/ث}^2$ و $R = ٦,٣٧ \times ١٠^٦ \text{ م}$ ، نجد أن

$$v_{esc} = 1.12 \times 10^4 \text{ m/sec}. \quad (١٠,١٠٢)$$

وتبلغ هذه السرعة ٣٤ ضعف مقدار سرعة الصوت في الهواء ، أو حوالي ٢٥٠٠٠ ميل/س . وتبين مقارنة المعادلتين ١٠,١٠١ و ٧,٧١ أن سرعة الإفلات تزيد على السرعة المدارية عند الارتفاعات المنخفضة بعامل قدره $\sqrt{2}$. ■

١٠,٩ الطاقة الدورانية Rotational Energy

اعتبر حركة جسم جاسي يدور حول محور ثابت . فكما ورد سابقاً ، يمكن اعتبار هذا الجسم وكأنه مركب من فئة جسيمات كتلتها m_i ، ومتجهات مواضعها r_i ، وسرعاتها v_i (شكل ١٠,٢١) . فتكون طاقته الحركية

$$K = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2.$$

ويمكنُ التعبيرُ عن السرعةِ v_i بدلالةِ السرعةِ الزاويةِ ω والمسافةِ a_i للكتلةِ m_i عن محور الدوران :

$$v_i = \omega a_i. \quad (١٠,١٠٣)$$

وعلى ذلك يمكنُ كتابةُ الطاقةِ الحركيةِ على الصورة :

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i a_i^2. \quad (١٠,١٠٤)$$

يتبينُ لنا أنَّ هذا المجموعَ هو عبارةٌ عن عزمِ قصورِ الجسمِ حول محور الدورانِ المختارِ (أنظر المعادلة ٩,٣٦). وعلى ذلك ، نَتَّخِذُ الطاقةَ الحركيةَ الشكلَ البسيطَ التالي :

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (١٠,١٠٥)$$

الطاقةُ الحركيةُ لجسم جاسي يدور
حول محور ثابت

ولفئةٍ متميِّزةٍ (مُتَقَطَّعةٍ) discrete من الجُسيَّات ، يكون

$$I = \sum m_i a_i^2; \quad (١٠,١٠٦)$$

بينما يُصبحُ هذا المجموعُ تكاملاً لتوزيعٍ مستمرٍ (مُتَّصِل) continuous distribution للمادة :

$$I = \int a^2 dm. \quad (١٠,١٠٧)$$

(هاتان الصيغتان إنَّهما هما تَكَرَّارٌ للمعادلتين ٩,٣٦ و ٩,٣٧.)

■ مثال ١ : حَدَّافَةٌ على صورةِ قُرْصٍ منتظمٍ ، نصفُ قطره ١٥ سم ، تدورُ بسرعةٍ زاويةٍ $\omega = 3000$ دورة/د rpm ، وكتلتها ٢٥ كـرغ . فما الطاقةُ الحركيةُ لِلْحَدَّافَةِ ؟ وما السرعةُ التي يتوجَّبُ عليها أن تتحرَّكَ بها في خطٍّ مستقيمٍ ليكونَ لها طاقةٌ حركيةٌ انتقاليةٌ ماثلة ؟

لنعبِّرُ أولاً عن سرعتِها الزاويةِ بِوَحَدَاتٍ مسر/ث :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{3,000 \text{ rev/min} \times 2\pi \text{ radian/rev}}{60 \text{ sec/min}} \\ &= 314 \text{ radian/sec.} \end{aligned}$$

وإنَّ عزمَ القصورِ لِقُرْصٍ ، وَفَقَ المعادلة ٩,٤٣ ، هو $I = \frac{1}{2} MR^2$. فَوَضِعْ هذا التعبيرَ للمقدارِ I في المعادلة ١٠,١٠٥ يُعْطِينَا للطاقةِ الحركيةِ الدورانيةِ للقُرْصِ

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}MR^2\omega^2 \\
&= \frac{1}{2} \times 25 \text{ kg} \times (0.15 \text{ m})^2 \times (314 \text{ radian/sec})^2 \\
&= 1.39 \times 10^4 \text{ J}.
\end{aligned}$$

ولإيجاد السرعة الانتقالية المكافئة ، ساو تعبيرَي الطاقَتَيْن الحركَتَيْن الانتقالية والدورانية :

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2.$$

فالحل هو $v = R\omega/\sqrt{2}$ ؟ أو

$$v = 33.3 \text{ m/sec.}$$

لقد أَدَّى اشتقاقنا في بند ١٠،٤ إلى المعادلة ١٠،٥٢ ، التي تُعبرُ عن الطاقة الحركية لنظام كمجموع طاقة حركية انتقالية مقترنة بحركة مركز الكتلة وطاقة حركية نسبةً إلى مركز الكتلة . ويمثلُ الحدُّ الأخير ، بالنسبة لجسم جاسي مثالي ، طاقة حركية دورانية ؛ حيث أنه في إطار إسناد فيه مركز الكتلة ساكن ، يكون الدوران حول محور يمر بمركز الكتلة هو الحركة الوحيدة الممكنة لجسم جاسي . وعلى ذلك ، يمكن كتابة الطاقة الحركية الكلية لجسم جاسي في الحالة العامة على الصورة :

الطاقة الحركية لجسم جاسي في حركة اعتباطية

$$K = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (١٠،١٠٨)$$

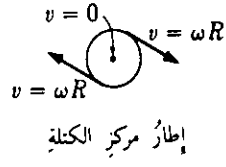
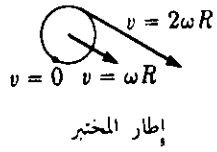
ويُنسَب كلُّ من عزم القصور والسرعة الزاوية في الحدِّ الثاني إلى إطار إسناد مركز الكتلة ، بمحور دوران يمر بمركز الكتلة .

■ مثال ٢ : طوقٌ يتدحرج أسفل مستوى يميلُ بزاوية θ على الاتجاه الأفقي (شكل ١٠،٢٢) . فإذا كان الشغل الذي تبذله قوى الاحتكاك مهملاً ، فما تسارع مركز كتلة الطوق ؟

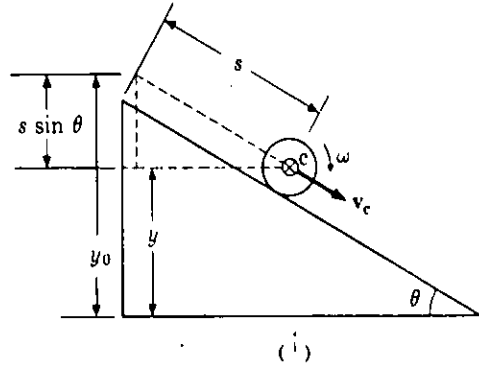
من الطريف هنا أننا لا نحتاجُ إلى أيٍّ من كتلة الطوق أو نصف قطره . لتكن s إزاحة مركز كتلة الطوق أسفل المستوى ؛ عندئذٍ ، تكون $v_c = ds/dt$ سرعة مركز الكتلة [شكل ١٠،٢٢ (أ)] . وتراكبُ فوق هذه الحركة الانتقالية الحركة الدورانية للطوق حول مركز كتلته . وإنه لمن السهل أن نرى في إطار مركز الكتلة أن $\omega = v_c/R$ [شكل ١٠،٢٢ (ب)] . ففي هذا الإطار ، يكون للطوق عند نقطة تماسه مع المستوى السرجة v_c - باتجاه أعلى المستوى . وهذه السرجة ، مضافةً إلى سرجة مركز الكتلة v_c ، تُعطينا السرجة الصفرية المطلوبة لنقطة تماس الطوق مع المستوى في إطار إسناد المختبر . وحيث أن $I = MR^2$ للطوق (المعادلة ٩،٣٠) ، فإن المعادلة ١٠،١٠٨ تُعطينا للطاقة الحركية الكلية

$$K = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{v_c}{R} \right)^2,$$

أو



(ب)



(أ)

شكل ١٠،٢٢ : (أ) طوقٌ يتدحرج أسفل مستوى. وتساوي طاقة وضعه $U = Mgy$. (ب) مقارنة حركة الطوق في إطار إسناد مركز الكتلة وفي إطار المختبر.

$$K = Mv_c^2. \quad (١٠،١٠٩)$$

من ناحية أخرى، تُساوي طاقة وضع الطوق $U = Mgy$. وكما هو مبين في شكل ١٠،٢٢ (أ)، فإنه يمكن كتابة y على الصورة :

$$y = y_0 - s \sin \theta.$$

عندئذٍ، تتخذ معادلة حفظ الطاقة، $K + U = E$ ، الصورة :

$$Mv_c^2 + Mg(y_0 - s \sin \theta) = E. \quad (١٠،١١٠)$$

وللحصول على التسارع، dv_c/dt ، يمكن مفاضلة هذه المعادلة بالنسبة إلى الزمن، حيث v_c و s هما المتغيران فقط. فتكون النتيجة

$$2Mv_c \frac{dv_c}{dt} - Mg \sin \theta \frac{ds}{dt} = 0.$$

وبما أن $v_c = ds/dt$ ، فإنه يمكن اختزال العاملين v_c و ds/dt ؛ كما يمكن اختزال العامل المشترك M . وبذلك يكون تسارع مركز الكتلة

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{2}g \sin \theta. \quad (١٠،١١١)$$

ويساوي هذا نصف تسارع جسم يتزلق بدون احتكاك أسفل المستوى.

عَوْدًا إلى الدوران حول محور ثابت، فإنه يمكننا اشتقاق علاقة هامة بين عزم الدوران ومعدل تغير الطاقة الحركية. ونقطة البداية هي قانون تغير الزخم الزاوي، المبين في المعادلة

: ٩،٥٢

$$\frac{dL}{dt} = T.$$

جدول ١٠,١ : الصِّغ المتناظرة للحركة الانتقالية والحركة الدَّورانيَّة

الكميَّة الفيزيائيَّة	الصِّغَة للحركة الانتقاليَّة	الصِّغَة للحركة الدَّورانيَّة حول محور z
التَّسارع	$F = ma = m \frac{dv}{dt}$	$T_z = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt}$
الطَّاقة الحركيَّة	$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
الشُّغل	$dW = F \cdot ds$	$dW = T_z d\theta$
القُدرة	$P = F \cdot v$	$P = T_z \omega$

ليكنُ محورُ z محورَ الدَّوران . عندئذٍ يكون $L_z = I\omega$ ، وتكون مركبةُ z لهذه المعادلة

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = T_z. \quad (١٠,١١٢)$$

وبضرب طرفي المعادلة في ω نحصلُ على

$$I\omega \frac{d\omega}{dt} = T_z \omega.$$

ومن الواضح أنَّ الطرفَ الأيسرَ هو مُعدَّلُ تغييرِ الطَّاقة الحركيَّة الدَّورانيَّة . ويمكنُ كتابةُ هذه المعادلة كما يلي :

مُعدَّلُ تغيُّرِ الطَّاقة الدَّورانيَّة

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}I\omega^2) = T_z \omega. \quad (١٠,١١٣)$$

وبما أنَّ مُعدَّلَ تغييرِ الطَّاقة هو القدرة ، فإنَّنا نحصلُ على تعبيرٍ للقُدرة التي يبذلُها عزمُ الدَّورانِ على جسمٍ دائري :

القدرةُ النَّاتجةُ عن عزمِ دَّوران

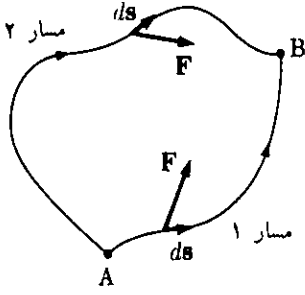
$$P = T_z \omega. \quad (١٠,١١٤)$$

لاحظِ التشابهَ الكبيرَ بين المعادلة ١٠,١١٤ والمعادلة ١٠,٦٢ . هذا وسواء من التناظرات correspondences بين الحركة الدَّورانيَّة والحركة الانتقاليَّة قد لُحِصَ في جدول ١٠,١ (أنظرُ أيضاً جدول ٩,١) .

★ ١٠,١٠ القوى المُحافِظَةُ وطاقة الوضعِ بصورة عامة

Conservative Forces and Potential Energy in General

سَنَقْصُرُ اهتمامنا في هذا البند على ميكانيكا الجُسيِّمات ؛ كما سنعتبرُ التعريفَ العامَّ لقوَّة مُحافِظَةٍ في ثلاثة أبعاد . فإذا تأثرَ جُسيمٌ بقوة F (ليس من الضروري أن تكون ثابتة) عند



شكل ١٠,٢٣ : تعريف قوة مُحافظة : إذا كان الشغل W_{AB} الذي تبذله القوة في إزاحة من النقطة A إلى النقطة B يعتمد فقط على نقطتي النهاية ، وليس على المسار ، كانت القوة مُحافظة . وتقرن طاقة الوضع بقوة مُحافظة .

حركته من نقطة A إلى نقطة B ، فإن هذه القوة تبدلُ قدرًا معيّنًا من الشغل على الجسيم يمكن تسميته W_{AB} :

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F_s ds, \quad (10,115)$$

حيث F_s مركبة F الموازية لتزايد الإزاحة ds . وقد يعتمد هذا الشغل ، في الحالة العامة ، على المسار المعين الذي سلكه الجسيم عند حركته من A إلى B . فمثلاً ، يعتمد الشغل المبذول على طائرة بواسطة قوى الانجرار drag forces على المسار الذي تسلكه الطائرة في الهواء ؛ أي عمّا إذا كانت تطير على ارتفاع كبير أو صغير . ومع ذلك فإذا لم يعتمد الشغل على المسار ، سُميت القوة بقوة مُحافظة (شكل ١٠,٢٣) . * وهناك عدّة قوى هامة في الطبيعة تكون قوى مُحافظة . ويعني عدم اعتماد هذه القوى على المسار أن W_{AB} يعتمد فقط على نقطتي النهاية (end points) A و B ، وليس على النقاط الواقعة بينها . والحقيقة ، وكما نستطيع التّداول عليه بسهولة ، فإن W_{AB} يعتمد فقط على الفرق بين الدّلتين : إحداها تعتمد على A والأخرى على B . لنختَر نقطة أصل ثابتة ، ولنعرّف دالة طاقة الوضع U كالآتي :

$$U(r_B) = -W_{OB} = - \int_O^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (10,116)$$

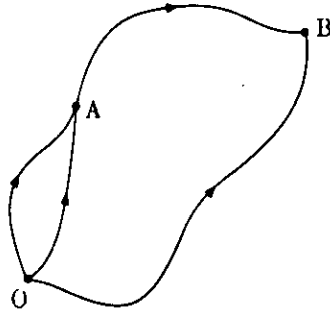
طاقة الوضع

وبما أن F مُحافظة ، فإن U تعتمد فقط على موضع نقطة النهاية ، وليس على المسار . لنفرض أننا اخترنا مساراً معيّنًا من O إلى B يمرّ خلال نقطة A (شكل ١٠,٢٤) . عندئذ يكون التّكامل في المعادلة ١٠,١١٦ :

$$\int_O^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_O^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (10,117)$$

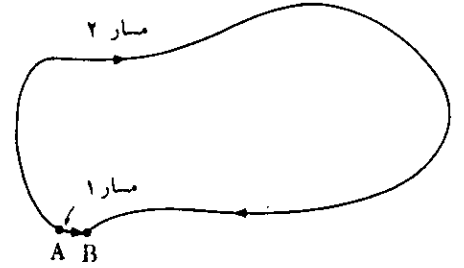
ويعرّف الحدّ الأوّل على اليمين $-U(r_A)$ ؛ بينما يكون الحدّ الثاني W_{AB} ، أي الشغل المبذول عندما يتحرك الجسيم من A إلى B . وبإعادة ترتيب طفيف للحدود ، يمكن كتابة المعادلة ١٠,١١٧

* بالنسبة للحركة في بُعد واحد ، فإن كلّ قوة تعتمد على الموضع فقط تكون قوة مُحافظة نظراً لوجود مسار واحد فحسب ومقدار واحد ممكن للشغل عند الإزاحة من نقطة إلى أخرى .



شكل ١٠,٢٤ : تعريف طاقة الوضع . . . يُختار صفرًا اعتباطيًا عند النقطة O . عندئذ تكون $U(A) = -W_{OA}$ ؛ وهذا لا يعتمد على المسار من O إلى A . كما أن $U(B) = -W_{OB}$ لا يعتمد على المسار من O إلى B . واعتبار مسار من O مروراً بالنقطة A فالنقطة B يؤدي إلى المعادلة ١٠,١١٨ .

شكل ١٠,٢٥ : رسم توضيحي يُستخدم لبيان الحقيقة القائلة إن قوة محافظة تبذل محصلة شغل صفرية في إزاحة حول مسار مغلق .



على الصورة :

$$W = -\Delta U \text{ في ثلاثة أبعاد}$$

$$W_{AB} = U(r_A) - U(r_B). \quad (١٠,١١٨)$$

فالشغل الذي تبذله قوة محافظة على جسيم يتحرك من A إلى B - عن طريق أي مسار - يساوي سالب التغير لطاقة الوضع $[U(r_B) - U(r_A)]$. ويُعمَّم هذا المعادلة ١٠,٧١ إلى ثلاثة أبعاد .

وثمة نتيجة بسيطة للمعادلة ١٠,١١٨ ، ألا وهي الحقيقة أن قوة محافظة لا تبذل محصلة شغل على جسيم يتم مساراً مغلقاً ويعود إلى نقطة بدايته . فشكلياً ، نستطيع أن نكتب ، من المعادلة ١٠,١١٨ ،

$$W_{AA} = U(r_A) - U(r_A) = 0. \quad (١٠,١١٩)$$

ولإدراك مرّد هذه النتيجة بوضوح أكثر ، اعتبر نقطتي نهاية A و B تبعدان عن بعضهما بمسافة متناهية الصغر (شكل ١٠,٢٥) . فعند اقتراب B من A ، فإن الشغل المبدول على المسار المباشر الأقصر من A إلى B يجب أن يقترب من الصفر حيث $ds \rightarrow 0$. وبما أن الشغل متساو لجميع المسارات ، فإنه يجب أن يقترب من الصفر لمسار اعتباطي غير مباشر circuitous من A إلى B . °

° إن رمزاً مألوفاً للتكامل الخطي حول مسار مغلق هو $\oint$. فلقوة محافظة ، يكون $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

نعرف المشتقة الجزئية

إنَّ العلاقةَ العامَّةَ بين القوَّة وطاقة الوضع في ثلاثة أبعاد تكون هامة في المعالجات الأكثر تقدماً للميكانيكا، وإنَّها لجديرة بالذكر هنا. وهي تتضمن فكرة المشتقة الجزئية *partial derivative*. فإذا اعتمدت دالة على أكثر من متغير، أمكننا إيجاد مشتقتها بالنسبة إلى واحد من متغيراتها، مُبقين المتغيرات الأخرى ثابتة. ويدعى هذا بالتفاضل الجزئي *partial differentiation*. ويعني الرمز $\partial f / \partial x$ مشتقة f بالنسبة إلى المتغير x ، مع مُعاملة المتغيرات الأخرى وكأنها ثوابت. فإذا كان لدينا، مثلاً،

$$f = x^2 y,$$

فإنَّ مُشتقاتها الجزئيتين هما

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2.$$

بهذا الفهم لمعنى المشتقة الجزئية، يمكننا التعبير عن العلاقات بين القوَّة وطاقة الوضع على الصُّورة:

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (١٠,١٢٠)$$

$$F_y = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (١٠,١٢١)$$

$$F_z = - \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (١٠,١٢٢)$$

مركبات قوَّة محافظة

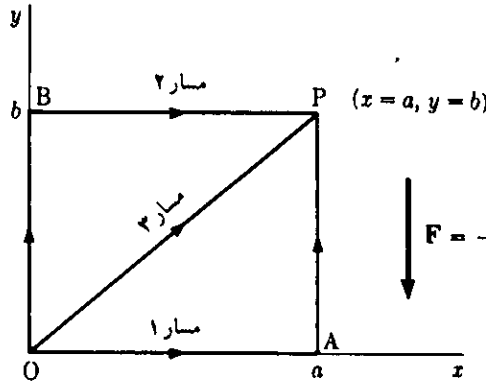
ولن نحاول اشتقاق هذه المعادلات. لاحظ أنَّها تُعمِّم المعادلة ١٠,٧٨، التي اشتقت سابقاً للحركة في بُعدٍ واحد.

ولتوضيح مفهوم استقلال المسار *path independence* والقوى المحافظة، سنعتبر قانونين هامين للقوَّة.

□ قوَّة ثابتة · A Constant Force

يتأثر الجسم القريب من سطح الأرض، أو الجسم المشحون في مجال كهربائي مُنتظم، بقوة ثابتة. وبُعْية الدقة، هبَّ أنَّ القوَّة تؤثر باتجاه لا السالب (شكل ١٠,٢٦)، بحيث يمكن كتابتها على الصُّورة:

• نكتب المعادلات ١٠,١٢٠-١٠,١٢٢ أحياناً على الصُّورة الاتجاهية $F = -\nabla U$ أو $F = -\text{grad } U$ ، التي هي تعبيرٌ مختصرٌ للعلاقة $F = -[(\partial U / \partial x)\mathbf{i} + (\partial U / \partial y)\mathbf{j} + (\partial U / \partial z)\mathbf{k}]$. وتُعرف الكمية داخل الأقواس بالترج *gradient* في ثلاثة أبعاد. فالقوَّة المحافظة هي التدرج السالب لدالة طاقة وضع.



شكل ١٠,٢٦ : ثلاثة مسارات في مجال قوة ثابتة .
ويكون الشغل مستقلاً عن المسار .

$$\mathbf{F} = -F\mathbf{j}. \quad (١٠,١٢٣)$$

لنعتبر تعريف التكامل الخطي لطاقة الوضع ، المعادلة ١٠,١١٦ ، للمسارات الثلاثة المبينة في الشكل . فبالتركيز أن $F \cdot ds = F_y ds$ ، نجد بالنسبة للمسار ١ أن

$$U(r_P) = - \int_0^a F_x(x, 0) dx - \int_0^b F_y(a, y) dy. \quad (١٠,١٢٤)$$

فعلى امتداد الجزء الأول من المسار ، المُمثل بالتكامل الأول ، تتغير x من صفر إلى a ، بينما تظل $y = 0$ صفرًا . كذلك على امتداد الجزء الثاني ، المُمثل بالتكامل الثاني ، تكون $x = a$ ، بينما تتغير y من صفر إلى b . وبما أن $F_x = 0$ في كل مكان ، فإن التكامل الأول يتلاشى . كذلك بما أن $F_y = -F$ ، ويساوي ثابتًا ، فإنه يُمكن إيجاد التكامل الثاني بسهولة ، حيث يؤدي إلى

$$U(r_P) = +Fb.$$

(إذا كانت $F = mg$ ، فإن الطرف الأيمن يصبح mgh ؛ وهذا هو التعبير المألوف لطاقة وضع الجاذبية على ارتفاع b .) وتؤدي معالجة مماثلة للمسار ٢ إلى

$$U(r_P) = - \int_0^b F_y(0, y) dy - \int_0^a F_x(x, b) dx.$$

ففي هذه المرة يتلاشى التكامل الثاني ؛ بينما يؤدي الأول ثانيةً إلى

$$U(r_P) = Fb.$$

أما المسار ٣ ، فمعالجته أصعبُ بقليلٍ فقط . فلأيّ تزايدٍ في الإزاحة على امتداد هذا المسار ، نكتبُ

$$ds = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}.$$

ويكون حاصل الضرب القياسي $F \cdot ds$:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x dx + F_y dy. \quad (١٠,١٢٥)$$

وهذا التعبير صحيح لأي مسار. فالذي يميّز مساراً معيناً إنما هو اختيار الاتساعين x و y لمركبتَي القوة. فإذا ادّعينا للحظة أن F_x و F_y تعتمدان فعلياً على x و y ، أمكننا أن نكتب للمسار ٣:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x(x, x \tan \theta) dx + F_y\left(\frac{y}{\tan \theta}, y\right) dy;$$

حيث أن $y = x \tan \theta$ على امتداد هذا المسار (شكل ١٠,٢٦). وفي الواقع أن لدينا في هذه الحالة $F_x = 0$ و $F_y = -F$ ؛ وعلى ذلك نجد للمسار ٣، أو لأي مسار آخر، أن

$$U(r_p) = F \int_0^p dy = Fb. \quad (١٠,١٢٦)$$

استقلال المسار لقوة ثابتة

وبذلك تتحقق الفرضية الابتدائية القائلة: إن القوة الثابتة هي قوة محافظة. وهكذا يتبين أن التعبير لطاقة وضع الجاذبية قرب سطح الأرض، $U = mgy$ ، صحيح للحركة الثنائية أو الثلاثية الأبعاد، فضلاً عن الحركة الأحادية البعد.

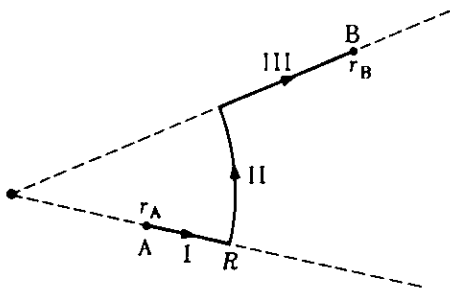
□ قانون التربيع العكسي للقوة Inverse-Square Law of Force

اعتبر قوة شعاعية radial تتحدد بالعلاقة

$$\mathbf{F} = \frac{C\mathbf{i}_r}{r^2}, \quad (١٠,١٢٧)$$

قوة تريبية عكسية مركزية

حيث $\mathbf{i}_r$ متجه الوحدة باتجاه شعاعي بعيداً عن نقطة الأصل و C ثابت - موجب للقوة النافرة repulsive، وسالب للقوة الجاذبة attractive. فإن هذا هو ما يدعى بقانون التربيع العكسي للقوة، الذي يستطيع، بالاختيار المناسب للثابت C ، أن يصف القوى الجاذبية والكهربائية على حد سواء. لنفرض أن جسيماً في مجال قوة على هذا الفراقد أزيح على امتداد المسار المبين في شكل ١٠,٢٧ من النقطة A ، على بُعد r_A عن مركز القوة، إلى النقطة B ، على بُعد r_B عن مركز القوة. فإنه يتحرك من النقطة A شعاعياً إلى الخارج مسافة R ، ثم يتحرك في قوس



شكل ١٠,٢٧: المسار المستخدم لحساب الشغل المبذول بواسطة قوة تريبية عكسية مركزية.

دائري ، ومن ثمَّ يستمرُّ شعاعياً إلى الخارج إلى النقطة B . فما مقدار الشغل الذي تبذله عليه القوة المُعطاة ؟ ... في الجزء الأول من المسار ، توازي F الإزاحة ds ، وهكذا يكون

$$W_I = C \int_{r_A}^R \frac{dr}{r^2}$$

$$= C \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{R} \right). \quad (١٠,٢٨)$$

وفي الجزء الثاني ، تكون F عمودية على ds ، وهذا يعني أنَّ $F \cdot ds = 0$ ، وبالتالي

$$W_{II} = 0. \quad (١٠,٢٩)$$

أما في الجزء الثالث ، فإنَّ F توازي ds ثانيةً ، ويكون الشغل

$$W_{III} = C \int_R^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

$$= C \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (١٠,١٣٠)$$

ومجموع هذه المساهمات الثلاث هو الشغل الكليُّ :

$$W_{AB} = W_I + W_{II} + W_{III}$$

$$= \frac{C}{r_A} - \frac{C}{r_B}. \quad (١٠,١٣١)$$

ونلاحظ في الحال شيئين عن هذا التعبير . أولاً ، أنه مستقل عن R ؛ فالشغل لا يعتمد على القوس الدائري المعين المختار للحركة من خط شعاعي إلى آخر . وهذا برهان جزئي لاستقلال المسار ؛ أما البرهان الكامل فتروك كمسألة . وثانياً ، أنَّ التعبير يتسم بنفس شكل المعادلة ١٠,١١٨ ، التي تبين الفرق بين قيمتي دالة عند موضعين . ومقارنة المعادلتين ١٠,١٣١ و ١٠,١١٨ تبين أنه يمكن اختيار دالة طاقة الوضع كي تكون

$$U(r) = \frac{C}{r} + D,$$

حيث D ثابت اعتباطي . ويُختار D عادةً كي يكون صفراً . وبكافي هذا وضع صفر طاقة الوضع عند $r = \infty$. عندئذٍ ، تكون

$$U = \frac{C}{r}. \quad (١٠,١٣٢)$$

وَتَتَّفَقُ هذا مع المعادلة ١٠,٩٧ ، التي اشتقت للحركة الأحادية البعد . (في تلك المعادلة ،

طاقة وضعها إذا كانت
 $U(\infty) = 0$

كان الثابت C يساوي mgR^2 . وتدلُّ المعادلتان ١٠,١٢٧ و ١٠,١٣٢ على علاقة بين القوة وطاقة الوضع أكثر عمومية في تطبيقها . وهذه هي

$$F_r = - \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (١٠,١٣٣)$$

(عندما تعتمد U على r فقط ، تكون المشتقة الجزئية كالمشتقة العادية أو الكلية .)

■ مثال : ما مقدار الشغل الذي يجب بذله على قمر صناعي بواسطة قوى غير قوة الجاذبية بغيّة وضعه في مدار دائري على بُعد $2R$ عن مركز الأرض (حيث R نصف قطر الأرض) ؟ وما الارتفاع الذي كان من الممكن أن يصل إليه إذا بُدِلَ نفس الشغل في إطلاقه رأسياً إلى أعلى ؟

وفقاً للمعادلة ١٠,٧٢ ، فإن الشغل الذي تبذله قوى من نمط ٢ يساوي التغير في الطاقة الميكانيكية :

$$\Delta(K + U) = W_2.$$

وتظلُّ هذه المعادلة صحيحة في ثلاثة أبعاد . ففي الحركة من R إلى $2R$ ، يكون التغير في طاقة وضع القمر الصناعي

$$\begin{aligned} U &= U(2R) - U(R) \\ &= - \frac{mgR^2}{2R} + \frac{mgR^2}{R} \\ &= + \frac{1}{2}mgR. \end{aligned} \quad (١٠,١٣٤)$$

أما طاقته الحركية فتساوي صفراً عند سطح الأرض . ولتعيين طاقته الحركية في مدار دائري ، يمكن استخدام قانون نيوتن الثاني ؛ فتساوي كتلته مضروبة في تسارعه المركزي الجاذب $(m \times v^2/r)$ مع قوة الجاذبية المؤثرة عليه (mgR^2/r^2) ، محسوبة عند $r = 2R$:

$$\frac{mv^2}{2R} = \frac{mgR^2}{4R^2}.$$

ويعطينا هذا $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgR$. وبما أن الطاقة الحركية في المدار هي كالتغير في الطاقة الحركية ، فإن

$$\Delta K = \frac{1}{2}mgR. \quad (١٠,١٣٥)$$

وعلى ذلك ، فالشغل اللازم الذي يساوي $\Delta K + \Delta U$ هو

$$W_2 = \frac{1}{2}mgR,$$

حيث يُستهلك ثلثاه في التغير الحادث لطاقة الوضع ، وثلث في الطاقة الحركية . ولو كان القمر الصناعي قد أُطلق رأسياً إلى أعلى وترك ليبلغ أقصى ارتفاع له ، لكانت طاقته الحركية النهائية صفراً ، بحيث أن

$$\Delta K = 0.$$

تظلُّ المعادلة ١٠,٧٢ سارية المفعول في ثلاثة أبعاد

وفي تلك الحالة ، يكونُ

$$\Delta U = W_2 = \frac{1}{2}mgR.$$

وهذا يعني أنَّ

$$-\frac{mgR^2}{r_{\max}} + \frac{mgR^2}{R} = \frac{1}{2}mgR.$$

والحلّ للمقدار $r_{\max}$ هو

$$r_{\max} = 4R,$$

الذي يعني ارتفاعاً قدره $3R$ فوق سطح الأرض ؛ أي ثلاث مرّات أعلى من ارتفاعه المداري .

١٠,١١ البندولُ البسيطُ The Simple Pendulum

البندولُ واحدٌ من أكثر المذبذبات شيوعاً . ويتكوّن البندولُ البسيطُ المثاليُّ من ثِقَلٍ كتلتهُ m مُعلّق من قضيبٍ جاسيٍّ طوله l لكنّه مُهمَلُ الكتلة (شكل ١٠,٢٨) . ولقد دُرِسَ البندولُ البسيطُ في بند ٧,٦ باستخدام فِكْرَتِي القُوّة وقانون نيوتن الثاني . ونرغب هنا في تقديم التحليل الأبسط كثيراً لحركته باستخدام فكرة طاقة وضع الجاذبيّة .

عندما يتذبذب القضيبُ بعيداً عن موضع اتزانهِ بزاوية θ ، يرتفع ثِقَلُ البندول مسافةً رأسيّةً h تتحدّد بواسطة العلاقة

$$h = l - l \cos \theta, \quad (١٠,١٣٦)$$

فيكتسب طاقة وضعٍ قدرها

$$U = mgh. \quad (١٠,١٣٧)$$

وللزوايا الصّغيرة θ يمكن تقريبُ جيب التمام ° بالعلاقة

$$\cos \theta \cong 1 - \frac{1}{2}\theta^2.$$

وهذا يعني أنَّ

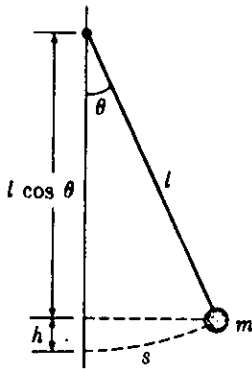
$$h \cong \frac{1}{2}l\theta^2,$$

أو ، بدلالة الإزاحة s (التي تساوي $l\theta$) ،

$$h \cong \frac{s^2}{2l}. \quad (١٠,١٣٨)$$

والتعويض عن h بتقريب الزوايا الصّغيرة هذا في المعادلة ١٠,١٣٧ يُعطينا لطاقة وضع البندول

• إذا لم يكن هذا التقريب مألوفاً ، فإنّه يمكنك الحصول عليه من $\sin^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$ ، باستخدام $\sin x \cong x$ لقيم x الصّغيرة .



شكل ١٠,٢٨ : البندول البسيط .
وتساوي طاقة وضعه $U = mgh$.

$$U = \frac{mg}{2l} s^2 \quad (s \ll l), \quad (١٠,١٣٩)$$

طاقة وضع البندول لإزاحه صغيرة

التي لها نفس الشكل الرياضي كالمعادلة ١٠,٨٥. أما الطاقة الحركية للبندول فهي

$$K = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

وعلى ذلك ، فإن معادلته لحفظ الطاقة هي

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{mg}{l} \right) s^2 = E, \quad (١٠,١٤٠)$$

إنه مذبذب توافقى تقريباً

التي تكافئ المعادلة ١٠,٩٢ للمذبذب التوافقي ، بثابت قوة k يتحدد بواسطة

$$k = \frac{mg}{l}. \quad (١٠,١٤١)$$

فلنقيم θ الصغيرة ، يتذبذب البندول توافقياً ، ويمكن استخدام أية نتيجة سابقة للمذبذب التوافقي . فدورة البندول ، مثلاً ، هي

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

مستقلة عن الكتلة ، كما يتوقع المرء للحركة في مجال الجاذبية . ولربما كان غاليليو أول من اكتشف تناسب T مع $\sqrt{l}$.

١٠,١٢ تقييم حفظ الطاقة Assessment of Energy Conservation

إن حفظ الطاقة (الحركية زائد طاقة الوضع) غالباً ما يكون صحيحاً تقريباً وغالباً ما يكون مفيداً ، وذلك ضمن إطار نظرية الميكانيكا وحدها ؛ إلا أنه لا يسري على نطاق كوني . فالطاقة الميكانيكية قد تُفقد (بواسطة القوى الاحتكاكية ، مثلاً) أو تُكتسب (بواسطة تحول الكتلة إلى طاقة ، مثلاً) .

المعادلة $(K + U = \text{ثابت})$ هي ذات صلاحية محدودة

غير أن نفس حدود limitations حفظ الطاقة كقانون للميكانيكا قد أثبتت أنها مصادرة قوته وأهميته كمبدأ طبيعي أعم . فلقد تبين أن تحويل الطاقة الميكانيكية بواسطة الحرارة إلى طاقة داخلية هو أساسي لتطوير نظرية الديناميكا الحرارية . كما أن الاهتمام بالانتقال المتواصل للطاقة من الصورة الميكانيكية إلى صورة الإشعاع الكهرومغناطيسي كان مكوناً ingredient هاماً لأساس النظرية النسبية ، وأدى بدوره إلى تبصّر أينشتين العميق في موضوع تكافؤ الكتلة والطاقة .

أما المعادلة $(E_{\text{total}} = \text{ثابت})$ فيبدو أنها تسري على نطاق كوني

قابلية الطاقة للتحويل تُوحّد الطبيعة
كما تُوحّد وصف الطبيعة

وتلعب الطاقة دوراً خاصاً في العلوم ، باعتبارها أكثر مفاهيم الطبيعة تنوعاً وقابليةً للتحويل . فهي تحوّل بين الإنسان وبين تجزئته لظواهر الطبيعة إلى حقول جامدة منفصلة تماماً عن بعضها البعض . فلا يمكن فصل الميكانيكا عن الديناميكا الحرارية أو عن الكهرومغناطيسية ؛ كما لا يستطيع أي من هذه المواضيع تجاهل النظرية النسبية . وكمفهوم مشترك لكل نظرية نصف الطبيعة ، فإن الطاقة تربط معاً أجزاء العلوم . وكوسيط رئيسي للتبادل بين ظواهر الطبيعة ، فإنها حرقاً تربط الكون معاً . فالبحر والسماء والأرض ترتبط بواسطة تحولات الطاقة ، التي يكون بعضها في مثل رقة تبخر الندى evaporation of dew ، وبعضها الآخر في مثل عُنْفِ عاصفة رعدية thunderstorm صيفية . كذلك ترتبط المجرات لتكون كلاً واحداً ، من خلال الطاقة النووية والكهرومغناطيسية والجاذبية . ومن خلال أعقد وأعجب تسلسل لتحولات الطاقة في الطبيعة ، تعمل التفاعلات النووية الحرارية الشمسية على تزويد الجسم البشري بالطاقة اللازمة لاستمرار وجوده .

ويسبب حفظها ، وحفظها فقط ، فإن الطاقة هي المفهوم المركزي الموحد في العلوم . فبدون الحفظ ، لا يمكن ربط اختفاء الطاقة في مكان ما بظهورها في أماكن أخرى مختلفة أو في مظاهر أخرى متنوعة . وبدون الحفظ ، فإن مظهرين مختلفين للطاقة سوف يبدوان بدلاً من ذلك كمفهومين متميزين . كذلك بدون الحفظ ، لا يستطيع الإنسان بمثل هذه السهولة شراء وبيع ونقل الطاقة كسلعة .

يرتبط حفظ الطاقة بانتظام الزمان

ولقد تعمّقت نظرة الإنسان إلى الطاقة في هذا القرن بطريقتين هامتين : الأولى من خلال علاقتها بالكتلة ؛ والثانية من خلال علاقتها بتأثير الزمان في الطبيعة . ومع أن البحث التفصيلي في الارتباط الأخير خارج عن نطاق هذا الكتاب ، إلا أنه من الأهمية والغربة في نفس الوقت ، بحيث أننا لمضطرون على الأقل إلى مجرد ذكره لقد ربط حفظ الطاقة بانتظام الزمان ، وعلى الأخص بـلاتغير قوانين الطبيعة بالنسبة إلى تغير الزمان . فالطاقة محفوظة ، بالمفهوم الحديث ، لأن قوانين الطبيعة هي نفسها بالأمس ، واليوم ، وغداً . وعلى الطالب الدؤوب الجاد وراء إلماع عن السبب لمثل هذا الرباط الهام أن يعود ثانية إلى بند ٢١,٥ في المكان الأول ومن ثم إلى بند ٤,٧ .

خلاصة الأفكار والتعاريف

□ تعاريف الشغل : بصورة عامة : $dW = F \cdot ds$; $W = \int F \cdot ds$

(١٠,٢٢ ، ١٠,٣٠)

(١٠,١)

لقوة ثابتة : $W = F \cdot s$

في بُعد واحد : $W = \int F_x dx$ ؛ (١٠,٢٤) □ الشغل هو وسيلة لانتقال الطاقة ؛ ويُعرّف على مدى

□ تُعرَّفُ الفائدةُ الآليَّةُ بأنَّها النسبةُ بين القوَّةِ الخارجةِ إلى القوَّةِ الدَّاخِلةِ .

□ القوَّةُ المُحافِظَةُ هي تلك التي يعتمدُ الشَّغلُ المبذولُ لها على نقطتيَّ نهايةٍ إزاحةٍ فقط ، وليس على المسارِ المتَّبَعِ .

□ إنَّ أَيْةَ قوَّةٍ تعتمدُ على الموضعِ فقط تكونُ مُحافِظَةً في بُعدٍ واحدٍ .

□ إنَّ القوَّةَ الثَّابتةَ والقوَّةَ التَّربيعيَّةَ العكسيَّةَ المركزيَّةَ هما مثالان على القوى المُحافِظَةِ في ثلاثة أبعادٍ .

□ يمكنُ أنْ تَقترنَ طاقةُ الوضعِ بقوَّةٍ مُحافِظَةٍ . وتُعرَّفُ هذه بأنَّها سالبُ الشَّغلِ الذي تبذلُهُ القوَّةُ في إزاحةٍ من نقطةٍ إسنادٍ مختارةٍ اعتباطاً إلى أَيْةِ نقطةٍ أُخرى (المعادلة ١٠,٧٠ أو ١٠,١١٦) .

□ تخضع الطاقةُ الميكانيكيَّةُ للمعادلةِ ١٠,٧٢ ،
 $\Delta E = \Delta(K + U) = W_2$ ، حيث W_2 هو الشَّغلُ الذي تبذلُهُ القوى اللَّامُحافِظَةُ .

□ إذا كانت جميعُ القوى المؤثِّرةِ قوى مُحافِظَةٍ ، فإنَّ الطاقةَ الميكانيكيَّةَ تكونُ محفوظةً :
 $E = K + U = \text{constant}.$ (١٠,٧٦)

□ القوَّةُ المُحافِظَةُ هي سالبُ تدرُّجِ طاقةِ الوضعِ (المعادلات ١٠,٧٨ ، ١٠,١٣٣ ، و ١٠,١٢٠ - ١٠,١٢٢) .

□ إنَّ موضعَ الصِّفرِ لطاقةِ الوضعِ هو أمرٌ اعتباطيٌّ .
 □ بعضُ دوالِ طاقةِ الوضعِ :

الجابيَّةُ قربَ سطحِ الأرضِ : $U = mgz$ ؛
 (١٠,٧٩)

الجابيَّةُ خارجَ الأرضِ : $U = -mgR^2/r$ ؛
 (١٠,٩٧)

فترة ، وليس عند نقطة .

□ يُمكنُ تعريفُ الطاقةِ بأنَّها تلك الكينونةُ القادرةُ على إنجازِ شغلٍ (إمَّا مباشرةً أو من خلال سلسلَةٍ من التحوُّلات) .

□ الشَّغلُ المُوجِبُ : إنَّ النِّظامَ المتأثِّرَ بالقوَّةِ يكتسبُ طاقةَ الشَّغلِ السَّالبِ : يفقدُ النِّظامُ طاقةً .

□ الشَّغلُ المبذولُ على جُسَيْمٍ أو جسمٍ جاسيٍّ يغيَّرُ طاقتهُ الحركيَّةَ : فيكون $\Delta K = W$ إذا كان W هو الشَّغلُ الكلِّيُّ الذي تبذلُهُ جميعُ القوى الخارجِيَّةِ (المعادلة ١٠,٣٥) .

□ لنظامٍ اعتباطيٍّ ، يكون $\Delta K_T = W_T$ إذا كان W_T هو الشَّغلُ الكلِّيُّ المبذولُ بواسطةِ القوى الدَّاخِلِيَّةِ والخارجِيَّةِ (المعادلة ١٠,٤٢) .

□ يمكنُ تحويلُ قانونِ نيوتن الثَّاني في بُعدٍ واحدٍ إلى الصُّورةِ $F_x = dK/dx$ (المعادلة ١٠,٢٨) .

□ الطاقةُ الحركيَّةُ لنظامٍ هي

$$K_T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2. \quad (١٠,٥٢)$$

□ الطاقةُ الحركيَّةُ لنظامٍ ثنائيِّ الجسمِ هي

$$K = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}\mu v^2. \quad (١٠,٥٨)$$

□ الطاقةُ الحركيَّةُ لجسمٍ جاسيٍّ هي

$$K = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (١٠,١٠٨)$$

□ تُعرَّفُ القُدرةُ بأنَّها مُعدَّلُ تغيُّرِ الطاقةِ ، $P = dE/dt$ ؛ كما أنَّ القُدرةَ المصروفةَ بواسطةِ قوَّةٍ هي $P = F \cdot v$ ؛ أمَّا القُدرةُ المصروفةُ بواسطةِ عزمٍ دَوَّرانٍ فهي $P = T_c \omega$ (المعادلات ١٠,٦٠ ، ١٠,٦٢ ، و ١٠,١١٤) .

□ لبعضِ الأدواتِ الميكانيكيَّةِ ، كالرِّوافِعِ ، والبكراتِ ، وروافِعِ السَّلسَلَةِ ، والمِلْزِماتِ (المِشْدَاتِ اللَّولبيَّةِ) ، يكونُ الشَّغلُ الدَّاخِلُ = الشَّغلُ الخارجُ .

المذبذب التوافقي : $U = \frac{1}{2}kx^2$ ؛ (١٠,٨٥) القيمة الصغرى .

البندول البسيط : $U \cong \frac{1}{2}(mgl/l)s^2$. (١٠,١٣٩) □ في مجال جاذبية الأرض ، تناظر الطاقة السالبة الحركة المحدودة والطاقة الموجبة الحركة اللامحدودة .

□ إن أي نظام يكون لطاقة وضعه قيمة صغرى يستطيع التذبذب في حركة توافقية بسيطة على وجه التقريب (بشرط عدم تلاشي المشتقة الثانية لطاقة الوضع U عند)
□ إن الطاقة مفهوم موحد في العلوم نظراً لقابليتها للتحويل إلى صور متعددة ونظراً لحفظها .

أسئلة

س ١٠,١ للشغل والعزم الدوراني نفس البعد ، كما يُقاس كلاهما بوحدات نيوتن متر . فهل يعني هذا أن العزم شكل من أشكال الطاقة ؟ فسر . بند ١٠,١

س ١٠,٢ قذفت كرة رأسياً إلى أعلى ثم التفتت عند نفس المستوى الذي قذفت منه . (١) لماذا لا تبدل قوة الجاذبية مُحَصِّلَةً شغل على الكرة ؟ (٢) افرض أن مقاومة الهواء من الأهمية بحيث أن سرعة الكرة عند التقاطها تكون أقل بكثير من سرعتها عندما قذفت . فلماذا تستمر قوة الجاذبية بعدم بذل محصلة شغل على الكرة ؟ (٣) هل يكون الشغل الذي يبذله الهواء على الكرة في الحالة الأخيرة موجباً ، سالباً ، أم صفراً ؟

س ١٠,٣ لماذا يكون حمل ثقلي كبير مُثَمِّلاً رغم أننا لا نبذل شغلاً في ذلك ؟

س ١٠,٤ (١) هل تُوفِّر المعادلة ١٠,١ تعريفاً عملياً للشغل ؟ (٢) هل الشغل كمية قياسية بالتعريف أم بالتأكيد العملي أم بكليةها ؟ (٣) هل الشغل كمية قياسية حقيقية أم كاذبة pseudoscalar ؟

س ١٠,٥ عبّر عن الطاقة الحركية لجسيم بدلالة (أ) زخمه وكتلته ؛ و (ب) زخمه وسرعته . (التعبير الأول مفيد غالباً ، أما الثاني فنادر ما يكون كذلك .)

س ١٠,٦ إذا سقطت كرة مسافة ١ م من السكون ، فإنها تكتسب سرعة ٤,٤ م/ث ؛ أما إذا بدأت سقوطها بسرعة ١٠ م/ث ، فإن سرعتها تزيد ٠,٩ م/ث فقط عند سقوطها مسافة ١ م . قلم هذا الفرق ؟ وكيف تعمل هذه الأرقام بشكل غير مباشر على دعم فائدة مفهوم الطاقة ؟

س ١٠,٧ مراقبان يقيسان كتلة جسيم ، وطاقته الحركية ، ومركبة x لسرعته . لأي من هذه الكميات الثلاث يحصلان على نفس القيمة العددية إذا استخدمنا نظامي إحداثيات ديكارتية لها (أ) توجيهان orientations مختلفان بدون سرعته نسبية ؟ (ب) توجيهان مختلفان ويكونان في حالة حركة نسبية ؟

س ١٠,٨ يقوم كوكب بحركة دائرية حول نجم . (١) اشرح لماذا لا يبذل النجم شغلاً على الكوكب . بند ١٠,٣
(٢) سم كميتين تظان ثابتين واثنتين تتغيران خلال مجرى الحركة هذه .

س ١٠,٩ يقترب جُسَيْمُ ألفا طاقته ١٠ مغ . ف من نَوَاقٍ اقتراباً مباشراً head-on ويرتد من حيث أتى .
(١) فما الشغل الذي تبذله النَوَاقُ على جُسَيْمِ ألفا حتى لحظة وصوله إلى نقطة نَحْوِهِ turning point (نقطة أدنى اقتراب) ؟ (٢) وما الشغل الذي تبذله النَوَاقُ على جُسَيْمِ ألفا خلال حركته الكاملة نحو النَوَاقِ وبعيداً عنها ؟

س ١٠,١٠ لا تبذل قُوَى الجاذبية أَيْةَ محصلة شغلٍ على رائد فضاء أثناء رحلة فضائية كاملة ، استهلالاً بلحظة الإقلاع lift-off وحتى الهبوط touchdown ثانية على الأرض . فهل يبذل دفع الصاروخ أَيْةَ محصلة شغلٍ عليه ؟ هل يبذل انجرار الهواء الاحتكاكي أَيْةَ محصلة شغلٍ عليه ؟ وهل تبذل كل القوى مجتمعة أَيْةَ محصلة شغلٍ عليه ؟

س ١٠,١١ صِفْ نظاماً مكوناً من جُسَيْمَيْنِ زَحْمُهُ صفرٌ وزخمُهُ الزاويُّ صفرٌ لكن طاقته الحركية لا تساوي صفرأ .

بند ١٠,٤

س ١٠,١٢ نَظِلْ الطَّاقَةَ الحركية الكليَّةَ لجزيئات عَيِّنَةٍ من الغاز ثابتة عند درجة حرارة ثابتة . فإذا يستلزم هذا للشغل المبذول على الجزيئات بواسطة القوى المتبادلة بينها ؟

س ١٠,١٣ يَضَعُ رجلٌ زنبركاً بين يديه بحيث يظلُّ مركز كتلة الزنبرك ساكناً . فهل بُذِلَتْ أَيْةُ محصلة شغلٍ على الزنبرك ؟ أوردُ سبباً لإجابتك .

س ١٠,١٤ اصطدمَ جسمان A و B اصطداماً مرناً (دون تغيير في طاقتها الحركية الكليَّة) - ممَّا يعني أنَّ الشغل الكليَّ المبذول على A و B يساوي صفرأ . (١) فهل الشغل المبذول على A بمفرده يساوي صفرأ ؟ (٢) وهل الشغل الكليَّ المبذول على A و B يساوي صفرأ عند كل لحظة خلال التصادم ، أو فقط للفترة بأكملها التي تبدأ قبل التصادم وتمتد إلى ما بعد انتهائه ؟

س ١٠,١٥ آلة تعمل ببطارية تتدلى من نقطة تعليق ثابتة في منطقة مُقَرَّعة . فإذا كانت الآلة ساكنة في البداية ، فهل تستطيع أن تبدأ بالتذبذب بمفردها ؟

س ١٠,١٦ بأيِّ مظهر تتجلى الطَّاقَةُ كنتيجة لكلٍّ من أمثلة الشغل الآتية : (أ) الشغل الذي يبذله قاذفُ كرة القاعدة على الكرة ؛ (ب) الشغل الذي تبذله كرة القاعدة على قُفَّازِ mitt لاقط الكرة ؛ (ج) الشغل المبذول في دفع مضخة نفخ الإطارات tire pump ؛ (د) الشغل الذي يبذله مضعدٌ في رفع الرِّكَّاب ؛ و (هـ) الشغل الذي يبذله البُخَّارُ لإدارةِ نصالِ التربين turbine blades ؟

بند ١٠,٥

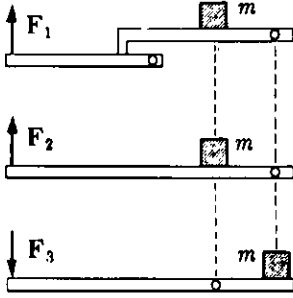
س ١٠,١٧ ينصُّ كتابُ اسمه « علمُ البيئَةِ في البيت » :

(Ecology at Home (J. Killeen, ed. [San Francisco: 101 Productions, 1971])

على أنَّ « معدلَ الواطِّ wattage rating لأداةٍ هو عددُ الوطَّاتِ المستهلكة في ساعة » . أنقذ هذه العبارة ، وصحَّحها .

بند ١٠,٦

س ١٠,١٨ دُفعَ طرفُ رافعةٍ إلى أسفل بسرعة بحيث تسارع الجمل عند الطرف الآخر إلى أعلى . (١) فهل يحتاج هذا إلى قوة أكبر من دفع بطيء ثابت ؟ لم أولم لا ؟ هل الشغل الخارج لا يزال يساوي الشغل الداخل ؟



س ١٠,١٩ لماذا يكون الضرر بالغاً على وجه الخصوص عند حشر إصبع في شق باب من ناحية المفصلة hinge ؟

س ١٠,٢٠ سم كميتين غير القوة يمكن « مضاعفتها » بأدوات ميكانيكية دون خرق قانون حفظ الطاقة . صف أدوات بسيطة يمكن استخدامها لزيادة كل من الكميتين المذكورتين .

س ١٠,٢١ استخدمت القوى F_1 ، F_2 ، و F_3 لدفع أقالٍ متساوية ، باستخدام الروافع المبينة في شكل ١٠,٢٩ (تدل الدوائر الصغيرة على نقاط المحور) . رتب القوى الثلاث تصاعدياً من حيث المقدار . هل يتساوى أي من القوى ؟

شكل ١٠,٢٩ : سؤال ١٠,٢١ .

بند ١٠,٧

س ١٠,٢٢ (١) أورد مثالاً تكون فيه الطاقة الحركية مصدراً للشغل - بمعنى أن نقصان الطاقة الحركية لنظام يساوي الشغل الذي يُنجزه النظام . (٢) أورد مثالاً تكون فيه طاقة الوضع مصدراً للشغل بدون تغيير في الطاقة الحركية .

س ١٠,٢٣ تطلّ سرجته راكب دراجة ثابتة أثناء السير بها أسفل تل باتجاه معاكس للرياح . (١) فما القوى من نمط ١ (المعتمدة على الوضع) التي تؤثر على نظام الدراجة وراكبها ؟ (٢) وما القوى من نمط ٢ (المعتمدة على متغيرات أخرى) التي تؤثر على النظام ؟ (٣) أي من خواص النظام الآتية يظل ثابتاً ، وأياً يزيد ، وأياً ينقص : (أ) الطاقة الحركية ؛ (ب) طاقة الوضع ؛ (ج) الطاقة الميكانيكية ؛ (د) الشغل الذي أنجزته جميع القوى المؤثرة على النظام منذ بدء الحركة أسفل التل ؛ و (هـ) الشغل الذي أنجزته القوى المحافظة منذ بدء الحركة أسفل التل .

س ١٠,٢٤ هل القوة المغناطيسية المؤثرة على جسيم مشحون متحرك هي قوة من نمط ١ (أي تعتمد فقط على موضع الجسيم) أو قوة من نمط ٢ (تعتمد على متغيرات أخرى) ؟

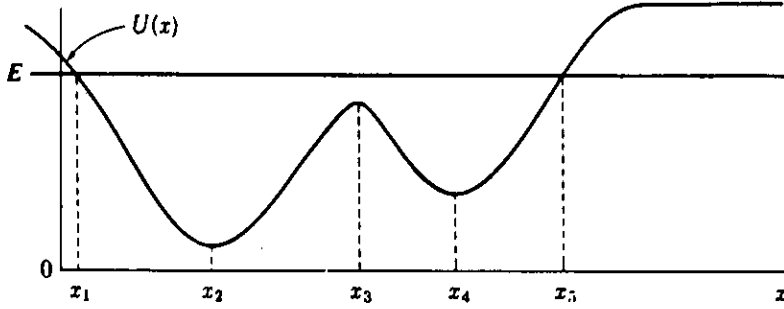
س ١٠,٢٥ يقوم عامل في خط تجميع assembly line بعملية متكررة تقتضي منه أن يدفع مشبكاً clip بقوة تعتمد فقط على موضع المشبك . فهل تفرق هذه القوة بطاقة وضع ؟

بند ١٠,٨

س ١٠,٢٦ أورد وصفاً نوعياً لحركة جسيم تتمثل بشكل ١٠,٣٠ المبين أدناه . أشير إلى أية سمات ذات أهمية عن الحركة عندما يكون الجسيم عند النقاط x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 ، و x_5 .

س ١٠,٢٧ كيف تتغير الخصائص النوعية لحركة الجسيم الواردة في السؤال السابق إذا (أ) تناصفت ، أو (ب) تضاعفت الطاقة E ؟

س ١٠,٢٨ كيف يمكن تمثيل حائط جاسي مثالي في رسم طاقي ؟ كيف يمكن تمثيل حائط حقيقي - حائط يستجيب قليلاً عند ضربه ويؤثر فقط بقوة محدودة - في رسم طاقي ؟



شكل ١٠,٣٠ : سؤال ١٠,٢٦ .

س ١٠,٢٩ (١) كيف يمكن تمثيل قمر صناعي في مدار دائري في الرسم الطاقوي المبين في شكل ١٠,٢٠ ؟
(٢) وكيف يمكن تمثيل قمر صناعي في مدار إهليلجي ؟

س ١٠,٣٠ هل هناك فائدة كبيرة في إطلاق سفينة فضائية مدارية من منطقة على ارتفاع ١ إلى ٢ ميل فوق سطح البحر بدلاً من إطلاقها عند سطح البحر ؟ اعتبر كلاً من الجاذبية ومقاومة الهواء .

س ١٠,٣١ لماذا كان الدولاب اختراعاً يمثل هذه الأهمية ؟

بند ١٠,٩

س ١٠,٣٢ يبدأ طوق ، وأسطوانة مضمتة ، وكرة مضمتة بالتدحرج أسفل مستوى معاً . بأي ترتيب تصل القاعدة ؟

س ١٠,٣٣ نُظِّم سباق بين كتلة تنزلق بدون احتكاك أسفل مستوى ، وجسم أسطواني يتدحرج أسفل مستوى مجاور ومواز . فلماذا لا يكون للأسطوانة أي حظ في الفوز ، مهما كانت كتلتها ، أو نصف قطرها ، أو التوزيع الداخلي لكتلتها ؟

س ١٠,٣٤ تنزل كرة مطاطية وهي في مسارها الهوائي المنحني . فهل من الممكن ، بعد ارتدادها عن الرصيف ، أن تصل إلى ارتفاع يربو على ارتفاعها الأقصى قبل الارتداد ؟

س ١٠,٣٥ إذا كانت القدرة الناتجة لحركٍ معين تتناسب مع السرعة الزاوية لعمود إدارته ، فكيف يعتمد عزم الدوران الناتج للمحرك على السرعة الزاوية ؟

س ١٠,٣٦ اشرح لماذا تدعى القوة التي لا تنجز شغلاً فوق مسار مغلق « بالمحافظة » .

بند ١٠,١٠

س ١٠,٣٧ كيف يمكن لقوة أن تكون غير محافظة دون خرق قانون حفظ الطاقة العام ؟ سم قوة واحدة غير محافظة .

س ١٠,٣٨ مشبك أمان safety pins متشابهان ذابا تماماً في حوضي حمامين متشابهين ، حيث كان قد وُضِعَ أحد المشبكين في الحمام دون ربطه unfastened بينما كان الآخر مربوطاً . فإذا حدث لطاقة الوضع الإضافية للمشبك الأمان مربوط ؟

تحولات الطاقة

س ١٠,٣٩ عند حَمَلِ مُكْعَبِ سَكَّرٍ بحيث يكادُ بِلَامْسِ القَهْوَةِ في فنجان ، تصعدُ بعضُ القَهْوَةِ إلى مكعبِ السَكَّرِ ، فَيَنْدَلُ شغلُ لرفعِها في مجالِ جاذبيَّةِ الأرض . فما مصدرُ هذا الشغلِ ؟ أي ما نقصُ الطَّاقةِ الذي يَحْدُثُ للتَّعويضِ عن الزَّيادةِ النَّاتِجَةِ في طاقةِ وضعِ القَهْوَةِ ؟

تمارين

مقارناتُ الطَّاقةِ

ت ١٠,١ أوجِذْ بِالرَّجوعِ إلى مصدرِ خارجيٍّ « استهلاك » الفردِ السَّنويِّ للطَّاقةِ في بلدِكَ . احسبْ رقماً نموذجيًّا للطَّاقةِ التي يَتَرَوَّدُ بها الإنسانُ الرَّاشِدُ في السَّنةِ من الغذاءِ الذي يَتناولُه . قارِنْ بينَ الرَّقْمَيْنِ . (تذكَّرْ أَنَّ السَّعْرَ الغِذائيَّ يُعَادَلُ كيلوسُعْراً ، أو ٤٠٠٠ ج تقريباً .)

ت ١٠,٢ يتناغُ مَواطنُ يَهْتِمُ بقضايا البيئةِ فرشاةُ أَسنانٍ كهربائيَّةٍ قدرتها ٧ و ، وينوي استخدامها ٤ د يوميًّا . وللتَّعويضِ عن استخدامِ الطَّاقةِ هذا ، فَإِنَّهُ يَقَرُّرُ الحُدُّ من استخدامِ سيارتهِ . فإذا كانتِ قدرَةُ السَّيَّارةِ حوالي ٥٠ حصاناً ، فما القدرُ من قيادةِ السَّيَّارةِ الذي يجبُ أَنْ يتنازلَ عنه سنويًّا ؟

ت ١٠,٣ احسبْ وقارِنِ الطَّاقَاتِ الآتِيَةَ بِوَحَدَاتٍ . ف : (أ) الطَّاقةُ الحركيَّةُ لذَرَّةِ هيدروجينٍ سرعتها $v = 10 \times 10^3$ م/ث ؛ وهذه قيمةٌ نموذجيَّةٌ للطَّاقةِ الحراريَّةِ العاديَّةِ ؛ (ب) طاقةُ فوتونِ ضوءٍ أحمرٍ ينبعثُ من الهيدروجينِ بترددٍ $\nu = 4,6 \times 10^{14}$ هرز ($E = h\nu$) ؛ (ج) الطَّاقةُ المنبعثةُ لكلِّ ذَرَّةٍ H في قنبلةِ هيدروجينيَّةٍ H-bomb إذا تحوَّلَ ١ جزءٍ من ٢٠٠ من الكتلةِ إلى طاقةٍ ؛ و(د) الطَّاقةُ الحركيَّةُ لبرغوثِ flea كتلتهُ ١,٠ غ يتحرَّكُ ببطءٍ بسرعةٍ ٠,١ سرم/ث .

ت ١٠,٤ تَقاسُ الطَّاقةُ المنبعثةُ في الانفجاراتِ النَّوَوِيَّةِ بِوَحَدَاتِ الكيلوطنِ أو الميغاطنِ . وه الطَّنْ ، وَحْدَةٌ للطَّاقةِ تُعَادَلُ $4,2 \times 10^9$ ج ؛ فهو الطَّاقةُ المنبعثةُ في الانفجارِ الكيميائيِّ لطنٍّ واحدٍ من مادَّةٍ في إن تي . (١) عبَّرْ بالكيلوطنِ عن الطَّاقةِ الحركيَّةِ لعشرةِ آلافِ كرم^٣ من الهواءِ (الهواءُ فوق مقاطعةِ county صغيرة) الذي يتحرَّكُ بسرعةٍ ٥ م/ث (نسيمٌ خفيفٌ) . خذْ متوسطَ كثافةِ الهواءِ على أنَّه ١ كغم/م^٣ . (٢) إذا أمكنَ التَّحَكُّمُ في طاقةِ قنبلةِ هيدروجينيَّةٍ ، طاقتها ١٠ ميغاطنٍ ، لرفعِ عابرةٍ محيطاتٍ ocean liner كتلتها ١٠^٧ كغم ، فهل يمكنُ وَضْعُ السَّفِينَةِ في مدارٍ حولِ الأرضِ ؟ (تزوَّدنا المعادلةُ ١٠,١٠٢ برقمٍ مفيدٍ .)

ت ١٠,٥ (١) كم جَولاً من الطَّاقةِ تزوَّدنا بها سنويًّا محطَّةُ كهرباءٍ نوويَّةٍ قدرتها ٥٠ ميغواط ؟ (٢) ما مقدارُ الكتلةِ التي تتحوَّلُ إلى طاقةٍ في هذه المحطَّةِ سنويًّا إذا كانتِ تُولَّدُ ، بالإضافةِ إلى ٥٠ ميغواطٍ من القدرةِ النَّافعةِ ، ١٠٠ ميغواطٍ من الحرارةِ الضَّائعةِ ؟ (٣) ما مقدارُ الكتلةِ التي تتحوَّلُ سنويًّا إلى طاقةٍ في محطَّةٍ كهربائيَّةٍ تَسْتَخْدِمُ الفحمَ كوقودٍ ولها نفسُ القُدرةِ capacity والفعاليَّةِ efficiency ؟

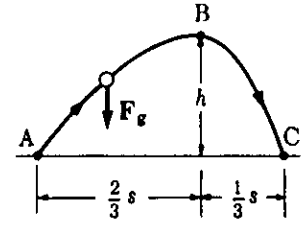
ت ١٠,٦ دَفَقُ الطَّاقةِ فوق الغلافِ الجَوِّيِّ الذي يصلُّنا من الشَّمْسِ هو $1,39 \times 10^3$ ج/م^٢ ث . (١) احسبْ المعدَّلَ الكُلِّيَّ للطَّاقةِ التي تشعُّها الشَّمْسُ بِوَحَدَاتِ ج/ث ، على فرضِ أَنَّ هذا الإشعاعُ متكافئُ الاتِّجاهاتِ . (٢) ما معدَّلُ تحوُّلِ الكتلةِ إلى طاقةٍ في الشَّمْسِ بِوَحَدَاتِ كغم/ث ؟ (٣) كم تستغرقُ الشَّمْسُ في تحويلِ كتلةٍ مُعَادِلَةٍ لكتلةِ الأرضِ إلى طاقةٍ ؟

بند ١٠,١

ت ١٠,٧ (١) تؤثر قوتان ثابتتان F_1 و F_2 على جسيم . بين أن الشغل المبذول على الجسيم هو مجموع الشغلين المبذولين بواسطة القوتين عندما تؤثران على انفراد . (٢) يتحرك جسيم من F_1 إلى F_2 ، ثم من F_2 إلى F_3 . أثبت أن الشغل الكلي المبذول على الجسيم بواسطة قوة ثابتة هو مجموع الشغلين المبذولين في الإزاحتين . (٣) يتم جسيم مساراً مغلقاً . فلماذا لا تبذل قوة ثابتة محصلة شغلٍ عليه ؟

ت ١٠,٨ قطرة ماء كتلتها m تسقط رأسياً بسرعة نهائية ثابتة v_0 . فما الشغل المبذول عليها عندما تسقط مسافة l (أ) بواسطة قوة الجاذبية ، و (ب) بواسطة قوة مقاومة الهواء ؟

ت ١٠,٩ كرة خفيفة تنبع في الهواء المسار المبين في شكل ١٠,٣١ . فما الشغل الذي تبذله قوة الجاذبية على الكرة عندما تتحرك (أ) من A إلى B ؟ (ب) من B إلى C ؟ (ج) من A إلى C ؟



شكل ١٠,٣١ : تمرين ١٠,٩

ت ١٠,١٠ إرجع إلى مثال ٢ في بند ١٠,١ وإلى شكل ١٠,٣ . (١) ما الشغل الذي تبذله العربة على الغلام الذي يجرها في الإزاحة ذات المقدار ٢ م ؟ (٢) ما محصلة الشغل الذي تبذله سائر القوى المؤثرة على العربة ، إذ تتحرك العربة بسرعة ثابتة خلال إزاحة مقدارها ١ م ؟

ت ١٠,١١ يقوم جسيم إحداثياً موضعه x, y في مستوى بالإزاحات الخطية المستقيمة التالية : (أ) من $0, 0$ إلى $0, 2a$ ؛ (ب) من $0, 2a$ إلى $2a, 2a$ ؛ (ج) من $2a, 2a$ إلى $2a, 0$ ؛ و (د) من $2a, 0$ إلى $0, 0$. (١) أوجد الشغل المبذول على الجسيم في كل جزء من حركته بواسطة القوة a, a . (٢) ما الشغل الكلي المبذول على الجسيم ؟ قارن هذا مع الشغل الذي قد يُبذل في إزاحة خطية مستقيمة من $0, 0$ إلى a, a .

ت ١٠,١٢ في مهرجان rally لسيارات سباق ، يقود رجل سيارة كتلتها ١٠٠٠ كغ حول مسار دائري نصف قطره ١٠٠ م كان قد جرى تخطيطه على جانب تل . ويمكن تقريب التل بمستوى يميل بزاوية ١٠° على الاتجاه الأفقي . فما الشغل الذي تبذله الجاذبية على السيارة عندما تتحرك (أ) من النقطة العالية إلى النقطة المنخفضة من الدائرة ؟ (ب) من النقطة المنخفضة إلى النقطة العالية ؟ (ج) مرة واحدة حول الدائرة ؟

ت ١٠,١٣ سيارة كتلتها ٣١٠ كغ تعطلت على طريق مستوية . فيدفع رجل السيارة إلى الأمام بدءاً من السكون بقوة ثابتة مقدارها ٢٠٠ ن لمدة ٥ ث . على فرض أن السيارة تتدحرج باحتكاك مهمَل ، احسب الكميات الآتية : (أ) سرعة السيارة بعد ٥ ث ؛ (ب) المسافة المقطوعة ؛ (ج) الطاقة الحركية للسيارة بعد ٥ ث ؛ و (د) الشغل الذي بذله الرجل .

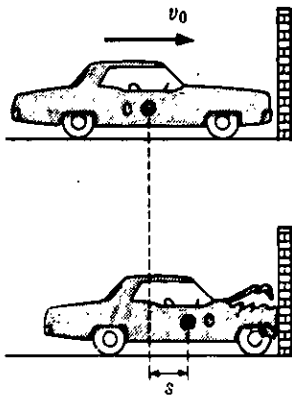
بند ١٠,٢

ت ١٠,١٤ تبدأ الكرة في شكل ١٠,٥ (ج) الحركة إلى أعلى بسرعة v_1 وترتطم بالأرض بسرعة $2v_1$. فما المسافة القصوى عن سطح الأرض التي تصل إليها ؟

ت ١٠,١٥ يكتسب إلكترون داخل أنبوبة تلفاز طاقة حركية مقدارها 10×10^{-16} ج في مسافة ٢ سم . (١) فما السرعة التقريبية للإلكترون له هذه الطاقة الحركية (الصيغة اللانسيية تكفي) ؟ ما متوسط القوة التي يجب أن تكون قد أثرت على الإلكترون لإعطائه هذه الطاقة ؟ وما متوسط القوة التي تؤثر

على الإلكترون أثناء إيقافه في شاشة التلفاز خلال مسافة 10^{-6} م ؟ قارن هذه القوة مع وزن الإلكترون .

ت ١٠,١٦ افترض عندما تؤثر الكماحات على سيارة أنه توجد مركبة أفقية ثابتة عظمى للقوة تؤثر على الإطارات بواسطة الطريق ، بغض النظر عن السرعة . أثبت عند ذلك أن مسافة التوقف الصغرى تتناسب مع مربع السرعة الابتدائية . هل تنطبق هذه النتيجة تقريباً على الواقع ؟



شكل ١٠,٣٢ : تمرين ١٠,١٨ .

ت ١٠,١٧ تحدد الطاقة الحركية لسفينة فضاء عند اختراقها الغلاف الجوي تقريباً بالعلاقة $K = K_0 - As$ ، حيث K_0 هي الطاقة الحركية للسفينة عند زمن ابتدائي معين ، و s المسافة التي قطعتها بعد ذلك الزمن ، و A مقدار ثابت . (١) فما المدلول الفيزيائي للثابت A ؟ (٢) كيف تعتمد K على الزمن ؟ (٣) كيف يعتمد تسارع السفينة على المسافة وعلى الزمن ؟

ت ١٠,١٨ كشفت دراسات تصادمات السرعة المنخفضة للسيارات بالحدران الجاسئة (أنظر شكل ١٠,٣٢) عن الحقيقتين التاليتين : (أ) إن تسارع مركز كتلة سيارة أثناء إيقافها بواسطة حائط تتناسب تقريباً مع السرعة الابتدائية v_0 . (ب) تكاليف التصليح تتناسب تقريباً مع الطاقة الحركية الابتدائية K_0 . (١) فكيف تعتمد «مسافة التهشم» s (المسافة التي ينحرفها مركز كتلة السيارة أثناء التصادم) على v_0 ؟ (٢) وكيف تعتمد تكاليف التصليح على مسافة التهشم ؟

بند ١٠,٣

ت ١٠,١٩ يسير رجل كتلته ٧٠ كغ من الطابق الثالث إلى الطابق الأول في عمارة ، ثم يركب مضعداً إلى الطابق الرابع عشر . فإذا كانت المسافة بين الطوابق ٣,٥ م ، فما الشغل الذي تبذله قوة جاذبية الأرض على الرجل ؟ وما الشغل الذي يبذله المضعد عليه ؟ اشرح لماذا لا يعتمد الشغل الذي يبذله المضعد على سرعته أو تسارعه عندما يتحرك بين الطوابق .

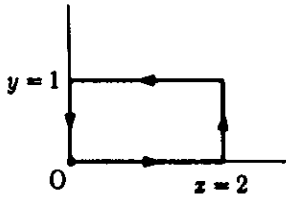
ت ١٠,٢٠ يقف غلامان على مسافة ثابتة R عن بعضهما ويتبادلان قذف كرة كتلتها m . (أ) بين أنه إذا قُذِفَت الكرة بزاوية θ مع الاتجاه الأفقي ، وجب أن تكون طاقتها الحركية الابتدائية

$$K_0 = \frac{1}{2}mgR \csc 2\theta.$$

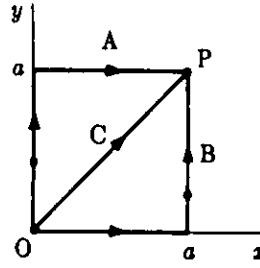
(٢) أرسم رسماً بيانياً تخطيطياً للكمية K_0 ضد θ . ما الزاوية θ التي تكون عندها K_0 نهاية صغرى ؟

ت ١٠,٢١ يتأثر جسم متحرك على امتداد خط مواز لمحور x بالقوة $F_x = -kx$. (١) أرسم رسماً تخطيطياً للقوة F_x ضد x . (٢) أوجد التكامل $\int_0^x F_x dx$. بين المعنى البياني لهذا التكامل في رسمك التخطيطي ، واذكر مدلوله الفيزيائي .

ت ١٠,٢٢ ينحرف جسيمان في مستوى xy من نقطة الأصل إلى النقطة P عند $x = a$ ، $y = a$ ، فيتحرك أحدهما على المسار A والآخر على المسار B (أنظر شكل ١٠,٣٣) . يتأثر كلا الجسيمين بقوة $F = \beta yx$ ، حيث β ثابت . أوجد الشغل الذي تبذله هذه القوة على كل من الجسيمين . هل



شكل ١٠,٣٤ : تمرين ١٠,٢٣ .



شكل ١٠,٣٣ : تمرين ١٠,٢٢ .

من الممكن أن تكون هذه القوة الوحيدة المؤثرة على الجسمين ؟
 فرع اختياري : أوجد الشغل الذي تبذله نفس القوة على جسم ثالث يتحرك في خط مستقيم من O إلى P .

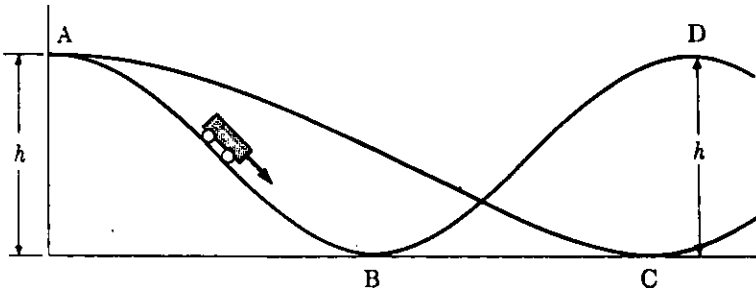
ت ١٠,٢٣ بدءاً بنقطة الأصل ، يتبع جسم المسار المستطيل المبين في شكل ١٠,٣٤ . فما محصلة الشغل المبذول عليه بواسطة القوة $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ ؟ تقاس المسافة بالأمتار ، والقوة بوحدة النيوتن .

ت ١٠,٢٤ يبين شكل ١٠,٣٥ منظراً جانبياً لمسارٍ أفقائياً roller-coaster . (١) أثبت أن الشغل الذي تبذله الجاذبية عند تدرج العربات من A إلى B يساوي الشغل المبذول عند تدرجها من A إلى C . (٢) تمر عربة بالنقطة A بسرعة ٦ م/ث والنقطة B بسرعة ٢٠ م/ث . ونقع النقطتان A و D على نفس الارتفاع ، الذي يعطى بمقدار ٢٠ م فوق النقطة B . فهل ثمة احتمال أن تتعدى العربة النقطة D في تدرجها ؟ (لا تهمل الاحتكاك) .

ت ١٠,٢٥ أُسقطت تفاحتان متساويتا الكتلة في نفس اللحظة من نفس الارتفاع h فوق سطح الأرض عند جانبيين متقابلين من الأرض . (١) فما القوة الكلية التي تؤثر على نظام التفاحتين ؟ (٢) ما التغير في زخم النظام عندما تسقط التفاحتان خلال المسافة h ؟ (٣) ما الشغل الكلي المبذول على التفاحتين أثناء سقوطها ؟ (٤) وما التغير في الطاقة الحركية للنظام ؟

بند ١٠,٤

ت ١٠,٢٦ يتحرك جسمان مختلفا الكتلة حول مركز كتلتهما الساكن . بين أن طاقتيهما الحركيتين تتناسبان عكسياً مع كتلتهما :



شكل ١٠,٣٥ : تمرين ١٠,٢٤ .

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

أشِر إلى أهمية هذه النتيجة في تبسيط وصف أنظمة كالأرض والقمر ، أو البروتون والإلكترون .

ت ١٠,٢٧ وُصِلَت عربتان متساويتا الكتلة m على بحري هوائي مستقيم بزنبرك خفيف . وتتحدد مركبتا x لسرجهتي العربتين بالعلاقين $v_1 = v_c + v_0 \cos \omega t$ و $v_2 = v_c - v_0 \cos \omega t$. (١) أعط وصفاً إنشائياً للحركة . (٢) أوجد تعبيراً يُحدِّد الطاقة الحركية الكلية مبيناً جزءها الانتقالي وجزءها الداخلي . (٣) أوجد الكتلة المختزلة لهذا النظام الثنائي الجسم وأورد وصفاً دقيقاً لحركة الجسم المفرد الفعّال .

ت ١٠,٢٨ رافع أنقال weight lifter يرفع ١٨٠ كغ مسافة رأسية مقدارها ٢ م في ٣ ث . فما متوسط قدرته الناتجة خلال هذا الزمن ؟

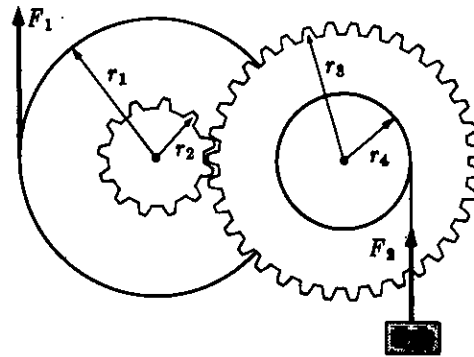
ت ١٠,٢٩ غواص هوائي يوتر بقوة ثابتة مساوية لوزنه $F = ٧٠٠$ ن ، وذلك بعد أن يبلغ سرعة نهائية مقدارها ٦٠ م/ث . إحسب القدرة التي يبذلها على الهواء . قارن هذه القدرة مع (أ) قدرة محرك سيارة ؛ (ب) متوسط الاستهلاك المتزلي للقدرة الكهربائية .

ت ١٠,٣٠ استخدم مفهوم العزم لاشتقاق الصيغة الخاصة بالفائدة الآلية لرافعة بسيطة (المعادلة ١٠,٦٥) .

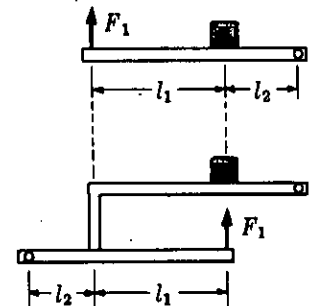
ت ١٠,٣١ يُرَفَّع دَلْو من بئر بواسطة حبل ملفوف حول عمود إدارة قطره ١٥ سم . يُدَار العمود بواسطة مقبض مرفق يمتد ٣٠ سم من محور العمود . فما القوة على المقبض اللازمة لرفع دلو ماء وزن ٨٠ ن ؟

ت ١٠,٣٢ (١) ما الفائدة الآلية للرافعة المفردة المبينة في شكل ١٠,٣٦ أدناه ؟ (٢) ما الفائدة الآلية لانتلاف الرافعتين المبين في هذا الشكل ؟

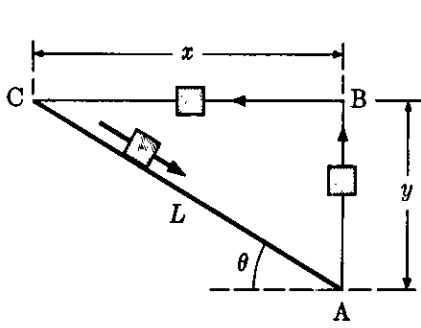
ت ١٠,٣٣ ما الفائدة الآلية لانتلاف الدولاب والترس wheel and gear المبين في شكل ١٠,٣٧ أدناه ؟ افرض أن كل دولاب يرتبط ارتباطاً جاساً rigidly attached بترسه المتحد معه بالمحور coaxial .



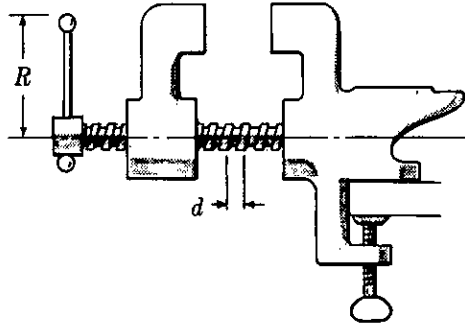
شكل ١٠,٣٧ : تمرين ١٠,٣٣ .



شكل ١٠,٣٦ : تمرين ١٠,٣٢ .



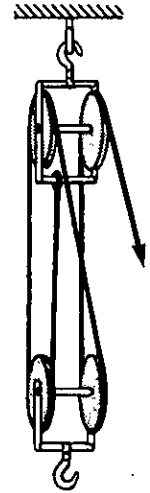
شكل ١٠,٤٠ : تمرين ١٠,٣٧ .



شكل ١٠,٣٩ : تمرين ١٠,٣٦ .

ت ١٠,٣٤ كانت البكرة block and tackle ، وهي ائتلاف مكون من عدة بكرات ، بمثابة سلف مألوف لرافعة السلسلة chain hoist . . . الفائدة الآلية للائتلاف المكون من مجموعتين مزدوجتين من البكرات (المصور في شكل ١٠,٣٨) هي ٤ . إشرح سبب ذلك .

ت ١٠,٣٥ تتكون البكرتان العلويتان لرافعة سلسلة من دولابين مُستَين sprockets ، لأحدهما ١٥ سنًا وللآخر ١٤ سنًا . (حتى تتداخل أسنان الدولابين مع نفس السلسلة ، يجب طبعاً أن تكون المسافة بين كل سنين واحدة في الدولابين .) وتستخدم رافعة السلسلة هذه لرفع نصف وزن سيارة تساوي كتلتها ١٥٠٠ كـرغ . (١) إذا كان ٨٠ بالمتة من الشغل الداخلي يظهر كشغل ناتج ، فما القوة التي يجب أن تؤثر على السلسلة ؟ (٢) هل يستطيع غلام كتلته ٣٢ كـرغ أن يؤثر بهذه القوة (أ) بالشد إلى أسفل وهو واقف على الأرض ؟ (ب) بالتعلق من السلسلة وقدماء مرفوعتان عن الأرض ؟ (جـ) بالفقر من سلم والإمساك بالسلسلة لإيقاف سقوطه ؟



شكل ١٠,٣٨ : تمرين ١٠,٣٤ .

ت ١٠,٣٦ تؤثر قوة الدّاخل على المِلْزَمة vise المبينة في شكل ١٠,٣٩ أعلاه على مسافة R من محور اللّولب . ويتقدم اللّولب مسافة d في الدورة الواحدة ، كما تؤثر القوة الناتجة عند فكّي المِلْزَمة . (١) اشتق صيغة للفائدة الآلية للمِلْزَمة ، على فرض أن الشغل يكون محفوظاً . (٢) إذا تحول نصف الشغل الداخلي إلى حرارة وظهر نصفه الآخر كشغل ناتج ، فما الفائدة الآلية ؟

ت ١٠,٣٧ تُرْفَع الكتلة m المبينة في شكل ١٠,٤٠ أعلاه رأسياً مسافة y من A إلى B ، الأمر الذي يتطلب بذل شغل مقداره mgy . ثم تنقل أفقياً مسافة x من B إلى C ، مما لا يتطلب بذل أي شغل . ومن ثم تنزل عائدة إلى A على امتداد مسار عديم الاحتكاك . إحصب طاقتها الحركية النهائية بطريقتين . (١) أوجد مركبة قوة الجاذبية على امتداد اتجاه حركتها ، ثم تسارعها ، وأخيراً سرعتها عند القاع . (٢) طبق مبدأ حفظ الطاقة مباشرة . علّق على الزايا النسبية هذين المسلكين في الحلّ .

بند ١٠,٧

ت ١٠,٣٨ سيارة كتلتها $m = ١٥٠٠$ كـرغ تتحرك على طريق مستوية بسرعة $v_0 = ٢٠$ ميلاً/س باحتكاك مهمّل وبدون تشغيل المحرك . (١) فما الطاقة الحركية للسيارة بالجلول ؟ (٢) ما أقصى ارتفاع رأسي لتلّ تصل إليه السيارة ؟ بين أن هذا الارتفاع لا يعتمد على كتلة السيارة .

ت ١٠,٣٩ أُطْلِقَتْ قَذِيفَةٌ كَتْلَتُهَا ١٠ كِغْ رَاسِيًّا إِلَى أَعْلَى بِسْرَعَةٍ ابْتِدَائِيَّةٍ مَقْدَارُهَا ٦٠٠ م/ث . (١) إِذَا أَهْمِلَ احتكاكُ الهواءِ ، فما أَقصى ارتفاعَ تَبْلُغُهُ القَذِيفَةُ ؟ (٢) إِذَا بَدَّدَتْ فِي طَرِيقِهَا إِلَى أَعْلَى 8×10^4 ج على صورة حرارة ، فما الارتفاعُ الذي تصلُ إليه ؟ (في كلا الجُزْأَيْنِ ، اِهْمِلْ تَفَاوُتَ قُوَّةَ الجاذبيَّةِ مع الارتفاع .)

ت ١٠,٤٠ تَبْذُلُ فِتَاةٌ ١٢ ج من الشغل في رَفْعِ كِتَابٍ كَتْلَتُهُ ١ كِغْ مَسَافَةً ١ م . فما التَّغْيِيرُ في (أ) طَاقَةِ الوضعِ U ؟ (ب) الطَّاقَةِ الحَرَكِيَّةِ K ؟ (ج) الطَّاقَةِ الميكانيكيَّةِ $K + U$ ؟

ت ١٠,٤١ قُدِيفَ طَائِرُ مِنَ البَلاستيكِ plastic flying saucer (frisbee) كَتْلَتُهُ ٧٥ غ من ارتفاع ١ م عن سطح الأرض بِسْرَعَةٍ ١٢ م/ث . وعندما أَصْبَحَ على ارتفاع ٢ م فوق سطح الأرض ، قِيسَتْ سْرَعَتُهُ فَوُجِدَتْ بِأَنَّهَا ١٠,٥ م/ث . (١) فما الشغلُ الذي بَدَّلَهُ الهواءُ على الطَّبَقِ الطَّائِرِ ؟ (٢) وما الشغلُ الذي بَدَّلَتُهُ الجاذبيَّةُ عليه ؟

ت ١٠,٤٢ (١) أَكْتُبْ مَعَادِلَةَ حَفْظِ الطَّاقَةِ لِقَذِيفَةٍ تَتَحَرَّكُ بَدُونِ احتكاكٍ في بُعْدَيْنِ ، عَبرَ عُنَا بِدَلَالَةِ المَرَكَبَةِ الأَفْقِيَّةِ لِسَرِجَةِ القَذِيفَةِ v_x ، والمَرَكَبَةِ الرَّاسِيَّةِ لِسَرِجَتِهَا v_y ، وَمَسَافَتِهَا y فوق مَسْتَوًى إِسْنَادٍ مُعَيَّن . ما عَدَدُ التَّوَابِتِ القَابِلَةِ لِلتَّعْدِيلِ adjustable التي تَحْوِيهَا هَذِهِ المَعَادِلَةُ ؟ (٢) هَلْ يُمْكِنُ الاسْتِنَاجُ من هَذِهِ المَعَادِلَةِ وَحْدَهَا بِأَنَّ v_x ثَابِتَةٌ و v_y مُتَغَيِّرَةٌ ؟ لِمَ أَوْ لِمَ لَا ؟

ت ١٠,٤٣ (١) إِسْتخدِمْ اعتباراتِ طَاقِيَّةٍ كَي تُبَيِّنَ أَنَّ الارتفاعَ الأقصى لِكُرَةِ قَاعِدَةٍ مَقْدُوفَةٍ هُوَ

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} ,$$

حيث v_0 هِيَ السَّرْعَةُ الْابتِدَائِيَّةُ لِلِكُرَةِ و θ الزَّاوِيَةُ الْابتِدَائِيَّةُ لِمَسَارِهَا فوق المَسْتَوًى الأفقيّ . (٢) أَوْجِذْ عِلَاقَةً لِلنَّسْبَةِ v_{top}/v_0 ، حيث v_{top} سْرَعَةُ الكُرَةِ عِنْدَ أَعْلَى نَقْطَةٍ فِي مَسَارِهَا .

ت ١٠,٤٤ صَارُوخٌ سَيُّ الحِظِّ يَرْفَعُ ببطءٍ إِلَى ارتفاع ١ كِغْ ، حيث أَنَّ دَفْعَهُ يَسَاوِي وَزَنَهُ تَقْرِيبًا . يَنْقَلِبُ عِنْدَ ذَلِكَ رَاسًا عَلَى عَقِبٍ وَيَنْدَفِعُ رَاسِيًّا إِلَى أَسْفَلٍ ، وَدَفْعُهُ مَا زَالَ يَسَاوِي وَزَنَهُ . (١) فما السَّرْعَةُ الَّتِي يَتَحَطَّمُ بِهَا عَلَى الأَرْضِ ؟ (٢) أَوْرِدْ تَعَابِيرَ جَبْرِيَّةً لَطَاقَةِ وَضْعِهِ وَطَاقَتِهِ الحَرَكِيَّةِ بِدَلَالَةِ المَسَافَةِ الرَّاسِيَّةِ أَثْنَاءَ صَعُودِهِ وَهَبُوطِهِ . لِمَاذَا لَا تَكُونُ طَاقَتُهُ الميكانيكيَّةُ مُحْفُوظَةً ؟ (اِهْمِلْ أَيَّ تَغْيِيرٍ فِي كَتْلَةِ الصَّارُوخِ أَثْنَاءَ رَحَلَتِهِ .)

ت ١٠,٤٥ الْكُتْرُونُ ذُو شِحْنَةٍ $-e$ فِي مَجَالٍ كَهْرَبَائِيٍّ مُنْتَظَمٍ E يَتَأَثَّرُ بِقُوَّةٍ مَقْدَارُهَا $F = eE$. هَبْ أَنَّ هَذِهِ الْقُوَّةَ تُؤَثِّرُ إِلَى الْيَسَارِ وَأَنَّ الْإِتْجَاهَ الْمَوْجِبَ لِمُحَوَّرِ x هُوَ إِلَى الْيَمِينِ $(F_x = -eE)$. (١) أَوْجِذْ تَعْبِيرًا لَطَاقَةِ وَضْعِ الْإِلِكْتْرُونِ فِي مَجَالِ الْقُوَّةِ هَذَا . (٢) هَلْ يَكُونُ مَوْقِعُ صَفْرِ طَاقَةِ الْوَضْعِ اعْتِبَاطِيًّا فِي هَذَا الْمَثَالِ ؟

ت ١٠,٤٦ يَتَأَثَّرُ جُسَيْمٌ مُتَحَرِّكٌ عَلَى امْتِدَادِ مُحَوَّرِ x بِالْقُوَّةِ $F_x = -k_1x + k_2x^3$. (١) فما دَالَّةُ طَاقَةِ الْوَضْعِ $U(x)$ ، إِذَا اخْتَبِرَتْ $U(0)$ لَأَنَّ تَكُونُ صَفْرًا ؟ (٢) مَا الشغلُ الَّذِي تَبْذُلُهُ هَذِهِ الْقُوَّةُ عَلَى الْجُسَيْمِ عِنْدَمَا يَتَحَرَّكُ مِنْ $-x_0$ إِلَى $+x_0$ ، حيث $x_0 = \sqrt{k_1/k_2}$ ؟ (٣) مَا التَّغْيِيرُ فِي الطَّاقَةِ الحَرَكِيَّةِ

للجسيم عندما يتحرك من $x = x_0$ إلى $x = 0$ ؟

ت ١٠,٤٧ طاقة وضع جسيم يتحرك في بُعد واحد هي

$$U = \frac{1}{2}k(x - a)^2 + mg(x - a).$$

(١) فما القوة المؤثرة على الجسيم ؟ (٢) إذا كان الجسيم يتحرك بطاقة ثابتة E ($K + U = E$) ، فما النقطة التي تكون عندها الطاقة الحركية أكبر ما يمكن ؟ وما قيمتا K و U عند هذه النقطة ؟

ت ١٠,٤٨ تتناقص الطاقة الميكانيكية للمذبذب توافقياً بمقدار ١ بالمئة في كل ذبذبة ، بحيث تصبح طاقته $E_1 = 0.99E_0$ بعد ذبذبة واحدة ؛ $E_2 = (0.99)^2 E_0$ بعد ذبذبتين ؛ و $E_n = (0.99)^n E_0$ بعد n ذبذبة . (١) بين أن طاقة المذبذب تتحدد تقريباً بالعلاقة

$$E \cong E_0 e^{-1/t},$$

حيث $\tau \cong 100T$ (T هي دورة المذبذب) . (٢) ما القدرة التي تنتقل من المذبذب إلى محيطه كدالة في الزمن ؟

ت ١٠,٤٩ تفقد كرة ٢٠ بالمئة من طاقتها الحركية عندما ترتد عن حائط صلب . ويكون نقصان طاقتها عن طريق الاحتكاك بالهواء مهملاً . (١) فما السرعة الابتدائية التي يجب أن تُقذف بها الكرة إلى أسفل من ارتفاع h حتى ترتد إلى نفس الارتفاع ؟ (٢) بين في رسم توضيحي طاقتي تاريخ الكرة منذ لحظة إطلاقها إلى أن تعود إلى نقطة بدايتها .

بند ١٠,٨

ت ١٠,٥٠ مضرب تنس متحرك بسرعة v_1 يضرب كرة طاولة متحركة بسرعة v_0 . بين أن السرعة القصوى للكرة المرتدة هي $v_0 + 2v_1$.

ت ١٠,٥١ معادلة حفظ الطاقة لجسم يتحرك رأسياً قرب سطح الأرض هي

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + mgz = E.$$

تحقق بالتعويض من أن $z = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ هو حل لهذه المعادلة . كيف ترتبط الطاقة E بالثابتين z_0 و v_0 ؟

ت ١٠,٥٢ تتأثر ذرة في بلورة عند إزاحتها عن موضع اتزانها ($x = 0$ صفرًا) بقوة مُرجعة (قوة إعادة) restoring force تتناسب مع إزاحتها (تحدد هذه القوة بالمعادلة ١٠,٨٤) . اعتبر ذرة ثابت قوتها هو $k = ٨٠٠$ ن/م ، ونهتز بطاقة ١ ء ف . (١) فما إزاحتها القصوى x_{lim} ؟ (٢) إذا كانت كتلة الذرة ٤×١٠^{-٢٦} كـرغ ، فما (أ) سرعتها القصوى ، و (ب) تسارعها الأقصى ؟ (٣) ما قيم x التي تتحقق عندها السرعة القصوى والتسارع الأقصى ؟

ت ١٠,٥٣ يتأثر جسم متحرك على امتداد محور x بالقوة $F_x = -ax^2 - bx$ ، حيث $a = ٦$ ن/م^٢ و $b = ٤$ ن/م . (١) أرسم رسماً بيانياً تخطيطياً للقوة F_x ضد x . (٢) أوجد دالة لطاقة

الوضع ، $U(x)$ ، وخطط رسماً بيانياً لها ضد x . (٣) تُعَبَّرُ $U(x) = \frac{1}{2}bx^2$ تقريباً جيداً لقيم x الصغيرة . فلماذا ؟ (٤) ما قيم x التي يكون عندها تقريب المذبذب التوافقي هذا لطاقة الوضع $U(x)$ صحيحاً ضمن حدود ١٠ بالمئة ؟ وما قيم x التي يكون عندها صحيحاً ضمن حدود ١ بالمئة ؟

ت ١٠,٥٤ دالة طاقة الوضع للحركة الأحادية البُعْد لجسيم هي

$$U(x) = A(1 - \cos \alpha x).$$

(١) خطط رسماً بيانياً لطاقة الوضع U ضد x ، مع الانتباه إلى شكلها بالقرب من $x = 0$.
(٢) عند قيم x الصغيرة ($x \ll 1/\alpha$) وقيم الطاقة الصغيرة ($E \ll A$) ، يقوم الجسيم بحركة توافقية على وجه التقريب . فما ثابت القوة k لهذا التقريب حيث تكون $U(x) \approx \frac{1}{2}kx^2$ ؟ (٣) وما التردد الزاوي ω للاهتزازات الصغيرة الانتعاش ؟

ت ١٠,٥٥ أعطي صاروخ نبضة تسارع بالقرب من سطح الأرض إلى أن بلغت سرعته $v = 2\sqrt{gR}$ (قارن هذه مع المعادلة ١٠,١٠١) . ثم انطلق رأسياً إلى أعلى تلقائياً بدون تشغيل محركاته . أوجد سرعته ، جزيئاً وعددياً على حد سواء ، عندما يسبح في الفضاء على بُعد كبير عن الأرض . كم يستغرق بلوغه الشمس بهذه السرعة ؟

ت ١٠,٥٦ ما سرعة الإفلات من القمر ؟ قارن هذا العدد مع سرعة الصوت في الهواء .

ت ١٠,٥٧ يدور جسيان مختلفا الكتلة حول مركز كتلتهما الثابت . أوجد صيغة تُحدد عزم القصور I لهذا النظام وتُحقق بجلاء من أن $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$. بند ١٠,٩

ت ١٠,٥٨ لوحظ أن طوقاً متدرجاً وكتلة خشب متزقة تظللان جنباً إلى جنب أثناء حركتهما أسفل سطح مائل . فإذا كان فقدان الطاقة للطوق مهملاً ، فما قوة الاحتكاك المؤثرة على كتلة الخشب ؟

ت ١٠,٥٩ عزم قصور أسطوانة معينة نصف قطرها r هو $I = Mk^2$ (حيث يُدعى k بنصف قطر التدوير radius of gyration) . (١) بين أن الطاقة الحركية للأسطوانة عندما تتدحرج بدون انزلاق هي $K = \frac{1}{2}mv_c^2[1 + (k^2/r^2)]$ ، حيث v_c سرعة مركز الكتلة . (٢) أثبت أن تسارع الأسطوانة عندما تتدحرج أسفل مستوى يميل بزاوية θ على الاتجاه الأفقي هو

$$a_c = \frac{g \sin \theta}{1 + (k^2/r^2)}.$$

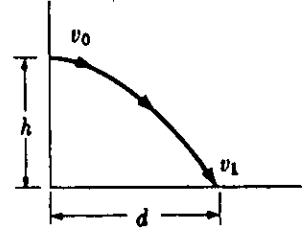
ت ١٠,٦٠ كتلة هيكل عربية تساوي M ، كما أن لكل من دواليبها الأربعة نصف قطر r ، وكتلة m ، وعزم قصور $I = \frac{1}{2}mr^2$. فما تسارع العربية عندما تتدحرج بدون احتكاك داخلي أسفل مستوى يميل بزاوية θ على الاتجاه الأفقي ؟ وما القيم النهائية limiting values للتسارع عندما تكون $M \gg 4m$ و $M \ll 4m$ ؟

ت ١٠,٦١ (١) إذا كان عزم الدوران الأقصى لمحرك سيارة ، عندما يدور بسرعة ٢٠٠٠ دورة في الدقيقة

(د د rpm) ، هو ٢١٤ ن م ، فما قدرته القُصوى عند هذه السَّرعَة الزَّائِية ؟ (٢) إذا كانت قدرة المحرك العُظمى عندما يدورُ بِسرعة ٤٠٠٠ د د هي ١٠٠ قدرة حصان ، فما النِّسبة المئوية لنقصان عزم الدُّورانِ بَيْنَ ٢٠٠٠ و ٤٠٠٠ د د ؟

ت ١٠,٦٢ أطلقت قذيفة أفقياً من ارتفاع h بسرعة ابتدائية v_0 ، كما هو مبين في شكل ١٠,٤١ ؛ فارتطمت بالأرض بسرعة v_1 بعد أن قطعت مسافة أفقية d . (١) عبّر عن v_1 كدالة في d . (٢) أوجد تعابير تقريبية للسرعة $v_1(d)$ للقيمتين (أ) $d \ll h$ و (ب) $d \gg h$.

بند ١٠,١٠



شكل ١٠,٤١ : تمرين ١٠,٦٢ .

ت ١٠,٦٣ يتزلق جسم صغير بدون احتكاك في وعاء trough يتحدّد مقطعه العرضي بالعلاقة $y = x^2/a$ (قطع مكافئ) . إذا ضرب الجسم ، عندما كان ساكناً عند أدنى نقطة من الوعاء ، ضربة أكسبته سرعته $v = v_0$ ، فما أقصى بُعد مستقيم له عن نقطة البداية ؟ أوجد تعابير تقريبية لهذه المسافة إذا كانت $v_0 \ll \sqrt{2ga}$ وإذا كانت $v_0 \gg \sqrt{2ga}$.

ت ١٠,٦٤ نصف المعادلة $z = \frac{1}{2}h[1 + \sin(\pi x/a)]$ جزءاً من مسار أفعوائي ، حيث x هي المسافة الأفقية و z المسافة الرأسية . (١) فما الدلالة الفيزيائية للثابت h ؟ للثابت a ؟ (٢) أوجد سرعة عربة متزلقة عند أية نقطة x إذا كانت سرعتها عند قيمة « تل » v_0 (اهمل الاحتكاك) . (٣) أرسم رسماً بيانياً تخطيطياً للمسافة z ضد x ، وأدناه رسماً بيانياً للسرعة v ضد x .

ت ١٠,٦٥ تكون طاقة الوضع المقترنة بقوة مركزية تربيعية عكسية ، بدلالة الإحداثيات الديكارتية ،

$$U(x, y, z) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$

خذ المشتقات الجزئية لهذه الدالة بالنسبة للإحداثيات x ، y ، و z لإيجاد المركبات الديكارتية للقوة (أنظر المعادلات ١٠,١٢٠-١٠,١٢٢) ، وتحقق من أن $\mathbf{F} = -\nabla U = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = C/r^3$ حيث تكافئ هذه المعادلة ١٠,١٢٧ .

ت ١٠,٦٦ سفينة فضاء تدور في مدار دائري على بُعد عن مركز الأرض يساوي ضعف نصف قطر الأرض ($r = 2R$) . (١) بين أن سرعة هذا القمر الصناعي هي $v_1 = \sqrt{\frac{1}{2}gR}$ (حيث g تسارع الجاذبية عند سطح الأرض) . (٢) أعطيت السفينة نبضة تسارع زادت سرعتها إلى v_2 ووضعها في مسار مكافئ بالكاد أفقت من الأرض ، فما مقدار الشغل المبذول على السفينة أثناء نبضة التسارع هذه ؟ وما v_2 ؟

ت ١٠,٦٧ ما هي المعادلة التامة exact لحفظ طاقة بندول بسيط التي تسري لساير الزوايا ؟ (٢) أرسم رسماً بيانياً تخطيطياً لطاقة وضع البندول كدالة إما في إزاحته الزاوية θ أو في إزاحته s مقاسة على امتداد قوس دائره . إستناداً إلى هذا الرسم ، أعط تفسيراً نوعياً لحقيقة زيادة دورة البندول بزيادة اتساعه .

بند ١٠,١١

ت ١٠,٦٨ يجلس أحمد ، ذو الكتلة ٣٥ كـغ ، ساكناً في أرجوحة . تقذف إليه عائشة ببطيخة كتلتها ١٠ كـغ ، فيلتقطها بينما كانت تتحرك أفقياً بسرعة ١ م/ث ، ثم يتأرجع هو والبطيخة بزاوية

أقصاها ٢. ... « تماماً كما توقفت » ، قالت عائشة . « فإن طول جبال أرجونيك هو ١,٤ متر .
هل ما ندعيه عائشة صحيح ؟ (سؤال تحذيري : هل تكون الطاقة الميكانيكية محفوظة في جميع
أجزاء هذا النشاط ؟)

مسائل

م ١٠,١ بُدِلَ قَدْرُ سَيْرٍ من الشغل W على جسم كتلته m يتحرك بسرعة كبيرة v . بين أن التغير في سرعة الجسم تتحدد تقريباً بالعلاقة

$$\Delta v \cong \frac{W}{mv}.$$

ما الشرط اللازم لتوفره لجعل هذا التقريب مباحاً ؟

م ١٠,٢ (١) بتأثر جسيم بقوة كلية F . أثبت أن معدل التغير في الطاقة الحركية للجسم هي

$$\frac{dK}{dt} = F \cdot v,$$

حيث v سرجه الجسيم . (٢) إذا كانت F' مجرد واحدة من بين مجموعة قوى مؤثرة على الجسيم ، فما دلالة $F' \cdot v$ ؟

قوة متناسبة مع $\cos(2\pi x/l)$

م ١٠,٣ يتحرك جسيم في مجال قوة يتحدد بالعلاقة $F = F_0 \cos(2\pi x/l)$. (١) إذا أطلق الجسيم من السكون عند نقطة الأصل ، صف حركته اللاحقة بعبارات وصفية ، مبيهاً عن أسئلة من قبيل : هل يتحرك في ١ ، ٢ ، أو ٣ أبعاد ؟ هل الحركة محدودة bounded ضمن منطقة منتهية ؟ هل هي تذبذبية ؟ وهل تستمر إلى ما لا نهاية ؟ (٢) أين يكون للجسيم سرعة صفرية ، بالإضافة إلى نقطة الأصل ؟

الطاقة الحركية لنظام ثلاثي الأجسام

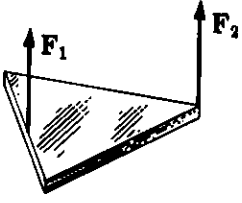
م ١٠,٤ ثلاثة جسيمات لها الكتل والمواضع والسرجات الآتية :

الجسيم	الكتلة	x	y	v_x	v_y
١	m	٠	٠	$3v_0$	٠
٢	m	٠	a	٠	$3v_0$
٣	$2m$	a	a	?	?

كما تكون سرجة كتلة هذا النظام $v_c = v_0$. أوجد كلاً من الكميات الآتية : (أ) موقع مركز الكتلة ؛ (ب) متجه الموضع لكل جسيم نسبة إلى مركز الكتلة ؛ (ج) سرجة الجسيم ٣ ؛ (د) سرجة كل جسيم نسبة إلى مركز الكتلة ؛ (هـ) الطاقة الحركية الانتقالية للنظام ؛ (و) الطاقة الحركية نسبة إلى مركز الكتلة .

رافعة متسارعة

م ١٠,٥ افترض أن مقدار القوة F_1 إلى أسفل المؤثرة على الرافعة في شكل ١٠,١٢ هو أكبر من الحد الأدنى



شكل ١٠,٤٢ : مسألة ١٠,٦ .

اللازم لرفع الجمل load . إستخدم كلاً من مفهومَي الزخم الزاوي والطاقة لإيجاد تسارع الجمل وطاقتيه الحركية . اعمل كتلة الرافعة بالمقارنة مع كتلة الجمل ، وعالج المسألة في مدى ضيق من الزوايا فقط ، بحيث يمكن في نطاقها مساواة المركبات الرأسية للقوة والمركبات المتعامدة مع الرافعة .

م ١٠,٦ رجلان يرفعان قطعة من فِلِز (مَعْدِن) كتلتها ٦٠ كـرغ على شكل مثلث متساوي الأضلاع خلال مسافة ١,٢ م . يرفع أحد الرجلين عند أحد زوايا المثلث ؛ بينما يرفع الآخر عند منتصف الضلع المقابل (أنظر شكل ١٠,٤٢) . (١) فما الشغل الكلي الذي بذله الرجلان ؟ (٢) وما الشغل الذي بذله كل منهما ؟

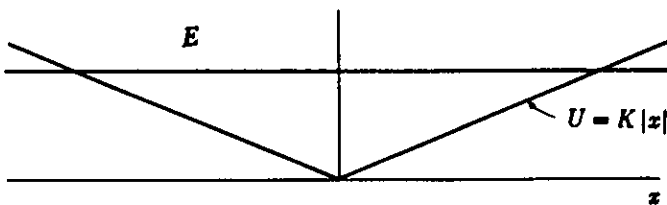
م ١٠,٧ جُسيم طاقته الميكانيكية محفوظة يتحرك في بُعد واحد من x_1 إلى x_2 دون أن ينعكس على عقبيه retracing في أي جزء من مساره (مما يعني أن اتجاه v_x لا يتغير) . أثبت أن الزمن اللازم لهذا الجزء من حركته هو

$$t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}}$$

إذا كان $x_1 < x_2$. ما هو التغير الطفيف في هذه الصيغة إذا كان $x_1 > x_2$ ؟ (٢) إستخدم هذه الصيغة لاشتقاق النتيجة المألوفة $x = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$ لجسيم يبدأ من نقطة الأصل بسرعة v_0 وتؤثر عليه القوة الثابتة $F = ma_0$.

م ١٠,٨ إستخدم الصيغة الواردة في المسألة السابقة لإيجاد دورة مذبذب توافقي تكون دالة طاقة وضعه $U = \frac{1}{2} kx^2$. (إقتراح : أوجد الزمن اللازم للجسيم لكي يتحرك من $x = 0$ صفرًا إلى إحدى نقطتي التحول ، ثم اضرب ذلك في ٤ للحصول على الدورة) .

م ١٠,٩ طاقة وضع جسيم يتحرك في بُعد واحد هي $U(x) = K|x|$ (أنظر شكل ١٠,٤٣ أذناه) . أوجد دورة الحركة التذبذبية كدالة في طاقة الجسيم E . (إقتراح : اعتبر كلاً من x الموجبة و x السالبة على حدة) .



شكل ١٠,٤٣ : مسألة ١٠,٩ .

م ١٠,١٠ $x(t)$ للمذبذب التوافقي

١٠,١٠ م استخدم طريقتين للتدليل على أن $x = A \sin(\omega t + \phi)$ (أنظر المعادلة ١٠,٩٣) هو حل لمعادلة حفظ الطاقة للمذبذب التوافقي (أنظر المعادلة ١٠,٩٢). (١) عالج المعادلة ١٠,٩٣ «كثمين»، وتحقق من صحتها بتعويضها في المعادلة ١٠,٩٢. (٢) ابدأ بالتكامل $t = \int (dt/dx) dx$ ، أوجد dt/dx من المعادلة ١٠,٩٢ ثم أجز التكامل. (٣) اشرح لماذا يكون اثنان فقط من الثواب الأربعة A ، E ، ω ، و ϕ اعتباريتين ؟

م ١٠,١١ قانون هوك بالمعكوس

١٠,١١ م دالة طاقة الوضع لجسم يتحرك في بُعد واحد هي $U(x) = -\frac{1}{2}kx^2$ ، حيث k ثابت موجب. (١) أرسم رسماً تخطيطياً للطاقة وناقش الحركة وصفيًا لقيم الطاقة $E > 0$ ، و $E = 0$ ، و $E < 0$. (٢) أكتب معادلة حفظ الطاقة كمعادلة تفاضلية شبيهة بالمعادلة ١٠,٩٢ ، وحل المعادلة لإيجاد $x(t)$ للحالة الخاصة $E = 0$. ناقش الحركة بالقرب من $x = 0$.

م ١٠,١٢ تقريب خطي لطاقة وضع الجاذبية

١٠,١٢ م إن تعبيراً صحيحاً لطاقة وضع الجاذبية لجسم كتلته m تؤثر عليه الأرض هو $U = -mgR^2/r$ (المعادلة ١٠,٩٧) . بين أن الصيغة $U = mg(r - R) + C$ (المعادلة ١٠,٩٨) هي تقريب جيد ، إذا كان $r - R \ll R$. ما الثابت C ؟
 فرع اختياري : أكتب ثلاثة أو أربعة حدود لتسلسلة تيلور لطاقة الوضع $U(r)$ بالقرب من $r = R$.

م ١٠,١٣ تقريب المذبذب التوافقي

١٠,١٣ م دالة طاقة الوضع لجسم يتحرك في بُعد واحد هي $U(x) = A(e^{ax} + e^{-ax} - 1)$. (١) أوجد النهاية الصغرى لهذه الدالة ، وتأكد من أنه يمكن تقريب $U(x)$ بالعلاقة $U(x) \cong \frac{1}{2}k(x - a)^2$ عند هذه النهاية الصغرى . ما هو k وما a ؟ (٢) إذا كانت $\alpha = 3$ م^{-١} ، و $A = 1$ ج ، وطاقة الجسم $E = 0,٠٤$ ج ، وكتلته $m = 2$ كغ ، فما الدائرة التقريبية لمذبذبه ؟ وما الاتساع التقريبي لهذه المذبذبة ؟ (٣) عند قيم الطاقة الصغيرة ، تكون الدائرة شبه مستقلة عن الطاقة ؛ بينما تتناقص الدائرة مع زيادة الطاقة عند قيم الطاقة الأكبر . فسّر هاتين الحقيقتين .

م ١٠,١٤ طاقة الوضع الكهروستاتيكية

١٠,١٤ م يتأثر جسيم ألفا ذو الشحنة $2e$ والمتحرك نحو نواة شحنتها Ze بقوة تتحدد بالعلاقة

$$F_r = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

(قيمتا e و ϵ_0 موجودتان في ملحق ٣ أ.) (١) أوجد طاقة الوضع $U(x)$ باعتبار أن $U(\infty) = 0$. (٢) أرسم رسماً طاقياً عند اقتراب جسيم ألفا من نواة اقتراباً مباشراً . (٣) أوجد صيغة تحدد مسافة أدنى اقتراب ، ثم احسب قيمة هذه المسافة لجسيم ألفا طاقته ١ مغ.ف ومقرب من نواة ذرة ذهب ($Z = 79$) .

م ١٠,١٥ خرزة على سلك دائري

١٠,١٥ م تنزلق خرزة كتلتها m بدون احتكاك على سلك ثني على شكل دائرة نصف قطرها a ، بحيث تقع هذه الدائرة في مستوى رأسي . (١) ما السرعة التي تمر بها الخرزة عند قاع الدائرة إذا كانت لا تؤثر بأية قوة على السلك عند قمة الدائرة ؟ (٢) عند حركة الخرزة بطاقة اعتباطية ، أوجد تعبيراً يبين التغير في مقدار القوة الكلية المؤثرة على الخرزة عندما تتحرك من قمة الدائرة إلى قاعها .

قانون هوك في هوليوود

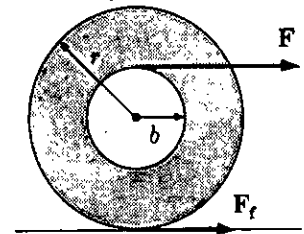
م ١٠,١٦ « مُمَثِّلٌ بَدِيلٌ » stunt man من هوليوود Hollywood يُجرى تجاربه على حبلٍ مَطَّاطِيٍّ مَرْبُوطٍ من طرفه العلويِّ برافدةٍ (عارضة خشبية) rafter . يهبط أولاً ببطء أسفل الحبل ، ويتعلق من طرفه السفلي ، ليجد أن الحبل يستطيل مسافة ١ م . ثم يهبط من الرافدة ويُمسك بطرف الحبل السفلي عند مروره به ، ليجد أنه يستمر بالهبوط إلى أسفل مسافة ٤,٣ م قبل أن يُوقِفَ الحبلُ سقوطه يتساءل عما قد يستطيع حسابه إذا قرَضَ أن الحبلَ المشدود يخضع لقانون هوك (القوة المُرْجعة تتناسب مع الإزاحة) . (١) فهل يستطيع حساب كتلته ؟ إن كان الأمر كذلك ، فما هذه ؟ (٢) وهل يستطيع حساب تسارع الجاذبية ؟ إن كان الأمر كذلك ، فكم يجدها ؟ (٣) ثم هل يستطيع حساب الطول الأصلي للحبل ؟ إن كان الأمر كذلك ، فما قيمته ؟

م ١٠,١٧ يتدحرج طوقٌ أسفل مستوى مائلٍ بزاوية θ على الاتجاه الأفقي ، كما هو مبين في شكل ١٠,٢٢ . لتكن P نقطة تماس الطوق مع المستوى . يدور الطوق ، عند أية لحظة ، بسرعة زاوية ω حول النقطة P . (١) أوجد الزخم الزاوي المداري للطوق بالنسبة إلى P ، ثم زخمه الزاوي الميزلي ، وزخمه الزاوي الكلي بالنسبة إلى P . (٢) ما عزم الدوران الكلي المؤثر على الطوق بالنسبة إلى النقطة P ؟ (٣) مستعيناً بإجابتي الجزأين ١ و ٢ ، استخدم المعادلة $dL/dt = T$ لإيجاد التسارع الزاوي $\alpha = d\omega/dt$ ، ثم استخدم α لإيجاد a_c ، أي تسارع مركز الكتلة . تأكد من إجابتيك باستخدام المعادلة ١٠,١١١ .

طوق يتدحرج أسفل مستوى مائل

م ١٠,١٨ دولابٌ نصف قطره r ، وكتلته m ، وعزم قصوره $I = mk^2$ (k هو نصف قطر التدويم - أنظر تمرين ٩,٣٩) يُجرى على سطحٍ مستوٍ بتأثير قوة أفقية F على حبلٍ ملفوفٍ حول محور نصف قطره b (أنظر شكل ١٠,٤٤) . (١) اشرح لماذا لا تقوم قوة الاحتكاك F_f عند السطح بأي شغل إذا كان الدُولا ب لا يتزلزل . (٢) بين أن الشغل الذي تنجزه القوة F عندما يتحرك مركز كتلة الدُولا ب مسافة x_c هو $W = Fx_c[1 + (b/r)]$. (تلميح : كم يتحرك الحبل في نفس الوقت ؟) (٣) عبر عن معادلة الطاقة $\Delta K = W$ بدلالة المتغيرات m ، k ، b ، r ، F ، x_c ، و dx_c/dt . (٤) فاضل هذه المعادلة بالنسبة إلى الزمن لإثبات أن تسارع الدُولا ب هو

دولابٌ يتدحرج بشراع



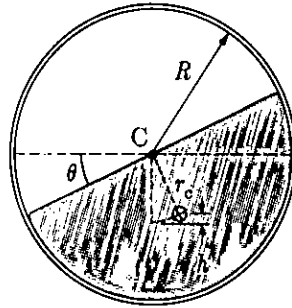
شكل ١٠,٤٤ : مسألة ١٠,١٨ .

$$a_c = \frac{d^2x_c}{dt^2} = \frac{F}{m} \cdot \frac{1 + (b/r)}{1 + (k^2/r^2)} .$$

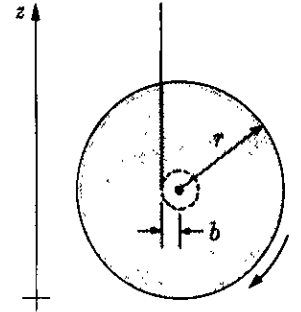
م ١٠,١٩ يو يو yo-yo ، كتلته m وعزم قصوره I حول محور غزله ، يسقط من السكون . وعندما يفعل ذلك ، ينحل unwinds الخيط عن العمود الداخلي inner shaft الذي يساوي نصف قطره b (أنظر شكل ١٠,٤٥) ، وتكون الطاقة الميكانيكية محفوظة أثناء سقوط اليو يو . (١) بدءاً بمعادلة حفظ الطاقة ، أوجد تعابير تُحدد سرعة مركز الكتلة v_c ، وسرعة اليو يو الزاوية على حد سواء ، كدالتين في مسافة سقوطه $z_0 - z$. (٢) ما تسارع مركز الكتلة ؟ (٣) إذا اعتبر اليو يو على وجه التقريب كقرصٍ منتظمٍ نصف قطره r ، وكان $r = 10b$ ، فأوجد (أ) النسبة a_c/g و (ب) نسبة الطاقة الحركية الدورانية إلى الطاقة الحركية الانتقالية .

ميكانيكا لعبة اليو يو

• الممثل البديل هو الرجل الذي يقوم بالأعمال المثيرة والخطيرة بدل الممثل السنياني عندما يقتضي الدور ذلك . (المشرف)



شكل ١٠,٤٦ : مسألة ١٠,٢٠ .



شكل ١٠,٤٥ : مسألة ١٠,١٩ .

الحركة التوافقية لجسم صلب

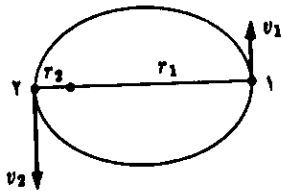
م ١٠,٢٠ يبين شكل ١٠,٤٦ قرصاً slug من الجليد كتلته M ، يملأ إناء أسطوانياً، نصف قطره الداخلي R ، حتى منتصفه. وكما سبق أن ذكرنا في مسألة ٩,٩، فإن عزم قصور الجليد بالنسبة إلى مركز الوعاء C هو $I = \frac{1}{2}MR^2$ ، كما يقع مركز كتلة الجليد على مسافة $r_c = (4/3\pi)R$ من C . افترض أن طبقة مذابة من الجليد تسمح للقرص بالدوران داخل الوعاء باحتكاك مهمَل. بين أن دورة الاهتزازات الصغيرة لقرص الجليد مع بقاء الوعاء ساكناً هي

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3\pi R}{8g}}$$

(إقترح : حاول التعبير عن الطاقة الحركية للجليد بدلالة ω [التي تساوي $d\theta/dt$]، وعن طاقة وضعها بدلالة θ . في حالة اعتبار تقريب الزوايا الصغيرة، يجب أن تشبه معادلة الطاقة المعادلة ١٠,٩٢ أو ١٠,١٤٠).

فرع اختياري: تحقق من الصيغة المعطاة أعلاه للكمية r_c .

الطاقة في مجال قوة نريعي عكسي



شكل ١٠,٤٧ : مسألة ١٠,٢١ .

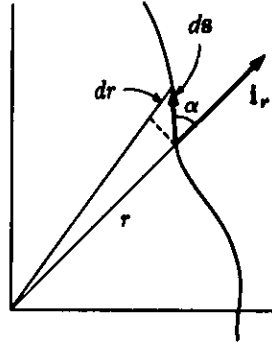
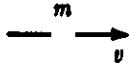
م ١٠,٢١ يتحرك جسيم، كتلته m ، في مدار إهليلجي موجود في مجال قوة مركزي جاذب، وتريعي عكسي، وتساوي طاقة وضعه $U = -C/r$. طبق قانوني حفظ الطاقة وحفظ الزخم معاً عند النقطتين ١ و ٢ المبيّتين في شكل ١٠,٤٧ - نقطتي أقصى وأدنى مسافة للجسيم عن مركز القوة. بين أنه لتحقيق قانوني الحفظ هذين، يجب أن تكون طاقة الجسيم

$$E = -\frac{C}{r_1 + r_2}$$

تنطبق هذه النتيجة الهامة على الأقمار الصناعية والكواكب. وتنص على أن طاقة الجسم تعتمد فقط على القطر الأطول لمداره الإهليلجي.

برهان أن القوة المركزية التريعية العكسية هي قوة مُحافِظَة

م ١٠,٢٢ برهن أنه لقانون الترييع العكسي للقوة المعروف بالعلاقة $F = (C/r^2)\hat{r}$ (حيث $\hat{r}$ متجه وحدة شعاعي)، يكون التكامل الخطي $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ مستقلاً عن المسار من A إلى B ، ويتحدد مقداره بالمعادلة ١٠,١٣١. ... هناك عدّة طرق لإثبات ذلك، وإليك إحداها. كون حاصل الضرب القياسي $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ ثابتاً أن $dr = ds \cos \theta$ (إرجع إلى شكل ١٠,٤٨ أدناه ولا تنس أن مقدار $\hat{r}$ هو ١). فيؤول التكامل الخطي بذلك إلى تكامل عادي بالنسبة إلى r ، ويسهل إجراؤه.



شكل ١٠,٤٩ : مسألة ١٠,٢٣ .

شكل ١٠,٤٨ : مسألة ١٠,٢٢ .

م ١٠,٢٣ جسيان لها نفس الكتلة m : أحدهما ساكن ، بينما ينطلق الآخر نحو الأول بسرعة v (أنظر شكل ١٠,٤٩) . يتصادمان تصادماً مرناً ، مما يعني أن طاقتها الحركية الإجمالية بعد التصادم تساوي قيمتها قبله . عرّف ، للسهولة ، اتجاه x على أنه اتجاه حركة الجسيم الساقط . إذا انطلق الجسيم الذي يُشكل هدفاً بزاوية 45° مع محور x ، فما السرجهتان النهائيتان لكلا الجسيمين ؟ (إقترح : عيّن رموزاً للكميات المجهولة واكتب معادلات الحفظ للطاقة الحركية الكلية ولزخم x و y للزخم الكلي ، وذلك ما قبل وما بعد التصادم .)

تصادم ثنائي الجسم

م ١٠,٢٤ كما في المسألة السابقة ، يرتطم جسيم مقذوف كتلته m بجسيم يُشكل هدفاً ساكناً له نفس الكتلة m ، ويكون التصادم مرناً . (١) أثبت أن مسار الجسيم المقذوف بعد التصادم يكون متعامداً مع مسار الجسيم المرتد recoiling الذي يُشكل هدفاً ، وذلك عندما لا تساوي كتلتا السرجهتين النهائيتين صفراً . (٢) ماذا يكون الوضع إذا كانت واحدة من السرجهتين النهائيتين أو الأخرى تساوي صفراً ؟

م ١٠,٢٥ حل مسألة ٨,١٩ إن لم تكن قد قُمتَ بذلك حتى الآن ، ثم استمر في هذه المسألة . (١) هب أن التصادم مرّ وأكتب معادلة حفظ الطاقة . (٢) فكّر في هذه المعادلة على أنها علاقة بين المتغيرين v_1 و v_2 لكتلتين ثابتتين وسرعة ابتدائية ثابتة v_0 . أرسم هذه المعادلة رسماً بيانياً في المستوى v_1, v_2 . ما اسم المنحنى الناتج ؟ (٣) ما عدد نقاط التقاطع بين منحنى حفظ الطاقة ومنحنى حفظ الزخم في المستوى v_1, v_2 ؟ تعرّف على نقطة التقاطع المقبولة فيزيائياً إذا كانتا الكرتان غير قابلتين للاختراق impenetrable . (٤) قُم بالحل للسرجهتين النهائيتين v_1 و v_2 ، اللتين هما إحداثيتا نقطة التقاطع هذه .

تصادم ثنائي الجسم في بُعد واحد ، تكون الطاقة محفوظة

م ١٠,٢٦ هذه المسألة هي تكملة للسالتين ٨,١٩ و ١٠,٢٥ . افرض الآن أن التصادم لامرن inelastic (الطاقة الميكانيكية غير محفوظة) ، فيمكن أن نُكتب الطاقة بعد التصادم على الصورة $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}\gamma m_1v_0^2$ ، حيث $\gamma \leq 1$. (١) قُم بتحليل بياني كما في المسألة السابقة ، وتعرّف على نقطة التقاطع المقبولة فيزيائياً في مستوى v_1, v_2 ، إذا كانت الكرتان غير قابلتين للاختراق . (٢) كيف يتغير التحليل البياني بتغير عامل اللامرونة inelasticity factor γ ؟

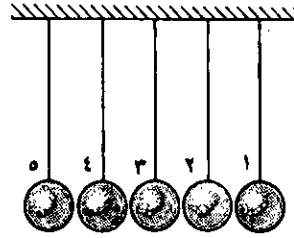
تصادم ثنائي الجسم في بُعد واحد ، تكون الطاقة غير محفوظة

بين أن ثمة قيمة صغرى مقبولة فيزيائياً للعامل γ . أوجد تعبيراً لهذه القيمة γ_{min} . (٣) ما الوضع البياني عندما يتخذ γ قيمته الصغرى ؟ وما الوضع الفيزيائي عندما يكون $\gamma = \gamma_{min}$ ؟

تصادمات متعددة في بُعْدٍ واحدٍ

م ١٠,٢٧ تتكوّن « لعبة تنفيذية executive toy » من خمس كرات فلزية (معدنية) معلقة بأوتار متساوية الطول . لنفرض ، في الوضع المثالي لعمل اللعبة ، أن الكرات لا تتلامس تماماً عندما تكون معلقة في حالة سكون ، وأن التصادم بين الكرات يكون مرناً . (١) عند جذب الكرة ١ جانباً ثم تركها ، بين أنها تنقل كل طاقتها إلى الكرة ٥ . (٢) ماذا يحدث إذا جُذِبَت الكرتان ١ و ٢ جانباً ثم تركتا في تتابع سريع (بحيث لا تتلامس الكرتان ١ و ٢ إلا بعد أن تصطدم الكرة ٢ بالكرة ٣) ؟ (٣) افرض الآن أن قطعة من سبيكة لحام solder وُضِعَت بين الكرتين ١ و ٢ بحيث تتحركان معاً كوحدة واحدة . ماذا يحدث عند جذب الكرة ٥ جانباً ثم تركها ؟ (٤) جُذِبَ الآن زوج الكرتين الملحومتين ، وتركتا لتضربا الكرة ٣ بسرعة v . بين أن الكرة ٥ تارجع مبتعدة بسرعة $\frac{3}{4}v$ ، تتبعها الكرة ٤ بسرعة $\frac{1}{4}v$ ، ثم الكرة ٣ بسرعة $\frac{3}{4}v$ ؛ بينما تتبع الكرتان ١ و ٢ معاً بسرعة $\frac{1}{4}v$. (تبين هذه المسألة أن حفظ الزخم والطاقة وحدهما غير كافيين لتفسير السلوك البسيط الملاحظ عادة عندما تكون الكرات متلامسة في بادئ الأمر . للاطلاع على بحث مستفيض ، أنظر : ت. أ. فلكيفتر و ن. د. نيوي ، المجلة الأمريكية للفيزياء ، المجلد ٤٠ (١٩٧٢) :

T.A. Walkiewicz and N.D. Newby, Jr., *American Journal of Physics* 40 (1972).



شكل ١٠,٥٠ : مسألة ١٠,٢٧ .



١١ . الجاذبيّة

Gravitation

يَتَطَلَّبُ ربطُ الميكانيكا بالطبيعة أكثرَ من قوانينِ نيوتن ؛ إذ نَحْتَاجُ أيضاً إلى قوانينَ محدَّدةٍ للقوّة . ولقد اختيرت إحدى هذه القوى على وجه الخصوص - الجاذبيّة - للتركيز عليها في هذا الباب .

١١,١ قوانينُ القوّة في الميكانيكا Laws of Force in Mechanics

نأملُ التعميمَ الهائلَ لقوانينِ نيوتن الثلاثة بمفردها : فالأوّلُ يُحدِّدُ طبيعةَ الحركةِ غيرِ المضطربةِ لجميعِ الأجسام كما يُعرِّفُ أطرَ الإسنادِ القصوريةِ ؛ والثاني يصفُ كيفُ ينفعلُ جسمٌ لآيّةِ قوّة ؛ أما الثالثُ فينصُّ على أنَّ جميعَ قوى الطبيعة تردُّ في أزواجٍ متكافئة . وتضمُّ هذه القوى - على حدِّ سواء - المجالَّ التجريبيَّ المحدَّدَ للفيزياء والمجالَّ الرياضيَّ للتجريدِ الحرِّ من كلِّ قيد . ولقد درسَ نيوتن نفسه خواصَّ الحركةِ المقترنة بقوانينِ افتراضيةٍ للقوّة . ومنذ ذلك الحين وطلابُ الفيزياء يحلُّون مسائلَ الحركةِ لقوى اعتبارية - قوى لا تُشبهُ أبداً من تلك التي نجابها في الطبيعة .

ويدرسُ العلماءُ الطبيعةَ كما يمكنُ أن تكونَ فقط إلى المدى الذي تستطيعُ فيه مثلُ هذه الدراسة أن تُفيدَ شيئاً عن الطبيعة كما هي . ولتضييقِ الميكانيكا للواقع ، يجبُ تكميلُ قوانينِ نيوتن بقوانينَ تحكمُ الظواهرَ الطبيعيّة ، وعلى وجه الخصوص قوانينَ تلك القوى الأساسيّة التي تؤثرُ لمسافاتٍ جاهريّة* - قوى الجاذبيّة والكهربائيّة والمغناطيسيّة .

تُكمِّلُ قوانينُ محدَّدة للقوّة قوانينَ نيوتن

وكونُ قوانينِ نيوتن لا تميّزُ القوى الحقيقيّة من القوى الافتراضية ليس ضعفاً في

* القوى النوويّة القصيرة المدى والتفاعلات الضعيفة تؤثرُ في المجالِ دون الذريّ ، حيث لا تسري الميكانيكا الكلاسيكيّة .

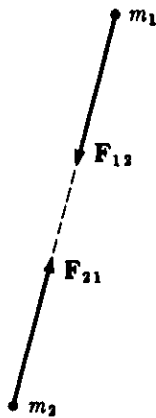
الميكانيكا ، بل إنه في الحقيقة عنصر قوة ، لأنه يعني أن الميكانيكا علمٌ مفتوحٌ ، مستعدٌ وقادرٌ على استيعاب اكتشافات جديدة . فنصف ميكانيكا نيوتن بدقة انحراف إلكترون بواسطة قوة كهربائية ، مثلاً ، مع أن لا وجود للإلكترون ولا قانون القوة الكهربائية كان معروفاً لنيوتن .

□ دور الجاذبية The Role of Gravity

من بين قوى الطبيعة الأساسية ، يكون للجاذبية أهمية خاصة لعدة أسباب . أولها أنها القوة الوحيدة الكونية حقاً ؛ فهي تؤثر على كل جسم مادي من الإلكترون إلى المجرة ؛ وكما علمنا في هذا القرن ، فإنها تؤثر حتى على الأشياء اللامادية immaterial ، كال فوتونات أو النيوتريونات أو الطاقة على أية صورة . وثانيها سبب عملي : فالجاذبية أكثر القوى وضوحاً للتو ؛ إذ تؤثر على الإنسان ويبتليه بطرق شتى كل يوم . بل لقد بلغ تعودنا على الجاذبية مبلغاً يجعل انعدام وزن رواد الفضاء أمراً مثيراً واستثنائياً بالنسبة لنا .

الدور التاريخي للجاذبية

لقد لعبت الجاذبية دوراً هاماً وفريداً في تطوير ونمو الميكانيكا . فلقد اعتمد نيوتن ، في صياغته المحددة للميكانيكا ، على الدراسات السابقة للحركة قرب الأرض ، المتأثرة بالجاذبية المحلية ، وللحركة الكوكبية بعيداً عن الأرض ، المتأثرة بجاذبية الشمس . ومنذ عهد نيوتن ، قامت الحركة المحكومة بقوة الجاذبية بتزويد أكثر فحوص الميكانيكا تشدداً stringent ، وعملت كحافز للكثير من التوسع الرياضي لنظرية الميكانيكا ؛ كما قادت إلى اكتشاف كواكب جديدة بعيدة ، وكشفت في عهدنا الزاهر - عهد الأقمار الصناعية - عن تفاصيل جديدة حول شكل وبنية الأرض . ولقد ورد أول الملامح عن عجز في ميكانيكا نيوتن من خلال دراسة مدار كوكب عطارد Mercury . وإن عدم انصباع عطارد التام لقوانين الميكانيكا الكلاسيكية بشكل الآن واحداً من الدعائم التجريبية لميكانيكا أينشتاين الجديدة في النسبية العامة .



١١,٢ قانون الجذب الكوني The Law of Universal Gravitation

اعتبر زوجاً من الجسيمات تساوي المسافة بينها d ، كتلة أحدها m_1 وكتلة الآخر m_2 . فتكون قوة الجاذبية التي يؤثر بها الواحد على الآخر قوة جاذبة ومركزة ؛ بمعنى أنها تؤثر على امتداد الخط الواصل بين الجسيمين . ويتناسب مقدار هاتين القوتين المتساويتين والمتضادتين طردياً مع حاصل ضرب الكتلتين وعكسياً مع مربع المسافة بينهما . فيمكن كتابتها على الصورة :

قانون قوة الجاذبية

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2} ; \quad (11,1)$$

حيث يُدعى ثابت التناسب G بثابت الجاذبية gravitational constant . وينص قانون الجذب الكوني على أن هذا القانون المعين لقوة الجاذبية ينطبق على كل زوج من الجسيمات في الكون ،

دائماً بنفس ثابت الجذب المحدد G . لقد كان إسحق نيوتن أول من تقدّم بهذا التعميم الجليلي (وسيعاد تركيب نهجه المنطقي بشكل مُستساغ في بند ١١,٧) . ونعترف حالياً بالمعادلة ١١,١ كقانونٍ يستند إلى قاعدة تجريبية غيبّة وسري على نطاقٍ شاسع ؛ إلا أنه لا يصلح تحت شروطٍ متطرفة كتلك التي قد توجد داخل أو قرب نجم نيوتروني $neutron\ star$. (النجم النيوتروني هو نجم افتراضي انهيار $collapsed$ لكثافة تزيد على 10^9 من كثافة الشمس) .

والقيمة العددية لثابت الجاذبية G بالوحدات الدولية هي

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2. \quad (11,2)$$

ثابت الجاذبية

ويعكس هذا العدد الصغير الضعف الاستثنائي لقوة الجاذبية . فكتلتان متساويتان كل منهما ١ كـغ والمسافة بينهما ١ م تتجاذبان معاً بقوة 6.67×10^{-11} ن ؛ أي أقل من وزن رجلٍ بعامل 10^{10} . ولا تبدو قوة جاذبية الأرض شديدة إلا بسبب كتلتها الهائلة . ففعل الجاذبية بين أي زوجٍ من الأجسام العادية الحجم على الأرض يكون صغيراً مهملاً . وليس للجاذبية أثر أيضاً في عالم الجسيمات ، على قدرٍ ما نعلم . (أمّا في المدى دون الجُسيمي الذي لا يترقب الاستكشاف ، فمن المعقول أن المسافات المتناهية الصغر قد تُعوّض وأكثر عن صغر الكتلة وصغر قيمة G بحيث تجعل الجاذبية ثانية ذات أهمية) .

الجاذبية هي أضعف القوى الأساسية

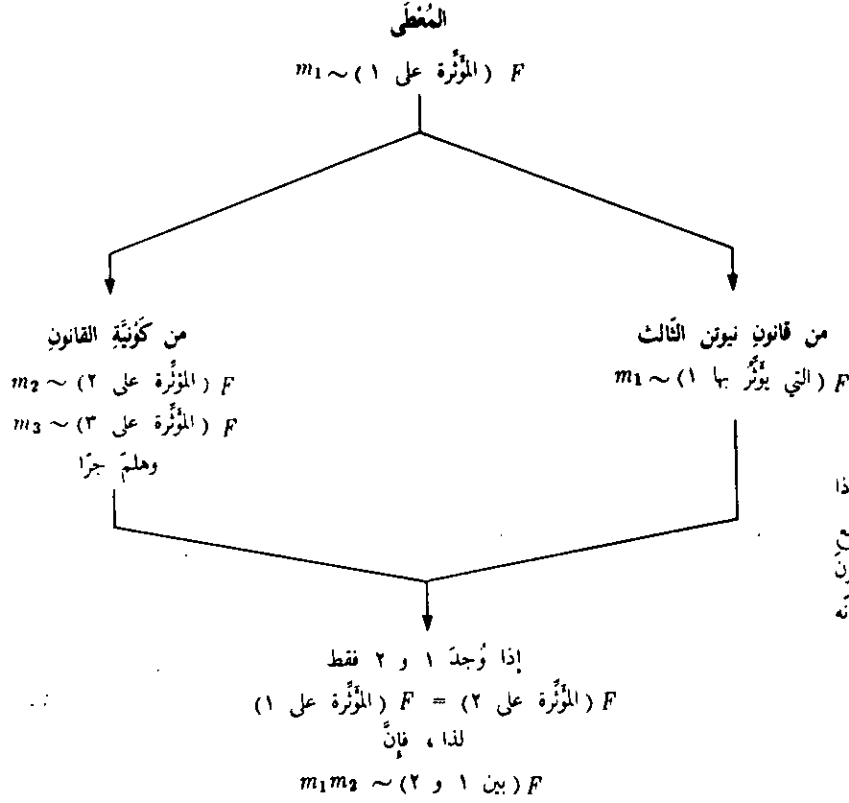
ومن الأشياء الهامة التي تجدر ملاحظتها عن المعادلة ١١,١ أنها قانون قوة ، وليست قانون حركة ؛ إذ أنها تحدّد مقدار قوة الجاذبية بغض النظر عن كيفية حركة زوج الجسيمات أو حتى فيما إذا كانا متحركين أصلاً . والكتل التي تظهر في البسط هي كتل جاذبية . وهي مقياس لقوة التفاعل . وكما ألمحنا سابقاً (بند ٧,٧) ، فقد وُجد تجريبياً أن كتلة الجاذبية وكتلة القصور متساويتان .

وإذا جرى تبادل العاملين m_1 و m_2 على يمين المعادلة ١١,١ ، بقيت القوة دون تغيير . ونماثل الكتلة هذا ليس أمراً عرضياً . فلولا يكن صحيحاً ، لخرق قانون قوة الجاذبية قانون نيوتن الثالث . افرض ، مثلاً ، أننا بدأنا بالحقيقة أن قوة الجاذبية التي يتأثر بها جسم تتناسب مع كتلته . فبناءً على قانون نيوتن الثالث ، فإن القوة التي يؤثر بها الجسم تساوي مقداراً القوة التي يستشعرها . لذا ، فإن القوة التي يؤثر بها تتناسب أيضاً مع كتلته . وهذا يعني أنه لأي زوجٍ من الجسيمات يتعين على قوة الجاذبية أن تتناسب مع كلٍّ من الكتلة الجاذبية والكتلة المزدوجة . ويمكن التعبير عن منطق هذا الجدّل بصورة أوضح في رسم توضيحي (شكل ١١,١) .

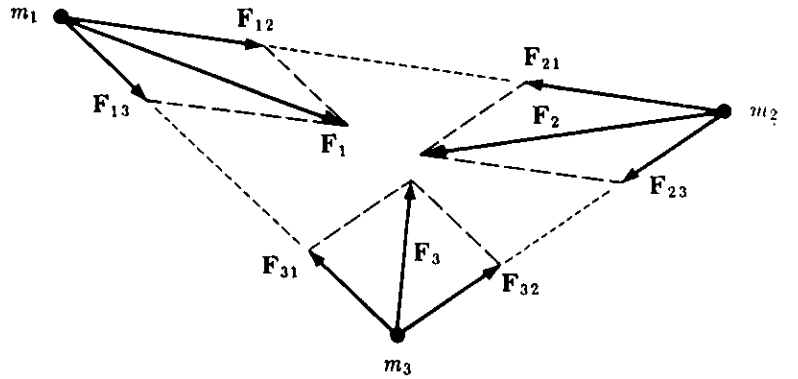
$m_1 \leftrightarrow m_2$: تماثل الكتلة وقانون نيوتن الثالث

وتحتوي المعادلة ١١,١ ضمناً ، دون وضوح ظاهر ، على مبدأ تراكب $superposition\ principle$ لقوى الجاذبية . وهنالك مظهران لمبدأ التراكب يمكن تفسيرهما على

مبدأ التراكب



شكل ١١,١ : مُخطّط منطقي للجذَلِ القائل بأنّه إذا كانت قوّة الجاذبيّة التي يتأثّر بها جسمٌ تتناسب مع كتليّه ، وإذا كان على القوّة بالإضافة إلى ذلك أن تكون كونيّة ومتوافقة مع قانون نيوتن الثالث ، عندئذٍ فإنّه يجب أن تتناسب مع حاصل ضرب الكتلتين .



شكل ١١,٢ : مبدأ التراكب لقوى الجاذبيّة.

١ - تكون F_{12} مستقلة عن ٣ ،
... ٤

الوجه الأمثل بواسطة مثال . إعتبر ثلاثة جسيمات كتلتها مختلفة ، مرتبة كما هو مبين في شكل ١١,٢ . فينص مبدأ التراكب أولاً على أن القوة المؤثرة على جسيم ١ بواسطة جسيم ٢ (F_{12}) تكون مستقلة عن موضع أو كتلة الجسيم ٣ ، بل مستقلة كليّة عن وجود الجسيم ٣ . وهذا يعني أن المعادلة ١١,١ تظلّ صحيحة لأي زوج من الجسيمات ، بغض النظر عن بيئتهما . كذلك ينص مبدأ التراكب ثانياً على أن القوة الكلية المؤثرة على جسيم ١ هي المجموع الاتجاهي للقوى المفردة المشاركة ، وهي في هذا المثال $F_{12} + F_{13}$. وواضح أن مبدأ التراكب هو مبدأ

٢ - $F_1 = F_{12} + F_{13} + \dots$

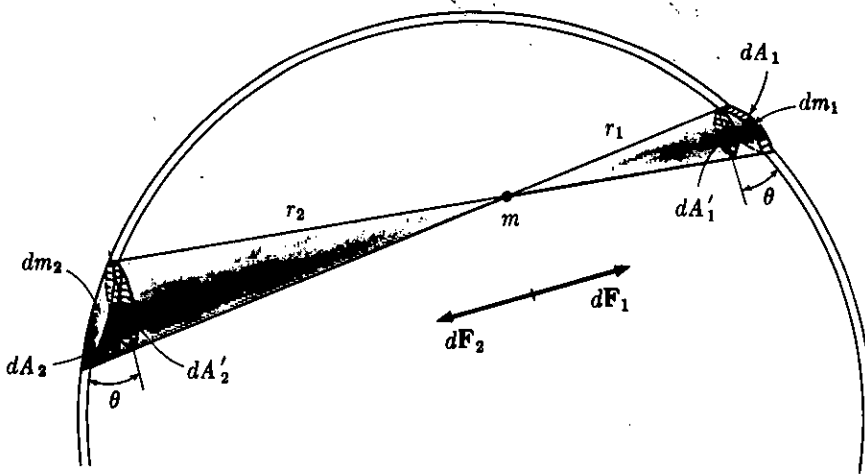
بساطة ؛ فمن العسير إدراك وسيلة أسهل منه لتعميم قانون قوة من جُسَمَيْن إلى أكثر من جُسَمَيْن .

□ جاذبية قشرة كروية Gravity of a Spherical Shell

تنطبق المعادلة ١١,١ ، كما وردت أعلاه ، على الحالة المثالية للجسيمات النقطية فقط - أو ، في الواقع العملي ، على أجسام مَقَاسُهَا أَقَلُّ بكثير من المسافات التي تفصلها . أمّا لإيجاد قوة الجاذبية الناتجة عن جسم ممتد ، فإنه لمن الضروري جمع المساحات من جميع أجزاء الجسم . ولقد حُلَّتْ معضلة قوة الجاذبية لكرة - أول ما حُلَّتْ - بواسطة نيوتن . وكانت نتائجه الصحيحة كالآتي : (١) يجذب جسيم خارج قشرة كروية منتظمة تماماً كما لو تَمَرَّكَزَتْ كُلُّ كِتْلَةِ القشرة عند مركزها . (٢) يجذب جسيم داخل القشرة بالتساوي في جميع الاتجاهات ، فلا يتأثر بأية قوة على الإطلاق . وإن برهان النتيجة الأولى معقد قليلاً ؛ ونفترح طريقة لإجرائه في مسألة ١١,١٤ . أمّا هنا فنُعْطِي برهاناً للنتيجة الثانية .

الجاذبية خارج قشرة : سُرَتْ
القشرة كقطعة مادية

اعتبر كتلة نقطية m موضوعة في أي مكان داخل قشرة كروية منتظمة (شكل ١١,٣) . أمُدْ ، من هذه النقطة المادية ، مخروطاً cone ذا زاوية مُتَناهية الصغر في أي اتجاه بحيث يقطع مساحة dA_1 على سطح الكرة ؛ كما يقطع انعكاس نفس المخروط مساحة dA_2 على جزء آخر من الكرة . فتحتوي هاتان المساحتان المقطوعتان على الكتلتين dm_1 و dm_2 على بُعْدَي r_1 و r_2 عن الكتلة m . ولإتمام الترميز ، لتكن dA_1 و dA_2 مساحتي القاعدتين العموديتين للمخروطين على مسافتَي r_1 و r_2 (أنظر شكل ١١,٣) ؛ ولتكن dF_1 و dF_2 القوتين المؤثرتين على الكتلة m بواسطة تزايدَي الكتلة dm_1 و dm_2 .



شكل ١١,٣ : الرسم الهندسي المستخدم لبيان أن مُحْصَلَةَ قوة الجاذبية على كتلة m داخل قشرة كروية منتظمة تساوي صفراً .

فتكون القوتان dF_1 و dF_2 متعاكستين . أما مقداراهما فهما

$$dF_1 = G \frac{m dm_1}{r_1^2}, \quad dF_2 = G \frac{m dm_2}{r_2^2};$$

بحيث تساوي نسبتهما

$$\frac{dF_1}{dF_2} = \frac{dm_1/r_1^2}{dm_2/r_2^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \frac{dm_1}{dm_2}. \quad (11,3)$$

وبما أن القشرة منتظمة ، فإن الكتلة في أيّ تزايدٍ للمساحة تتناسب مع المساحة ، بحيث أن النسبة dm_1/dm_2 تساوي dA_1/dA_2 . نستفيد الآن من الجوانب الهندسية للرسم التوضيحي في شكل ١١,٣ . فاولاً : إن الزاوية بين المساحتين dA_1 و dA_2 تساوي الزاوية بين dA'_1 و dA_2 . وبسمية هذه الزاوية θ ، نستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned} dA'_1 &= dA_1 \cos \theta, \\ dA'_2 &= dA_2 \cos \theta, \end{aligned} \quad (11,4)$$

وبذلك تكون النسبتان dA_1/dA_2 و dA'_1/dA'_2 متساويتين . وثانياً : تتناسب المساحتان dA'_1 و dA'_2 مع مربعي بُعديهما عن رأس المخروطين ؛ بحيث أن

$$\frac{dA'_1}{dA'_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

وبوضع هذه الحقائق معاً ، نستطيع أن نكتب

$$\frac{dm_1}{dm_2} = \frac{dA_1}{dA_2} = \frac{dA'_1}{dA'_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (11,5)$$

وبالتعويض من المعادلة ١١,٥ في المعادلة ١١,٣ ، نجد أن

$$\frac{dF_1}{dF_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 1; \quad (11,6)$$

أي أن القوتين المتعاكستين متساويتان في المقدار . لذا ، فإن مجموعهما الاتجاهي يساوي صفراً .

ولإتمام البرهان ، تصوّر مثل هذه المخروطات ممتدة في سائر الاتجاهات من الكتلة m لتغطي سطح الكرة برمتها . فلكل زوج من هذه المخروطات يُبطل قوتا الجذب المتعاكستان من جزأين من الكرة مفعول بعضهما البعض تماماً . وبذلك ، فإن محصلة القوة الكلية على الكتلة الداخلية m تساوي صفراً . وهذه النتيجة البسيطة الجميلة هي خاصية فريدة لقانون التربيع العكسي للقوة . فلن تتلاشى محصلة القوة داخل قشرة كروية لأي اعتماد آخر للقوة على المسافة . ومثل هذه الصفة الفريدة تنطبق على جسيم خارج قشرة كروية . فللقانون التربيع العكسي فقط

تتلاشى قوة الجاذبية داخل قشرة

تكون القوة خارج القشرة الكروية كما لو أن كل الكتلة قد تركزت في المركز. لمثل هذه الأسباب تملكنا الدهشة لبساطة قوانين الطبيعة الأساسية.

١١,٣ جاذبية الأرض Gravity of the Earth

يمكن تشبيه الأرض برأس بصل ذي قشر كروية متتالية. فيجذب رجل على سطح الأرض إلى أسفل بواسطة كل قشرة كما لو كانت كل كتلتها عند مركز الأرض. عندئذ يمكن حساب القوة بواسطة المعادلة ١١,١، حيث الكتلة m_1 هي كتلة الرجل، والكتلة m_2 كتلة الأرض، والمسافة d هي المسافة بين الرجل ومركز الأرض. وتكون القوة كما لو أن الرجل ترك معلقاً في الفضاء بينا تهافت الأرض إلى كرة صغيرة على بُعد أربعة آلاف ميل تحت قدميه. ولحساب قوة الجاذبية على قمر صناعي، فإن نصف قطر الأرض ليس بذي أهمية. فكل ما يهم هو بُعد القمر الصناعي عن مركز الأرض.

وتكون قوة الجاذبية على جسم كتلته m عند سطح الأرض

$$F = G \frac{mM_E}{R^2}, \quad (11,7)$$

حيث M_E كتلة الأرض و R نصف قطرها. وتساوي نفس هذه القوة كتلة الجسم في تسارعه خلال السقوط الحر:

$$F = mg. \quad (11,8)$$

لذا، يجب أن يرتبط تسارع الجاذبية بكتلة الأرض، ونصف قطرها، وثابت الجاذبية G بالعلاقة

$$g = \frac{GM_E}{R^2}. \quad (11,9)$$

تسارع الجاذبية لأرض كروية مثالية

وفي عهد نيوتن، لم يكن G ولا M_E معلوماً، رغم أن حاصل ضربهما كان معروفاً جيداً. وحتى اليوم، فإن حاصل الضرب معروف بدقة تزيد على معرفة أي منها منفرداً. أما خارج الأرض، فتستبدل المعادلة ١١,٧ بالعلاقة

$$F = G \frac{mM_E}{r^2}, \quad (11,10)$$

حيث r هي المسافة من مركز الأرض. ونظراً للمعادلة ١١,٩، فإن هذا التعبير للوزن بعيداً عن سطح الأرض يمكن كتابته أيضاً على الصورة:

الجاذبية خارج الأرض

$$F = mg \left(\frac{R}{r} \right)^2 ; \quad (11,11)$$

وهو شكل سبق استخدامه في الباب السابق (أنظر المعادلة ١٠,٩٦).

تصوّر الآن أنّ ثقباً مستقيماً قد حفر عبر مركز الأرض . فكيف سيّغير وزن رجل أثناء إنزاله في الثقب ؟ ... عند عمق ١٠٠ م ، فإن القشرة الخارجية للأرض ، والتي يبلغ سمكها ١٠٠ م ، ستوقف عن التأثير عليه بمحصلة أية قوة ؛ أما بقية الأرض تحته ، فستظل تجذبه إلى أسفل . فعند كل عمق لن يكون للأرض من فوقه أي أثر ، وسوف يكون وزنه كما لو أنه يقف على سطح كوكب أصغر . أما عند المركز فسيلاشي وزنه . وللتعبير عن وزنه رياضياً ، يمكننا افتراض ثبوت كثافة الأرض (وهو افتراض غير جيد كثيراً ، في الواقع) . فلو كان ذلك صحيحاً ، لتغير الحجم والكتلة طردياً مع مكعب نصف القطر . فالحجم ذو نصف القطر r تحدّد كتلته M بالعلاقة

$$M = M_E \left(\frac{r}{R} \right)^3 . \quad (11,12)$$

ويكون وزن الرجل عندئذ

$$F = G \frac{mM}{r^2} = G \frac{mM_E r}{R^3} . \quad (11,13)$$

الجاذبية داخل الأرض

ويتبسّط هذا التعبير ، باستخدام المعادلة ١١,٩ ، إلى

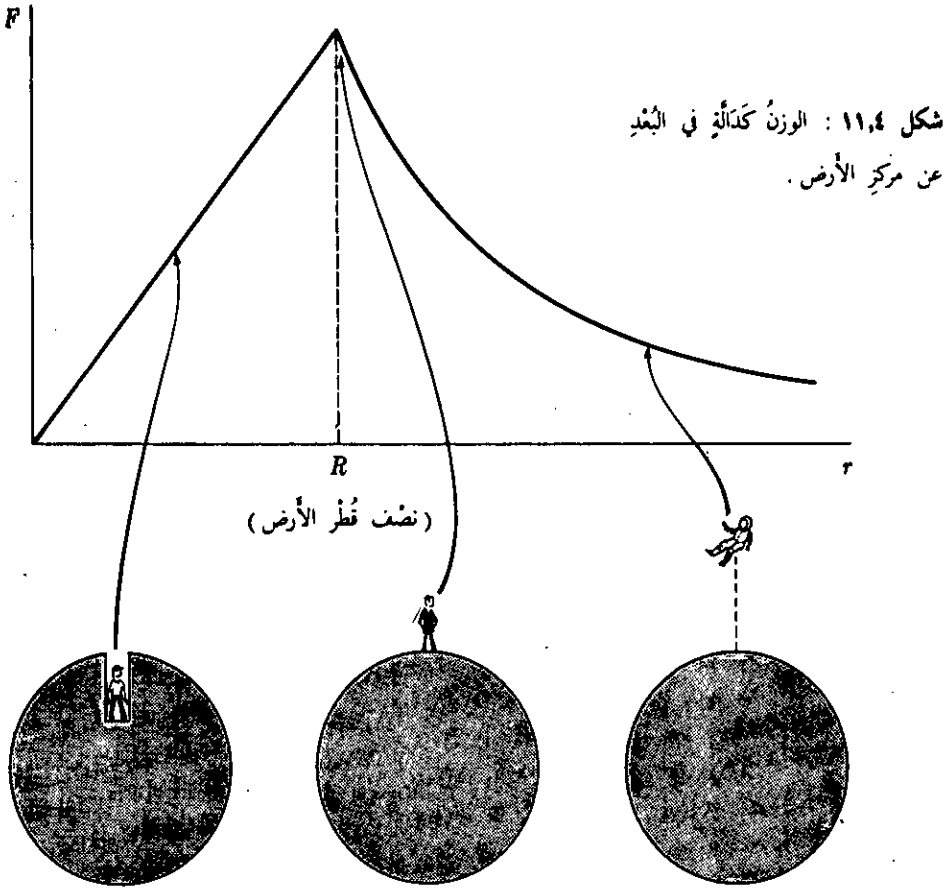
$$F = mg \left(\frac{r}{R} \right) ; \quad (11,14)$$

أي أنّ الوزن ، داخل الأرض ، يتغير طردياً على وجه التقريب مع البعد عن المركز .

وتبيّن قوة الجاذبية داخل الأرض وخارجها بيانياً في شكل ١١,٤ . وبتابعة النقاش في أمر الثقب الوهمي المحفور عبر مركز الأرض ، فقد نستفسر عن مصير رجل سقط في مثل هذا الثقب . وتبيّن المعادلتان ١١,١٣ و ١١,١٤ أنّه لو أمكن إهمال احتكاك الهواء ، لقام بحركة توافقية بسيطة ؛ حيث أنّه ينجذب نحو المركز بقوة تتناسب مع المسافة . وبمقارنة المعادلة ١١,١٣ أو ١١,١٤ مع المعادلة ٧,٢١ ، نجد أنّ ثابت القوة هو

$$k = \frac{mg}{R} = \frac{GmM_E}{R^3} . \quad (11,15)$$

وتصحّ أية نتيجة سابقة للحركة التوافقية البسيطة ، بالتعويض المناسب للثابت k . فتساوي الدّورة ، مثلاً ،



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (11,16)$$

وفما عدا تلك المشاكل كمقاومة الهواء ، فعلى الأصدقاء والأقارب عند طرف الثقب الانتظار مجرد ٨٤ د للرجل الذي سقط كي يعود من رحلته التي يبلغ طولها ١٦٠٠٠ ميل ذهاباً وإياباً خلال الأرض . وقد اتفق أن هذا الزمن يساوي تماماً الزمن اللازم لقمر صناعي على ارتفاع منخفض كي يدور حول الأرض .

١١,٤ طاقة وضع الجاذبية : سرعة الإفلات

Gravitational Potential Energy: Escape Speed

إذا اختير صفر طاقة الوضع على بُعد ما لانهاية عن الأرض ، فإن جسمًا كتلته m تكون له طاقة وضع سالبة في مجال قوة جاذبية الأرض ، وتحدد بالمعادلة ١٠,٩٧ ، التي نكررها هنا :

$$U = - \frac{mgR^2}{r} \quad (r \geq R). \quad (11,17)$$

طاقة وضع الجاذبية خارج الأرض

كذلك يمكن أن تُكتب هذه ، على صورة أساسية أكثر ، كما يلي :

$$U = -G \frac{mM_E}{r} \quad (r \geq R). \quad (11,18)$$

وبما أن القوة التربيعية العكسية المركزية هي قوة مُحافِظَة ، فإن دالة طاقة الوضع هذه تسري على الحركة الاعباطية الثلاثية الأبعاد لجسم متأثر بجاذبية الأرض .

فعند سطح الأرض ، حيث $r = R$ ، تكون طاقة الوضع لجسم كتلته m

$$U_{\text{surface}} = -mgR = -G \frac{mM_E}{R}. \quad (11,19)$$

ويمكن تسمية هذا « بعمق بئر طاقة الوضع depth of the potential well » ؛ ويساوي بالمقدار أقل طاقة لازمة لإزالة الجسم ككتلة من تأثير قوى جاذبية الأرض . لقد عرّفنا في بند ١٠,٨ سرعة الإفلات بأنها السرعة التي ينبغي أن تكون لصاروخ بالقرب من سطح الأرض كيها يبلغ (بالكاد) ما لانهاية بدون تشغيل محركاته . فأدى وضع $\frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 = |U_{\text{surface}}|$ إلى الصيغة

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2gR}. \quad (11,20)$$

سرعة الإفلات الأرضية

وتصبح نفس الكمية ، بدلالة ثابت الجاذبية G ،

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R}}; \quad (11,21)$$

كما تتحدد قيمتها بالمعادلة ١٠,١٠٢ .*

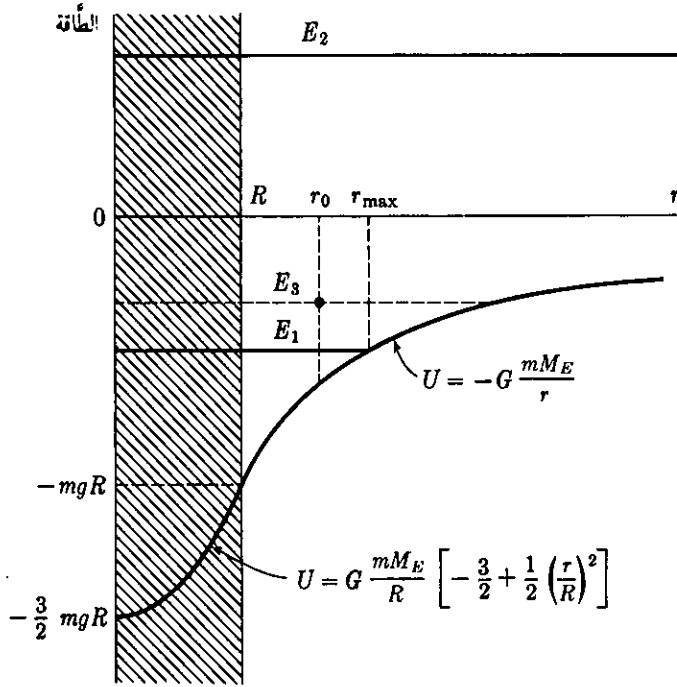
وبما أن قانون قوة الجاذبية داخل الأرض هو ذلك الخاص بالمذبذب التوافقي ، فإن دالة طاقة الوضع داخل الأرض هي

$$U = \frac{1}{2}kr^2 + C, \quad (11,22)$$

حيث تتحدد k بالمعادلة ١١,١٥ ، وحيث C ثابت . وللمذبذب تُوضع C عادة صفرًا ؛ إلا أنه لمن المفضل في هذه الحالة تعديل C بحيث تُعطي المعادلة ١١,٢٢ : $U(R) = U_{\text{surface}}$. عندئذ لا تعاني طاقة الوضع أي انقطاع discontinuity عند $r = R$.[†] فاستخدام المعادلة ١١,٢٢ ، مع المتطلب بأن تكون مستمرة ، يؤدي إلى

* بالوحدات المفضلة في برنامج الفضاء للولايات المتحدة ، تكون $v_{\text{esc}} = 36700$ قدم/ث .

† يُستحسن فيزيائياً بوجود انقطاع في U ؛ إلا أن ذلك غير ملائم البتة في العادة ، لأنه يُبطل الصلة البسيطة بين الشغل وطاقة الوضع (المعادلة ١٠,٧١) ، كما يعني أن الطاقة الكلية E غير مُستقلة عن الموضع (أنظر سؤال ١١,١٠) .



شكل ١١,٥ : رسمٌ طاقِيٌّ لصاروخٍ أو جسمٍ آخرٍ يتفاعلُ مع الأرض .
 مثال ١ : صاروخٌ يُطلقُ رأسياً بطاقةٍ E_1 يبلغُ ارتفاعاً أقصى مقداره $R - r_{\max}$. مثال ٢ : صاروخٌ بطاقةٍ E_2 يفلتُ من الأرض . مثال ٣ : قُرٌّ صناعيٌّ في مدار دائريٍّ ، بطاقةٍ E_3 ومسافةٍ نصفُطَرِيقَةٍ r_0 ، يَشغُلُ نقطةً ثابتةً في الرسم . وعند هذه النقطة : $E_3 = \frac{1}{2}U$

$$C = -\frac{3}{2}mgR = -\frac{3}{2}G \frac{mM_E}{R}, \quad (11,23)$$

والى

$$U = mgR \left[-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (r \leq R), \quad (11,24)$$

أو ، بصورةٍ مكافئة ، طاقةً وضعٍ الجاذبيَّةِ في باطن الأرض

$$U = G \frac{mM_E}{R} \left[-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (r \leq R). \quad (11,25)$$

وبين شكل ١١,٥ رسماً بيانياً لطاقة الوضع $U(r)$ في باطن الأرض وخارجها على السواء .

■ مثال ١ : صاروخٌ يُطلقُ رأسياً ، فيبدأ حركته إلى أعلى بطاقةٍ كَلْبِيَّةٍ $E_1 = -\frac{1}{2}mgR$ (أنظر شكل ١١,٥) . فما أقصى ارتفاعٍ يصلُ إليه ؟

عندَ ذروة حركته تكون $K = 0$ ، و $U = E_1$ ، أو

$$-G \frac{mM_E}{r_{\max}} = -\frac{1}{2}mgR.$$

ويمكن استبدال g على اليمين بالمقدار GM_E/R^2 (المعادلة ١١,٩) ؛ بحيث أن

$$-G \frac{mM_E}{r_{\max}} = -\frac{1}{2}G \frac{mM_E}{R}.$$

وحلُّ هذه المعادلة هو

$$r_{\max} = 2R.$$

وعلى ذلك ، فإنَّ أقصى ارتفاعٍ فوق سطح الأرض هو

$$h_{\max} = r_{\max} - R = R \cong 4,000 \text{ miles.}$$

■ مثال ٢ : صاروخٌ كتلته ١٠ كـرغ ، كانَ قد أُطلقَ رأسياً ، تساوي طاقته الحركية ١٠^{١٣} ج ، وذلك بعد استهلاك وقوده في صعودٍ قصيرٍ جداً . فهل يستطيع الإفلات ؟ إن كان الأمر كذلك ، فما سرعته النهائية على بُعدٍ كبيرٍ عن الأرض ؟

عينُ أولاً طاقته الكلية . فوفقاً للمعادلة ١١,١٩ ، تكون طاقة وضعه عند بداية رحلته

$$\begin{aligned} U_0 &= -mgR = -10^5 \text{ kg} \times 9.80 \text{ m/sec}^2 \times 6.37 \times 10^6 \text{ m} \\ &= -6.24 \times 10^{12} \text{ J.} \end{aligned}$$

وهكذا ، فإنَّ طاقته الكلية ، $E_2 = K_0 + U_0$ ، هي

$$\begin{aligned} E_2 &= 10^{13} \text{ J} - 0.624 \times 10^{13} \text{ J} \\ &= 3.76 \times 10^{12} \text{ J.} \end{aligned}$$

وبما أنَّ هذه الطاقة موجبة ، فإنَّ الصَّاروخَ يفلتُ حقاً (شكل ١١,٥) . فعند ما لا نهاية تكون $U = 0$ ، و $K = E_2$ ؛ أو

$$\frac{1}{2}mv_{\text{final}}^2 = E_2 = 3.76 \times 10^{12} \text{ J.}$$

ويكونُ الحلُّ :

$$v_{\text{final}} = \sqrt{\frac{2E_2}{m}} = 8.67 \times 10^3 \text{ m/sec.}$$

■ مثال ٣ : صاروخٌ يدورُ في مدارٍ دائريٍّ على بُعدٍ r_0 عن مركز الأرض . فما نسبة طاقته الحركية إلى طاقة وضعه ؟

لنكن الطاقة الكلية للقمر الصناعي E_3 . وكما هو مبين في شكل ١١,٥ ، فإنَّ القمر الصناعي الدائر يُمثلُ بنقطة ثابتة في رسمٍ طاقيٍّ ، لأنَّ كلا من r_0 و E_3 ثابتٌ . وتكون القوة المؤثرة على القمر الصناعي

$$F = G \frac{mM_E}{r_0^2},$$

وبذلك يكونُ تسارعه

$$a = \frac{GM_E}{r_0^2}.$$

ويجب أن يساوي هذا v^2/r_0 ، أي التسارع المركزي الجاذب لأي جسمٍ يدور بانتظامٍ في دائرة . ونشتقُ الطاقة الحركية من هذا التساوي :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G \frac{mM_E}{r_0}. \quad (11,26)$$

أما طاقة الوضع عند نفس المسافة النصفقطرية، فهي

$$U = -G \frac{mM_E}{r_0}. \quad (11,27)$$

وبذلك تكون النسبة K/U ببساطة

$$\frac{K}{U} = -\frac{1}{2}, \quad (11,28)$$

مستقلة عن r_0 . كذلك يُعطينا المجموع $K + U$ الطاقة الكلية:

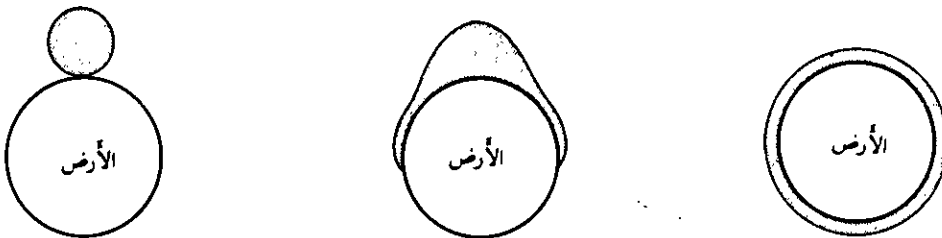
$$E = -\frac{1}{2}G \frac{mM_E}{r_0}, \quad (11,29)$$

التي تساوي $K - U$ أو $\frac{1}{2}U$. وتُعني هذه العلاقات البسيطة أن النقطة في الرسم الطاقوي التي تمثل الحركة الدائرية تقع في المنتصف بين منحنى طاقة الوضع وخط الطاقة الصفرية

. zero-energy line

١١,٥ شكل الأرض The Shape of the Earth

إن الحقيقة بأن الأرض والقمر والشمس والكواكب هي كرات - أو قريبة جداً من الكرات - قد بقيت مقبولة لعددٍ لا حصر له من السنين دون وجود تفسير حقيقي أبداً. ولم تكن هذه أحجية علمية بالمعنى الصحيح؛ إذ يُستبعد أن يكون أكثر من حفنة من الناس قبل نيوتن قد فكروا بضرورة وجود أي تفسير. إلا أنه أدرك الحاجة إلى تفسير وأن الجاذبية تستطيع توفير ذلك. فباستخدام المصطلح الحديث، نستطيع القول إن الشكل الكروي هو الشكل الذي تكون طاقة وضعه أقل ما يمكن. تصوّر، مثلاً، قطرة هائلة من الماء تركت فجأة عند نقطة على سطح الأرض (شكل ١١,٦). ولنفترض للحظة ما أن الأرض كرة تامة. فينجذب كل



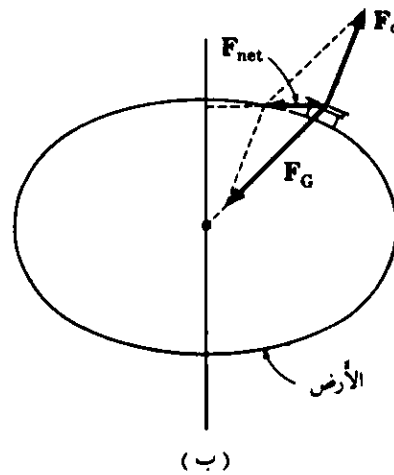
شكل ١١,٦: توزيع وهي لقطرة ماء هائلة فوق سطح الأرض. فهي تسمى إلى اتخاذ الشكل الكروي تقريباً ذي طاقة وضع الجاذبية الدنيا.

جزء من السائل نحو مركز الأرض ، وينساب نتيجة لذلك إلى أن يصبح أقرب ما يمكن إلى مركز الأرض . وهكذا ، فإنه يُشكّل قشرة كروية تحيط بالأرض . ولربما كانت الأرض برمتها يوماً ساخنة لدرجة تنساب معها هذه الطريقة . وحتى لو لم تكن كذلك ، فبعد مرور ملايين كافية من السنين ، يستطيع الصخر الصلّد « الانسياب » أيضاً لتشكيل الشكل الكروي ؛ إذ لا تني سلاسل جبالنا القديمة تفتت تدريجياً ويُعاد توزيع كتلتها فوق سطح الأرض . فالمصير النهائي للجسم لا يدور هو ، من حيث المبدأ ، أن يصبح كرة مثالية ؛ مع أنه عملياً ، بالطبع ، قد يستحيل أبداً إزالة التواءات السطحية كلّية .

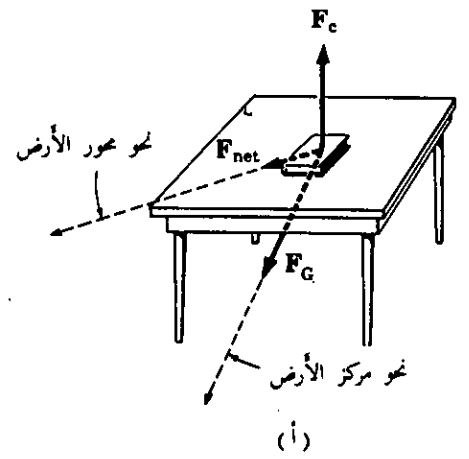
الأرض الساكنة تكون كروية الشكل

ولكن ماذا يحدث إذا كانت الكرة تدور ؟ عندئذ تعاني كسرة « ساكنة » من المادة على سطح الأرض تسارعاً أثناء دورانها حول محور الأرض مرة كل يوم اعتبر كتاباً على سطح مائدة يُفترض أنها ملساء [شكل ١١،٧ (أ)] . ففعل قوة التماس F_c (contact) التي تؤثر بها المائدة على الكتاب رأسياً إلى أعلى . ونقول - عادة - إن قوة الجاذبية على الكتاب ، F_G ، لها مقدار مساو وتؤثر رأسياً إلى أسفل ، بحيث تتلاشى محصلة القوة المؤثرة على الكتاب . لكن ، في الواقع ، لا تستطيع هاتان القوتان أن تلغيا إحداها الأخرى تماماً ؛ إذ يجب أن تُضافاً معاً لتعطي محصلة قوة صغيرة باتجاه محور الأرض $(F_{net} = F_c + F_G)$. فيها أن الكتاب يعاني محصلة تسارع ، فلا بد من أن يكون متأثراً بمحصلة قوة . وهذا يعني أنه من غير الممكن أن تؤثر قوة الجاذبية رأسياً إلى أسفل (سوى عند القطب وخط الاستواء) . وكما هو مبين في شكل ١١،٧ (ب) ، فإن قوة الجاذبية تؤثر تقريباً نحو مركز الأرض ، في اتجاه يميل قليلاً بمناى عن الاتجاه الرأسى . فلو ظلت الأرض كروية تماماً ، لبقى الاتجاه الرأسى (العمودي على

يكون الجسم . الساكن . على سطح الأرض في حالة تسارع



(ب)



(أ)

شكل ١١،٧ : تفسير شكل الأرض اللاكروي . فلكسرة مادة ساكنة على سطح الأرض ، ينبغي أن تُضاف قوة الجاذبية F_G وقوة التماس F_c لتعطي محصلة قوة صغيرة F_{net} متجهة نحو محور الأرض . (وإن مقدار تفلطح الأرض لمتباعد فيه كثيراً في هذا الرسم .)

(السطح) واتجاه مركز الأرض واحداً ، ولاستحالة عندئذٍ ائتلاف قوة تماس رأسية وقوة جاذبية للحصول على مُحَصَّلة القوة المناسبة باتجاه المحور .

الأرض التي تدور هي مُجَسَّمُ قِطْعِ ناقص

لقد استطاع نيوتن أن يبرهن أن شكل الاتزان لجسم يدور ، إذا كان بمقدوره الانسياب في النهاية ، هو مجسم قِطْعِ ناقص ellipsoid ، مُقْلَطَحٌ عند قُطْبَيْهِ ، ومُتَفَخٌّ bulging عند خط استوائه . كما تنبأ بثقة بوجود مثل هذا التفلطح للأرض ، وحسب مقدار هذا الأثر ، واستخرج أدلة دامغة غير مباشرة لتأييده . إلا أنه انقضت خمسون سنة قبل أن أكدت القياسات المباشرة هذا التنبؤ تصوّر دوائر شرقية - غربية لخطوط العرض مرسومة على الأرض على فترات ١ من خط الاستواء (صفر) إلى القطب الشمالي (٩٠) . فكل دائرة خط عرض تُوسَمُ بالزاوية التي يصنعها خط يشير إلى النجم القطبي North Star مع الخط الأفقي المحلي . وتجريبياً تُقاس المسافة بين دوائر خط العرض هذه بقياس المسافة التي يجب قطعها شمالاً أو جنوباً لتغيير الموضع الزاوي للنجم القطبي درجة واحدة . وتساوي هذه المسافة عند جميع أجزاء الأرض ($\frac{1}{360} \times$ محيط الأرض) على أرض كروية . أما على أرض مُقْلَطَحَة ، فإن تغيير خط العرض بدرجة واحدة يتطلب قطع مسافة أكبر قرب أي من القطبين منها قرب خط الاستواء . وفي الأعوام ١٧٣٥-١٧٣٧ ، انطلقت حملتان استكشافيتان من فرنسا إلى بيرو Peru وأرض اللاب Lapland * لإجراء القياسات ولحسم مسألة شكل الأرض . فعادت كلتاها بأدلة مقنعة تؤيد تنبؤ نيوتن . ومنذ ذلك الحين عُرف بير دي موبيرتوي Pierre de Maupertuis ، قائد حملة أرض اللاب ، باسم « المُقْلَطَحِ العظيم the grand flattener » .

تكشف الأقمار الصناعية تفاصيل جديدة عن شكل الأرض

ولم تظهر أدلة جديدة أساساً عن شكل الأرض حتى كان عصر الأقمار الصناعية الأرضية . فالمتابعة الدقيقة للأقمار الصناعية تستطيع الكشف بتفصيل دقيق عن انحراف توزيع كتلة الأرض عن الكروية التامة ؛ حيث أن أي انحراف كهذا يُغيّر قليلاً قانون التربع العكسي للقوة خارج الأرض ، كما يؤثر على تسارع القمر الصناعي . † ولقد اكتُشِفَ في عام ١٩٥٩ أن الأرض ، بالإضافة إلى كونها مفلطحة عند القطبين ، لها شكل كُتْمَرِيٍّ لدرجة قليلة جداً ، كما أن لها ميلاً طفيفاً نحو قطب شمالي مُدْبَبِ الرأس ، ونصف كرة جنوبياً مسطحاً إلى أدنى حد (شكل ١١،٨) .

□ استباق الاعتدالين Precession of the Equinoxes

لعل أجمل سمات أعمال نيوتن وأكثرها إثارة فيما يتعلق بالكروية الأرض هي تفسيره

* هي ذلك الجزء من أوروبا الشمالية الذي يقع جُلُّه ضمن المنطقة القطبية الشمالية Arctic Circle ، والذي يشمل - فيما يشمل - شمالي النرويج والسويد وفنلندا والحد الشمالي الغربي من الاتحاد السوفيتي . (المشرق)

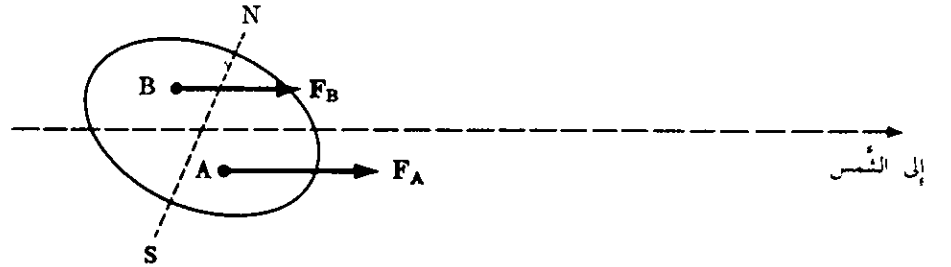
† أنظر : ديزموند كينغ - هيل ، « شكل الأرض » : Desmond King-Hele, "The Shape of the Earth" مجلة Scientific American ، عدد تشرين أول (أكتوبر) ، ١٩٦٧ .



شكل ١١,٨ : منظر مُصَحَّحٌ جداً لشكل الأرض .
فبالإضافة إلى كونها مفلطحة عند القطبين ، فإن
الأرض تكون مُشوَّهة قليلاً لتُغْدُو كُثْرَتِة الشكل .

لاستباق الاعتدالين . فقد عُرفَ منذ عام ٢٠٠ ق . م . على الأقلَّ أنَّ النُقطةَ في السَّمَاءِ التي يشيرُ
نحوها قطبُ الأرضِ تتحرَّكُ تدريجياً بين النجوم . فبعدَ قَبُولِ وَجْهَةِ النَّظَرِ الكوبرنيكيَّةِ عن
الكون ، بدا واضحاً أنَّ هذا الأثرَ ، المسمَّى باستباقِ الاعتدالين ، ينبغي أن يَنجُمَ عن تذبذبِ
wobbling بطيٍّ في محور الأرض . وسوف لا نَسْتَعْرِضُ تفسيرَ نيوتن بالتفصيل ؛ بل سنشيرُ فقط
إلى أساسه . فبما أنَّ الأرضَ لاكرويةٌ ولها محورٌ مائلٌ ، فإنَّ الشَّمْسَ والقَمَرَ يؤثران بعزميٍّ دورانٍ
على الأرضِ بالإضافة إلى القوتين المبيَّنتين (شكل ١١,٩) . وبالنسبة إلى مركز الأرض ، فإنَّ
هذين العزمين يؤثران عمودياً على اتجاه غزْلِ الأرض . لذا ، فإنَّ محورَ الأرضِ يَسْتَبِقُ على نَمَطٍ
دولابِ الدَّرَاجَةِ الذي سَبَقَتْ دراستُهُ في بند ٩,٧ . وقبل أن تتوافرَ أيَّةُ أدلَّةٍ مباشرةٍ على الشكلِ
اللاكرويِّ للأرضِ بمدَّةٍ طويلةٍ ، أدركَ نيوتن أنَّ استباقِ محورِ الأرضِ هو بحدِّ ذاته دليلٌ دامغٌ

تؤثرُ عزمُ دورانٍ على الأرضِ ،
فيسبقُ غزْلُها



شكل ١١,٩ : تفسيرُ عزمِ الدَّورانِ الذي يُؤثرُ به الشَّمْسُ على الأرضِ يُمثِّلُ الخطُّ المتقطعُ مستوى دائرة البروجِ
ecliptic plane (أي مستوى مدار الأرض) . فيكون مركزُ كتلةِ جزءِ الأرضِ الواقع تحت هذا المستوى (النقطة A) أقربَ
قليلاً إلى الشَّمْسِ من مركزِ كتلةِ جزءِ الأرضِ فوق هذا المستوى (النقطة B) . وبناءً على ذلك ، فإنَّ الشَّمْسَ تؤثرُ بقوةٍ F_A على
النَّصْفِ السُّفْلِيِّ أكبرَ قليلاً من القوةِ F_B التي تؤثرُ بها على النَّصْفِ العلويِّ . وبما أنَّ هاتين القوتين غيرُ متساويتين تماماً ، فإنَّ ثَمَّةَ
محصلةٍ عزمِ دورانيٍّ بالنسبة إلى مركز الأرضِ (تتجهُ خارجاً من الصفحةِ في هذا الرَّسْمِ التوضيحي) . هذا ، وإنَّ مقياسَ
الشكلِ مُشوَّهٌ لدرجةٍ كبيرةٍ بالطبع .

على تَقْلُطُح الأرض عند القطبين ، وأن مُعَدَّلَ هذا الاستباق ليزوْدُنَا بِدَلِيلٍ جَيِّدٍ على مقدار هذا التَقْلُطُح . وما أَغْنَى الذِّكْرِيَّاتِ المتنوعة التي يستدعيها تَقْلُطُحُ الأرض إلى الذَّهْنِ : هِيَّارُكُوس Hipparchus ، مُكْتَشَفُ استباقِ الاعتدالين ، أثناء رصده النجوم في ليلٍ إغريقيٍّ دافئٍ ؛ نيوتن ، بمفرده في غرفةٍ دراسيةٍ باردةٍ في كيمبردج ، وأمامه صفحاتٌ من الحسابات ؛ دي مُوَبِرْتُوِي ، على بُعْدِ آلاف الأميالٍ عن أرض الوطن ، يرتعدُ في ربحٍ قطبيَّةٍ قارسة ؛ عاملٌ فنيٌّ ، في خَنْدَقِ نصفِ منظمور بفلوريدا ، يقوم بالعدِّ العكسيِّ حتى لحظة الإنطلاق المُتَهَبِّ لقميرٍ صناعيٍّ مهمته الكشفُ عن تفاصيلٍ جديدةٍ لشكلِ الأرض .

□ تسارعُ الجاذبيَّة The Acceleration of Gravity

يكونُ تسارعُ الجاذبيَّة ، لأرضٍ ساكنةٍ وكرويةٍ تماماً ، ثابتاً على سطحِ الأرض ، ويتحدَّدُ بالمعادلة ١١,٩ . إلا أنَّ الأمرَ ليس كذلك لأرضٍ تدورُ . فعند خطِّ الإستواء ، بتسارعُ سطحِ الأرض نفسه نحو مركز الأرض ، بحيث يتعيَّنُ على جسمٍ ساقطٍ أن يلحقَ بـ سطحٍ متسارعٍ إلى أسفل . وبذلك تكونُ القيمةُ المقاسةُ للتسارعِ g نسبةً إلى السطحِ أقلَّ عند خطِّ الإستواء منها عند القطب . ويمكنُ حسابُ تسارعِ السطحِ من الصيغة $a = v^2/r$. فعند خطِّ الإستواء ، تكون $v = 465$ م/ث (حوالي ١٠٤٠ ميلاً/س) ؛ وعليه ، فإنَّ

$$a_{\text{equator}} = \frac{(4.65 \times 10^2 \text{ m/sec})^2}{6.37 \times 10^6 \text{ m}} = 0.034 \text{ m/sec}^2. \quad (١١,٣٠)$$

وهذا هو القَدْرُ الذي تقلُّ عنه قيمةُ g عند الذهابِ من القطبِ إلى خطِّ الإستواء لو كانت الأرض كرويةً . ونظراً لكونها غيرَ كرويةٍ ، فإنَّ قوَّةَ الجاذبيَّةِ تكونُ في الواقع أكبرَ قليلاً عند القطب منها عند خطِّ الإستواء - أكبرَ بقدر كافٍ يستطيعُ تعليلُ تغيُّرٍ إضافيٍّ بقيمةِ g مقداره ٠,٠١٨ م/ث^٢ . وعلى الإجمال ، فإنَّ قيمةَ g المقاسةُ أقلَّ عند خطِّ الإستواء منها عند القطب بمقدارِ Δg مساوٍ لمجموعِ هاتينِ المساهمتين :

$$\Delta g = 0.052 \text{ m/sec}^2. \quad (١١,٣١)$$

أما القيمُ الحديثةُ للتسارعِ g عند القطبِ وخطِّ الإستواء والفرق بينهما فهي :

$$g_{\text{pole}} = 9.8322 \text{ m/sec}^2, \quad (١١,٣٢)$$

$$g_{\text{equator}} = 9.7804 \text{ m/sec}^2, \quad (١١,٣٣)$$

$$\Delta g = 0.0518 \text{ m/sec}^2. \quad (١١,٣٤)$$

أثران يُبيَّان تغيُّرَ g مع خطِّ العرض

والقيمة التقريبية للتسارع g المستخدمة عادةً ، ٩,٨٠ م/ث^٢ ، صحيحة ضمن حدود ٠,٣ بالمئة في كل مكان على الأرض .

١١,٦ قوانين كبلر Kepler's Laws

قوانين نيوتن هي تعابير عن الحركة بوجه عام والقوى بوجه عام . أما قوانين كبلر فهي من نوع آخر تماماً ؛ إذ أنها تعابير عن حركة نظام واحد مفرد ، هو النظام الكوكبي planetary system . وتختلف قوانين نيوتن وكبلر أيضاً في عدد المفاهيم التي يجمعانها معاً . فالمصطلح الحديث ، فإن قوانين نيوتن ديناميكية dynamic ، تربط الكتلة ، والقوة ، والمسافة ، والزمن ؛ في حين أن قوانين كبلر كينماتية kinematic ، لها علاقة بالمسافة والزمن فقط . ومن الأفضل النظر إلى قوانين كبلر على أنها مشاهدات مقتضبة . فهي تصفي وتجمع باتقان آلاف المشاهدات محولة في حقبة من العلاقات الجميلة البسيطة ما قد يكون خلاف ذلك جداول طويلة من الأعداد الغنية المضمون العديدة الشكل . أما قوانين نيوتن ، فتعمم استناداً إلى المشاهدة ، بدلاً من تلخيص فئة معينة من المشاهدات ؛ إذ أنها تربط مفاهيم قليلة أساسية لكل ضروب الحركة وكل الأنظمة . وبالرغم من إطلاق اسم « قوانين » على كليهما ، فإن طبيعة وغرض قوانين نيوتن وقوانين كبلر مختلفان تماماً .

تلخص قوانين كبلر المعطيات الفلكية

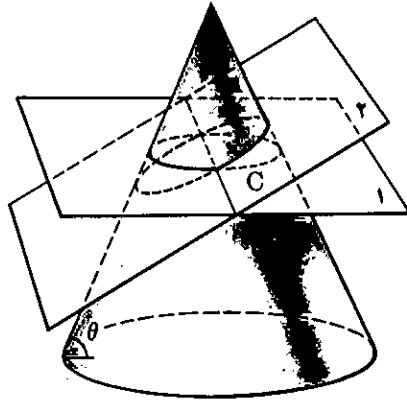
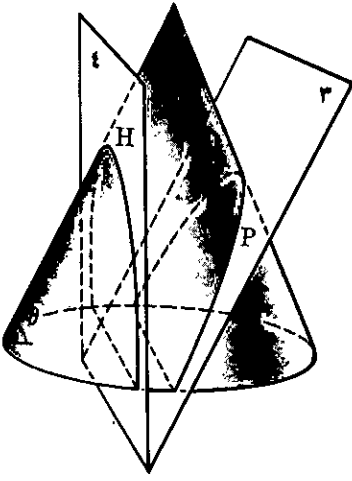
... بعد عتاء سنوات عديدة في دراسة معطيات براهي Brahe الفلكية ، كوفي كبلر باكتشاف ثلاثة قوانين للحركة الكوكبية التي تحمل اسمه الآن . ويصف الإثنان الأولان ، اللذان نُشرا عام ١٦٠٩ ، شكل المدار الكوكبي وتغيرات سرعة كوكب أثناء حركته في مداره . أما الثالث ، الذي نُشِر في ١٦١٩ ، فيربط بين مدار كوكبي وآخر . وتظل قوانين كبلر صحيحة اليوم كما كانت عند اكتشافها .

□ قانون كبلر الأول Kepler's First Law

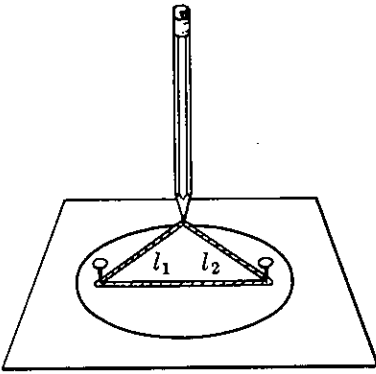
هندسة المدارات الكوكبية

المسار الذي يخطه كل كوكب هو قطع ناقص ellipse مع وجود الشمس في إحدى البؤرتين .

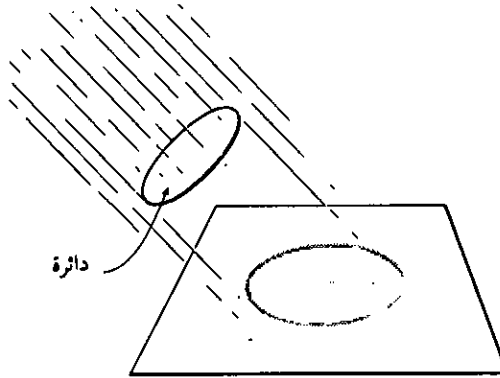
القطع الناقص هو قطع مخروطي . ويُعرف بطرق عدة : (١) إذا قطع مستوى مخروطاً دائرياً بحيث كان القطع منحنى مغلقاً ، كان ذلك المنحنى قطعاً ناقصاً (شكل ١١,١٠) . أما القطوع المخروطية الأخرى فهي القطع المكافئ parabola ، والقطع الزائد hyperbola ، والدائرة ، كما هو مبين في شكل ١١,١٠ . والقطع المكافئ والقطع الزائد هما منحنيان مفتوحان



شكل ١١,١٠ : القَطْعُ المخروطية ... بصنع طرف المخروط زاوية θ مع الاتجاه الأفقي . ويحدد تقاطع مستوى أفقي (١) مع المخروط دائرة (C) ، في حين أن مستوى يميل على الاتجاه الأفقي بزاوية أقل من θ (٢) يتقاطع مع المخروط في قطع ناقص (E) . أما المستويات التي تميل على الاتجاه الأفقي بزوايا تساوي θ (٣) وأكبر من θ (٤) فتحدد القطع المكافئ (P) والقطع الزائد (H) .



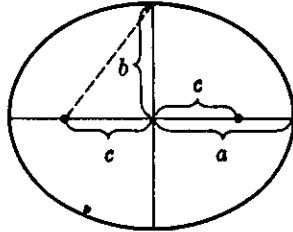
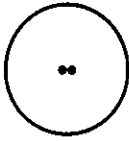
(ب)



(أ)

شكل ١١,١١ : تعريفان آخران للقطع الناقص . (أ) يكون ظل دائرة تعترض أشعة ضوئية متوازية قطعاً ناقصاً . (ب) النقاط التي يساوي مجموع بُعديها ، l_1 و l_2 ، عن نقطتين ثابتتين مقداراً ثابتاً ، إنها تحدد قطعاً ناقصاً .

open curves ؛ في حين أن الدائرة هي قطع ناقص خاص . وتشمل التعاريف الهندسية الأخرى للقطع الناقص ما يلي : (٢) الظل الملقى على سطح مستو بواسطة دائرة تعترض أشعة ضوئية متوازية هو قطع ناقص [شكل ١١,١١ (أ)] . (٣) إذا تحركت رأس قلم في مستوى بحيث كان مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى يساوي مقداراً ثابتاً ، فإن المنحنى الذي يخطه القلم هو قطع ناقص [شكل ١١,١١ (ب)] . وتدعى هاتان النقطتان الثابتان داخل القطع الناقص ببؤرتيه foci .



شكل ١١، ١٢ : عيّنات من قُطوع ناقصة .
ونحُدُّ النِّقَاطَ الدَّاكِنَةَ البُورَ .

خواصُّ القُطوعِ النّاقِصَةِ

... يبيّن شكل ١١، ١٢ قِطْعاً ناقصاً نقاطهُ ومسافاتهُ المتباينة موسومة . ويُدعى أطولُ خطٍّ مستقيم يمرُّ بمركز القِطْعِ النّاقِصِ ويصلُ طرفَيْهِ المتقابلين بالمحورِ الرّئيسيِّ major axis ؛ بينما يُدعى أيٌّ من نصفي المحورِ الرّئيسيِّ بالمحورِ نصفِ الرّئيسيِّ semimajor axis . أمّا أقصرُ خطٍّ يمرُّ بمركز القِطْعِ النّاقِصِ ويصلُ جانبيه فيُدعى بالمحورِ الثّانويِّ minor axis ، ونصفهُ بالمحورِ نصفِ الثّانويِّ . ويكون المحوران الرّئيسيِّ والثّانويِّ متعامدين مع بعضهما البعض . وتقعُ البُورتان على المحورِ الرّئيسيِّ على بُعْدَيْن متساويين عن المركز . وفي الرّسم التّوضيحيّ ، يُدعى طولُ المحورِ نصفِ الرّئيسيِّ a ؛ وطولُ المحورِ نصفِ الثّانويِّ b ؛ والمسافة من المركز إلى أيٍّ من البُورتين c . وتُوجد لكلِّ قِطْعٍ ناقصٍ علاقةٌ جبريّةٌ بسيطةٌ تربطُ بين a ، و b ، و c :

$$c^2 = a^2 - b^2 . \quad (١١,٣٥)$$

ونظراً لهذه العلاقة ، فإنّ المسافة بين أحدِ طرفي المحورِ الثّانويِّ وإحدى البُورتين (الخطُّ المتقطّع في شكل ١١، ١٢) تُساوي a أيضاً . وللقِطْعِ النّاقِصِ « السّمين » (الشّبيه بدائرة) ، يكون a أكبرَ بقليلٍ فقط من b ؛ بينما تكون c صغيرةً جدّاً ؛ كما تكون البُورتان متقاربتين معاً . (للدّائرة : $a = b$ و $c = 0$ ؛ فتندغم البُورتان معاً عند المركز .) أمّا للقِطْعِ النّاقِصِ « الرّقيق » ، ذي المحورِ الرّئيسيِّ الأطولِ بكثيرٍ من محورِ الثّانويِّ ($a \gg b$) ، فتكون البُورتان مُتباعِدَتين جدّاً بالقرب من طرفي القِطْعِ النّاقِصِ . هذا ، ويُستخدَمُ بارامترٌ آخرٌ لتمييزِ القِطْعِ النّاقِصِ ، هو الاختلافُ المركزيّ (eccentricity) e ، الذي يُعرّفُ بالعلاقة

الاختلافُ المركزيُّ

$$e = \frac{c}{a} . \quad (١١,٣٦)$$

ولجميع المداراتِ الكوكبيّةِ اختلافاتٌ مركزيّةٌ صغيرةٌ نوعاً ؛ في حين أنّ لبعضِ المُدَنَّبَاتِ comets

اختلافاتٍ مركزيّةٍ كبيرةٍ (أي أن e تقتربُ من ١ ، التي هي القيمةُ العظمى) ؛ فتقتربُ كثيراً من الشمس عند أحدِ طرفي مدارها ؛ بينما تبتعدُ عنها كثيراً عند الطرفِ الآخر... فما الاختلافُ المركزيّ للدائرة ؟

ونضيفُ تعريفاً جبرياً واحداً للقطعِ الناقصِ ، ليس لأنه يُساهمُ أكثر في فهمِ قانونِ كبلر الأولِ ، بل لأنه يوضّحُ تنوعَ المعالجاتِ المختلفةِ لهذا المنحنى الطّريفِ : (٤) إذا وُضِعَ قطعُ ناقصٍ بحيثُ كانَ مركزُهُ عند نقطةِ الأصلِ لنظامٍ إحداثيٍّ ، وكانَ محوراهُ الرئيسيَّ والثانويَّ على امتدادِ محوريَّ x و y على الترتيب ، فإن المنحنى يُعرّفُ بالمعادلةِ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (١١,٣٧)$$

معادلةُ قطعِ ناقصٍ

ويكونُ a و b في هذه المعادلة ثابتين ، كما سبقَ تعريفُها ، ويُميزانُ القطعَ الناقصَ المعين . أما المتغيرانِ x و y فيحددانِ موقعَ أيّة نقطةٍ على المنحنى .

وقد أثبتَ نيوتن لأول مرةً ، باستخدام قانونهِ الثاني وقانونِ قوّةِ الجاذبيّةِ ، أنّه إذا حَدَثَ وبدأ كوكبٌ الحركةَ بالطريقةِ الصحيحةِ ، فإنّه يستطيعُ الحركةَ في مدارٍ إهليلجيّ elliptic على أيّ شكلٍ أو مقياسٍ على الإطلاق . وفي الواقع ، فقد أثبتَ حتى أكثر من هذا - أن جميعَ المساراتِ الممكنةِ هي قطعٌ مخروطيّةٌ . فالكوكبُ أو المذنبُ ذو الطاقةِ الكافية يستطيعُ الحركةَ في مسارٍ مكافئٍ أو زائديٍّ والإفلاتِ من النظامِ الشمسيِّ . أمّا وقد ابتدَعَ الإنسانُ الآنَ نظاماً كوكبياً جديداً من الأقمار الصناعيةِ حول الأرض ، فقد ابتدَعَ معها مدىً أوسعَ بكثيرٍ من أشكالِ إهليلجيّةٍ ممّا كانَ مألوفاً أصلاً في النظامِ الشمسيِّ ؛ كما أرسلَ مركّباتٍ فضائيّةً في مداراتِ إفلاتٍ escaping orbits على شكلِ مساراتٍ زائديّةٍ نسبةً إلى الأرض .^٥

ويجبُ الانتباهُ إلى أنّ قانونَ كبلرِ الأوّلَ هو قانونٌ هندسيٌّ بحتٌ . فهو يختصُّ فقط بالسّمةِ المكانيةِ للمدارِ الكوكبيِّ ، وليس بالزّمان أو السّرعة ، أو أيّ مفهومٍ آخر . ومع ذلك ، فكم كانَ خطوةً عظيمةً بعد ألفي سنةٍ من الدّوائرِ ! فبعبارةٍ واحدةٍ بأن الكواكبَ تتحرّكُ على امتدادِ قطعٍ ناقصٍ ، بسّطَ كيبلرُ إلى أبعدِ الحدودِ صورةَ النظامِ الشمسيِّ ، في نفس الوقت الذي حقّقَ فيه توافقاً بين المُشاهدةِ والنتائجِ الحسابيّةِ أفضلَ ممّا أمكنَ الحصولُ عليه بأكثرِ الأنظمةِ السّابقةِ إتقاناً .

□ قانونُ كبلرِ الثاني Kepler's Second Law

قانونُ كبلرِ الثاني إنّ هو إلّا قانونُ المساحاتِ ، الذي سبقَتْ دراستُهُ في بند ٩,٩ . فأتناء

قانونُ المساحاتِ

^٥ لم نفلتْ أيّةً مركّبةً فضائيّةً حتى الآنَ من النظامِ الشمسيِّ . فبمجرّد تحرّرها من الأرض ، تستقرُّ المركّباتُ البينكوكبيّةُ interplanetary في مداراتٍ إهليلجيّةٍ حولَ الشمسِ .

حركة الكوكب على امتداد مداره الإهليلجي ، تتغير سرعته بحيث يمسح الخط الشعاعي الواصل بين الشمس والكوكب المساحة بمعدل ثابت . وهذا يعني أن حركة الكوكب تكون أسرع عندما يكون قريباً من الشمس ، وأبطأ عندما يكون بعيداً عنها . ويكون التفاوت بشكل يحافظ على ثبوت الزخم الزاوي المداري .

وكما أشرنا في بند ٩,٩ ، فإن تطبيق قانون كبلر الثاني يكون بسيطاً بصورة خاصة عند نقطتي أكبر وأصغر بُعد عن الشمس (أو عن أي مركز آخر للقوة) . فعند هاتين النقطتين ، يكون حاصل ضرب السرعة والمسافة الشعاعية متساويين :

$$v_a r_a = v_p r_p. \quad (١١,٣٨)$$

ويشير الرمزان a و p إلى نقطة الأوج aphelion ونقطة الحضيض perihelion . فللأرض ، يكون $r_a = ١٥٢$ مليون كرم و $r_p = ١٤٧$ مليون كرم . وعليه ، فإن النسبة بين أكبر سرعة للأرض (عند الحضيض) إلى أقل سرعة لها (عند الأوج) هي

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{1.52 \times 10^{11} \text{ m}}{1.47 \times 10^{11} \text{ m}} = 1.034. \quad (١١,٣٩)$$

ويُعالج قانون كبلر الثاني النسب بين السرعات فحسب . فلا يُحدد السرعة عند أية نقطة على المسار ما لم تكن السرعة عند نقطة أخرى قد أصبحت معروفة . هذا ، وإن السرعة الصغرى المقاسة للأرض هي

$$v_a = 2.93 \times 10^4 \text{ m/sec.} \quad (١١,٤٠)$$

(وتساوي هذه حوالي ٩٠ مرة سرعة الصوت في الهواء ، وحوالي ٤ مرات سرعة قمر صناعي على ارتفاع منخفض نسبة إلى سطح الأرض .)

وبالمصطلح الحديث ، يمكن كتابة قانون كبلر الثاني على الصورة :

قانون حفظ

$$r \times v = \text{constant.} \quad (١١,٤١)$$

وكالقانون الأول ، فإنه ينطبق على كل مدار بمفرده ، لكنه لا يشكل أية صلة بين المدارات المختلفة . ويُعتبر قانون كبلر الثاني للحركة الكوكبية واحداً من قوانين الحفظ الفذة في الميكانيكا ، مع أن كبلر أخفق في إدراكه على هذا المستوى .

□ قانون كبلر الثالث Kepler's Third Law

إذا دلت a على طول المحور نصف الرئيسي لمدار كوكبي ، و T على الزمن اللازم

للكوكب لإتمام دورة واحدة حول الشمس ، عندئذ تكون

$$T^2 \sim a^3; \quad (11,42)$$

أي أن مربع الدورة يتناسب مع مكعب طول المحور نصف الرئيسي . وبطريقة بديلة ، يمكن كتابة قانون كبلر الثالث على الصورة :

$$\frac{T^2}{a^3} = \kappa, \quad (11,43)$$

حيث κ ثابت ؛ وهو نفسه لكل كوكب .

لقد سعى كبلر لسنين عديدة إلى استكمال قانونيه الأولين بثالث يربط مداراً كوكبياً بآخر . فبذ عهد كوبرنيكوس ، كان معروفاً أن الكواكب الأبعد بالتتابع عن الشمس دوراتها أكبر على التوالي . وكان كبلر أول من أوجد العلاقة المقدارية بين الأزمنة والمسافات . وكان شكل القانون والقيمة العددية لثابت تناسبه على السواء من اكتشافات كبلر التجريبية دون أن يكون لها أي ارتباط بقواعد أعمق للحركة الكوكبية . ونستطيع الآن ، بالاستعانة بقانون التربيع العكسي لقوة الجاذبية ، اشتقاق قانون كبلر الثالث بسهولة . ولتحقيق ذلك بأبسط وسيلة ، دعنا نلتزم بالمدارات الدائرية . نستطيع عندئذ استخدام العلاقة البسيطة بين الطاقة الحركية وطاقة الوضع المحددة بالمعادلة ١١,٢٨ :

$$U = -2K.$$

ويمكن كتابة هذه المساوية للكواكب على الصورة :

$$-G \frac{mM_s}{r} = -mv^2, \quad (11,44)$$

حيث m كتلة الكوكب ، و r بعده عن الشمس ، و v سرعته ، و M_s كتلة الشمس . ونختزل كتلة الكوكب من طرفي المعادلة . وبما أن دورته تتحدد بالعلاقة

$$T = \frac{2\pi r}{v},$$

فإنه يمكن استبدال v في المعادلة ١١,٤٤ بالمقدار $2\pi r/T$ ، ومن ثم إعادة ترتيب العوامل للحصول على صيغة قانون كبلر الثالث :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}, \quad (11,45)$$

حيث الطرف الأيمن ثابت ، وهو نفسه لجميع الكواكب . ويمكن تسميته κ_s :

$$\kappa_s = \frac{4\pi^2}{GM_s}. \quad (11,46)$$

يربط قانون كبلر الثالث المدارات المختلفة

من الواضح أنَّ الثابت κ في قانون كبلر الثالث يكون ثابتاً فقط بالنسبة لمركز قوة معين ؛ كما أنَّ له نفس القيمة لجميع الكواكب والمذنبات التي تدور حول الشمس ، وقيمة أخرى لجميع الأقمار التي تدور حول المشتري Jupiter ($\kappa_J = 4\pi^2/GM_J$) ، وأخرى ،

$$\kappa_E = \frac{4\pi^2}{GM_E} \quad (١١,٤٧)$$

لجميع الأقمار حول الأرض ، بما فيها القمر الطبيعي . وكما أثبت نيوتن لأول مرة ، فإن المعادلتين ١١,٤٣ و ١١,٤٦ تسريان على مدارات إهليلجية ، وليس فقط على مدارات دائرية .

ويحتوي جدول ١١,١ ملخصاً للخواص الرئيسية لكواكب الشمس التسعة المعروفة (أنظر أيضاً جدول ٩,٢) .

★ ١١,٧ استنتاج قانون قوة الجاذبية Deduction of the Law of Gravitational Force

كان استنتاج نيوتن لقانون قوة الجاذبية وتوحيده للحركة السماوية والأرضية واحداً من أعظم الأحداث المثيرة في تاريخ العلوم . ومع أنَّ معرفة هذا التعميم العظيم - من وجهة نظر تطبيقية - ليست مهمة لفهم الطالب وتطبيقه لقانون قوة الجاذبية ، إلا أنَّه من الطريف والمثقف معاً أن نرى كيف استطاع نيوتن أن يبيِّن صرح الجاذبية الكونية على أساس قوانين كبلر . وسيكون هذا التطوير مدار اهتمامنا في هذا البند .

من المهم أن نفهم أولاً لماذا كان نيوتن مقتنعاً بالحاجة إلى تفسير ميكانيكي للحركة الكوكبية . فبالنسبة لأرسطو وكوبرنيكوس ، كانت الحركة الدائرية هي الحركة « الطبيعية » في السموات ؛ أي الطريقة التي تتحرك بها الكواكب عندما تترك وشأنها (ومن الواضح أنه لم يكن بوسع الإنسان أن يفعل خلاف أن يتركها وشأنها) . ولم يكن الأمر ليحتاج إلى المزيد من التفسير . ولربما كان كبلر ومعاصره الإنجليزي وليم غيلبرت William Gilbert أول من فكر جديداً عن قوة لتفسير الحركة الكوكبية . وكلاهما تصوَّرا بأن القوة قد تكون مغناطيسية . إلا أن تأملاتهما لم تثمر ؛ فكلاهما كان يجهل مبدأ القصور : بأن الجسم المتروك وشأنه يستمر في الحركة بانتظام في خط مستقيم ؛ وكلاهما اعتقد بضرورة وجود تأثير قوة باتجاه المسار الكوكبي لدفع الكوكب باستمرار في مساره عبر الفضاء . أمّا موقف غاليليو من الحركة الكوكبية فقد كان مدعاة للكثير من الدهشة ؛ إذ أنه بينا خطأ خطوات عملاقة إلى الأمام نحو فهم المبادئ الميكانيكية ونحو فهم الجاذبية ، فقد ارتدَّ إلى نظرية عن الحركة الدائرية الطبيعية تكاد لا تبرز نظراً لأرسطو . فقد كان أول من أفاد بأن الحركة المتروكة وشأنها (الحركة « الطبيعية ») هي حركة في خط مستقيم بدرجة ثابتة ، ممّا يبدو أشبه بقانون نيوتن الأول . بالرغم من ذلك ، فقد اعتقد غاليليو أن صحة هذا القانون محصورة في الحقل الجاهري من رتبة حجم الإنسان . فأشار إلى أن جسماً ترك لينزل على

جدول ١١,١ : الخواص الرئيسة للكواكب الشمس النجمة المروقة*

اسم الكوكب	متوسط البعد عن الشمس [†] م	الدورة سنوات أرضية	الاختلاف المركزي للمدار	كتلة الكوكب كغم	متوسط نصف قطر الكوكب أصفاف أفطار أرضية [‡] م	تسارع الجاذبية على سطح الكوكب [§] م/ث ^٢
عطارد	1.0×10^7	8.8×10^6	0.2056	3.3×10^{23}	2.4×10^6	3.7
الزهرة	1.1×10^8	5.8×10^7	0.0068	4.8×10^{24}	6.0×10^6	8.8
الأرض	1.5×10^8	3.6×10^7	0.0167	5.9×10^{24}	6.4×10^6	9.8
المريخ	2.3×10^8	6.9×10^7	0.0934	2.4×10^{23}	3.7×10^6	3.7
المشتري	7.8×10^8	4.3×10^9	0.0485	1.9×10^{27}	7.1×10^8	24
زحل	1.0×10^9	9.5×10^8	0.055	5.7×10^{26}	6.8×10^8	10
أورانوس	2.9×10^9	4.5×10^9	0.047	8.7×10^{25}	2.3×10^9	10
نبتون	4.5×10^9	6.0×10^9	0.008	1.0×10^{26}	2.3×10^9	14
بلوتو	5.9×10^9	7.8×10^9	0.249	5.3×10^{25}	1.0×10^9	3~

* مراجع للمعطيات الكوكبية: - كارلا: - مدخل إلى فزياء الكواكب، (نيويورك: جون وايلي وأولاده، ١٩٦٨):

W. M. Kaula, *An Introduction to Planetary Physics* (New York: John Wiley and Sons, 1968).

ومايكل إي. آتش، واندلين أ. شابيرو، ولين ب. سميث، «نظام الكواكب»، مجلة العلم، ١٧٤، ص ٥٥١ (عام ١٩٧١).

حقائق الفلك عنقود العلاقة الأمريكية لتقديم العلم.

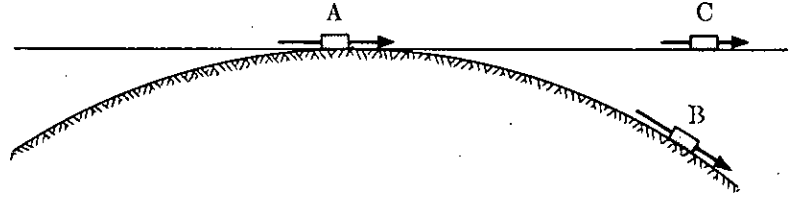
Michael E. Ash, Irwin I. Shapiro, and William B. Smith, "The System of Planetary Masses," *Science* 174, 551 (1971)

Copyright 1971 by the American Association for the Advancement of Science.

† متوسط بُعد الكوكب عن الشمس يساوي طول محوره نصف الرئيسي.

‡ الأرقام في هذا المود تعطي متوسط التسارع نسبة إلى سطح الكوكب الناتج.

§ يُعبر عن متوسط بُعد الأرض عن الشمس بأنه وحدة فلكية واحدة (مرفر A.U.).



شكل ١١، ١٣ : نظرة غاليليو إلى الحركة المدببة الاحتكاك التي تُترك وشأنها يحتفظ جسم متزلق بدون احتكاك حول سطح الأرض (A إلى B) بسرعة ثابتة ، في حين أن جسمًا متزلقًا بدون احتكاك في خط مستقيم (A إلى C) يتباطأ .

مستوى أملس هائل يتلامس مع الأرض عند نقطة واحدة (شكل ١١، ١٣) سوف لا يستمر إلى ما لا نهاية بدرجة ثابتة ؛ إذ أنه يتباطأ كلما ابتعد عن مركز الأرض ؛ فالذي ابتدأ كحركة أفقية ينتهي كحركة صاعدة أعلى منحدر . من ناحية أخرى ، فإن جسمًا ترك ليترلق على كرة وهمية ملساء تمامًا تحيط بالأرض يستمر في الحركة بسرعة ثابتة في دائرة عظمى great circle حول الأرض [أي في مدار دائري يمر بمستواه بمركز الأرض] . ونظرًا لعدم قدرته على تحرير نفسه فكريًا من أغلال مجال جاذبية الأرض ، فقد أخفق غاليليو في تعميم مبدأ القصور ليشمل السموات .

أما نيوتن فلقد أفلح في تحرير خياله من نير الجاذبية الأرضية التي قيدت غاليليو ؛ إذ عمم دون تردد مبدأ غاليليو في القصور الذاتي إلى ما لا نهاية وأعلنه كقانونه الأول في الميكانيكا . لقد كانت هذه خطوة أول ضرورية نحو اكتشاف قانون الجاذبية العام . فإذا كانت الحركة « الطبيعية » للكوكب في حالة انعدام القوة هي حركة في خط مستقيم ، فإن الحركة الفعلية المدارية لتقتضي تفسيراً ؛ إذ ينبغي خلاف ذلك أن تؤثر قوة لكي تحرف الكوكب عن مساره المستقيم إلى مساره المنحني حول الشمس .

أهمية قانون نيوتن الأول : الحركة الكوكبية إنما تقتضي تفسيراً

وستتبع في البنود الفرعية الخمسة أدناه نهجاً منطقيًا يمتد من قوانين كبلر إلى قانون قوة الجاذبية . ونجب اعتبار هذا مجرد تصور مقبول لعمل نيوتن وليس مرجعاً تاريخياً لا يرقى إليه الشك . وهناك بعض الأدلة على التطور الأولي لأفكار نيوتن في مراسلاته اللاحقة ، لكن ربما كان نيوتن نفسه بعيد كتابة الأحداث . فالأرجح أن تردّ البصيرات في العلم في مزيج من الحدس ، والاستدلال ، والتخمين ، والحساب أكثر من ورودها في أي تسلسل منطقي مرتّب . وليس بالعنصر الأقل أهمية عنصر الفكرة المسبقة preconception ، أي الاعتقاد بحتمية العثور على حلّ باتباع سبيل محدد .

١ - قانون كبلر الثاني واتجاه القوة Kepler's Second Law and the Direction of the Force

قبل عهد نيوتن ، لم تكن كيناتيكا الحركة الدائرية المنتظمة قد فهمت بعد . فالحقائق

الرئيسية هي أن التسارع متجه إلى الداخل نحو مركز الدائرة ؛ كما أن مقداره ثابت تُحدده العلاقة

$$a = \frac{v^2}{r},$$

حيث v سرعة الجسم و r نصف قطر الدائرة . ولقد نشر هذه الحقائق عن الحركة الدائرية المنتظمة لأول مرة كريستيان هويغنز Christiaan Huygens عام ١٦٧٣ ؛ لكنها كانت على الأرجح معروفة لدى نيوتن في عام ١٦٦٦ . وهي تعني أنه إذا تحرك جسم بانتظام في دائرة ، فإنه يجب أن يتأثر بقوة باتجاه مركز الدائرة . (نستخدم هنا تناسب القوة والتسارع . لقد كان هذا الاستنتاج ذا أهمية كبرى لتقدم علم الفلك astronomy لأنه أوحى بأن الكواكب تتحرك كما تتحرك نتيجة لقوة تجذبها نحو الشمس . وأرسى نيوتن هذا التخمين المعقول على قاعدة صلبة بإثباته نظرية ليس للحركة الدائرية المنتظمة فحسب ، بل لأية حركة مدارية على الإطلاق تحدث في مستوى . . . لقد أثبتنا في بند ٩،٩ أن جسماً متأثراً بقوة مركزية يخضع لقانون كبلر الثاني (قانون المساحات) . وبما أنه لا يتأثر بعزم دوراني بالنسبة إلى مركز القوة ، فإن زخمه الزاوي يكون ثابتاً بالنسبة إلى هذه النقطة ؛ كما أن ثبوت الزخم الزاوي يستلزم بدوره أن الخط الشعاعي يمسح المساحة بمعدل ثابت . وباستخدام المصطلح الكوكبي نقول : إذا أثرت الشمس بقوة مركزية على كوكب ، تحرك الكوكب بحيث يخضع لقانون كبلر الثاني . . . هذه هي النظرية التي أثبتها نيوتن ، بالإضافة إلى معكوسها : إذا كان الخط الواصل بين الشمس وكوكب متسارع يمسح المساحة بمعدل ثابت ، فإن القوة المؤثرة على الكوكب يجب أن تكون متجهة نحو الشمس . والنقطة الأساسية هنا هي الصلة بين القوة المركزية وقانون كبلر الثاني . فباستخدام واحد فقط من قوانين كبلر للحركة الكوكبية ، استطاع نيوتن أن يثبت النتيجة البالغة الأهمية بأن جميع الكواكب تتأثر بقوة مركزية متجهة نحو الشمس .

نظرية : يسري قانون المساحات فقط إذا كانت القوة مركزية

٢ - قانون كبلر الثالث والاعتماد على المسافة والكتلة

Kepler's Third Law and the Dependence on Distance and Mass

يكشف قانون كبلر الثاني (مع قانون نيوتن الثاني) عن اتجاه قوة الجاذبية ؛ غير أنه لا ينم عن أية صفة أخرى لهذه القوة . والمعضلة التالية هي : كيف تتغير شدة جاذبية الشمس بتغير البعد عن الشمس ؟ ثمة طريقتان لمعالجة هذه المعضلة ؛ ولقد استخدم نيوتن كليهما . الأولى ، موضع اهتمامنا في هذا البند الفرعي ، هي مقارنة حركة كواكب مختلفة على أبعاد مختلفة عن الشمس . والثانية ، التي سنبحثها في البند الفرعي التالي ، هي دراسة حركة كوكب واحد بتغير بعده عن الشمس أثناء حركته في مداره . ولمقارنة حركة الكواكب المختلفة ، كان في متناول نيوتن قانون كبلر الثالث ، الذي ينص على أن مربع دورات الكواكب تتناسب مع مكعب المحاور نصف الرئيسية لمداراتها الإهليلجية (المعادلة ١١،٤٥) . ولقد بينا في البند السابق أنه يمكن اشتقاق هذا القانون للمسارات الدائرية باستخدام قانون التربيع العكسي . لنعكس هنا

كما نعرف الاعتماد الشعاعي للقوة ، فإن كواكب مختلفة

إعتبر المدارات وكأنها دوائر

برهاننا ولنبيّن أنّ قانون كبلر الثالث يستلزم قانون التربيع العكسي للقوة . ولتقرب ثانية مدارات الكواكب بدوائر ، كما فعل نيوتن ولا ريب في حساباته الأولى . فباستخدام الحرف السفلي p للدلالة على كوكب معين ، نستطيع أن نكتب ، بالنسبة لتسارع الكوكب ،

$$a = \frac{v_p^2}{r_p} ,$$

(حيث تدل a هنا على التسارع ، وبحسب عدم خلطها مع المسافة a في المعادلة ١١,٤٣) . ويمكن استبدال السرعة v_p في هذه الصيغة بالمحيط المداري مقسوماً على الدورة :

$$v_p = \frac{2\pi r_p}{T_p} . \quad (11,48)$$

عندئذٍ تولّد الصيغة لتسارع الكوكب إلى

$$a = \frac{1}{r_p} \left(\frac{2\pi r_p}{T_p} \right)^2 = \frac{4\pi^2 r_p}{T_p^2} . \quad (11,49)$$

حتى الآن ، ما زالت هذه محض عبارة كينمائية عن الحركة الدائرية بصورة عامة . من ناحية أخرى ، فإنّ قانون كبلر الثالث ، الذي يمكن كتابته على الصورة

$$T_p^2 = \kappa_S r_p^3 , \quad (11,50)$$

هو مجرد حقيقة شهودية عن الكواكب . فبالتعويض من المعادلة ١١,٥٠ في مقام المعادلة ١١,٤٩ ، نحصل على صيغة للتسارع الكوكبي :

$$a = \frac{4\pi^2}{\kappa_S} \frac{1}{r_p^2} . \quad (11,51)$$

إحدى نتائج قانون كبلر الثالث :
 $a \sim 1/r^2$

وينص هذا على أنّ تسارع كوكب باتجاه الشمس يتناسب عكسياً مع مربع بُعده عن الشمس . وضرب تسارع الكوكب في كتلته يُعطينا القوة المؤثرة عليه :

$$F_p = \frac{4\pi^2}{\kappa_S} \frac{m_p}{r_p^2} . \quad (11,52)$$

قارن هذا مع قانون قوة الجاذبية الذي عبّرت عنه المعادلة ١١,١ . فهنا إنّما نجد جزءاً رئيسياً من الصورة النهائية لقانون القوة قد جرى اشتقاقه من قانون كبلر الثالث ؛ حيث تنص المعادلة ١١,٥٢ على أنّ قوة الجاذبية المؤثرة على كوكب تتناسب طردياً مع كتلته وعكسياً مع مربع بُعده عن الشمس . فكل ما هو مفقود هو مجرد تناسب هذه القوة مع كتلة الشمس . (كما هو مبين في شكل ١١,١ ، فإن ذلك التناسب يقتضيه قانون نيوتن الثالث) .

٣ - قانون كبلر الأول : أدلة أخرى على الاعتماد الشعاعي

Kepler's First Law: More Evidence on the Radial Dependence

إن فكرة قانون تربيع عكسي لقوة الجاذبية يؤثر على الكواكب كانت ذاتة في عهد نيوتن . فلم تكمن عبقرية في أنه فكر بها ، بل في أنه دَلَّلَ على صحتها رياضياً وحاكمها في نظرية مترابطة للجاذبية الكونية . والفحص الحاسم الحقيقي لقانون التربيع العكسي إنما يزودنا به قانون كبلر الأول ، الذي ينص على أن الكواكب تتحرك في مدارات إهليلجية تقع الشمس عند إحدى بؤرتيها . ففي أي مدار غير دائري ، يغير الكوكب دورياً بعده عن الشمس ، مُستشعراً مناطق أقوى وأضعف لمجال جاذبية الشمس أثناء حركته حولها . لذا ، فإن الشكل الدقيق لمداره يعتمد على قانون القوة ، أي كيف تضعف القوة بالضبط عند زيادة المسافة . وفي لندن عام ١٦٨٤ ، اشتغل إدموند هالي Edmund Halley ، وروبرت هوك Robert Hooke ، والسير كريستوفر رن Sir Christopher Wren في معضلة ربط المدارات الإهليلجية للكواكب بقانون القوة الصادرة عن الشمس . ومع أنهم كانوا يعتقدون بقانون التربيع العكسي ، إلا أنهم عجزوا عن ربطه بقانون كبلر الأول للحركة الإهليلجية . وأخيراً ، سافر هالي إلى كيمبريدج ليسأل نيوتن عن المعضلة . وإليك سرداً عن مقابليتهما ، كتبه بعيد ذلك جون كونديت John Conduitt :

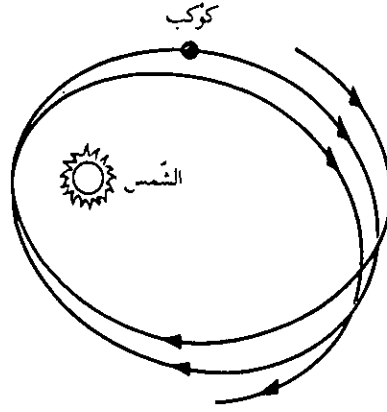
بدون ذكر تأملاته الخاصة ، أو تأملات هوك ورن ، أفصح [هالي] للتو عن الهدف من زيارته بأن سأله نيوتن عن المنحنى الذي تخطه الكواكب على فرض أن الجاذبية تنقص كمرجع المسافة . فأجاب نيوتن على الفور بأنه يقطع ناقص . فسأله هالي ، وقد أصيب بالحيرة والذهول ، وكيف عرف ذلك ؟ فأجابه هالفاً : لقد حسبته .

وبعد ذلك بثلاث سنوات ، في عام ١٦٨٧ ، نُشر كتاب نيوتن الهائل المبادئ (الأصول) *Principia* تحت رعاية هالي .

لقد كان قانون التربيع العكسي لقوة الجاذبية قبل نيوتن فرضية غير مدعومة لا تزيد أهميتها على اعتقاد ديموقريطس Democritus بالذرات ، فأضحى على يدي نيوتن قانوناً راسخاً . فلم يكن قادراً على إجراء الحسابات المعقدة لاشتقاق الحركة الكوكبية من قانونه لقوة الجاذبية فحسب ، بل أدرك بحق أن قانون كبلر الأول إنما يزودنا بأدق اختبار لقانون التربيع العكسي . فلو نقصت القوة بطريقة مختلفة قليلاً عن التربيع العكسي للمسافة ، لما كانت المدارات قطعاً ناقصة ، ولما انغلقت على نفسها (شكل ١١،١٤) ، بل لتبع الكوكب بدلاً من ذلك مساراً مختلفاً نوعاً في كل رحلة متعاقبة له حول الشمس ، ولظهر أي انحراف صغير لقانون القوة الحقيقي عن قانون التربيع العكسي في هندسة المدارات الكوكبية قبل تغيير قانون كبلر الثالث بشكل محسوس .

تزوّدنا المدارات الإهليلجية بأدق اختبار للقانون $F \sim 1/r^2$

* أنظر كتاب تشارلز س . غيلسبي : « حافة الموضوعية » (برنستون ، نيوجرسي : مطابع جامعة برنستون ، ١٩٦٠) ، ص ١٣٧ :



شكل ١١، ١٤ : مدار كوكبي افتراضي كان من الممكن تحقيقه لو أن قوة الجاذبية اعتمدت على المسافة بطريقة أخرى خلاف النسب العكسي مع المسافة (أنظر أيضاً شكل ٩، ٢٩). والواقع أنه تحدث انحرافات صغيرة للمدارات الكوكبية عن القطوع الناقصة نظراً لتأثير كل كوكب بقوى صغيرة تساهم بها الكواكب الأخرى علاوة على القوة المهيمنة التي تساهم بها الشمس.

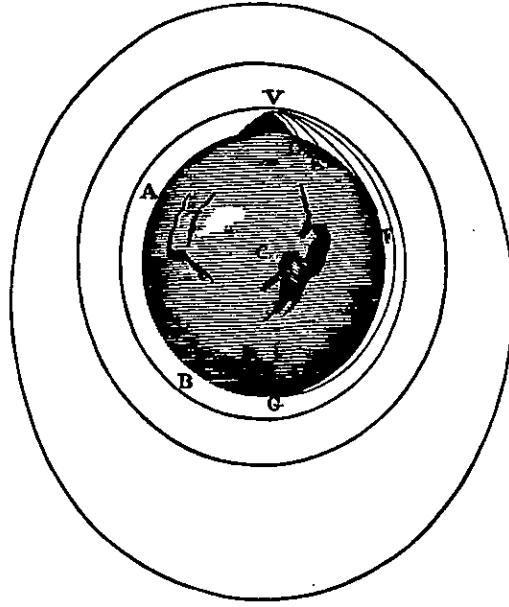
٤ - قانون نيوتن الثالث والصفة الكونية للجاذبية

Newton's Third Law and the Universality of Gravitation

بقدر ما وجد من تفكير عن ميكانيكا الحركة السأوية قبل عهد نيوتن ، فقد كان ذلك بدلالة قوة تؤثر بها الشمس على الكواكب . ولقد افترض نيوتن أنه يتعين على الكواكب - سواء بسواء - أن تؤثر بقوة جاذبية على الشمس وعلى بعضها البعض ؛ بل إن على كل جسم مادي أن يؤثر بقوة جاذبية على كل جسم آخر . هذه الفكرة عن الصفة الكونية للجاذبية إنما ارتكزت أساساً على مبدأ الفعل ورد الفعل action and reaction الذي يشكل ما ندعوه الآن بقانون نيوتن الثالث . وإن وجود قوى رد فعل تقاوم القوى المؤثرة لواضح في العديد من الأمثلة المألوفة ؛ إلا أنه قبل نيوتن لم يدرك أحد الأهمية العامة لتزاوج pairing القوى هذا . ومن الجلي أن نيوتن أدرك أهميته بدليل أنه بنى كقانونه الأساسي الثالث للميكانيكا المبدأ القائل إن لكل قوة في الطبيعة قوة مساوية ومضادة . أضف إلى ذلك أنه عمم هذا المبدأ مباشرة من قانون قوة لرجل يرفع ثقلاً ، أو حصان يجر عربة ، إلى الشمس تجذب الأرض . فلقد جادل بأنه إذا تأثرت الكواكب بقوى تبقيها في مداراتها ، فعليها أيضاً أن تؤثر بقوى مساوية ومضادة لتلك التي تؤثر عليها . فإذا جذبت الشمس الأرض ، جذبت الأرض الشمس بقوة مساوية ؛ لكن إذا جذبت الأرض الشمس ، فإن عليها أن تجذب أجساماً أخرى كذلك - كواكب أخرى ، أو القمر ، أو تفاحة ساقطة عن شجرة . يمثل هذا المنطق ، انقاذ نيوتن إلى التفكير بكونية الجاذبية - أي أن الجاذبية المحلية التي تُفسر الوزن على سطح الأرض والجاذبية الكونية التي تُفسر مدار الأرض حول الشمس كلاهما واحد .

إذا تأثرت الكواكب بقوى ، فعليها أيضاً أن تؤثر بقوى

فقد أدرك نيوتن ، نظراً لكونية الجاذبية ، بأنه لا داعي لأن تكون الشمس المركز الوحيد لنظام كوكبي ؛ إذ لاحظ أن أقمار المشتري تخضع لقوانين كبلر الثلاثة ، كما تفعل أقمار زحل . لذا ، فإنه يتوجب على هذه الأقمار أن تستقي في مداراتها بفعل قانون تريبير عكسي لقوة



من منشورات شركة دوفر المحدودة ، نيويورك .

من كتاب الجاذبي (أو الأصول) *Principia*
لنيوتن الصادر عام ١٦٨٧ .

مركزيّة تماماً كما هو الحال بالنسبة للكواكب . الفرق الوحيد أنها يرد في الشدّة الكليّة للقوة ؛ وهو فرق يتبدّى في ثابت تناسب مختلف في قانون كبلر الثالث لكل مركز للقوة . فالأرض ، ليس بأقل من المشتري وزحل ، بمقدورها - بل هي كذلك الآن - أن تكون مركزاً لنظام كوكبي ؛ وهذا وضعٌ تنبأ به نيوتن بحق ، مع أنه بالتأكيد لم يكن ليتصور المئات من الأقمار الصناعيّة التي تدور حالياً حول الأرض .

... تحتوي المعادلة ١١,٥٢ على التناسب

$$F_p \sim \frac{m_p}{r_p^2}.$$

وبسبب قانون نيوتن الثالث (تذكر النقاش في بند ١١,٢) ، فإن القوة ينبغي أن تتناسب أيضاً مع كتلة الشمس :

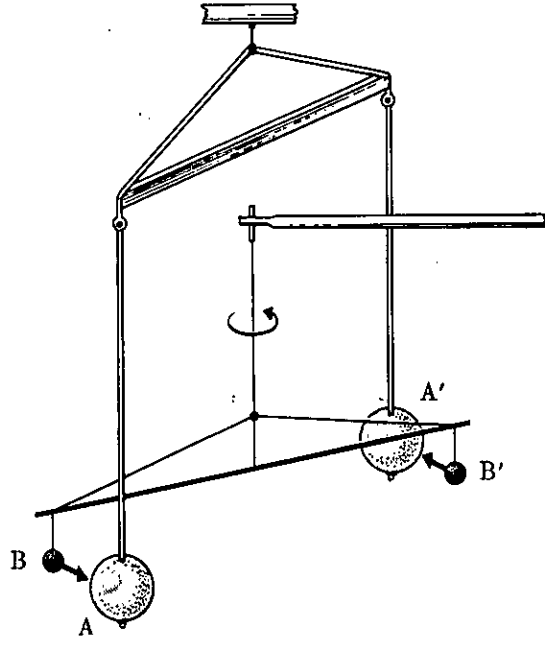
$$F_p \sim \frac{m_s m_p}{r_p^2}.$$

ولقد افترض نيوتن أن القوة لا تعتمد على أي شيء آخر . فإذا كان الأمر كذلك ، أمكن تحويل التناسب إلى معادلة باستخدام ثابت تناسب كوني مفرد :

$$F_p = G \frac{m_s m_p}{r_p^2}. \quad (١١,٥٣)$$

وبقدر ما نعلم ، فإن ثابت الجاذبيّة G هو كوني حقاً ؛ إذ أنه واحد لكل المادّة في سائر الأمكنة

قانون قوة الجاذبيّة محدداً من قوانين كبلر
التجريبية ، وقوانين نيوتن النظرية ،
والافتراضات التي تفتضها البساطة



شكل ١١,١٥ : مخطط توضيحي لجهاز كافندش لقياس قوة الجاذبية بين أجسام أحجامها عادية . . .
توضع كتلتان ثقيلتان من الرصاص (A و A') بالقرب من كرتين أصغر (B و B') متصلتين بطرفي قضيب أفقي . فيلتوي الوتر الليفي الذي يعمل القضيب بزاوية يمكن قياسها ، وذلك استجابة لعزم الدوران الناتج عن قوى الجاذبية .

وسائل الأزمنة . °

ولتعيين الثابت G ، من الضروري قياس القوة بين زوج من الأجسام المناسبة الحجم التي يمكن قياس كتلة كل منهما على حدة . ومن باب الاستعراض ، يُشار أحياناً إلى هذه التجربة ، التي أجراها لأول مرة هنري كافندش Henry Cavendish خلال التسعينات من القرن الثامن عشر ، بأنها « عملية وزن الأرض » . فهذا حقاً ما تُنجزه بطريقة غير مباشرة ، مع أنه يمكن تسميتها - سواء بسواء - بعملية وزن الشمس . فبما أن حاصل ضرب Gm_E و Gm_S معروفان ، فإن كتلتي الشمس والأرض تغدوان معروفتين بمجرد تحديد الثابت G على نحو مستقل . وتنشأ صعوبة تجربة كافندش عن الضعف المتناهي لقوة الجاذبية . فحتى يمكن الكشف عنها لزوج من الأجسام في مثل حجم الإنسان ، من الضروري استخدام ميزان في غاية الحساسية لقياس القوة ؛ كما أنه من الضروري التخلص من جميع القوى الكهربائية ، التي هي ذاتياً أقوى بكثير . وكان الميزان الذي استخدمه كافندش ميزان ليّ torsion balance (شكل ١١,١٥) ؛ وهو عبارة عن سلكٍ طويلٍ يستطيعُ له الاستجابة لقوة ضعيفة جداً .

٥ - الصلة بين الأرضي والسماوي The Link Between the Terrestrial and the Celestial

بالرجوع إلى أول اكتشافاته ، كتب نيوتن فيما بعد :

° لقد خمن بعض الفيزيائيين أن مقدار G قد يتغير تدريجياً بتمدد الكون . لكن هناك حتى الآن أدلة عملية تؤيد وجهة النظر هذه (بل إن هناك بعض الأدلة غير المباشرة ضدها) .

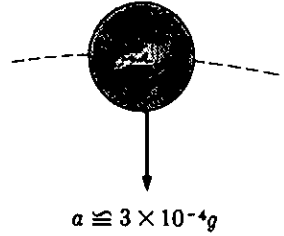
وبدأتُ التفكير في نفس السَّنة الجاذبيَّة تمتدُّ إلى مدار القمر و... من قاعدة كبلر [قانون كبلر الثالث] ... استنتجتُ أنَّ القوى التي تحفظُ الكواكب في مداراتها يجبُ أن [تتغير] عكسياً مع مربع أبعادها عن المراكز التي تدور حولها : وبذلك قارنتُ القوَّة اللازمة لحفظ القمر في مداره مع قوَّة الجاذبيَّة على سطح الأرض ؛ فوجدتها متقاربتين إلى حد بعيد .°

ربط القمر جاذبيَّة الأرض بجاذبيَّة الشمس

لقد أثبتَ القمرُ بأنَّه حلقة الوصل الأساسيّة بين جاذبيَّة الأرض وقوَّة الجاذبيَّة الكونيَّة ؛ كما أثبتتُ حركة أقمار المشتري وزحل أنَّ هذين الكوكبين يجذبان أقمارهما بنفس الكيفيَّة بالضبط التي تجذبُ بها الشمسُ الكواكب . غير أنَّه كان من مسؤوليَّة قرنا نفسه إثباتُ أنَّ قوَّة التربيع العكسي هذه التي تنبثقُ عن كلِّ جسمٍ ثقيلٍ هي بعينها قوَّة الجاذبيَّة المألوفة التي نستشعرها جميعاً على الأرض .

ولإثبات هذه الصِّلة ، كان على نيوتن أن يستخدم الحقيقة بأنَّ تأثير جاذبيَّة كرة هو نفسه كما لو كانت كل كتلتها مُركَّزة عند مركزها . وتزوَّدنا معضلة الكتلة الكرويَّة بمثالٍ جميلٍ على دائرة تفكيرٍ منطقيٍّ متوافقٍ ذاتياً . فقد استخدم تكافؤ الكرة والنقطة في المساعدة على إثبات صحة قانون التربيع العكسي للقوَّة . غير أنَّ الكرة تكافئ نقطة مادّيَّة فقط بالنسبة لقانون التربيع العكسي للقوَّة . فلو تبين أنَّ لقوَّة الجاذبيَّة شكلاً آخر ، لما كان من الممكن استبدال الأرض في الحسابات بنقطة مادّيَّة عند مركزها . هذه مجرد واحدة من الخواص البسيطة لقانون التربيع العكسي التي تجعله يبدو صحيحاً على هذه الصُّورة الفريدة .

لقد كان نيوتن على علمٍ بسقوط جميع الأجسام بنفس التسارع قرب سطح الأرض . لذا ، فإنَّ كلَّ جسمٍ يتأثر بقوَّة جاذبيَّة تتناسب مع كتلته . والقمر ، في مداره شبه الدائري ، هو الآخر « ساقط » نحو الأرض ، بتسارعٍ يسهُلُ حسابه $(a = v^2/r)$. وبما أنَّه من المفروض أيضاً أنَّ القوَّة المؤثرة على القمر تتناسب مع كتلته ، فإنَّ تسارعه باتجاه مركز الجذب مُستقلٌّ عن كتلته . فلمعرفة كيفيَّة تناقص قوَّة الجاذبيَّة مع المسافة ، يلزمُ فقط أن نقارن تسارع القمر الساقط بتسارع تفاحةٍ ساقطة ، حيث أنَّ كليهما يتجهُ نحو مركز الأرض .



فالقمرُ يقعُ على بُعدٍ ٣٨٤.٠٠٠ كم عن مركز الأرض ؛ بينما تقع التفاحة على بُعدٍ ٦٣٧٠ كم عن مركز الأرض . فإذا كانت جاذبيَّة الأرض تمتدُّ في أرجاء الفضاء ، متناقصةً عكسياً مع مربع المسافة عن مركزها ، أضحى من السُّهولة حسابُ مقدار ما ينقصُ تسارعُ القمر عن تسارع التفاحة . فيجب أن تكون نسبة هذين التسارعين :

$$\frac{a_{\text{moon}}}{g} = \left(\frac{6,370 \text{ km}}{384,000 \text{ km}} \right)^2 = 2.75 \times 10^{-4}.$$

° هذه الفقرة مُقتبسة من كتاب غيلبي الآنف الذكر ، « حافة الموضوع » ، ص ١١٩ - ١٢٠ .

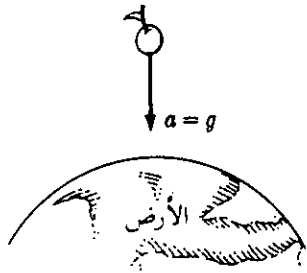
وبما أنه من المعلوم أن سرعة القمر هي $1,02 \times 10^3$ م/ث ، فإن تسارعه يكون

$$a_{\text{moon}} = \frac{v^2}{r} = \frac{(1.02 \times 10^3 \text{ m/sec})^2}{3.84 \times 10^8 \text{ m}} = 2.71 \times 10^{-3} \text{ m/sec}^2.$$

وعليه ، فإن النسبة الفعلية لتسارعي القمر والتفاح هي

$$\frac{a_{\text{moon}}}{g} = \frac{2.71 \times 10^{-3} \text{ m/sec}^2}{9.82 \text{ m/sec}^2} = 2.76 \times 10^{-4}.$$

وباستخدام أفضل ما توفر لديه من معطيات ، أجرى نيوتن مقارنة مماثلة بين نسبتي التسارع النظرية والفعلية ؛ فوجدتهما « متقاربتين إلى حد بعيد » .



لقد كان القانون الكوني لقوة الجاذبية نتاج عبقرية نيوتن وفضل الطبيعة . فكانت الطبيعة سخية بتوفيرها قانوناً للقوة يمثل تلك البساطة المتناهية . كذلك كانت الطبيعة سخية بتوفيرها كتلة شمسية أكبر بكثير من أية كتلة كوكبية ، بحيث أن قوة الشمس على أي كوكب تفوق كثيراً القوة الناجمة عن أي كوكب مجاور ؛ فيستجيب كل كوكب ، لدرجة جيدة من التقريب ، للشمس ويُهمل أقرانه من الكواكب من أجل هذا السبب فقط نستطيع وصف الحركة الكوكبية بواسطة قوانين كبلر .

١١٨ اكتشاف نبتون The Discovery of Neptune

لعل أكثر نجاح للميكانيكا إثارة بعد نيوتن إنما كان اكتشاف الكوكب نبتون عام ١٨٤٦ . فلقد سبق أن أدرك نيوتن أنه ، بالرغم من صغر القوة المتبادلة بين كوكب وآخر ، فإنها ذات أثر في إحداث انحرافات صغيرة عن المسار الإهليلجي التام الذي قد يتبع فيما لو أثرت قوة الشمس بمفردها . وتدعى قوى الاضطراب الإضافية هذه ، التي يمكن إهمالها لمعظم الأغراض ، بالترجافات perturbations . ولقد درست الترجافات بعناية متزايدة طوال القرن الثامن عشر ، عندما أضحت المشاهدات الفلكية أكثر دقة ، والطريقة الحسابية أكثر تقدماً . وتوجت هذه الدراسات عن الترجافات بكتاب يبير سيمون لابلاس Pierre Simon Laplace « الميكانيكا السماوية » Celestial Mechanics ، الذي نُشر في بواكير القرن التاسع عشر . فلقد كانت قوى الترجاف البيكوكبية قد حُدَّتْ هَوْنُهَا وقُيِّسَتْ ، مما أدى إلى قِيَمٍ للكتل الكوكبية لا يمكن الحصول عليها من تأثير قوة الشمس وحدها . كما بات واضحاً آنذاك أن الجاذبية هي حقاً قوة كونية تعمل بين جميع الأجسام في النظام الشمسي . فكان نظام لابلاس الكوني نظاماً جميلاً متوافقاً ذاتياً لأجسام تتفاعل معاً بالتبادل ، كل منها يؤثر ويتأثر بسائر الأجسام الأخرى .

اكتشف أورانوس صدقة

لقد كان عدد الكواكب المعروفة لنيوتن ستة . فقام ولیم هيرشل William Herschel ، عام ١٧٨١ في إنجلترا وذلك إثر مسح تلسكوبي للسماء برمتها ، باكتشاف كوكب سابع .

- أورانوس - يبعد عن الشمس بحوالي ضعف بُعد الكوكب السادس - زحل - عنها . ومن ثم تركزت آليّة الرّصد والحساب بكاملها على أورانوس ؛ وسرعان ما تمّ رسم مداره المستقبلي . لكن ، بدورة تناهز ٨٤ عاماً ، لم يكن أورانوس في عَجَلَةٍ من أمره لرسم مداره الذي تمّ التنبؤ به . فمرت خمسون سنة تقريباً قبل أن غدا واضحاً أن أورانوس لم يكن - في الواقع - يتبع تماماً المدار الذي كان يجب أن ينتج عن تأثير الشمس والكواكب الأخرى . فإما أن يكون قانون نيوتن في الجاذبيّة غير صحيح على هذا البُعد الكبير عن الشمس ، وإما أن يكون ثمة كوكب آخر ، أكثر بُعداً وغير مكتشف بعد ، يؤثر بترجافٍ على أورانوس . وكما يحدث مراراً في العلم ، فقد أثبت الاحتمال الأكثر تحفظاً أنه هو الصّحيح . ففي الأربعينات من القرن التاسع عشر ، قرر شابان يافعان - جون أدامز John Adams في إنجلترا وإيربان ليفرييه Urbain Leverrier في فرنسا ، وكلاهما يجهل الآخر - أن يفترضاً صحّة قانون نيوتن لقوّة الجاذبيّة وأن يحسباً موضع كوكب ثامن يُفسّر ترجاف أورانوس غير المتوقّع . فأتى كلاهما حساباته في نفس الوقت ، وتنبأ كلاهما بنفس الموقع تقريباً في السّماء للكوكب الجديد . إلا أن ليفرييه كان أوفر حظاً . فبينما أهمل فلكنو مرصد غرينتش Greenwich بأدب اقتراح أدامز للبحث في مساحة مُعيّنة من السّماء ، تصرّف مدير مرصد برلين في الحال بمجرد استلامه رسالة من ليفرييه ، فاكشف نبتون في نفس ذلك اليوم .

تمّ التنبؤ بنبتون لتفسير ترجاف في مدار أورانوس

ولقد أدّت سلسلة مشابهة من الأحداث ، رغم أنها أقل إثارة ، إلى اكتشاف الكوكب التاسع ، والأخير حتى الآن ، بلوتو Pluto ؛ إذ أتى فلكي أمريكي ، بيرسيفال لويل Percival Lowell ، في بواكير القرن الحالي ، حساباتٍ عن مداريّ نبتون وأورانوس بيّنت ضرورة وجود كوكب آخر بعد نبتون . ولم يكن من السّهل معرفة الموقع الصّحيح لهذا الكوكب الجديد ، فتأخر اكتشافه ٢٥ عاماً . وأخيراً ، في ١٩٣٠ ، تمّ التعرف بما لا يدع مجالاً للشك على بلوتو في مرصد لويل Lowell Observatory بولاية أريزونا . ومنذ اكتشافه ، فإنه لن يتمّ قبل عام ٢١٧٨ دورة واحدة حول الشمس ليعود إلى نفس النّقطة في السّماء التي شوهدَ عندها لأول مرة .

كذلك تمّ التنبؤ ببلوتو

خلاصة الأفكار والتعاريف

- كي يتمّ وصف الطبيعة ، ينبغي تكميل قوانين نيوتن بقوانين مُحَدّدة للقوّة .
- إن قوّة الجاذبيّة هي قوّة مركزيّة جاذبةُ يتحدّد مقدارها بالعلاقة
$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2} ; \quad (١١,١)$$
 كما تخضع لمبدأ التراكب عند وجود أكثر من جسمين .
- تكون قوّة الجاذبيّة خارج قشرة كروية أو أيّة فئة من القشَر الميكانيكا .
- بالرغم من كون الجاذبيّة أضعف القوى المعروفة ، فهي القوّة الكونيّة الوحيدة ؛ ولقد لعبت دوراً هاماً في تطوير الميكانيكا .

هي نفسها كما لو أن الكتلة برمتها قد تركزت عند مركز □ يتأثر تسارع الجاذبية بشكل الأرض وبدورانها ؛ فنقص القشرة (أو القشر) .
 g بمقدار 0.052 م/ث^2 بالذهاب من القطب إلى خط الاستواء .

□ تتلاشى محصلة قوة الجاذبية داخل قشرة كروية .

□ قانون كبلر الأول : تتبع الكواكب مسارات إهليلجية بحيث تكون الشمس عند إحدى البؤرتين . ويزودنا هذا بأكثر البراهين صرامة على الاعتماد الشعاعي للقوة ،
 $F \sim 1/r^2$. (١١،١٤)

□ يكون تسارع الجاذبية عند سطح الأرض
 $g = \frac{GM_E}{R^2}$. (١١،٩)

□ قانون كبلر الثاني إن هو إلا قانون المساحات : تمسح الكواكب المساحة بمعدل ثابت . ويكافي ذلك حفظ الزخم الزاوي ؛ كما يثبت أن قوة الجاذبية هي قوة مركزية .

□ تتناسب طاقة وضع الجاذبية لجسم متأثر بكرة منتظمة مع $1/r$ خارج الكرة (المعادلة ١١،١٧ أو ١١،١٨) ؛ كما تكون على شكل قطع مكافئ داخل الكرة (المعادلة ١١،٢٤ أو ١١،٢٥) .

□ قانون كبلر الثالث : ترتبط دورات الكواكب وأنصاف محاورها الرئيسية بالعلاقة $T^2 = \kappa a^3$. ويرتبط هذا القانون بالاعتماد التربيعي العكسي للقوة .

□ سرعة الإفلات من الأرض هي

□ إن حاصل الضرب $m_1 m_2$ في قانون قوة الجاذبية هو انعكاس لقانون نيوتن الثالث ؛ فكل جسم يتأثر بقوة جاذبية كما يؤثر بقوة جاذبية .

$v_{esc} = \sqrt{2gR} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R}}$. (١١،٢١ ؛ ١١،٢٠)

□ للحركة الدائرية في مجال تربيعي عكسي للقوة ، يكون لطاقة الوضع ضعف مقدار الطاقة الحركية
 $(U = -2K)$ ؛ كما أن

□ لقد بين تسارع القمر أن جاذبية الأرض تمتد إلى الفضاء الخارجي ، وأنها تتناقض مع مربع المسافة عن مركز الأرض .

$E = -K = \frac{1}{2}U$. (١١،٢٩ ؛ ١١،٢٨)

□ إن دوران الأرض يجعل شكلها مجسم قطع ناقص .

□ تتأثر الأرض بعزم دوراني لأنها غير كروية ؛ كما يستبق زخمها الزاوي الميغزلي . □ لقد أمكن التنبؤ نظرياً بالكوكبين الثامن والتاسع ، نبتون وبلوتو ، نظراً لإحداثياتها ترجافاً في حركة كواكب أخرى .

أسئلة

س ١١،١ الأمثلة « غير الحقيقية » في الفيزياء هي على نوعين : تصورات مثالية يمكن الاقتراب منها لكن يستحيل تحقيقها عملياً ، وأوضاع افتراضية تختلف تماماً عن أي شيء معروف في الطبيعة . أورد مثلاً على كل نوع ، وفسر لماذا يمكن لكل منهما المساعدة على توفير تبصير في خواص العالم الحقيقي .

س ١١,٢ كيف يستطيع رائد فضاء في المدار أن يستنتج بأنه متأثر بالجاذبية، رغم إحساسه « بفقدان الوزن » ؟

س ١١,٣ تعبّر المعادلة ١١,٢ عن قيمة ثابت الجاذبية G بالوحدة $\text{م}^2/\text{كغ}^2$. أعد التعبير عن هذه الوحدة الدولية (أ) بالوحدات كغ، م، و، ث ؛ و (ب) بالوحدات ج، م، و كغ.

بند ١١,٢

س ١١,٤ ينص متن الكتاب على أن مبدأ التراكب « مشمول ضمناً في المعادلة ١١,١ ». أوضح كيف يكون ذلك .

س ١١,٥ عند الظهر، تجذب جاذبية الشمس جسماً على الأرض إلى أعلى، باتجاه معاكس لجاذبية الأرض؛ أما عند منتصف الليل، فيكون جذب الشمس للجسم إلى أسفل، موازياً لجاذبية الأرض. فهل يعني ذلك أن الأجسام على الأرض تزن أكثر قليلاً عند منتصف الليل منها عند الظهر؟ لم أولم لا؟ (عند إجابة هذا السؤال، يُمكن افتراض أن جميع أجزاء الأرض تقع على بُعد متساوٍ عن الشمس.)

س ١١,٦ إحدى الطرق الممكنة لتعريف مفهوم الكتلة هي استخدام قانون قوة الجاذبية بين جميع أزواج الأجسام المادية. فسّر كيف يُمكن استخدام هذا القانون لتعريف الكتلة. (يجب أن تكون أية قياسات تفرحها ممكنة من حيث المبدأ، لكن ليس من الضروري أن تكون عملية.) هل تُعرف هذه الطريقة كتلة الجاذبية أم كتلة القصور؟

س ١١,٧ القوة الكهربائية بين جسيمين مشحونين تتفاوت عكسياً مع مربع المسافة بينهما. فهل يتأثر جسيم مشحون داخل قشرة كروية بمحصلة قوة إذا كانت القشرة (أ) مشحونة بانتظام؟ (ب) غير مشحونة بانتظام؟

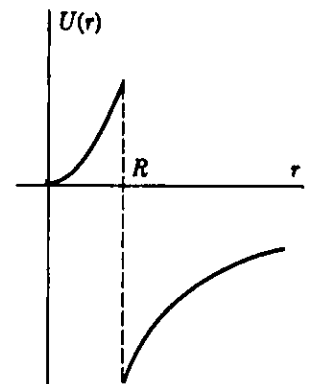
بند ١١,٣

س ١١,٨ يقف رجل عند قاع نفق عمقه ٢٠٠٠ ميل، وآخر على سطح الأرض، وثالث على قمة بروج ارتفاعه ٢٠٠٠ ميل، ورابع على سطح القمر. رتب الرجال الأربعة تصاعدياً من حيث الوزن، إذا كانت كتلتهم جميعاً متساوية.

س ١١,٩ إن الأرض أكثر قرباً لبابها منها قرب سطحها. فكيف يُسبب ذلك، وضحياً، انحراف قانون القوة في باطن الأرض عن اعتماده الخطي على r المُمثل بالمعادلة ١١,١٤ وشكل ١١,٤؟

س ١١,١٠ يبين شكل ١١,١٦ دالة طاقة وضع جاذبة، وإن كانت مصدر إزعاج، لجسم يتحرك داخل الأرض وخارجها. فإذا ألقيت كرة من فوق الأرض خلال ثقب على نحو يمر بموجبه إحداثيها النصفطري r بالقيمة R حيث تكون U لا مستمرة، فأَيُّ الكميات التالية يتغير بشكلٍ مستمر: (١) الطاقة الحركية للكرة؛ (٢) طاقتها الكلية؛ و (٣) الشغل المبذول على الكرة بواسطة الجاذبية؟

بند ١١,٤



شكل ١١,١٦: سؤال ١١,١٠

س ١١,١١ في رسمٍ طاقي، خُطِّط « مساري » (أ) قمر صناعي رُفِعَ عن سطح الأرض ووضِعَ في مدار إهليلجي؛ و (ب) نيزك meteorite يقترب من الأرض من مسافة كبيرة، فيفقد معظم طاقته الحركية في الجو، ثم يرتطم بالأرض.

س ١١,١٢ يمر قران صناعيان قرب بعضهما البعض على ارتفاع بضعة مئات من الأميال فوق سطح الأرض . يتحرك أحدهما بموازاة سطح الأرض ؛ بينما يتعد الآخر عن الأرض باتجاه يصنع ٥° مع الخط الرأسي . فإذا كانت سرعتاهما واحدة ، فأيهما أكثر احتمالاً في أن يفلت من الأرض ؟

س ١١,١٣ لماذا يُعاني رواد الفضاء تسارعاً أكبر عند عودتهم إلى الأرض منه عند إقلاعهم عنها ؟

س ١١,١٤ لماذا تبرز إلى الوجود سلاسل جبال جديدة مع أن تشكيلها يتطلب بذل شغلٍ ضد الجاذبية ؟ بند ١١,٥

س ١١,١٥ يمكن تعريف خط العرض Latitude بأنه الزاوية التي يصنعها العمود على سطح الأرض مع خط يصل مركز الأرض بخط الاستواء . أرسم شكلاً توضيحياً مبالغاً فيه للأرض المُقلَّطحة ، واستعن به لتوضيح الحقيقتين التاليتين : (١) خط العرض لنقطة في منتصف المسافة بين خط الاستواء والقطب يكون أكبر من ٤٥° . (٢) المسافة المناظرة لتغير درجة واحدة في خط العرض مقاسة على امتداد خط زوال meridian line شمالي - جنوبي تكون أكبر قرب أحد القطبين منها عند خط الاستواء .

س ١١,١٦ تاجر يشتري حبوب القهوة في كولومبيا Colombia [الواقعة في الجزء الشمالي الغربي من أمريكا الجنوبية] ويبيعها بأكياس زنة الواحد منها باوند واحد (ليبرة واحدة) . وعندما يُعدها للبيع في إحدى قرى الأسكيمو ، يزنها ثانية فيجد أن كل كيبس ما زال يزن باونداً واحداً بالضبط على ميزانه . على فرض أن ميزانه موثوق به تماماً ، علّل لماذا لا يُظهر زيادة في وزن الأكياس من المنطقة الاستوائية tropics إلى المنطقة القطبية arctic .

س ١١,١٧ ناقش الدقة اللازمة في تصنيع بندول وفي قياسات طوله ودورته بغية الحصول على قيمٍ للكمية θ بنفس درجة الدقة الواردة في الصيغتين ١١,٣٢ و ١١,٣٣ .

س ١١,١٨ (١) لماذا نتكلم عن « قوانين » كبلر بدلاً من « نظرية » كبلر ؟
(٢) لماذا تنطبق قوانين كبلر وتكون مفيدة في وصف حركة الأقمار الصناعية الأرضية ؟ بند ١١,٦

س ١١,١٩ (١) ما الاختلاف المركزي للدائرة ؟
(٢) ما شكل القطع الناقص الذي يُساوي اختلافه المركزي ١ ؟

س ١١,٢٠ إذا أُعطيت بُعد كوكبيب asteroid عن الشمس عند لحظة معينة وسرعتها عند تلك اللحظة ، فكيف تستطيع الحكم فيما إذا كان مداره قطعاً ناقصاً ، أم مكافئاً ، أم زائداً ؟

س ١١,٢١ لماذا يستطيع قرص صناعي أن « يحوم » حول نقطة على خط الاستواء ، لكن ليس حول نقطة إلى الشمال أو الجنوب من خط الاستواء ؟

س ١١,٢٢ إن قرصاً صناعياً مُحكَّكاً بالغلاف الجوي الخارجي قد يكتسب في المتوسط طاقة حركية نتيجة للاحتكاك الجوي . فسر .

س ١١,٢٣ اقرأ في مرجع خارجي عن نظام بطللمبوس للكون (الذي يتخذ الأرض مركزاً له geocentric) ونظام كوبرنيكوس (الذي يتخذ الشمس مركزاً له heliocentric) . (١) صنف بإيجاز حركات الكواكب كما تصوّرهما بطلمبوس وكوبرنيكوس . (٢) بأي معنى تكون قُطُوعُ كَبَلَرِ الناقصة « أبسط » من دوائر كوبرنيكوس ؟

س ١١,٢٤ (١) يود رائد فضاء في المدار أن يقلب مركبته رأساً على عقب بدون أن يحدث أي اضطراب في حركة مركز كتلتها . اشرح كيف يستطيع ذلك . (٢) ويرغب فيما بعد في تغيير مداره كي يهبط عبر الغلاف الجوي . فسّر كيف يستطيع صاروخ كايغ (أو صاروخ ارتداد) retrorocket تحقيق هذا الهدف . عند أي نقطة في مداره الإهليلجي يجب إطلاق الصاروخ الكايغ للحصول على النتيجة المتوخاة بأبسط طريقة ؟

س ١١,٢٥ سفينتا فضاء « تحلقان بتشكيل واحد flying formation » في مدار دائري حول الأرض . أدير محرك الصاروخ لإحداهما فترة وجيزة كي تسارع باتجاه حركتها ؛ ثم استمرت كلتا السفينتين بالطيران ومحركاتها مغلقة . فهل من المحتمل على الإطلاق أن يقتريا ثانية من بعضهما البعض ؟ لِمَ أو لِمَ لا ؟

س ١١,٢٦ هل يمتسح الجسم الذي لا تؤثر عليه أية قوة مساحةً بمعدل ثابت ؟ إن كان الأمر كذلك ، فالنسبة لأي نقطة ؟

بند ١١,٧

س ١١,٢٧ قوة مركزية افتراضية تتفاوت طردياً مع $1/r^2$. فأي من قوانين كبلر ، هذا إن وجد ، يظل ساري المفعول ؟

س ١١,٢٨ لقد جادل أرسطو بأنه لو كانت الأرض تدور ، لوجب أن تكون الحركة الطبيعية للمادة على الأرض في دوائر ، خلافاً للحركة الطبيعية الملاحظة رأسياً إلى أسفل لقطعة مادة صلبة أثناء سقوطها . أنقذ بدقة هذا المنطق .

س ١١,٢٩ أي كوكبين تستحيل رؤيتهما عند منتصف الليل ؟ كيف تُفسّر نظرية كوبرنيكوس التي تتخذ الشمس مركزاً للكون هذه الحقيقة ؟ استشهد في إجابتك برسم توضيحي . هل تستطيع نظرية بطللمبوس التي تتخذ الأرض مركزاً للكون تقديم تفسير مقبول مماثل ؟

س ١١,٣٠ (١) ماذا نعني بالحركة التراجعية (أو التقهقرية) retrograde motion للكواكب ؟ (استشر مرجعاً خارجياً عند الضرورة .) (٢) بالاستعانة برسم توضيحي ، فسّر السبب للحركة التراجعية .

س ١١,٣١ بإمكان عملية حسابية بسيطة أن تبين أن القوة التي تؤثر بها الشمس على محيطات الأرض هي أكبر بكثير من القوة التي تؤثر بها القمر على المحيطات . فلماذا إذن يكون القمر السبب الرئيسي للمد والجزر tides على الأرض ؟ (تلميح : إن التغير في القوة من ركن لآخر على الأرض أمر مهم .)

س ١١,٣٢ إِنَّ انحرافات الأرض (أو، بتعبير أدق، نظام الأرض - القمر) عن مدار إهليلجي تَسبَّب بصورة رئيسية عن كوكب المشتري. فلماذا؟

بند ١١,٨

تأريخ

ت ١١,١ سفينة فضاء كتلتها ٢٠٠٠ كغ تقع عند لحظة ما على بُعد ١٠^٧ م عن مركز الأرض. (١) فاقوة الجاذبية التي تؤثر عليها؟ (٢) ما قوة الجاذبية التي تؤثر بها على الأرض؟ (٣) ما تسارع سفينة الفضاء؟ (٤) وما تسارع الأرض الناجم عن جذب سفينة الفضاء؟

بند ١١,٢

ت ١١,٢ يقف رجل كتلته ٧٥ كغ على بُعد ٢ م عن مركز كتلة سيارة كتلتها ٢٠٠٠ كغ. (١) إحسب قوة الجاذبية التي تؤثر بها السيارة على الرجل، ثم أوجد نسبة هذه القوة إلى وزن الرجل. (٢) قدر بصورة تقريبية، بأية طريقة تحطّر على بالك، القوة التي يؤثر بها تسيم عليل على الرجل، وقارن هذه مع قوة جاذبية السيارة.

ت ١١,٣ ليكن r_{21} نتيجة الإزاحة من الجسيم ١، ذي الكتلة m_1 ، إلى الجسيم ٢، ذي الكتلة m_2 . أكتب تعبيراً اتجاهياً للقوة F_{21} ، التي يؤثر بها الجسيم ١ على الجسيم ٢.

ت ١١,٤ قوة الجذب الكهربائي بين بروتون وإلكترون المسافة بينهما ١ Å (١٠^{-١٠} م) هي ٢,٣ × ١٠^{-٨} ن. بأي عامل تكون هذه القوة أكبر من قوة الجاذبية بين نفس الجسيمين؟ وماذا تعني هذه النتيجة بالنسبة للبنية الذرية؟

ت ١١,٥ من بين القوى المؤثرة على رجل على سطح الأرض قوى جاذبية الأرض، والشمس، والقمر، وكوكب الزهرة Venus. إحسب بصورة تقريبية المقادير النسبية لهذه القوى (لرقم معنوي significant figure واحد) وبين أن $F_{Earth} \gg F_{Sun} \gg F_{Moon} \gg F_{Venus}$. أورد قيمة تقريبية لنسب كل من القوى الثلاث الأخيرة إلى وزن الرجل. (لاحظ أنه من غير الضروري إقحام وزن الرجل أو قيمة G في حساباتك. لماذا؟)

ت ١١,٦ أثبت أن الزاويتين المشار إليهما بالخط θ في شكل ١١,٣ تتساويان في النهاية التي تقترب عندها dA_1 و dA_2 من الصفر. (يستخدم تساوي هاتين الزاويتين في برهان أن محصلة القوة المؤثرة على جسيم داخل الكرة تتلاشى.)

ت ١١,٧ (١) ما وزنك بوحدة النيوتن على سطح الأرض (الأمانة المطلقة ليست مطلوبة)؟ (٢) كم يقدو وزنك على ارتفاع ٣٩٦٠ ميلاً فوق سطح الأرض؟ (٣) على أي بُعد عن مركز الأرض يصبح وزنك ١٠ ن؟

ت ١١,٨ مسافر فضائي على كوكب غريب وضعه مضيئوه المعادون على سطح أفقي أملس تماماً وتركوه هناك لينحبط. وإمعاناً في تعذيبه، قاموا بتكديس الطيبات ليأكلوها على مائدة مبنى عن متناول يده. غير أنهم أغفلوا أن الجاذبية سوف تجذبه إلى الطعام. فإذا كانت كتلة المائدة بما عليها

١٠٠ كـرغ ، وإذا كانت مُثَبَّتةً بإحكام بسطح الكوكب على بُعد ٣ م عن ابن الأرض earthling ، فإذا سيكون تسارعه الابتدائي نحو وَجْهِهِ التالية ؟ قَدَّرْ تقريباً الزمن الذي يلزمه كي يصلَ إلى الطَّعام . هل هنالك أيُّ خطرٍ من أن يموتَ جوعاً على الطريق ؟

ت ١١,٩ (١) تحقَّق عددًا من أنَّ $GM_E/R^2 = 9.8 \text{ m/sec}^2$. (٢) تأكَّد من أنَّ GmM_E/R^3 لها نفسُ البُعْدِ الفيزيائيِّ مثلِ ثابتِ القوَّةِ k لمذبذبِ توافقِيٍّ .

بند ١١,٣

ت ١١,١٠ (١) كيفَ تتغيَّرُ دَوْرَةُ بندولٍ صغيرٍ عندما (أ) يُنْزَلُ في مَهْوَى مَنَجمٍ عميقٍ ؛ و (ب) يُرْفَعُ فوقَ سطحِ الأرض ؟ (٢) كمَ يجبُ تحريكُ البندولِ في كلِّ اتِّجاهٍ كيما تتغيَّرَ دورتهُ بمقدارٍ ١ بالمئة ؟

فرع اختياريٌّ : ناقشِ المزايا النسبيَّةَ لبندولٍ وبارومترٍ لقياسِ الارتفاعِ .

ت ١١,١١ يتذبذبُ جِسمٌ في ثِقْبٍ وهميٍّ يمرُّ بمركزِ الأرضِ . لتكنِ z مقياساً لموضعِ الجسمِ نسبةً إلى مركزِ الأرضِ . (١) أوردْ تعبيرينَ لمركبةِ سرعتهِ v (أ) كدالةٍ في الزمنِ ؛ (ب) كدالةٍ في z . (٢) ما السَّرعَةُ ، جبرئاً وعددياً على السَّواءِ ، عندَ مركزِ الأرضِ ؟

ت ١١,١٢ مهندسٌ لا يعبأُ بالاعتباراتِ التَّطبيقيَّةِ بِصَمِّ نَفَقٍ مُستقيماً طولهُ حوالي ١٠٠٠ ميلٍ ليصلَ لوس أنجلوس Los Angeles بمدينةِ سياتلِ Seattle . ويميلُ النِّفقُ عندَ نهايتيهُ بزاويةٍ $\sim$ تقريباً معِ الاتِّجاهِ الأفقيِّ . (١) بعمليةٍ حسابيَّةٍ لتحديدِ رُبَّةِ المقدارِ *order-of-magnitude calculation* ، قدرِ الزمنَ اللازمَ لقطارٍ كي يتدحرجَ بدونِ احتكاكٍ خلالَ النِّفقِ . تستطيعُ ، مثلاً ، اعتبارُ التسارعِ المتوسطِ التقريبيِّ للقطارِ خلالَ كلِّ من نصفَي الرِّحلةِ الواحدةِ بينَ إحدى المدينتينِ والأخرى . (الإجابةُ الصحيحةُ ، كما وردتْ في مسألة ١١,٧ ، هي ٤٢ دقيقة .) (٢) قدرِ ، بطريقةٍ مُماثلةٍ ، السَّرعَةَ القُصوى التي يُحقِّقُها القطارُ عندَ منتصفِ النِّفقِ . (يهدفُ هذا التمرينُ إلى تشجيعِ التفكيرِ على مستوى تحديدِ رُبَّةِ المقدارِ . فلا تقمُ بحلولٍ تامَّةٍ ما لم يكنِ الغرضُ منها مقارنتها معِ الإجاباتِ التقريبيَّةِ .)

ت ١١,١٣ (١) عندَ أيِّ نُقْطَةٍ بينَ الأرضِ والقمرِ يتساوى جَذْبُهُما للجسمِ ؟ (٢) هل تكونُ طاقةُ وضعِهِ عندَ هذهِ النِّقْطَةِ موجبةً ، أم سالبةً ، أم صفراً ؟ إذا كانت طاقةُ وضعِهِ عندَ ما لا نهايةٍ تُساوي صفراً ؟ لماذا ؟

بند ١١,٤

ت ١١,١٤ إذا وُضِعَتْ طاقةُ وضعٍ جِسمٍ كتلتهُ m مساويةً للصَّغَرِ عندَ مركزِ الأرضِ ولم يكنِ في قِيَمِها أيُّ نِقاطِ انقطاعٍ (انفصالٍ) في أيِّ مكانٍ ، فإِ طاقةُ وضعِهِ (أ) عندَ سطحِ الأرضِ ؛ و (ب) على بُعْدٍ لانهائيٍّ عن الأرضِ ؟

ت ١١,١٥ (١) تصوَّرْ أنَّ الأرضَ انهارتْ ، دونَ تغييرٍ في كتلتها ، حتى غدا الشُّغلُ اللازمُ لانتزاعِ جِسمٍ كتلتهُ m من سطحِ الأرضِ مساوياً للكميَّةِ mc^2 ، أي طاقةِ السُّكونِ *rest energy* للجِسمِ . فإذا يكونُ عندئذٍ نصفُ قطرِ الأرضِ (أوردْ إجابةً جبريَّةً وأخرى عدديَّةً على حدِّ سواءٍ) ؟ ... يُدعى هذا بنصفِ قطرِ الجاذبيَّةِ *gravitational radius* للأرضِ . (٢) ما نصفُ قطرِ الجاذبيَّةِ للشمسِ ؟

(يُفترضُ أَنَّ بعضَ النُّجُومِ التي استنفدت وقودها burned-out stars قد تنهارُ إلى نصفِ قطرِ جاذبيَّتها أو أقلَّ.)

ت ١١,١٦ أوجد طاقة وضع الجاذبيَّة لجسم كتلته m داخل وخارج قشرة كرويَّة رقيقة جوفاء نصف قطرها R وكتلتها M . عدل $U(r)$ حتى لا يكون في قيمتها أي انقطاع عند $r = R$. خطِّط رسماً بيانياً لطاقة الوضع U ضدَّ r .

ت ١١,١٧ يتحرَّك قمر صناعي في مدار دائري على بُعد r عن مركز الأرض. ليكن R و M_E نصف قطر الأرض وكتلتها على الترتيب ؛ θ تسارع الجاذبيَّة على سطح الأرض ، و G ثابت الجاذبيَّة . (١) أوجد صيغاً لسرعة القمر الدائر (أ) كدالة في r ، و R ، و θ ؛ و (ب) كدالة في r ، و G ، و M_E . (٢) على أي بُعد نصف قطري r تكون السرعة مساوية للقيمة 330 م/ث (يُعادل هذا في الهواء ماخ ١) ؟

ت ١١,١٨ بين أنَّ الشغل اللازم لوضع قمر صناعي في مدار قريب من سطح الأرض يزيد قليلاً على نصف الشغل اللازم لإرساله إلى جوار القمر.

ت ١١,١٩ (١) بين أنَّ الشغل اللازم لوضع قمر صناعي في مدار دائري على بُعد $200,000$ ميل عن الأرض يزيد بمقدار ١ بالمئة فقط على الشغل اللازم لإرسال القمر الصناعي على امتداد مسار رأسي مستقيم إلى تلك المسافة . (٢) بين أنَّ الشغل اللازم لوضع قمر صناعي في مدار دائري على ارتفاع 100 ميل فوق الأرض هو أكبر ٢٠ مرة من الشغل اللازم لإرساله رأسيًا إلى ذلك الارتفاع . اشمل ضمن إجاباتك رسومات طاقة .

ت ١١,٢٠ يتحرك جسم الأرض متحرِّكاً رأسيًا إلى أعلى بما يساوي ٩٩ بالمئة من سرعة الإفلات . فما الارتفاع الذي يصل إليه ؟ (اهمل احتكاك الهواء.)

ت ١١,٢١ عندما تكون سفينة فضاء عائدة من القمر على مسافة $200,000$ ميل عن الأرض ، تكون طاقتها الحركية مهملة بالمقارنة مع طاقتها الحركية قريباً من الأرض . (١) فما الطاقة الكلية التقريبية لسفينة الفضاء إذا كان صفر طاقة وضعها عند سطح الأرض ؟ (٢) ما طاقتها الكلية التقريبية إذا كان صفر طاقة وضعها عند ما لا نهاية ؟ (٣) وما سرعتها التقريبية عندما تقترب من الأرض (قبل أن يبدأ احتكاك الهواء في إبطائها) ؟ (أجب عن الفرعين ١ و ٢ جبرياً وعن الفرع ٣ جبرياً وعددياً على السواء .)

ت ١١,٢٢ (١) ما سرعة إفلات جسم من القمر ؟ أورد إجابة عددية . (٢) ما نسبة سرعة الإفلات من الأرض إلى سرعة الإفلات من القمر ؟

ت ١١,٢٣ (١) كوكبان متساويا الكثافة لهما نصف القطرين R_1 و R_2 . فما نسبة سرعتي الإفلات من سطحيهما ؟ (٢) كوكبان متساويان في نصف القطر لهما الكتلتان M_1 و M_2 . فما نسبة سرعتي الإفلات من سطحيهما ؟

ت ١١,٢٤ كوكب نصف قطره ٤ أميال وكثافته تساوي متوسط كثافة الأرض . (١) فهل يسبح رجل ، عندما يثني ركبتيه ويقفز ، أن يفلت من هذا الكوكب ؟ (٢) وهل يستطيع أن يقذف بكرة قاعدة في مدار حول هذا الكوكب ؟

ت ١١,٢٥ مسافر فضائي في الفضاء بينجمي Interstellar كان يعمل قرب سفينة عندما انقطع به جيل الأمان . وكان في تلك اللحظة على بُعد ٣ م عن مركز كتلة السفينة وينساق عنها بسرعة ١ م/ث . فإذا كانت كتلة السفينة ١٠٠٠٠ كغ ، فهل يبلغ مسافة قصى ثم يجذب عائداً ، أم يستمر في انسياقه إلى ما لا نهاية ؟

ت ١١,٢٦ صاروخ مثبت رأسياً تسارع إلى أعلى حتى أصبح بعده عن مركز الأرض r ، ثم توقفت محركاته الصاروخية . فإذا يجب أن تكون سرعته الدنيا عند لحظة توقف محركاته حتى يفلت من الأرض ؟ إبحث النهايتين للانطلاق الدفعي impulsive firing (r أكبر قليلاً من نصف قطر الأرض R) والانطلاق البطيء ($r \gg R$) .

ت ١١,٢٧ سفينة فضاء في مدار دائري تتحرك بسرعة v على بُعد r عن مركز الأرض . أوجد صيغة للزيادة في السرعة Δv اللازمة لرفع طاقة السفينة إلى الصفر والساح لها بالإفلات من الأرض . ما النسبة $\Delta v/v$ ؟

ت ١١,٢٨ ليكن r نصف قطر مدار الأرض حول الشمس (مقرباً إلى دائرة) ، ولتكن M_E كتلة الأرض ، و M_S كتلة الشمس . أجب بدلالة هذه الكميات وثابت الجاذبية G عن جميع أجزاء هذا التمرين جبرياً . (١) ما طاقة وضع الأرض في مجال جاذبية الشمس ؟ (٢) ما الطاقة الحركية للأرض ؟ (٣) ما الطاقة الإضافية التي قد تحتاجها الأرض للإفلات من النظام الشمسي ؟ (٤) بين أن سرعة إفلات الأرض من النظام الشمسي هي

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_S}{r}}$$

ت ١١,٢٩ (١) باستخدام الصيغة المعطاة في التمرين السابق ، إحسب سرعة إفلات الأرض من النظام الشمسي . لاحظ أن سرعة الإفلات هذه لا تعتمد على كتلة الجسم الذي يفلت . (بمجرد إفلات ، سفينة فضاء من الأرض ، فإنها تحتاج إلى ذلك القدر من السرعة للاستمرار في إفلاتها من الشمس .) (٢) ما نسبة سرعة الإفلات الشمسية إلى متوسط السرعة المدارية للأرض الواردة في ملحق ٣ د ؟ (٣) ما نسبة سرعة الإفلات الشمسية إلى سرعة الإفلات الأرضية المحددة بالمعادلة ١١,٢١ ؟ ماذا يستلزم ذلك عن الصعوبة النسبية في بلوغ القمر وبلوغ نبتون ؟

ت ١١,٣٠ عندما أطلق قمر اتصالات سوفيتي ، مولنيا ١L ، عام ١٩٦٩ ، كان حضيضه على ارتفاع ٣٢٣ ميلاً فوق سطح الأرض ؛ بينما كان أوجهه على ارتفاع ٥٧٠ ٢٤ ميلاً فوق سطح الأرض . (١) إحسب المسافات الثلاث a ، b ، و c التي تصف مداره الإهليلجي (أنظر شكل ١١,١٢) تكفي هنا دقة المسطرة الحاسبة slide rule . (٢) ما الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص ؟

بند ١١,٦

ت ١١,٣١ عندما أطلق قمر الاتصالات التجاري Intelsat 2A عام ١٩٦٦ ، كان من المفروض أن يستقر في مدار شبه دائري (الاختلاف المركزي قريب من الصفر) ، إلا أنه استقر بدلاً من ذلك في مدار اختلافه المركزي $e = 0.634$. وعند الأوج كان على ارتفاع ٢٧٠٠٠ ميل عن مركز الأرض .
(١) فما ارتفاعه عن سطح الأرض عند الحضيض ؟ (٢) وما نسبة سرعته عند الحضيض إلى سرعته عند الأوج ؟ (٣) بين أن دورته أقرب إلى ١٢ س منها إلى الدورة المقصودة المساوية ٢٤ س .

ت ١١,٣٢ باستخدام الوحدات الفلكية في قياس المسافات (الوحدة الفلكية فرس A.U. = متوسط المسافة بين الأرض والشمس) وباختيار نظام إحداثي مناسب ، فإن معادلة مدار مذنب هالي Halley's comet يمكن كتابتها على الصورة : $1 = (x/17.8)^2 + (y/4.6)^2$. (١) أرسم المدار باستخدام ورق رسم بياني . عين المحورين وحدد موضعي البورتين . (٢) قارن أبعاد القطع الناقص الذي رسمته مع أبعاد المدارات الكوكبية المغطاة في جدول ١١,١ ، واذكر في أي مكان من النظام الشمسي يُعثر على مذنب هالي عندما يكون في الحضيض وعندما يكون في الأوج .
(هذا المذنب ، الذي قام بدراسته إدموند هالي عام ١٦٨٢ ، يُتوقع أن يكون في الحضيض ثانية عام ١٩٨٦) .

ت ١١,٣٣ إذا كان r و θ الإحداثيين القطبيين ، أثبت أن

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}$$

هي معادلة قطع ناقص ذي اختلاف مركزي e ونصف محور ثانوي (أصغر) b .

ت ١١,٣٤ تدعى المعادلتان

$$x = a \cos u, \quad y = b \sin u$$

بمعادلتين بارامتريتين parametric equations لأنه يُعبّر عن x و y بدلالة البارامتر المتغير u . بين أن هاتين المعادلتين البارامتريتين تمثلان قطعاً ناقصاً . ما المدى الذي يجب أن تتغير خلاله u كي تتحرك مرة واحدة حول القطع الناقص ؟

ت ١١,٣٥ تصف المعادلة

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

قطعاً مخروطياً . أيها ؟ أرسم مخططاً بيانياً لهذه المعادلة للقيمتين $a = 1$ ، و $b = 2$. (لاحظ أن للرسم البياني فرعين two branches ؛ أي منحنين متميزين) . ماذا يكون سلوك هذين المنحنين عندما $x^2 \rightarrow \infty$ ؟

ت ١١,٣٦ ما نسبة السرعة القصوى إلى السرعة الدنيا للمذنب هالي (معادلة مداره مغطاة في تمرين ١١,٣٢) ؟

ت ١١,٣٧ كوكب غير مرئي اسمه فلكان Vulcan افترض وجوده ذات مرة في مدار أصغر من مدار كوكب عطارد . لو كان متوسط بُعد فلكان عن الشمس ٠,٢ فرس ، فإذا ستكون دورته المتوقعة بالسنوات الأرضية ؟

ت ١١,٣٨ استهلالاً بالمُعْطَيَاتِ الكَيْنَيَّةِ للقمرِ المثبتِ في ملحق ٣ د ، استخدم قانونَ كبلرِ الثالثَ لإيجاد (أ) البُعْدَ بالأُميالِ عن مركزِ الأرضِ لقمرٍ صناعيٍّ دورتهُ ٢٤ س ؛ و (ب) الدَّوْرَةَ بالدَّقَائِقِ لقمرٍ صناعيٍّ على ارتفاعٍ منخفضٍ بُعْدُهُ عن مركزِ الأرضِ ٤١٠٠ ميل . افترض أن مداري القمرين الصناعيين كليهما دائريان .

ت ١١,٣٩ هَبْ أَنْ قَرَّ اتِّصَالَاتٍ صِنَاعِيًّا مُتَوَافِقًا فِي دَوْرَتِهِ مَعَ الْأَرْضِ (مُتَزَامِنًا) synchronous يُحَلِّقُ فِي مدارٍ دائريٍّ تَامَ . (١) فما الدَّقَّةُ المطلوبةُ فِي تَحْدِيدِ ارتفاعِهِ كَيْمَا تَفْعَ دَوْرَتُهُ فِي حُدُودِ ٣٠ ث من دَوْرَتِهِ « الإِسْمِيَّةِ » الَّتِي تَسَاوِي ٢٣ س و ٥٦ د ؟ عُبِّرْ عَنِ إِجَابَتِكَ بِالْأُمِيَالِ . (٢) إِذَا كَانَتْ دَوْرَتُهُ أَقْلًا بِمَا يَسَاوِي ١٥ ث من دَوْرَتِهِ الإِسْمِيَّةِ ، فما « سُرْعَةُ انْجِرَافِ drift speed » القمرِ الصَّنَاعِيِّ ؛ أَيْ سُرْعَةُ النِّقْطَةِ عَلَى خَطِّ الإِسْتَوَاءِ الَّتِي تَفْعُ مُبَاشَرَةً أَسْفَلَ الْقَمَرِ الصَّنَاعِيِّ ؟ عُبِّرْ عَنِ إِجَابَتِكَ بِالْأُمِيَالِ لِكُلِّ يَوْمٍ .

ت ١١,٤٠ كَانَ رَائِدَا الْفَضَاءِ جِيمْسُ لُوفِل James Lovell وإِدْوِينُ الْأَدْرِين Edwin Aldrin ، إِتَانِ جُزْءٍ مِنْ رَحْلَتِيهَا جِيمِينِي ١٢ (Gemini 12) عَامَ ١٩٦٦ ، فِي مَدَارٍ تَفَاوَتْ بُعْدُهُ عَنْ مَكْرَزِ الْأَرْضِ بَيْنَ ٤٠٦٠ و ٤١٣٥ مِيلًا ؛ كَمَا كَانَتْ دَوْرَةُ هَذَا الْمَدَارِ ٨٩ د . (١) فَمَاذَا كَانَتْ نِسْبَةُ سُرْعَتِيهَا الْقَصُوى إِلَى سُرْعَتِيهَا الدُّنْيَا فِي الْمَدَارِ ؟ (٢) أَوْجِذْ ، بِاسْتِخْدَامِ دَوْرَةِ جِيمِينِي ١٢ ، دَوْرَةَ قَمَرٍ صِنَاعِيٍّ فِي مَدَارٍ نَصْفُ مَحْوَرِهِ الرَّئِيسِيِّ (الأكبر) يَسَاوِي ٨٢٠٠ مِيل . (٣) لَوْ تَفَاوَتَتْ قُوَّةُ الْجَذَابِيَّةِ طَرْدِيًّا مَعَ $1/r^3$ بَدَلًا مِنْ $1/r^2$ لَتَغَيَّرَتْ وَاحِدَةٌ مِنَ الْإِجَابَتَيْنِ السَّابِقَتَيْنِ ، بَيْنَمَا ظَلَّتِ الْأُخْرَى عَلَى حَالِهَا . فَأَيُّهَا مَا كَانَتْ لَتَتَغَيَّرَ ؛ وَلِمَاذَا ؟

ت ١١,٤١ عُبِّرْ عَنِ الثَّابِتِ K_s فِي قَانُونِ كِبْلَرِ الثَّلَاثِ (أَنْظُرِ الْمَعَادِلَةَ ١١,٤٦) عِدَدِيًّا بِدَلَالَةِ الْوَحْدَاتِ الْفَلَكِيَّةِ وَالسَّنَوَاتِ (الْأَرْضِيَّةِ) .

ت ١١,٤٢ اسْتَخْدِمِ الْمَعَادِلَتَيْنِ ١١,٤٦ و ١١,٤٧ ، بِالإِضَافَةِ إِلَى الْمُعْطَيَاتِ الْكَيْنَيَّةِ (الْمَسَافَاتِ وَالْأَزْمَنَةِ) عَنِ الْكَوَاكِبِ وَالْأَقْيَارِ ، لِإِيجَادِ نِسْبَةِ كِتْلَةِ الشَّمْسِ إِلَى كِتْلَةِ الْأَرْضِ . تَحَقَّقْ مِنْ إِجَابَتِكَ بِمُقَارِنَتِهَا مَعَ الْكِتْلَتَيْنِ الْمَثْبُتَتَيْنِ فِي مِلْحَقِ ٣ .

ت ١١,٤٣ اِعتَبِرْ كَوَاكِبَ فِي مَدَارَاتٍ دَائِرِيَّةٍ حَوْلَ شَمْسٍ مَرَكْزِيَّةٍ . كَيْفَ تَرْتَبِطُ سُرْعَاتُهَا بِأَنْصَافِ أَقْطَارِهَا الْمَدَارِيَّةِ ؟

ت ١١,٤٤ قَرَّ صِنَاعِيٍّ كِتْلَتُهُ 10^4 كِغْرَافِ فِي مَدَارٍ دَائِرِيٍّ عَلَى بُعْدِ 8×10^6 م عَنْ مَكْرَزِ الْأَرْضِ يُدِيرُ مُحَرَّكُهُ الصَّارُوخِيَّ لِمُدَّةِ ٢ د ، بِتَأَثَّرٍ خِلَالَهَا بِقُوَّةٍ مَقْدَارُهَا 10^4 ن بِاتِّجَاهِ حَرَكَتِهِ . (١) فَمَا عَزْمُ الدَّوْرَانِ الْمُؤَثَّرِ عَلَى الْقَمَرِ نِسْبَةً إِلَى مَكْرَزِ الْأَرْضِ ؟ (٢) مَا التَّغْيِيرُ فِي زُخْمِهِ الزَّائِي ؟ (٣) مَاذَا كَانَتْ سُرْعَتُهُ ، وَزُخْمُهُ الزَّائِي ، وَطَاقَتُهُ الْحَرَكِيَّةُ قَبْلَ الدَّفْعِ impulse ؟ (٤) مَا قِيَمَةُ كُلِّ مِنْ هَذِهِ الْكَمِّيَّاتِ الثَّلَاثِ ذَاتِهَا بَعْدَ الدَّفْعِ ؟ (٥) كَيْفَ يَتَغَيَّرُ مَدَارُهُ بِصُورَةٍ وَصْفِيَّةٍ ؟ (٦) كَيْفَ كَانَ يُمَكِّنُ أَنْ يَتَغَيَّرَ مَدَارُهُ لَوْ تَأَثَّرَ بِدَفْعٍ لَهُ نَفْسُ الْمَقْدَارِ وَمُنْتَجِجِهِ (أ) بِعَكْسِ سَرَّجَتِهِ ؟ (ب) رَأْسِيًّا إِلَى أَعْلَى بَعِيدًا عَنِ الْأَرْضِ ؟

م ١١,١ (١) بالاستعانة برسم توضيحي كما في شكل ١١,٣ ومنطقي مماثل لما ورد في بند ١١,٢ ، أثبت أن محصلة القوة داخل قشرة كروية لا تتلاشى إذا كانت القوة بين الجسيمات المادية لا تتغير طردياً مع $1/r^2$. (٢) إذا تغيرت القوة طردياً مع $1/r^n$ ، حدد اتجاه محصلة القوة على الجسيم للقيمة (أ) n أكبر قليلاً من ٢ ؛ و (ب) n أصغر قليلاً من ٢ .

م ١١,٢ يصف تمرين ١١,٨ ورطة مخلوق أرضي مُحْتَجَز . (١) طور صيغة دقيقة للزمن الذي يلزمه للوصول إلى طعامه . (تلميح : إن معادلة الطاقة لقوة مُحَافَظَة تكون عادة نقطة بداية جيدة لإيجاد علاقة بين الزمن والمسافة ؛ فنحتاج بعد ذلك إلى تكامل واحد .) (٢) احسب القيمة العددية للنتيجة وقارنها مع الزمن المحسوب بافتراض قوة ثابتة مساوية للقوة الابتدائية . (٣) أعط توضيحاً وصفاً للحقيقة بأن الزمن المحسوب بالضبط والزمن المحسوب بالتقريب لا يختلفان كثيراً .

الحركة باتجاه مركز قوة

انحراف زاوي صغير بواسطة قوة جاذبية

م ١١,٣ يتزلج فتى باتجاه مستقيم أسفل نهر متجمد ، فينجذب (بالجاذبية) إلى فتاة تجلس على ضفة النهر . فما مقدار الانحراف الذي يستطيع جذبها أن يحدثه في مساره ؟ (١) بين باستخدام منطقي مبني على تقدير رتبة المقدار أن القيمة التقريبية لزاوية انحرافه هي

$$\theta \cong \frac{Gm}{bv^2} ,$$

حيث G ثابت الجاذبية ، و m كتلة الفتاة ، و b مسافة أدنى اقتراب الفتى من الفتاة ، و v سرعة الفتى . (تلميح : قد يكون مفهوم الدفع مفيداً .) (٢) ضع قيمة معقولة لكل من m ، و b ، و v في هذه الصيغة واحسب θ . (بالإضافة إلى إعادة تأكيد ضعف قوة الجاذبية ، تبين هذه المسألة فائدة المنطق المبني على أساس تقدير رتبة المقدار .)

م ١١,٤ وصف القوة ، في المسألة السابقة ، بأنها ثابتة المقدار أو ثابتة الاتجاه إنما يُعتبر تقريباً غير مناسب ؛ بيد أن الافتراض بأن المترلج يتحرك في خط مستقيم بسرعة ثابتة إنما يُعتبر تقريباً ممتازاً (إذا كانت قوة الجاذبية الضعيفة هي القوة الوحيدة التي تؤثر عليه أفقياً) . (١) استغل ثبوت سرعته تقريباً لكي تحسب الدفع $I = \int F dt$ (حيث F هي القوة التي تؤثر بها الفتاة على الفتى) . (٢) باستخدام هذه النتيجة بين أن زاوية انحراف الفتى هي

$$\theta = \frac{2Gm}{bv^2} ;$$

(ورد توضيح الرموز في المسألة السابقة) . (٣) عبّر عن هذه الزاوية بدلالة طاقة وضع وطاقة حركية .

تسارع الجاذبية قرب الأرض

م ١١,٥ هب أن شخصاً شاذ الأفكار مُقْتَنِعٌ بأن قوة جاذبية الأرض يجب أن تعتمد بصورة بسيطة ليس على البعد عن مركز الأرض بل على البعد عن سطح الأرض . فهو يستطيع بنجاح تطبيق « قانون » التسارع الآتي على الأقمار الصناعية ذات الارتفاع المنخفض :

$$a = g - \frac{2gh}{R} ,$$

حيث g تسارع الجاذبية على سطح الأرض ، و h الارتفاع فوق سطح الأرض ، و R نصف قطر الأرض . (١) أثبت أن $2g/R$ هو المَعَامِلُ الصَّحِيحُ للارتفاع h كي يتوافق مع قانون نيوتن لقوة الجاذبية على ارتفاع منخفض . (٢) اقترح تجربة أو مشاهدة يمكنها بسهولة التَّدليل على محدودية هذه الفرضية لتسارع الجاذبية . (٣) ما الخطأ الكسري في هذا التقريب الخطي في h على ارتفاع ٢٠٠ ميل ؟
 فرع اختياري : اشتق صيغة أدق للتسارع a على ارتفاع منخفض تحتوي كلا الحدَّين الخطي والتربيعي في h .

م ١١,٦ (١) ما المتوسط الزماني لسرعة جسم يتذبذب في ثقب وهمي محفور خلال مركز الأرض ؟ (٢) وما المتوسط المكاني لسرعة الجسم ؟ قارن كلا من هاتين السرعتين مع سرعة قمر صناعي على ارتفاع منخفض . (يمكن إعطاء جميع الإجابات جبراً) .

التذبذب التوافقي خلال الأرض

م ١١,٧ في نظام افتراضي للنقل السريع ، يتدحرج قطار بدون احتكاك خلال نفق مستقيم يصل بين مدينتين (أنظر شكل ١١,١٧ أدناه) . أثبت أن زمن الانتقال بين أي مدينتين هو $\pi\sqrt{R/g}$ ، أو حوالي ٤٢ د . (اقترح : استخدم الإحداثي s الذي يقيس موقع القطار نسبة إلى منتصف النفق) .

نظام افتراضي للنقل السريع

م ١١,٨ كوكب عجيب له نفس كتلة ونصف قطر الأرض ، لكن كتلته متركزة في قشرة خارجية سمكها ١٠ أميال . على فرض أن كثافة هذه القشرة ثابتة ، ابحث بالتفصيل حركة جسم عندما يسقط خلال ثقب طوله ١٠ أميال ويستمر في حركته خلال تجويف الكوكب (امل الاحتكاك) . اشمَل ضمن إجابتك عينات من حسابات عددية .

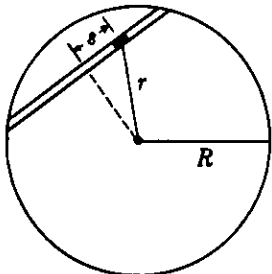
جاذبية كوكب أجوف

م ١١,٩ قمر صناعي كتلته m في مدار إهليلجي تساوي طاقته الحركية عند الحضيض أربعة أضعاف قيمتها عند الأوج . (١) أثبت أن طاقته الكلية هي

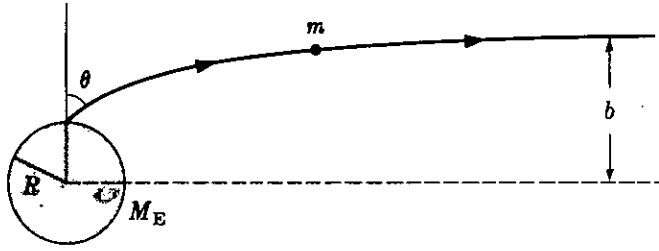
قمر صناعي في مدار إهليلجي

$$E = -\frac{1}{3} \frac{GmM_E}{r_p} = -\frac{2}{3} \frac{GmM_E}{r_a}$$

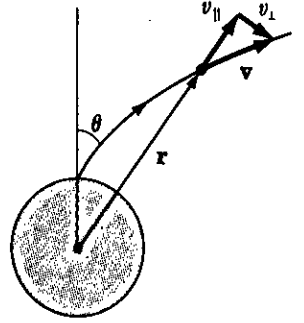
حيث r_p و r_a هما البُعْدان النَّصْفُطْرِيَّانِ للقمر الصناعي عن مركز الأرض عند الحضيض والأوج على الترتيب . (٢) بين كيفية تمثيل هذا القمر الصناعي في رسم طاقي .



شكل ١١,١٧ : مسألة ١١,٧ .



شكل ١١,١٩ : مسألة ١١,١١ .



شكل ١١,١٨ : مسألة ١١,١٠ .

الإفلات على امتداد مسار منحني

م ١١,١٠ لصاروخ كتلة m وطاقة E وزخم زاوي L (بالنسبة إلى مركز الأرض) أثناء حركته الحرة في مجال جاذبية الأرض. يصنع مداره زاوية θ مع الاتجاه الرأسي بالقرب من الأرض. (١) أثبت أنه يمكن كتابة معادلة حفظ طاقته على الصورة :

$$\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM_E}{r} = E,$$

حيث $v_{\parallel}$ مركبة v الموازية للمتجه r (أنظر شكل ١١,١٨). (٢) بين أن الصاروخ يفلت من الأرض إذا كانت $E \geq 0$ ، بغض النظر عن قيمة θ . (٣) أثبت أن سرعة إفلاته تتحدد بالمعادلة ١١,٢١ ، مستقلة عن θ .

م ١١,١١ صاروخ يبدأ قرب الأرض بطاقة موجبة E بحيث يميل متجه سرجه بزاوية θ مع الاتجاه الرأسي ؛ فيبلغ في حركته الحرة مسافة كبيرة ، حيث يفترب مساره من خط مستقيم على بُعد b عن خط مواز يمر خلال مركز الأرض (أنظر شكل ١١,١٩). (١) باستخدام كل من حفظ الطاقة وحفظ الزخم الزاوي ، بين أن

$$b = \sqrt{\frac{E+B}{E}} R \sin \theta,$$

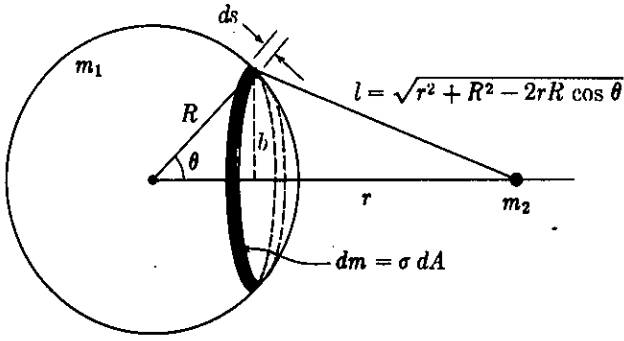
حيث $B = GmM_E/R$. (تلميح : تدخل المسافة b في تعبير بسيط للزخم الزاوي). (٢) ناقش النهايتين $E \rightarrow 0$ و $E \rightarrow \infty$.

المركبة الشعاعية للحركة الثنائية البعد

م ١١,١٢ (١) أثبت أن $v_{\parallel}$ ، كما عرفت في مسألة ١١,١٠ ، هي نفسها dr/dt ، حيث r المسافة الشعاعية بين مركز الأرض والصاروخ. (٢) يمكن كتابة معادلة حفظ الطاقة الواردة في مسألة ١١,١٠ على الصورة :

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U_{\text{eff}}(r) = E.$$

أكتب تعبيراً لطاقة الوضع الفعالة U_{eff} ، وارسم رسماً بيانياً تخطيطياً لهذه الطاقة U_{eff} ضد r للحالتين (أ) $L = 0$ صفراً ؛ و (ب) $L \neq 0$ صفراً. يُرودنا مثل هذا الرسم البياني بمخطط طاقي للمركبة الشعاعية للحركة الثنائية البعد. (٣) بين بيانياً وجبرياً - سواء بسواء - أن r له نهاية عظمى ونهاية صغرى إذا كانت $E < 0$ ونهاية صغرى فقط إذا كانت $E \geq 0$ (افترض أن



شكل ١١,٢٠ : مسألة ١١,١٤ .

L (بـ صفراً) . أورد تعبيرين للنهائيتين $r_{\min}$ و $r_{\max}$. (٤) كيف يجب أن ترتبط الطاقة بالزخم الزاوي حتى تكون $r_{\min} = r_{\max}$ ؟ تحقق من هذه العلاقة باستخدام خواص الحركة الدائرية المنتظمة التي سبق اشتقاقها .

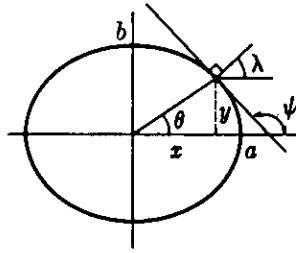
م ١١,١٣ : اعتبر جسماً كتلته m يتحرك على امتداد خطٍ مستقيم بين الأرض والقمر . نغاص عن أية آثار مقترنة بالحركة المدارية للقمر . (١) أكتب صيغة لطاقة الوضع U للجسم كدالة في بُعده r عن مركز الأرض . (مجموعة رموز أخرى : للأرض نصف قطر R وكتلة M_E ؛ والقمر نصف قطر R' وكتلة M_M ؛ كما أن المسافة بين مركز الأرض ومركز القمر هي r_m) . (٢) خطط رسماً بيانياً ، بمقاييس رسم تقريبية ، لطاقة الوضع U ضد r في المدى $R \leq r \leq r_m - R'$. (٣) لأي قيمة r تكون U نهاية عظمى ؟ ما هي $U_{\max}$ ؟ قارن $U_{\max}$ مع U عند سطح الأرض . (٤) لتكن v_{esc} السرعة الدنيا التي يجب أن تكون لجسم قرب سطح الأرض حتى يتجاوز « تل » طاقة الوضع ويصل إلى القمر . أوجد جبرياً وحسابياً - سواء بسواء - $v_{\text{esc}} - v'_{\text{esc}}$.

م ١١,١٤ : يوجد جسم كتلته m_2 خارج قشرة كروية ، نصف قطرها R وكتلتها m_1 ، على بُعد r عن مركزها . باتباع الخطوات التالية ، بين أن طاقة وضع التفاعل بين الجسم والقشرة الكروية هي Gm_1m_2/r ، تماماً كما لو أن القشرة كانت مركزة في نقطة تمثل المنطقة المظلمة في شكل ١١,٢٠ أعلاه مساحةً متناهية الصغر dA نصف قطرها b وعلى بُعد l عن الجسم . وتوجد في هذه المنطقة كتلة $dm = \sigma dA$ حيث σ كتلة وحدة المساحة من القشرة ($\sigma = m_1/4\pi R^2$) و $dA = 2\pi b ds = 2\pi b R d\theta$. لاحظ أن $b = R \sin \theta$. فتكون مساهمة هذا الجزء الصغير من الكتلة في طاقة الوضع

$$dU = \frac{Gm_2 dm}{l}$$

ويمكن التعبير عن الكميات على اليمين بدلالة كميات ثابتة والكمية المتغيرة θ . بعد ذلك يُعطينا إجراء التكامل على θ طاقة الوضع الكلية .
 فرع اختياري : بين أنه إذا كان الجسم داخل القشرة ، كانت طاقة وضعه ثابتة .

م ١١,١٥ : (١) احسب التسارع إلى الداخل الناتج عن دوران الأرض لنقطة على سطح الأرض عند خط عرض ٤٥° شمالاً . قارن هذا التسارع مع تسارع السقوط الحر g . هل يُعتبر قولنا - بأن الجسم الزاوية التي تصنعها قوة جاذبية الأرض مع الاتجاه الرأسي



شكل ١١,٢١ : مسألة ١١,١٦ .

السَّكَنَ على سطح الأرض لا يتأثر بآية محصلة قوة - تقريباً مشروعاَ لمعظم الأغراض ؟ (٢) تميل قوة الجاذبية عند خط العرض هذا قليلاً عن الاتجاه الرأسي (شكل ١١,٧) . فما القيمة التقريبية لهذه الزاوية ؟

م ١١,١٦ إذا وُضِعَت نقطة الأصل لنظام إحداثي عند مركز الأرض ، بحيث يمتد محوره x إلى خط الإستواء ومحوره y إلى أحد القطبين ، فإنه يمكن وصف سطح الأرض بالمعادلة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(١) فما مقدار a و b (بالأميال أو الكيلومترات) ؟ (٢) أثبت أن زاوية خط العرض λ والزاوية القطبية θ (المعرفة في شكل ١١,٢١ أعلاه) ترتبطان بالمعادلة

$$\tan \lambda = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \tan \theta.$$

(تلميح : $\tan \psi = dy/dx$.)

إن أحد طرفي القطع الناقص هو قطع مكافئ تقريباً

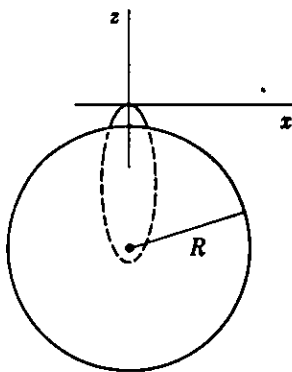
م ١١,١٧ يُكوّن مسار قذيفة على الأرض جزءاً من قطع ناقص ، كما هو مبين في شكل ١١,٢٢ . (١) أثبت أنه بالنسبة لاختيار الإحداثيات المبين في الشكل ، يمكن بالتقريب تمثيل جزء القطع الناقص خارج الأرض بالقطع المكافئ

$$z \cong -\frac{a}{2b^2} x^2,$$

حيث a نصف المحور الرئيسي (الأكبر) للقطع الناقص و b نصف محوره الثانوي (الأصغر) . (إقترح : اكتب معادلة لقطع ناقص مركزه عند نقطة الأصل لنظام إحداثي ، ثم أخرج نقطة الأصل إلى نهاية المحور الرئيسي .) (٢) أذكر شرطاً يضمن دقة التقريب المكافئ . (٣) بين أنه ، للقذائف القصيرة المدى والمنخفضة الارتفاع ، يكون

$$a \cong \frac{1}{2}R, \quad b \cong v_x \sqrt{\frac{R}{2g}}.$$

حيث R نصف قطر الأرض ، و g تسارع الجاذبية ، و v_x المركبة الأفقية لسرعة القذيفة . (٤) قذفت كرة قاعدة بحيث كانت $v_x = 15$ م/ث . فما نصف المحور الثانوي «مدارها» ؟

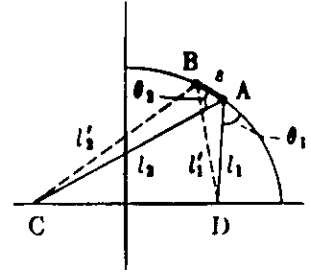


شكل ١١,٢٢ : مسألة ١١,١٧

خاصية تساوي الزوايا للقطع الناقص

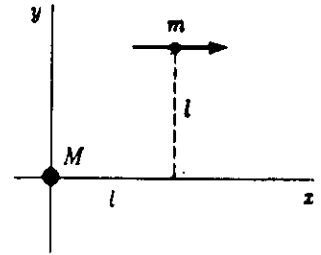
م ١١,١٨ النقطتان C و D في شكل ١١,٢٣ هما بؤرتا قطع ناقص ، والنقطة A هي نقطة على القطع الناقص . أثبت أن الزاويتين θ_1 و θ_2 متساويتان إن هذه الخاصية تعني أن أمواجاً صوتية أو

أمواجاً ضوئيةً منبعثةً عن إحدى بُؤرتي حُجْرَةِ إهْلِيلِجِيَّةِ الشَّكْلِ لَسَوْفَ تَعْمَلُ وَتَتَجَمَّعُ عِنْدَ الْبُؤْرَةِ الْآخَرَى . (إقْتِرَاح : إَعْتَبِرْ نَقْطَةَ B الَّتِي تَبْعُدُ مَسَافَةً صَغِيرَةً s عَنِ A . فَيُمْكِنُ التَّعْبِيرُ عَنِ الْمَسَافَةِ l'_1 بِدَلَالَةِ l_1 ، وَ s ، وَ θ_1 ؛ كَمَا يُمْكِنُ التَّعْبِيرُ عَنِ l'_2 بِدَلَالَةِ l_2 ، وَ s ، وَ θ_2 . وَلِلْقِطْعِ النَّاقِصِ يَكُونُ $l'_1 + l'_2 = l_1 + l_2 = \text{constant}$ [أَنْظِرْ شَكْلَ ١١,١١ (ب)] . لَذا ، فَإِنَّ $d(l'_1 + l'_2)/ds = 0$. وَفِي النِّهَايَةِ الَّتِي تَكُونُ فِيهَا s صَغِيرَةً ، فَإِنَّ الْقِطْعَةَ AB تَقَعُ عَلَى امْتِدَادِ الْقِطْعِ النَّاقِصِ .



شكـل ١١,٢٣ : مآلة ١١,١٨
نظام كوكبي افتراضي

م ١١,١٩ في كَوْنِ أُسْطُورِيٍّ مُعَيَّنٍ ، نَضَعُ إِحْدَى الْآلِهَةِ goddess a نجماً عِنْدَ نَقْطَةِ الْأَصْلِ لِنِظَامِ إِحْدَائِيٍّ ، ثُمَّ نَقْذِفُ كَوَاكِبَ مِنَ النِّقْطَةِ $x = l, y = l$ بِسُرْعَاتٍ ابْتِدَائِيَّةٍ مُخْتَلِفَةٍ ، غَيْرَ أَنَّهُمَا تَجْعَلُهُمَا جَمِيعاً تَبْدَأُ حَرَكَتَهُمَا مُوَازِيَةً لِمُحَوِّرِ x (أَنْظِرْ شَكْلَ ١١,٢٤) . فَيُتَبَّعُ كُلُّ كَوْكَبٍ مَسَاراً إِهْلِيلِجِيّاً يَكُونُ النُّجْمُ فِي إِحْدَى بُؤْرَتَيْهِ . بِاسْتِخْدَامِ خَاصِّيَّةٍ تَسَاوِيِ الزَّوَايَا لِلْقِطْعِ النَّاقِصِ الْوَارِدَةِ فِي الْمَسْأَلَةِ السَّابِقَةِ ، يَبَيَّنُ أَنَّ جَمِيعَ الْبُؤَرِ الْآخَرَى تَقَعُ عَلَى امْتِدَادٍ مُنْحَنِيٍّ وَاحِدٍ . حَدِّدْ مَعَادِلَةَ هَذَا الْمُنْحَنِ ، ثُمَّ خَطِّطْ بَعْضَ الْمَدَارَاتِ الْكَوْكَبِيَّةِ . (مَسْأَلَةُ إِدْوَارْدِ كَاسْنِرِ Edward Kasner [١٨٧٨ - ١٩٥٥] .)



شكـل ١١,٢٤ : مآلة ١١,١٩

م ١١,٢٠ أَعِذْ صِبَاغَةَ الْمُنْطَقِ الْوَارِدِ فِي بَنْدِ ٩,٩ بُغْيَةً إِبْرَاطِ أَنَّهُ إِذَا مَسَّحَ الْخَطُّ الْوَاصِلُ بَيْنَ الشَّمْسِ وَكَوْكَبٍ مُتَسَارِعٍ مَسَاحَةً بِمَعْدَلٍ ثَابِتٍ ، فَإِنَّ الْقُوَّةَ الْمُؤَثِّرَةَ عَلَى الْكَوْكَبِ يَنْبَغِي أَنْ تَتَّجِعَ نَحْوَ (أَوْ بَعِيداً عَنْ) الشَّمْسِ . (الْعَكْسُ مُبْرَهَّنٌ فِي بَنْدِ ٩,٩ : إِذَا أَثَّرَتْ قُوَّةٌ مَرَكَزِيَّةٌ ، فَإِنَّ الْمَسَاحَةَ تُنْصَحُ بِمَعْدَلٍ ثَابِتٍ .)

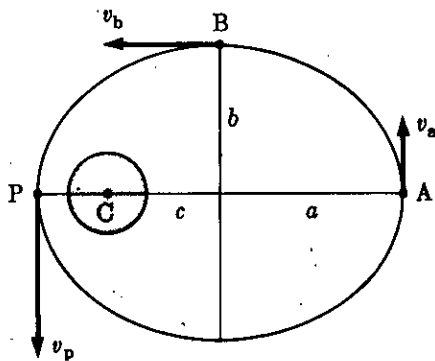
يستلزم قانون المساحات قوة مركزية

م ١١,٢١ كَمَا هُوَ مَبِينٌ فِي شَكْلِ ١١,٢٥ ، يَكُونُ لِقَمَرٍ صِنَاعِيٍّ فِي مِدَارٍ إِهْلِيلِجِيٍّ سُرْعَةُ v_a عِنْدَ الْأَوْجِ ، وَسُرْعَةُ v_p عِنْدَ الْحَضِيضِ ، وَسُرْعَةُ v_b عِنْدَ طَرَفِي الْمَحَوِّرِ الثَّانَوِيِّ لِلْمَدَارِ . (١) بِاسْتِخْدَامِ حَقِيقَةِ الزَّخْمِ الزَّائِي ، إِشْتَقَّ الصَّبِغَتَيْنِ التَّالِيَتَيْنِ لِنِسْبَتِي السَّرْعَاتِ بِدَلَالَةِ الْاِخْتِلَافِ الْمَرَكَزِيِّ e :

سرعة قمر صناعي في مدار إهليلجي

$$\frac{v_b}{v_a} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1+e}{1-e}.$$



شكـل ١١,٢٥ : مآلة ١١,٢١

(٢) أوجد هاتين النسبتين عددياً لمدار له $a = 11000$ ميل ، و $b = 8800$ ميل ، و $c = 6600$ ميل . (حدث أن للقطع الناقص الموسوم في شكل ١١،١٢ نفس هذه الأبعاد النسبية .)
(٣) هل يكتسب القمر الصناعي سرعة أكبر بانتقاله من A إلى B أم بانتقاله من B إلى P ؟

م ١١،٢٢ تم الحصول ، في المسألة السابقة ، على نسبي السرعات من قانون حفظ الزخم الزاوي . أضف الآن حفظ الطاقة إلى التحليل . (١) بين أن سرعة القمر الصناعي عند النقطة B تتحدد بالعلاقة

$$v_b = \sqrt{\frac{GM_E}{a}}$$

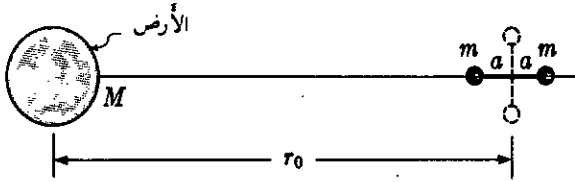
(حيث M_E كتلة الأرض) . (٢) أوجد نسبة الطاقة الحركية للقمر الصناعي إلى طاقة وضعه عند النقاط A ، B ، و P . غير عن هذه النسب بدلالة الاختلاف المركزي للمدار . (اعتبر صغير طاقة الوضع عند $r = \infty$) .

م ١١،٢٣ لو كانت القوة المؤثرة على كوكب تتناسب مع $1/r^n$ ، حيث تختلف n قليلاً عن ٢ ، لأمكن تقريب مدار الكوكب كقطع ناقص يدور محوره الرئيسي ببطء حول الشمس . فسر وصفاً لماذا يحدث ذلك . إذا كانت n أكبر قليلاً من ٢ ، فما اتجاه دوران محور المدار نسبة إلى اتجاه دوران الكوكب في مداره ؟ أجب عن نفس السؤال إذا كانت n أصغر قليلاً من ٢ .

م ١١،٢٤ (١) تصوّر نظاماً شمسياً يكون فيه للكواكب الدائرة حول نجم مركزي دورات تتناسب مع مكعب أبعادها عن النجم ($T \sim r^3$) . كيف تعتمد قوة الجاذبية على المسافة في هذا العالم ؟ (٢) هل هنالك أي قانون قوة تكون له دورة جسم في مدار دائري مستقلة عن بعده عن مركز القوة ؟ إن كان الأمر كذلك ، فإذا يكون قانون القوة ؟

م ١١،٢٥ ليرقم الكواكب على التتابع ، $n = 1$ لعطارد إلى $n = 9$ لبلوتو ، وليكن r_n متوسط بُعد الكوكب التوحي عن الشمس ، مقاساً بالوحدات الفلكية مرفم . (١) أرسم ، على ورق رسم بياني نصف لوغاريتمي ، $r_n - 0.4$ ضد n ، مع حذف $n = 1$. لاحظ أنه إذا افترض وجود كوكب مفقود وأعيد ترقيم الكواكب الأبعد وفقاً لذلك ، فإن ستة من الكواكب تعطيان نقاطاً تقع تقريباً على خط مستقيم . فما رقم الكوكب المفقود ؟ إذا كان هذا الانتظام الرياضي أية دلالة فيزيائية ، فإذا يجب أن يكون متوسط بُعد هذا الكوكب عن الشمس ؟ (٢) بين أن الخط الذي يصف الكواكب بدءاً بالزهرة وانتهاءً بأورانوس (بعد إعادة الترقيم) يمكن تمثيله بالعلاقة $r_n = 0.4 + B 2^n$. ما القيمة العددية للثابت B بالوحدات الفلكية مرفم ؟ (٣) من المعروف أن العديد من الكويكبات تشغل حزاماً belt متوسط بعده عن الشمس يقارب ٢.٨ مرفم . فهل يُسأند وجودها فرضية الكوكب المفقود ؟ (الانتظام المذكور هنا يُدعى عادة بقانون بود Bode's law . وعندما أذاعه يوهان بود عام ١٧٧٢ [لاحقاً لاقتراحه أصلاً من قبل يوهان تيتيوس Johann Titius] ، لم يكن أورانوس ولا أي من الكويكبات معروفاً . وبطل قانون بود انتظاماً تجريبياً empirical بدون أي أساس نظري راسخ .)

م ١١،٢٦ اعتبر قرأً صناعياً مكوناً من جزأين متساوي الكتلة m والمسافة بينها $2a$ ؛ كما أن مركز كتلته يقع على بُعد r_0 عن مركز الأرض ؛ حيث يمكن اعتبار الأرض ، في هذه المسألة ، جسمًا ذا تماثل

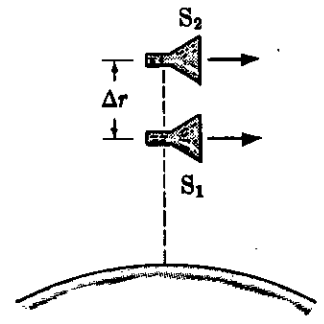


شكل ١١,٢٦ : مسألة ١١,٢٦ .

كروي . (١) احسب طاقة وضع الجاذبية للقمر الصناعي في اتجاهين : (أ) اتجاه مواز لخط نصف قطري (الخط المتصل في شكل ١١,٢٦ أعلاه) ؛ و (ب) اتجاه عمودي على الخط النصف قطري (الخط المتقطع في هذا الشكل) . عرّف e بأنها الكمية الصغيرة a/r_0 وفكّ expand كلا التعبيرين بدلالة قوى e ، مهملًا القوى التي تزيد على الرتبة الثانية . (٢) أي الاتجاهين طاقة وضعه أقل ؟ وما الفرق في طاقة الوضع بين الاتجاهين ؟ (٣) ما المتوسط الزاوي average over angle لعزم الدوران المؤثر على القمر الصناعي عندما يتذبذب من أحد هذين الاتجاهين إلى الآخر ؟ (٤) يحتفظ القمر دائماً بوجه واحد في مواجهة الأرض . فما علاقة هذه الحقيقة بالأفكار الواردة في هذه المسألة ؟
 فرع اختياري : نفذ المطالب السابقة لجميع زوايا توجيه orientation القمر الصناعي .

١١,٢٧ م يُحلّق القمران الصناعيان S_1 و S_2 في مدارين دائريين ؛ فيقع القمر S_2 ، عند لحظة معينة ، على بُعد Δr رأسياً فوق القمر S_1 ، كما تكون سرجتهما متوازيتين (أنظر شكل ١١,٢٧) . أما المسافة بينهما Δr فتكون أقل بكثير من المسافة r_1 للقمر S_1 عن مركز الأرض . (١) بإهمال قوة الجاذبية المباشرة بين هذين الجسمين ، اشتق صيغة تحدد مسافة تخلف lag أحدهما خلف الآخر بعد دورة واحدة . أيها المتخلف ؟ (٢) أوجد مسافة التخلف هذه إذا كانت $r_1 = 6600$ كم و $\Delta r = 4$ م . (٣) إذا كانت كتلة كل قر صناعي 1000 كغ وكانت r_1 و Δr كما وردنا سابقاً ، فهل لقوة الجاذبية المباشرة بين القمرين الصناعيين أثر ملموس خلال التسعين دقيقة اللازمة للدورة الواحدة ؟

الأقمار الصناعية المُحلّقة في تشكيل واحد

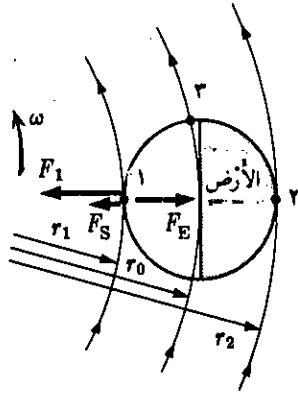


شكل ١١,٢٧ : مسألة ١١,٢٧ .

١١,٢٨ م يُحلّق القمر الصناعي S_1 في مدار دائري على بُعد r_1 عن مركز الأرض . وعند لحظة معينة ، يكون القمر الصناعي S_2 على بُعد Δr رأسياً فوق S_1 ، كما يكون للقمرين نفس السرجة (أنظر شكل ١١,٢٧ في المسألة السابقة) . (١) أثبت أن S_2 في هذه اللحظة يكون في حضبي مدار إهليلجي . (٢) اشتق صيغة تسري في الحالة $r_1 \ll \Delta r$ وتحدد المسافة بين القمرين عندما يكون S_2 في الأوج . (٣) احسب قيمة هذه الصيغة عندما تكون $r_1 = 6600$ كم و $\Delta r = 4$ م .

١١,٢٩ م امل دوران الأرض حول محورها وأثر القمر نجمياً لأية تعقيدات غير ضرورية في هذه المسألة اعتبر أجساماً متساوية الكتلة m عند النقاط ١ و ٢ و ٣ على سطح الأرض (أنظر شكل ١١,٢٨) ، أبعادها عن الشمس هي r_1 ، و r_2 ، و r_0 على الترتيب ؛ حيث r_0 هي أيضاً المسافة إلى مركز الأرض . ومن باب الملاءمة ، عرّف الكمية الصغيرة $\epsilon = R/r_0$ ، حيث R نصف قطر الأرض ؛ عندئذ تكون $r_1 = r_0(1 - \epsilon)$ و $r_2 = r_0(1 + \epsilon)$. من ناحية أخرى ، فإن السرعة الزاوية للأرض في مدارها هي

أثر الشمس المتني على الأرض



شكل ١١،٢٨ : مسألة ١١،٢٩ .

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_S}{r_0^3}}$$

(حيث M_S كتلة الشمس). تؤثر على الجسم الموجود عند النقطة ١ قوة جاذبية الأرض، التي تكون $F_E = mg$ ؛ وقوة جاذبية الشمس، التي تكون $F_S = GmM_S/r_1^2$ ؛ وقوة تلامس F_1 ، التي تساوي وزن الجسم. (١) بأخذ تسارع الجسم عند النقطة ١ نحو الشمس بعين الاعتبار، برهن أن وزنه هو

$$F_1 = mg \left(1 - \frac{3R\omega^2}{g} \right)$$

(أجر حساباتك للرتبة الأولى في ϵ). (٢) طبق منطقاً مماثلاً (محصلة القوة = الكتلة $\times$ التسارع) عند النقطة ٢ وبين أن $F_2 = F_1$. (٣) علل لماذا يكون وزن الجسم عند النقطة ٣، للرتبة الأولى في ϵ ، مساوياً لوزنه على أرض ساكنة: $F_3 = mg$. (تبين هذه الحسابات أن الكتل المتساوية تزن أقل قليلاً عند النقاط الأقرب والأبعد عن الشمس منها عند النقاط المتوسطة. وتؤدي هذه الفروق إلى نتوءات مدنية - جزرية tidal bulges).

فرض اختياري: اعتبر الشغل اللازم لنقل جسم من مركز الأرض إلى النقطة ١ ومن مركز الأرض إلى النقطة ٣. فيمكن تقدير ارتفاع المد بمساواة الشغل المبذول على امتداد هذين المسارين - وهو شرط تساوي طاقة الوضع. أثبت أن هذه المساواة تقتضي أن تكون النقطة ١ أعلى من النقطة ٣ بحوالي ٢٥ سم.



١٢. تطبيقات أخرى للميكانيكا

Further Applications of Mechanics

تمتدُّ تطبيقات الميكانيكا تقريباً بلا حدودٍ في جميع الاتجاهات . وسنسلطُ الأنوارَ في هذا البابِ على بضعةِ موضوعاتٍ إضافيةٍ في الميكانيكا ، مع التركيزِ على الناحيةِ العمليةِ .

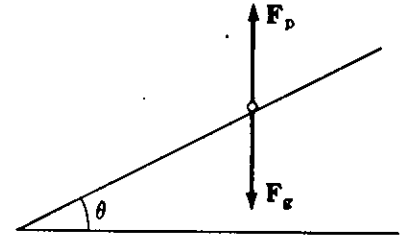
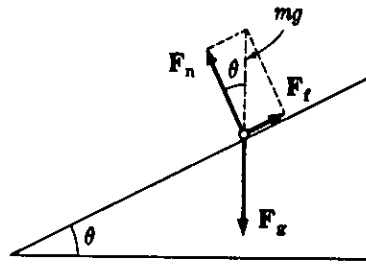
١٢,١ الاحتكاكُ السطحيُّ Surface Friction

قد يكونُ الاحتكاكُ مصدرَ إزعاجٍ لبعضِ مُصمِّمي الآلات ؛ إلا أنه من ضرورات الحياة اليومية . فبدونه لا نستطيعُ السَّيرَ ، أو الجلوسَ ، أو الكتابةَ ، أو الأكلَ . فكلُّ كائنٍ حيٍّ يَستَخدمُ قوى الاحتكاكِ بطريقةٍ ما من أجلِ الحركةِ والبقاءِ .

والاحتكاكُ ، على الصَّعيدِ المجهرِيِّ ، ظاهرةٌ بالغةُ التعقيدِ . فبالرَّغمِ من ارتباطِ قوى الاحتكاكِ في النَّهايةِ بالقوى الكهرومغناطيسيةِ ، فليس هناك من سبيلٍ لاشتقاقِ قوانينٍ أساسيةٍ بسيطةٍ للاحتكاكِ . ومع ذلك ، فهناك قوانينٌ تقريبيةٌ تحكمُ الاحتكاكِ ، وتكون مفيدةٌ تحت ظروفٍ معينة . وسنعتبرُ هنا الاحتكاكُ السطحيُّ بين الأجسامِ الصلبةِ ؛ كما سنعالجُ في بند ١٢,٥ انجرارَ الهواءِ الاحتكاكيَّ .

إذا وُضِعَتْ حَصَاةُ pebble على لوحٍ خشبيٍّ وُرفِعَ أحدُ طرفي اللوحِ تدريجياً ، فإننا نعلمُ من خبرتنا بأن الحَصَاةَ تظلُّ ساكنةً على اللوحِ لفترةٍ ؛ ثم تبدأ بالانزلاقِ ، عندما نصلُ إلى زاويةٍ مُثَلٍ معينةٍ . فعند الزوايا التي تقلُّ عن هذه الزاويةِ الحرجةِ ، تكونُ محصلةُ القوةِ المؤثرةِ على الحَصَاةِ صفراً . وهذا يعني أنَّ اللوحَ يجبُ أن يكونَ مؤثراً على الحَصَاةِ رأسياً إلى أعلى بقوةِ F_p مساويةٍ في المقدارِ لقوةِ الجاذبيةِ إلى أسفل ، F_g [شكل ١٢,١ (أ)] . والمعادلةُ الاتجاهيةُ هي

$$F_p + F_g = 0, \quad (١٢,١)$$



شكل ١٢,١ : حصاة مُثَرَّة على لوح خشبي . (أ) القوة الكلية التي يؤثر بها اللوح ، F_p ، يجب أن تساوي $-F_g$.
(ب) تُعرَّف مركبة F_p الموازية لسطح اللوح بأنها قوة الاحتكاك F_f .

حيث $F_p = F_g = mg$. ومن المناسب كتابة F_p كمجموع لقوتين أخريين : F_n ، عمودية على سطح اللوح ؛ و F_f ، موازية للسطح [شكل ١٢,١ (ب)] . والقوة F_f هي ، بالتعريف ، قوة الاحتكاك . فتصبح القوة الكلية المؤثرة على الحصاة

$$F_T = F_n + F_f + F_g. \quad (12,2)$$

وفي حالة انعدام الحركة ، تكون $F_T = 0$ ؛ كما أن

$$F_f = mg \sin \theta, \quad (12,3)$$

حيث θ زاوية ميل اللوح على الاتجاه الأفقي . إن المعادلة ١٢,٣ ، الناتجة عن هندسة الرسم التوضيحي السهائي في شكل ١٢,١ (ب) ، هي تعبير عن قوة الاحتكاك ؛ إلا أنها ليست قانون احتكاك . أما القانون التقريبي لقوة الاحتكاك بين السطوح الصلبة فهو

قانون تقريبي للاحتكاك الساكن

$$(F_f)_{\max} = \mu_s F_n. \quad (12,4)$$

وبالكلمات : تتناسب قوة الاحتكاك العظمى مع القوة العمودية . ويعتمد ثابت التناسب ، μ_s ، الذي يُدعى بمعامل الاحتكاك الساكن *coefficient of static friction* ، على طبيعة السطحين المتلامسين ؛ غير أنه لأي زوج من المواد يكون شبه مستقل عن حجم وكتلة أي من الجسمين وعن مساحة السطحين المتلامسين . وتقع قيم μ_s النموذجية ، للسطوح الجافة ، في المدى بين ٠,٢ و ١ .

ويتبع من المعادلتين ١٢,٣ و ١٢,٤ أن

$$mg \sin \theta \leq \mu_s F_n. \quad (12,5)$$

وعند زاوية حرجة θ_c ، تتحقق القيمة القصوى لقوة الاحتكاك ؛ فيكون

$$mg \sin \theta_c = \mu_s F_n. \quad (12,6)$$

كذلك ، عند هذه الزاوية ،

$$F_n = mg \cos \theta_c. \quad (12,7)$$

وإتلاف المعادلتين ١٢,٦ و ١٢,٧ يُعطينا

$$\sin \theta_c = \mu_s \cos \theta_c,$$

أو

$$\tan \theta_c = \mu_s. \quad (12,8)$$

يبدأ الانزلاق عند تعدي الزاوية
المرجة

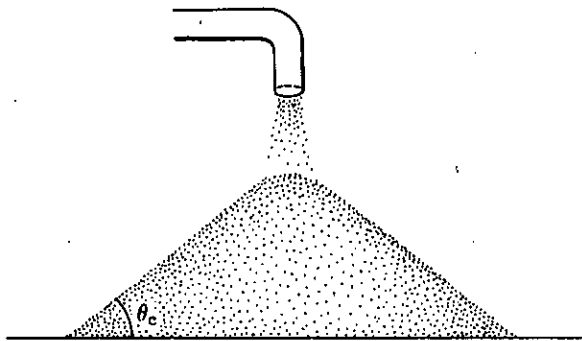
■ مثال ١ : لوحظ أن جوانب كومة من نشارة الخشب sawdust تصنع زاوية ٣٨ مع الاتجاه الأفقي (شكل ١٢,٢) . فما معامل الاحتكاك الساكن لكسرتين من النشارة في حالة تماس ؟

إذا كانت زاوية جوانب الكومة أكبر من الزاوية الممرجة θ_c ، فإن قطعة من النشارة تنزلق أسفل الكومة ، وتعدل الزاوية نفسها إلى قيمة أصغر . أما إذا كانت الزاوية أصغر من θ_c ، فإن النشارة تتراكم أعلى الكومة ، مفضية إلى زيادة في الزاوية . لذا ، ينبغي أن تكون الزاوية المشاهدة هي الزاوية الممرجة (لكومة تزود من علي) . وللمثال الحالي ،

$$\mu_s = \tan (38 \text{ deg}) = 0.78. \quad (12,9)$$

هذا وتعرف الزاوية الممرجة لكومة من المواد اللامتماسكة loose ، كالنشارة ، بزاوية الرقود (أو الانكاء) angle of repose .

زاوية الرقود



شكل ١٢,٢ : كومة من النشارة ، تزود من علي ، لها جوانب تميل بزاوية θ_c على الاتجاه الأفقي . وتعرف هذه الزاوية الممرجة أيضاً بزاوية الرقود (أو الانكاء) .

وبالنسبة لجسم ينزلق فوق آخر ، تكون القوة الاحتكاكية عادةً أقل من القوة العظمى للاحتكاك الساكن . أمّا القانون التقريبي للاحتكاك الانزلاقي sliding friction فهو

قانون تقريبي للاحتكاك الانزلاقي

$$F_f = \mu_k F_n, \quad (12,10)$$

حيث نجد مرة ثانية أن القوة الاحتكاكية تتناسب مع القوة العمودية ؛ كما أن ثابت التناسب μ_k ، الذي يُدعى بمعامل الاحتكاك الحركي coefficient of kinetic friction لزوج مُعين من السطوح ، يكون مستقلاً تقريباً عن القوة العمودية ومساحة التماس وسرعة الحركة .

■ مثال ٢ : قذِفَ طبقٌ لينزلق أسفلَ نضدٍ counter بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارها ٢,٥ م/ث . فإذا كان معامل الاحتكاك الحركي بين الطبق والنضد $\mu_k = 0,3$ ، فما مسافة انزلاق الطبق ؟ إن القوة العمودية على الطبق تساوي وزنه ، mg . وعلى ذلك ، فإن قوة الاحتكاك الأفقية هي

$$F_f = \mu_k mg.$$

ويكون مقدار تسارع الطبق F_f/m ؛ أو

$$a = \mu_k g.$$

وبما أن هذا التسارع مُتجهٌ بعكس السُرعة ، فإن المعادلة الملائمة للحركة بتسارعٍ منتظم (المعادلة ٥,٥٨) هي

$$v^2 = v_0^2 - 2as.$$

فتوجد المسافة بوضع $v = 0$ صفراً . عندئذٍ ، فإن

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu_k g}. \quad (12,11)$$

ولهذا المثال ، يكون الحساب العددي :

$$s = \frac{(2.5 \text{ m/sec})^2}{2 \times 0.3 \times 9.8 \text{ m/sec}^2} = 1.06 \text{ m}.$$

١٢,٢ استاتيكا الأجسام الجاسئة Statics of Rigid Bodies

يُعنى المهندسون المدنيون والمعماريون ببناء تراكيب مستقرة بحيث تظل كذلك . فيعتبر موضوع الميكانيكا الساكنة (الاستاتيكا) statics بالنسبة لهم أهم فرع للميكانيكا . أمّا الفيزيائي فهو على الأغلب أكثر اهتماماً بالحركة ؛ إلا أنه هو أيضاً ليستمتع بحل بعض معضلات الاتزان الساكن :

... إذا كان لجسيم ساكن أن يظل ساكناً ، فإن محصلة القوة المؤثرة عليه يجب أن تساوي صفراً . أما بالنسبة لجسم جاسي ، فإن شرط القوة الصفريّة هذا ليس كافياً . مثلاً ، إذا كانت قوتان متساويتان مقداراً ومتعاكستان اتجاهًا لا تؤثران على امتداد نفس الخطّ المستقيم ، فإنّهما تُحدثان ازدواجاً بمقدوره أن يعمل على إحداث حركة دورانيّة للجسم . فشرطا الاتزان الساكن لجسم جاسي هما تلاشي محصلة القوة وتلاشي محصلة عزم الدوران :

$$F_T = 0, \quad (12,12)$$

$$T_T = 0. \quad (12,13)$$

شرطا الاتزان الساكن

وبالتعبير بدلالة المركبات ، فإنّ هاتين المعادلتين قد تؤديان ، في أكثر الحالات عموميّة ، إلى ستّ معادلات آتية simultaneous . أمّا إذا كانت كلّ القوى تؤثر في مستوى ، فإنّ جميع العزوم الدورانيّة تؤثر على امتداد خطّ عموديّ على ذلك المستوى . عندئذٍ نحتاج لحلّ ثلاث معادلات آتية (اثنتين للقوة ، وواحدة لعزم الدوران) .

وكثيراً ما تشمل معضلات الاتزان قوة الجاذبيّة ، التي لا تؤثر عند أية نقطة مفردة بل عند جميع نقاط الجسم . ولمعالجة الجاذبيّة قرب سطح الأرض ، تكون النّظرية التّالية مفيدة : إنّ مجموع كلّ قوى الجاذبيّة المؤثرة على نظام يكافئ قوة مفردة تؤثر عند مركز كتلة النظام . وتعني كلمة « يكافئ » أنّ القوة المفردة تقوم مقام كلّ من قوة الجاذبيّة الكليّة وعزم الجاذبيّة الدّورانيّ الكليّ . وتنطبق هذه النّظرية في الواقع على الأجسام غير الجاسئة بالإضافة إلى الأجسام الجاسئة . ونستطيع إثباتها لمجموعة اعتباطيّة من الجسيمات كتلتها $m_1, m_2, m_3, \dots$. لتكن متجهات الموضع لهذه الجسيمات $r_1, r_2, r_3, \dots$ بالنسبة إلى نقطة أصل معيّنة (شكل ١٢,٣) . فإذا كانت قوة الجاذبيّة تؤثر في الاتجاه السّالب لمحور z ، فإنّ القوى المفردة هي $F_1 = -m_1 g k$ ، و $F_2 = -m_2 g k$ ، وهلمّ جرّاً ، أو

$$F_i = -m_i g k. \quad (12,14)$$

فتكون قوة الجاذبيّة الكليّة

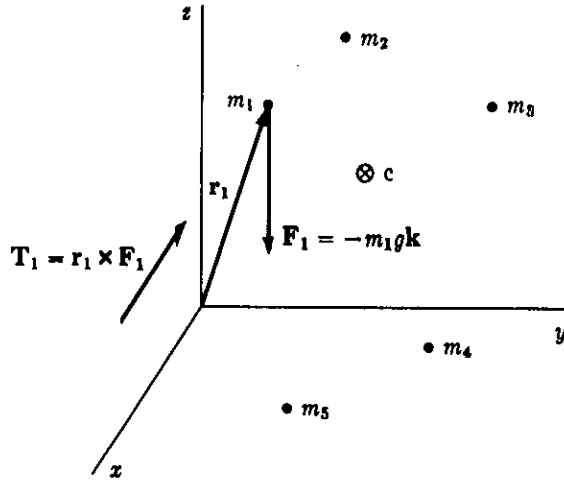
$$F_g = \sum F_i = -M g k, \quad (12,15)$$

القوة الكليّة

حيث $M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ هي الكتلة الكليّة للنّظام . وبالنسبة إلى نقطة الأصل المختارة ، فإنّ قوة الجاذبيّة على الجسيم i ، تساهم بعزم دورانيّ هو

$$T_i = r_i \times F_i = -m_i g r_i \times k.$$

وعند جمع هذه العزوم ، نلاحظ أنّ g و k ثابتان ، أي نفس الشيء لجميع الجسيمات . لذا



شكل ١٢,٣ : في مجال جاذبية منتظم ، تكون القوة الكلية وعزم الدوران الكلي المؤثران على النظام كلاًهما كما لو أن كل كتلة الجسم كانت مركزة عند مركز الكتلة (المعادلتان ١٢,١٥ و ١٢,١٧) .

يكون عزم الجاذبية الدوراني الكلي

$$T_g = \sum_i T_i = -g \left(\sum_i m_i r_i \right) \times k. \quad (١٢,١٦)$$

ويُرد المجموع داخل الهلالين في تعريف متجه الموضع r_c لمركز الكتلة (المعادلة ٨,١٧) ؛ حيث أن العلاقة هي

$$\sum_i m_i r_i = M r_c.$$

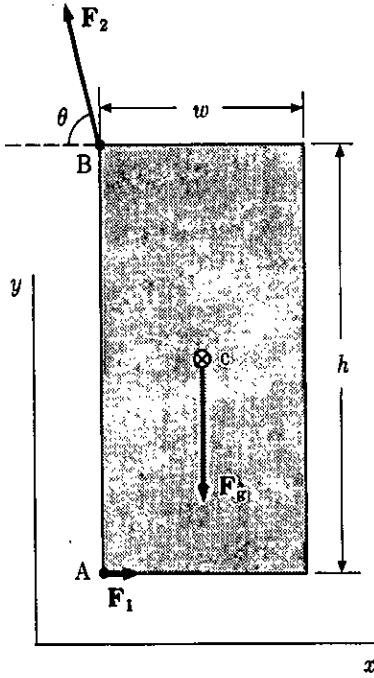
وعلى ذلك ، يكون عزم الجاذبية الدوراني

عزم الدوران الكلي

$$T_g = -g M r_c \times k = r_c \times F_g. \quad (١٢,١٧)$$

من هنا ، فإن قوة مفردة ، تساوي $-Mgk$ وتؤثر عند مركز الكتلة ، تُعطينا قوة الجاذبية الكلية الصحيحة (المعادلة ١٢,١٥) وعزم الجاذبية الدوراني الكلي الصحيح (المعادلة ١٢,١٧) . وهذه النتيجة مستقلة عن اختيار نقطة الأصل . لكن لاحظ أنها تعتمد على انتظام مجال الجاذبية ، كما تعبر عنه المعادلة ١٢,١٤ .

■ مثال ١ : باب عرضه w ، وطوله h ، وكتلته m يرتكز في حالة اتزان بمفصلتين hinges عند النقطتين A و B ، كما هو مبين في شكل ١٢,٤ . من المعلوم أن القوة F_1 عند النقطة A تؤثر أفقياً . فما مقدار F_1 ؟ وما اتجاه F_2 ؟



شكل ١٢,٤ : باب في حالة اتزان ، يرتكز بواسطة مفصلتين عند A و B .

وَفَقَّ لِلنَّظَرِيَّةِ الَّتِي بُرِّهِنَتْ أَعْلَاهُ ، فَإِنَّ أَثَرِ الْجاذِبِيَّةِ يُؤْخَذُ بِالاعتبارِ بِواسطةِ قُوَّةٍ مفردةٍ F_g تؤثرُ رَاسِيًّا إلى أسفلٍ عندَ مركزِ كتلةِ البابِ ، الذي نفرضُ هنا أَنَّهُ يَقَعُ عندَ المركزِ الهندسيِّ للبابِ . ولتطبيقِ شرطِ تلاشي عزمِ الدَّورانِ (المعادلة ١٢,١٣) ، فَإِنَّا نَحْتَاجُ إلى تعيينِ نقطةٍ أَصْلٍ . وَنُعْتَبِرُ النِّقْطَةَ B اختيَاراً مناسباً لِأَنَّ القُوَّةَ F_2 لَا تُحْدِثُ أَيَّ عَزْمٍ دَوْرَانِ بِالنِّسْبَةِ إلى هَذِهِ النِّقْطَةِ . أَمَّا القُوَّتَانِ F_1 و F_g فَتُحْدِثَانِ عَزْمَيْنِ عَمُودِيَّيْنِ عَلَى الصَّفْحَةِ إلى أسفلٍ وإلى أعلى ، عَلَى التَّرْتِيبِ حَدِّدْ مَحَوِّرَ z مُتَعَامِداً مَعَ الصَّفْحَةِ إلى أعلى . فَتَكُونُ مَرَكَّبَاتُ العَزْمِ عَلَى امْتِدَادِ هَذَا المَحْوَرِ

$$T_1 = hF_1,$$

$$T_2 = 0,$$

$$T_g = -\frac{1}{2}wF_g.$$

كَمَا تَكُونُ مَعَادِلَةُ تلاشي العُزْمِ (بوضعِ F_g مساويةً للمقدارِ mg)

$$hF_1 - \frac{1}{2}wmg = 0.$$

وَعَلَى ذَلِكَ ، فَإِنَّ مَقْدَارَ القُوَّةِ F_1 هُوَ

$$F_1 = \frac{w}{2h} mg, \quad (١٢,١٨)$$

مِمَّا يُعْطِينَا الإِجَابَةَ عَنِ السَّؤَالِ الْأَوَّلِ . أَمَّا الإِجَابَةُ عَنِ السَّؤَالِ الثَّانِي فَيَحْدَدُهَا شَرْطُ تلاشي القُوَّةِ :

$$F_1 + F_2 + F_g = 0.$$

وباختيار المحورين كما في شكل ١٢،٤ ، تكون معادلتا المركبتين

$$x: F_1 - F_2 \cos \theta = 0,$$

$$y: F_2 \sin \theta - mg = 0.$$

فيحذف F_2 بين هاتين المعادلتين ، نجد أن

$$\tan \theta = \frac{mg}{F_1}, \quad (١٢,١٩)$$

وهذه معادلة تحدد الزاوية θ (شكل ١٢،٤) . ويُفضل التعبير عن هذه النتيجة بتعويض الطرف الأيمن للمعادلة ١٢،١٨ بدلاً من F_1 في المعادلة ١٢،١٩ . عندئذ يكون

$$\tan \theta = \frac{2h}{w}. \quad (١٢,٢٠)$$

■ مثال ٢ : رجل كتلته ١٠٠ كـرغ يتسلق سلماً خفيفاً من الألومنيوم طوله ٣ م (شكل ١٢،٥) . يصنع السلم زاوية ٧٠° مع الأرض . فإذا كانت قوة الاحتكاك مع الحائط مهملة ، فما معامل الاحتكاك الأدنى بين السلم والأرض الذي يسمح للرجل بالصعود بأمان إلى قمة السلم ؟

مرة أخرى ، يتوجب على القوى والعزوم أن تتوازن (إذا كان للسلم الأيقع) . فعندما يكون الرجل قد وصل لتوه إلى رأس السلم ، تكون القوى المؤثرة على السلم : F_c ، قوة التلامس عند الحائط ، المؤثرة أفقياً إلى اليمين (إذ أن الاحتكاك عند السطح مهمل) ؛ و F_g ، وزن الرجل ، الذي يؤثر رأسياً إلى أسفل ؛ و F_n ، القوة العمودية على الأرض ، المؤثرة رأسياً إلى أعلى ؛ و F_f ، قوة الاحتكاك على الأرض ، التي تؤثر أفقياً إلى اليسار . ونهمل وزن السلم من الأفضل حل مثل هذه المسألة جبرياً أولاً . فكما هو مبين في شكل ١٢،٥ ، فإننا ندعو المسافتين من الزاوية إلى قاعدة ورأس السلم x و y على الترتيب ، وطول السلم L ، وزاوية ميله على الاتجاه الأفقي θ . وتكون نقطة قاعدة السلم (النقطة A) نقطة أصل مناسبة . فبالنسبة إليها ، يجب أن يتعادل مقدارا العزمين T_c و T_g :

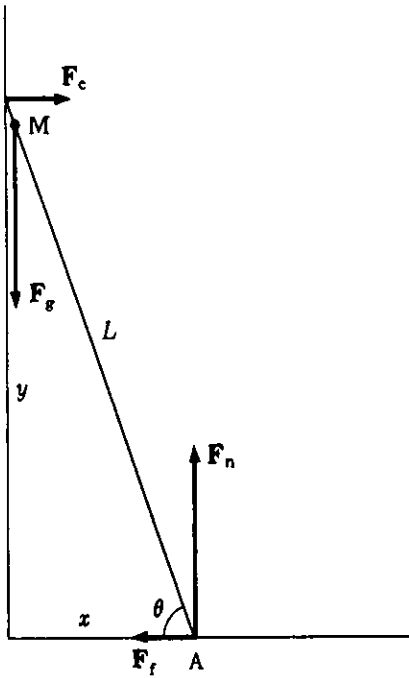
$$F_c y = F_g x. \quad (١٢,٢١)$$

وشرط تلاشي القوة الكلية على السلم يزودنا بالمعادلتين

$$F_g = F_n,$$

$$F_c = F_f.$$

وتستلزم هاتان المعادلتان العلاقة $F_f/F_n = F_c/F_g$ ؛ كما يتبع من المعادلة ١٢،٢١ أن $F_c/F_g = x/y$. لذا ، نجد أن



شكل ١٢,٥ : رجل ، تمثله النقطة M ، بفعل
بالقرب من رأس سلم . فتؤثر الجاذبية بقوة F_g ،
والحائط بقوة F_c ، والأرض بالقوتين F_n و F_f .

$$\frac{F_f}{F_n} = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan \theta} . \quad (١٢,٢٢)$$

ولمعامل احتكاك μ_s عند الأرض :

$$\frac{F_f}{F_n} \leq \mu_s$$

(أنظر المعادلة ١٢,٤) . ويمكن كتابة هذه العلاقة أيضاً على الصورة :

$$(\mu_s)_{\min} = \frac{F_f}{F_n} ; \quad (١٢,٢٣)$$

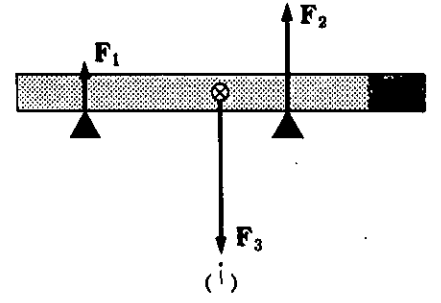
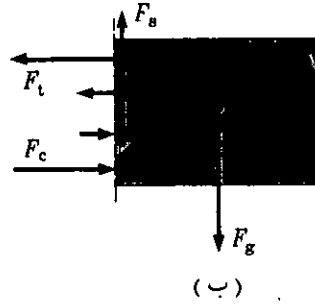
وهذا تعبير للقيمة الصغرى لمعامل الاحتكاك اللازم للإبقاء على الاتزان . وبالتعويض من المعادلة ١٢,٢٢ في المعادلة ١٢,٢٣ ، نحصل على

$$(\mu_s)_{\min} = \frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta . \quad (١٢,٢٤)$$

لاحظ أن كتلة الرجل لا أهمية لها . وللزاوية المغطاة ، $\theta = ٧٠^\circ$ ، يكون $\theta = ٢٠,٧٤٧^\circ$.
وهكذا ، فإن الإجابة عن السؤال المطروح هي

$$٠,٣٦٤ = (\mu_s)_{\min}$$

... بأي اتجاه تؤثر القوة $F_n + F_f$ عندما يكون السلم على وشك الانزلاق ؟ ■



شكل ١٢,٦ : (أ) لقضيب يرتكز على نقطتي ارتكاز ، تكفي ثلاث قوى لوصف اتزانها : القوتان F_1 و F_2 اللتان تؤثر بهما نقطتا الارتكاز ، وقوة الجاذبية F_3 . (ب) أحد طرفي القضيب ، قيد فحص أكثر تفصيلاً . تؤثر قوى تؤثر (F_1) ، وانضغاط (F_c) ، وقص (F_s) داخل القضيب ، بالإضافة إلى قوة الجاذبية (F_g) .

١٢,٣ القوى في الموائع Forces in Fluids

حتى في الحالات التي تكون فيها القوى الخارجية المؤثرة على الجسم الجاسي بسيطة ، فإن القوى داخل الجسم الجاسي قد تكون معقدة . وبدلاً من شكل ١٢,٦ على هذه الحقيقة قضيب يرتكز على نقطتي ارتكاز . وكما هو مبين في شكل ١٢,٦ (أ) ، فإن اتزانها يتطلب اعتبار ثلاث قوى فحسب ، اثنتان منها تؤثران رأسياً إلى أعلى عند نقطتي الارتكاز ، وواحدة تؤثر رأسياً إلى أسفل عند مركز الكتلة . لكن إذا نظرنا بتفصيل أكبر إلى جزء من القضيب ، كطرفه الأيمن مثلاً [شكل ١٢,٦ (ب)] ، فإن قوى أخرى تبدو مهمة ؛ إذ أن باقي القضيب ، من خلال القوى التبادلية (أي القوى المتبادلة بين الذرات) ، يؤثر على هذا الجزء (١) بقوى تؤثر (شد) F_t ، (٢) بقوى انضغاط F_c ، compression ، و (٣) بقوة قص F_s ، shear . ويبين الرسم التوضيحي اتجاهات هذه القوى . وتتجمع هذه القوى الثلاث معاً لتعطي قوة كلية وعزماً دورانياً كلياً يكفي لموازنة قوة الجاذبية F_g المؤثرة على هذا الجزء من القضيب .

القوى داخل جسم صلب : تؤثر وانضغاط وقص

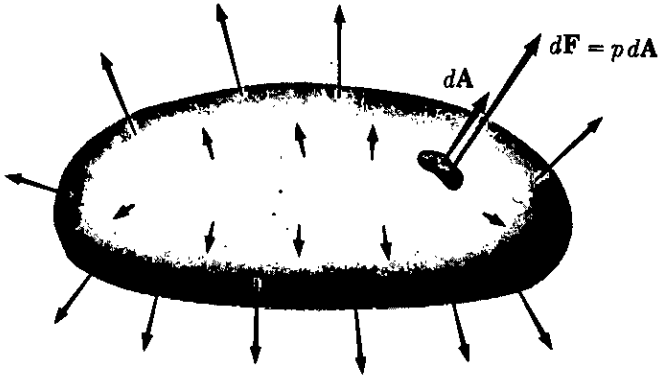
ونحن إننا نلفت النظر إلى هذه القوى الداخلية في المادة الصلبة من أجل توضيح الفارق العملي بين مائع وجسم صلب . فالمائع في حالة الاتزان (سواء أكان سائلاً أم غازاً) لا يستطيع احتمال قوى القص ؛ لكنه يستطيع احتمال قدر يسير من قوى التوتر . وتكون ، لمعظم الأغراض ، قوى الانضغاط وحدها هي الهامة في مائع ساكن . * وتقاس هذه القوى بواسطة ضغط المائع $fluid\ pressure$. ويُعرف الضغط من خلال العلاقة

القوة داخل مائع ساكن : انضغاط

تعريف الضغط

$$dF = p dA. \quad (12,25)$$

* في مائع متحرك ، تصبح قوى القص ممكنة وتدعى بالقوى اللزجة $viscous$. ويمكن وصف اللزوجة كنتيجة للاحتكاك الانزلاقي داخل المائع عندما يتحرك جزء من المائع نسبة إلى جزء آخر .



شكل ١٢,٧ : ضغط المائع . تؤثر قوة الانضغاط ، أو قوة الضغط ، عند كل نقطة باتجاه عمودي على السطح (أي باتجاه مواز لمتجه المساحة dA) .

ويمكن تمثيل مساحة متناهية الصغر dA ، إما في داخل المائع أو عند سطحه ، بمتجه dA متعامد مع المساحة السطحية (شكل ١٢,٧) . وتناسب قوة الانضغاط dF ، التي يؤثر بها المائع على ما يحيط به عبر هذه المساحة ، مع مقدار dA ؛ كما تكون باتجاه dA (يجب أن يكون لها هذا الاتجاه ؛ إذ أن أية مركبة للقوة متعامدة مع dA تكون قوة قص) . لذا ، فإن $dF \sim dA$. ويُدعى ثابت التناسب (كمية قياسية) الضغط ؛ فهو القوة المؤثرة على وحدة المساحة . وبدلالة المقادير ، يكون

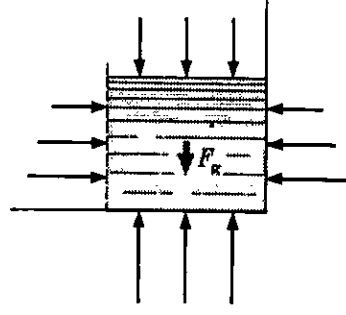
$$p = \frac{dF}{dA} . \quad (١٢,٢٦)$$

إن عملاً بسيطاً كغمس إصبعك في وعاء ماء يُبين الآثار المهمة لقوى القص في المائع ؛ إذ تعمل قوى القص لإيقاف إصبعك عند ضغطه ضد جسم صلب ؛ أما في مائع ، فإنها لا توقفت . تصور الآن الحالة غير المعقولة « لقضيب » من الماء موضوع على ركيزتين كمثل الحاملة للقضيب الصلب في شكل ١٢,٦ (أ) . بالطبع ، فإن الماء سينساب في الحال على المائدة أو الأرض . وبما أن الماء لا يحمل قوى القص ، فلن يمنع الجاذبية شيء من سحب أي جزء غير مدعوم من الماء إلى أسفل . واحتياج المائع إلى وعاء إنما هو حقيقة مألوفة .

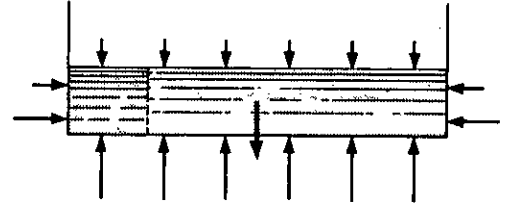
إعتبر وعاء فيه ماء ساكن . فتكون القوى الخارجية المؤثرة على السطوح الخارجية للماء قوة ضغط الهواء ، المؤثرة إلى أسفل ؛ وقوى الدعم بواسطة الوعاء ، التي تؤثر إلى الداخل وإلى أعلى . وكما هو مبين في شكل ١٢,٨ (أ) ، فإن جميع هذه القوى تكون عمودية على سطوح المائع . كذلك ، تؤثر قوى الانضغاط ، أو الضغط ، في داخل المائع أيضاً عمودياً على أية مساحة قيد الاعتبار . ويبين شكل ١٢,٨ (ب) القوى المؤثرة على جزء من المائع عند الطرف الأيمن للوعاء . فن الواضح أن هذه الحالة أبسط من تلك السائدة في جسم جاسي [شكل ١٢,٦ (ب)] .

من هنا ، فإن الإجهاد stress الداخلي للمائع في حالة اتزان يتميز بكمية قياسية واحدة ،

الضغط مقياس قياسي لقوة الانضغاط



(ب)



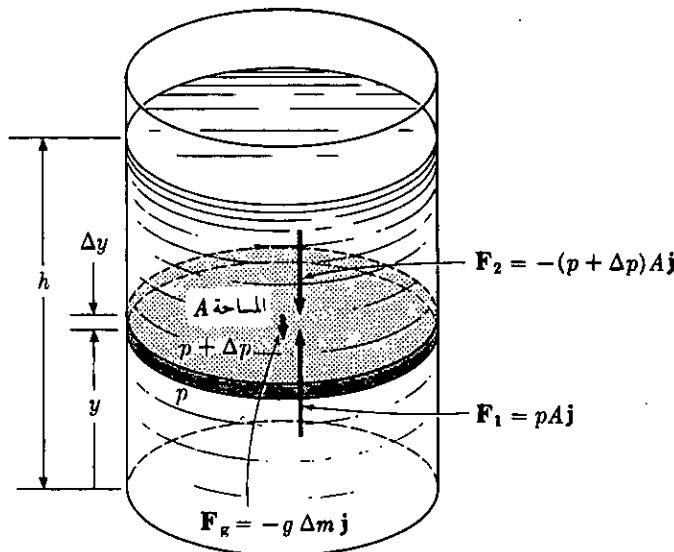
(أ)

شكل ١٢,٨ : (أ) إن القوى الخارجية على طبق فيه ماء تؤثر كلها عمودياً على سطح الماء . (ب) كذلك تؤثر القوى الداخلية عمودياً على السطح الذي يفصل جزءاً من المائع عن جزء آخر .

هي الضغط p . ولما تؤثر عليه الجاذبية ، نستطيع اشتقاق معادلة تفاضلية هامة تربط الضغط والعمق في المائع . إعتبر ، على سبيل المثال ، وعاء أسطوانياً لسائل (شكل ١٢,٩) . إن النتائج التي نستنتجها له تنطبق أيضاً على الغاز . فإن شريحة مساحتها A وسُمكها Δy يكون حجمها $\Delta V = A \Delta y$ ، وكتلتها

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta y, \quad (12,27)$$

حيث ρ كثافة السائل . ليكن السطح السفلي للشريحة على ارتفاع y نسبة إلى مستوى إسناد مناسب ، مثل قاعدة الوعاء . حينئذ يكون السطح العلوي على ارتفاع $y + \Delta y$. فإذا كان الضغط على ارتفاع y هو p والضغط على ارتفاع $y + \Delta y$ هو $p + \Delta p$ ، فإن القوى الخارجية التي تؤثر رأسياً على شريحة السائل تكون (أنظر شكل ١٢,٩) :



شكل ١٢,٩ : حوض من المائع في حالة اتزان
إن اعتبار توازن القوى على شريحة رقيقة من المائع يؤدي إلى معادلة تفاضلية بسيطة تحكم الضغط في المائع (المعادلة ١٢,٢٩) .

$$F_1 = pA j,$$

$$F_2 = -(p + \Delta p)A j,$$

$$F_g = -(\Delta m)g j = -\rho A g \Delta y j.$$

وبما أنَّ السَّطوحَ الرَّأْسِيَّةَ للوعاءِ لا تساهمُ بِمَرَكَبَةٍ رَأْسِيَّةٍ لِلقُوَّةِ ، فَإِنَّ مَجْمُوعَ هَذِهِ القُوَى الثَّلَاثِ يَجِبُ أَنْ يَسَاوِيَ صِفْراً :

$$[pA - (p + \Delta p)A - \rho A g \Delta y]j = 0.$$

وتختزلُ هذه المعادلةُ إلى

$$A \Delta p = -\rho A g \Delta y.$$

وفي النَّهايةِ التي يَقْتَرِبُ فيها Δy من الصُّفْرِ ، فَإِنَّ المعادلةَ التَّفَاضُلِيَّةَ المُنَاطِرَةَ هِيَ (بَعْدَ حَذْفِ العاملَيْنِ A)

$$dp = -\rho g dy, \quad (12,28)$$

أو ، بصورة مكافئة ،

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g. \quad (12,29)$$

معادلة تفاضلية تحكم الأتزان
السَّكَنِ المائع

ولا تعتمدُ هذه النَّتِيجَةُ في الواقعِ على اختيارِ وعاءٍ ذي جوانبٍ رَأْسِيَّةٍ . فبالرَّغمِ من أنَّ الجوانبَ المائلةَ تُساهمُ فعلاً بِمَرَكَبَةٍ رَأْسِيَّةٍ لِلقُوَّةِ ، إلَّا أَنَّهُ بِاقْتِرَابِ Δy من الصُّفْرِ ، تتلاشى مساهمتها ، ونحصلُ بالتالي على نفسِ النَّتِيجَةِ ؛ أيُّ على المعادلةِ ١٢,٢٩ .

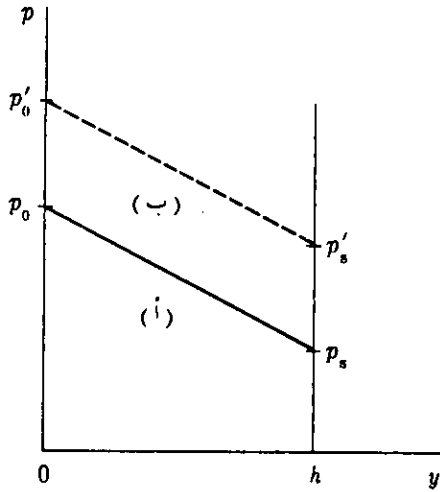
□ الموائعُ اللَّامْنَضِغَةُ Incompressible Fluids

معظمُ السَّوائلِ ، بما فيها الماءُ ، غَيْرُ قابِلَةِ لِلانضغاطِ تقريباً . وهذا يعني أنَّ كَثافتَهَا ρ ثابتةٌ ، أو هي قَرِيبَةٌ جَدّاً من ذلك ؛ أيُّ مُستَقَلَّةٌ عَنِ الضَّغْطِ . وبالنَّسْبَةِ لِسَائِلِ ، فَإِنَّ اعتِبارَ الطَّرْفِ الأيمنِ للمعادلةِ ١٢,٢٩ مقداراً ثابتاً هو تقريبٌ جيّد . عندئذٍ تَوَلُّ المشتقُّ dp/dy إلى ثابتٍ ، وَيُصْبِحُ الضَّغْطُ دالَّةً خَطِيَّةً في المَسَافَةِ الرَّأْسِيَّةِ y :

$$p = p_0 - \rho g y \quad (\rho = \text{constant}). \quad (12,30)$$

الضَّغْطُ في مائعٍ لَامْنَضِغٍ

ويبيِّنُ شَكلُ ١٢,١٠ رسماً بيانيّاً للضَّغْطِ ضِدَّ الارتفاعِ في سائِلٍ ، بضغْطٍ مقداره p_0 عند سطحِهِ السُّفْلِيِّ وضغْطٍ $p_0 - \rho g h$ عند سطحِهِ العلويِّ ، حيثُ h العمقُ الكُلِّيُّ للسَّائِلِ . وإذا كانَ سطحُ السَّائِلِ مُعَرَّضاً لِلجوِّ ، فَإِنَّ الضَّغْطَ السُّطْحِيَّ p_0 يُعَادِلُ الضَّغْطَ الجَوِّيَّ العاديَّ ، p_0 ، الذي تكونُ قيمَتُهُ المتوسطةُ عند سطحِ البحرِ



شكل ١٢,١٠ : الضَّغْطُ ضدَّ الارتفاع في مائع لامتصَّط . (أ) يكون الضَّغْطُ عند قاعدة الوعاء p_0 ، والضَّغْطُ عند سطح السائل p_s . أما ميل الخط المستقيم فهو $-pg$. (ب) إذا رُفِعَ الضَّغْطُ السطحي من p_s إلى p'_s ، فإنَّ الضَّغْطُ عند القاعدة وخلال المائع برُمته يرتفع بنفس القدر ، وهذا تدليل على ما يُدعى بمبدأ باسكال .

الضَّغْطُ الجَوِّيُّ العاديُّ عند سطح البحر

$$p_s = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2. \quad (١٢,٣١)$$

والضَّغْطُ الذي يُساوي 10^5 N/m^2 (أو 10^6 داین /سرم^2) يُدعى باراً bar واحداً ؛ وعلى ذلك فإنَّ الضَّغْطَ الجَوِّيَّ (1 جَوِّي atm) يُعادل تقريباً 1 بار . ومن المناسب أحياناً إعادة كتابة المعادلة ١٢,٣٠ بدلالة الضَّغْطِ السطحي p_s والعُمق $d = h - y$. فتصبح عندئذٍ

$$p = p_s + \rho g d. \quad (١٢,٣٢)$$

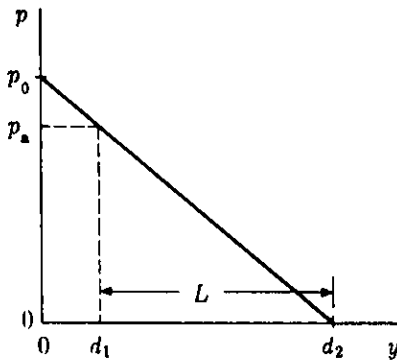
وبالنسبة للماء ، تكون $\rho g = 10^3 \text{ كغ /م}^3 \times 9.8 \text{ م /ث}^2 = 9.8 \times 10^3 \text{ ن /م}^3$. فيزيدُ ضغطُ الماء بصورة تقريبية بمقدار 0.1 جَوِّي لكل متر من العمق . ويزيدُ بمقدار 1 جَوِّي عند عُمق 10.34 م (33.9 قدم) .

■ مثال ١ : تَناهَظْ كثافة الدَّم 1.06 غ /سرم^3 . فما الفرقُ في ضغط الدَّم بين الرأس وأخمص القدم لشخص طوله 175 سرم (69 بوصة) ؟

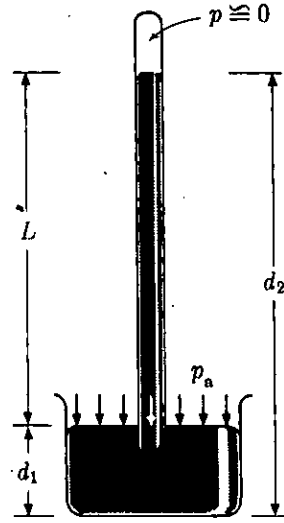
من المعادلة ١٢,٣٠ أو ١٢,٣٢ ، يكون

$$\begin{aligned} \Delta p &= \rho g h \\ &= 1.06 \text{ gm/cm}^3 \times 980 \text{ cm/sec}^2 \times 175 \text{ cm} \\ &= 1.82 \times 10^5 \text{ dyne/cm}^2 = 1.82 \times 10^4 \text{ N/m}^2 \\ &= 0.179 \text{ atm}. \end{aligned}$$

■ وإذا زيدَ الضَّغْطُ السطحي p_s بطريقة ما - بتغيير في الأحوال الجوية ، أو بضخ مزيدٍ من



(ب)



(أ)

شكل ١٢،١١ : البارومتر الزئبقي. (أ) عند المستوى d_1 ، يساوي الضغط في السائل القيمة p_a عند سطح الاتصال (أو السطح البيني) interface مع الهواء وداخل عمود الزئبق على السواء. أما عند المستوى d_2 ، فيكون الضغط صفراً تقريباً. وترتبط المسافة L والضغط الجوي p_a بالعلاقة $p_a = \rho g L$. (ب) رسم بياني للضغط ضد ارتفاع عمود الزئبق. ويشبه هذا شكل ١٢،١٠ ، عندما يكون $p_a = 0$ صفراً.

الهواء في وعاء مُغلقٍ يحتوي على السائل ، أو بآية طريقة أخرى - فإن الضغط خلال كل السائل يتغير بنفس القدر. وعند عمق معين d ، فإن الحد $\rho g d$ في المعادلة ١٢،٣٢ لا يتغير ؛ وعلى ذلك ، يكون

$$\Delta p = \Delta p_s. \quad (12.33)$$

هذه حالة خاصة لما يُعرف بمبدأ باسكال *Pascal's principle* ، الذي ينص على أن تغييراً في ضغط جزء من مائع مُترن ينتقل بالتساوي إلى جميع أجزاء المائع. ويوضح شكل ١٢،١٠ هذه الظاهرة بيانياً ؛ حيث أن تغييراً في الضغط السطحي يرفع الرسم البياني برمته بمقدار ثابت .

مبدأ باسكال

... إن البارومتر الزئبقي mercury barometer [شكل ١٢،١١ (أ)] هو أداة بسيطة يمكن فهم عملها بالاستعانة بالمعادلة ١٢،٣٠ : يؤثر الضغط الجوي p_a على سطحه على بُعد d_1 فوق قاعدة الوعاء ؛ أما السطح الأعلى على مسافة d_2 فوق القاعدة فمعرض فقط لبخار الزئبق ، الذي يكون ضغطه مُهملاً بالمقارنة مع الضغط الجوي. وبين شكل ١٢،١١ (ب) رسماً بيانياً للضغط ضد المسافة الرأسية y في السائل. فعند $y = d_1$ ، تُعطينا المعادلة ١٢،٣٠

$$p_a = p_0 - \rho g d_1.$$

كذلك ، عند السطح الأعلى ، $y = d_2$ ،

$$0 = p_0 - \rho g d_2.$$

فيُحدِّد p_0 بين هاتين المعادلتين ، نجدُ أنَّ

$$p_a = \rho g(d_2 - d_1) = \rho gL; \quad (12,34)$$

وهذه صيغةٌ تُحدِّدُ الضَّغَطَ الجَوِّيَّ p_a بدلالةِ الكمَّيتين المعلومتين ρ و g والطول L الذي يمكن قياسه لعمود الزئبق في الأنبوبة . أما الضَّغَطُ الجَوِّيُّ المعياري فيُعرَّفُ بعمود زئبق طوله ٧٦ سم بالضبط في موقع فيه $g = 980,665$ سم/ث^٢ ودرجة الحرارة صفرس (0°C) ، التي تكون عندها كثافة الزئبق ١٣,٥٩٥ غ/سم^٣ . ونُعطينا هذه الأرقام

$$\begin{aligned} p_a &= (13.595 \text{ gm/cm}^3)(980.665 \text{ cm/sec}^2)(76.00 \text{ cm}) \\ &= 1.0132 \times 10^6 \text{ dyne/cm}^2 \\ &= 1.0132 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1.0132 \text{ bars.} \end{aligned} \quad (12,35)$$

□ الجوَّ The Atmosphere

خلافًا للسائل ، فإنَّ كثافة الغاز تتغيَّرُ لدرجةٍ كبيرةٍ بتغيُّرِ ضغْطِهِ . وعند درجة حرارة ثابتة ، تتناسبُ كثافة الغازِ مع ضغْطِهِ .° فنستطيع الكتابة :

صيغةٌ لقانون بويل : $\rho \sim p$ إذا كانت T ثابتاً

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p, \quad (12,36)$$

حيث ρ_0 كثافته عند ضغْطٍ إسناديٍّ معيَّن p_0 ، و ρ كثافته عند أيِّ ضغْطٍ آخر p . وبالتعويض من المعادلة ١٢,٣٦ في المعادلة ١٢,٢٨ ، نحصلُ على

$$dp = \frac{-\rho_0}{p_0} p g dy,$$

التي يمكن كتابتها على الصَّورة :

$$\frac{dp}{p} = - \frac{\rho_0 g}{p_0} dy. \quad (12,37)$$

وبما أنَّ الالتلافَ $\rho_0 g/p_0$ على الطَّرَفَ الأيمن يُساوي ثابتاً ، فإنَّه يمكنُ تكاملُ طرفي المعادلة ١٢,٣٧ بسهولة :

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \frac{\rho_0 g}{p_0} \int_0^y dy. \quad (12,38)$$

ومن باب الملاءمة ، نفترض أنَّ الضَّغَطَ الإسناديَّ p_0 مساوٍ للضَّغَطِ عند $y = 0$ صفرًا . فيُحدِّدُ

° نكافئ هذه العبارةَ قانونَ بويل Boyle's law ، الذي ينصُّ على أنَّ ضغْطَ كمِّيَّةٍ معيَّنة من الغاز يتناسبُ عكسيًا مع حجمها إذا كانت درجة حرارتها ثابتة . وسيجري بحثُ قانونِ بويل في بند ١٣,٤ .

هذا الاختيارُ حدِّي التَّكاملِ السَّفليَّين في المعادلة ١٢,٣٨ . وتصبح هذه المعادلة ، بعد التَّكامل ،

$$\ln \left(\frac{p}{p_0} \right) = - \frac{\rho_0 g}{p_0} y,$$

التي تُكافي:

$$\frac{p}{p_0} = e^{-(\rho_0 g / p_0) y}. \quad (12,39)$$

وتتخذ هذه المعادلةُ مظهراً أبسطَ نوعاً إذا عرَّفنا « مقياسَ ارتفاع » scale height b بالعلاقة

$$b = \frac{p_0}{\rho_0 g}. \quad (12,40)$$

عندئذٍ يمكنُ كتابةُ الضَّغَطِ p كدالةٍ في الارتفاع y على الصَّورة :

$$p = p_0 e^{-y/b}. \quad (12,41)$$

قانونُ الضَّغَطِ الجَوِّيَّة : يتغيَّر
الضَّغَطُ أُسِّيًّا مع الارتفاع إذا بقيتْ
درجةُ الحرارة ثابتةً

فلو كانت درجةُ حرارةِ الجَوِّ ثابتةً كما كان تغيُّرُ g مع الارتفاع مُهملاً ، لتناقصَ الضَّغَطُ الجَوِّيُّ أُسِّيًّا exponentially ، بحيثُ يقلُّ بعاملٍ e (إلى ٣٦,٨ بالمئة من قيمتهِ السَّطحيَّة) عند ارتفاعٍ مساوٍ لمقياسِ الارتفاعِ b .

■ مثال ٢ : ما مقياسُ الارتفاعِ للهواءِ إذا كان ضغَطُهُ وكثافتهُ عند سطحِ البحرِ $p_0 = 1,013 \times 10^5$ ن/م^٢ و $\rho_0 = 1,29$ كغ/م^٣ ؟ وعند أيِّ ارتفاعٍ يكون ضغَطُ الهواءِ معادلاً لنصفِ قيمتهِ عند سطحِ البحرِ ؟

تُعطينا المعادلةُ ١٢,٤٠

$$b = \frac{1.013 \times 10^5}{1.29 \times 9.8} = 8.01 \times 10^3 \text{ m} = 8 \text{ km}, \quad (12,42)$$

مقياسُ الارتفاعِ التقريبيُّ للهواءِ
الجَوِّيِّ

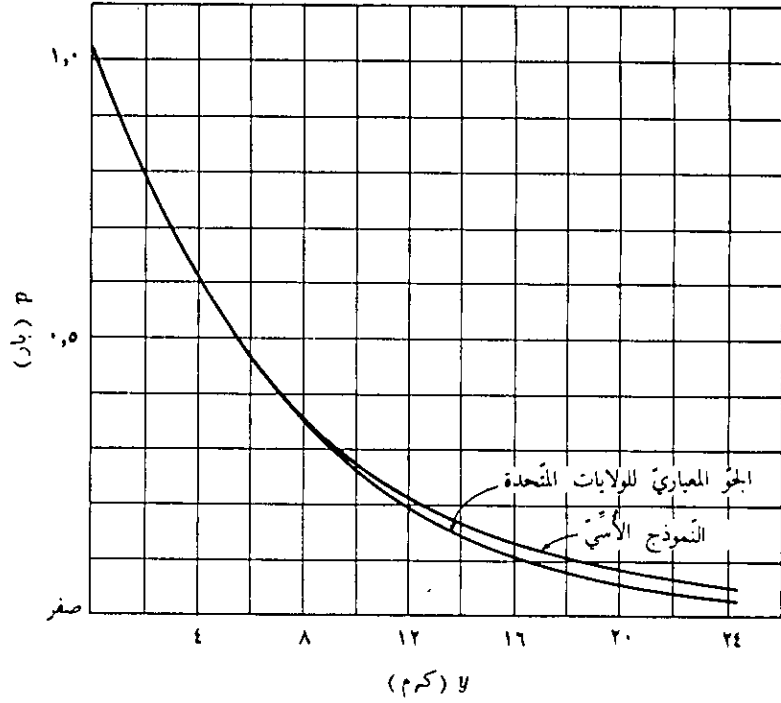
الذي يساوي حوالي ٥ أميال ، أو ٢٦٠٠٠ قدم . أمّا « نصفُ المسافة » half-distance التي يقلُّ خلالها p إلى نصفِ قيمتهِ ، فهي

$$L_{1/2} = 0.693b \quad (12,43)$$

(حيث أن $e^{-0.693} = 0.5$) . فلقبِ b المحسوبة ، تكون

■ $L_{1/2} = 5,55 \text{ كم} = 3,45 \text{ ميل} = 18200 \text{ قدم} .$

والحقيقة أنَّ درجةَ حرارةِ الجَوِّ تتغيَّرُ بمقدارٍ كبيرٍ لمسافاتٍ رأسيَّةٍ تبلغُ بضعةَ كيلومترات . أمّا تغيُّرُ g



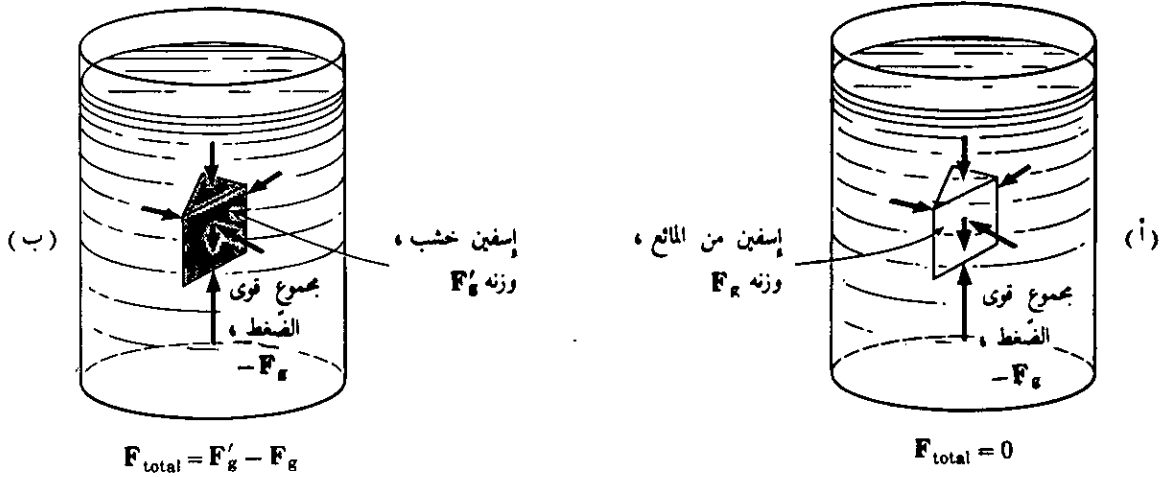
شكل ١٢,١٢ : الضَّغْطُ الجَوِّيُّ صَدَّ الارتفاع ... نقارنُ هنا نموذجاً فعلياً للجوِّ ، هو الجوِّ المعياري للولايات المتحدة الأمريكية ، مع النموذج الأسّي ، كما تُعبّرُ عنه المعادلة ١٢,٤١ (باعتبار $b = 8$ كم) .

فهو أقلُّ أهميَّة ؛ إلا أنَّ له بعضَ الأثر للارتفاعاتِ الكبيرة . وفي شكل ١٢,١٢ نقارنُ بيانيّاً النموذجَ الأسّيَّ البسيطَ للجوِّ ، كما تُعبّرُ عنه المعادلة ١٢,٤١ ، مع نموذجٍ أكثرَ دقَّةً ، هو ما يُدعى بالجوِّ المعياري للولايات المتحدة الأمريكية . فالمنحنى الأسّي المبين صحيحٌ من الناحية الوصفية .

□ مبدأ أرخميدس Archimedes' Principle

مبدأ أرخميدس : هو قانونُ قوَّة الطفو

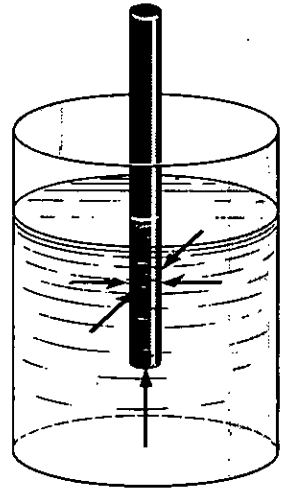
إنَّ قوَّةَ الطفو *buoyant force* إلى أعلى المؤثرة على جسمٍ مغمورٍ جزئياً أو كلياً في مائعٍ تُساوي وزن المائع المزاح يُعرِّى هذا المبدأ المفيد إلى أرخميدس ، الذي عاش في القرن الثالث قبل الميلاد . ولفهم المبدأ ، ركّز الانبعاثُ أولاً على جزءٍ معيّن من مائعٍ متزن ، كالإسفنج *wedge* المثلث الشكل المبين في شكل ١٢,١٣ (أ) . فيجب أن يكون مجموعُ كلّ القوى المؤثرة على هذا الإسفنج من المائع صفراً . لذا ، ينبغي أن يكون مجموعُ كلّ قوى الضَّغْطِ المؤثرة عليه متجهاً إلى أعلى ، كما ينبغي أن يساوي في المقدار قوَّة الجاذبيَّة المؤثرة إلى أسفل على الإسفنج ؛ أي وزن الإسفنج من المائع . فإذا استبدلَ الآن عنصرُ المائع بإسفنجٍ من الخشب [شكل ١٢,١٣ (ب)] ، بظل باقي المائع كما كان ؛ فلا يتغيَّرُ الضَّغْطُ المؤثر على كلّ جزءٍ من الإسفنج . وتظلُّ محصَّلةُ القوَّة إلى أعلى الناتجة عن المائع المحيط على حالها ، مساوية لوزن المائع الذي كان



شكل ١٢،١٣ : مبدأ أرخميدس . (أ) إن مجموع القوى المؤثرة على منقطة على شكل إسفين داخل مائع يساوي صفراً . فتوازن قوى الضغط قوة الجاذبية F_g . (ب) إذا استبدل هذا الجزء من المائع بإسفين من الخشب ، وزنه F'_g ، تظل قوى الضغط على حالها ، كما تكون محصلة إلى أعلى $-F_g$ ، وتدعى قوة الطفو . أما القوة الكلية المؤثرة على الإسفين فهي $F'_g - F_g$.

يشغل حجم الإسفين . وتدعى هذه بقوة الطفو . وقد يكون وزن الخشب ، F'_g ، أقل من وزن المائع المزاح ، F_g (إذا كان المائع ماءً ، مثلاً) . عندئذٍ تتأثر قطعة الخشب بمحصلة قوة إلى أعلى ، مقدارها $F_g - F'_g$ ؛ فينعدم الاتزان .

ويسري مبدأ أرخميدس - سواء بسواء - على جسم مغمور جزئياً ، كالقصب المبين في شكل ١٢،١٤ . فمرة أخرى ، على المائع المحيط أن يزودنا بمحصلة قوة إلى أعلى مساوية لوزن المائع المزاح ؛ إذ أن تلك هي القوة اللازمة للإبقاء على الاتزان فيما لو أزيل القصب وامتلاء « الثقب » الذي يخلقه بنفس المائع .

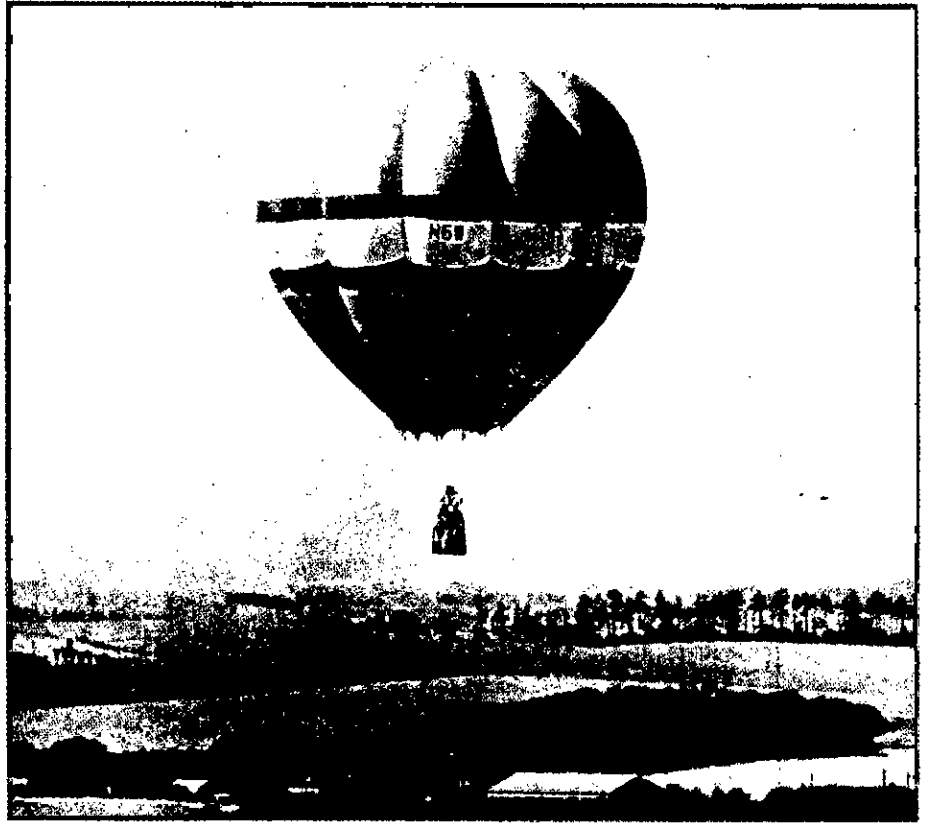


... إن منطاد الهواء الساخن hot-air balloon (شكل ١٢،١٥) هو عبارة عن آلة طائرة تكتسب قوة رفعها من مبدأ أرخميدس . فمنطاد من النوع المألوف لرجلين يُربح حوالي ١٦٠٠ م^٣ (٥٦٥٠٠ قدم^٣) من الهواء ، تبلغ كتلتها في يوم ربيعي منعش ($T = ٢٠$ س = ٦٨ ف) حوالي ١٩٢٥ كغ . وعلى ذلك تستطيع قوة الطفو على المنطاد أن تحمل نفس هذه الكتلة الكلية . فإذا كانت كتلة الهواء الساخن داخل المنطاد ١٦٠٠ كغ ، مناظرة لدرجة حرارة قيمتها حوالي ٨٠ س ، فإن ما يتبقى - القماش fabric ، والحبال ، وقمرة (سلة) الركاب gondola ، والمضرم (السخان) burner ، والوقود fuel ، والركاب ، والبضائع - قد يبلغ ٣٢٥ كغ ، أو أكثر قليلاً من ٧٠٠ باوند .

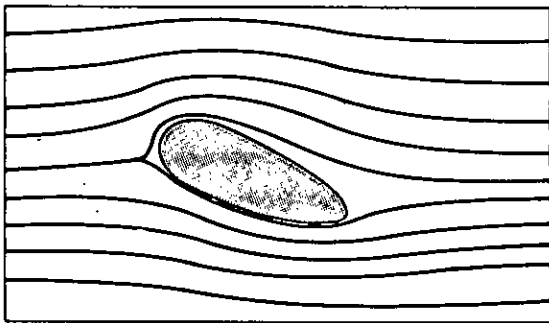
شكل ١٢،١٤ : ينطبق مبدأ أرخميدس أيضاً على جسم مغمور جزئياً ، فتساوي قوة الطفو في المقدار وزن المائع المزاح .

١٢،٤ تدفق (جريان) المائع Fluid Flow

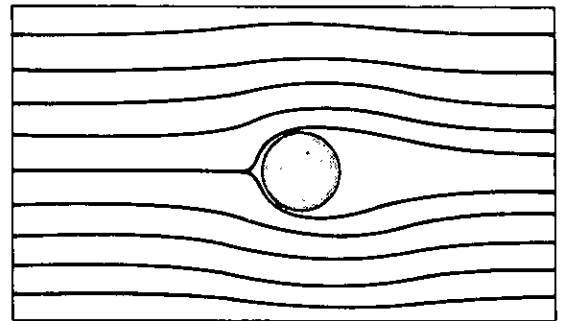
ديناميكا الموائع (الهيدروديناميكا) hydrodynamics ، أي دراسة الموائع في حالة



شكل ١٢،١٥ : مُنطادُ هواءٍ ساخن . . . يكون للهواء المسخَّن داخلَ المنطادِ كتلةٌ أَقلُّ من كتلةِ الهواءِ الذي يُريحُه . وفي حالة الاتزان ، فإنَّ كتلةَ الهواءِ المسخَّن زائد كتلةَ المنطادِ وركابِه تساوي كتلةَ الهواءِ المُراح . (المصدر : شركة مناطيد دون بيكار Don Piccard Balloons ، نيويورك بيتش Newport Beach ، كاليفورنيا .)



(ب)



(أ)

شكل ١٢،١٦ : خطوطُ النِّبَارِ للتَّدْفِيقِ المتَّظَمِّرِ للمائعِ .

الحركة ، هو موضوع كُيِّبَ عنه المؤلفات المتعددة الأجزاء ؛ فلا نطمحُ في بند واحد أكثر من أن نتحسَّس بعض سمات هذا الموضوع الشاسع . وعلى وجه الخصوص ، فإننا نودُّ أن نبين كيف يؤثر حفظ الكتلة وحفظ الطاقة على التدفق المنتظم للموائع .

ويعني التدفق المنتظم أن الطريقة التي ينحرك بها المائع لا تتغير مع الزمن . فأحد عناصر المائع يتبع مساراً معيناً ، وخلفه عنصر آخر يتبع نفس المسار . مثل ذلك المسار الذي ينتظم فيه عنصر صغير من المائع يدعى خط التيار streamline . وفي التدفق المنتظم ، تكون خطوط التيار مستقرة stationary . وإن رسماً توضيحياً لخطوط التيار هذه ليُبين في مثل لمنح البصر نمط تدفق المائع (شكل ١٢،١٦) .

□ المعادلة الاستمرارية The Equation of Continuity

يمكن رسم فئة من خطوط التيار لتُغلّف ما يُسمَّى بأنبوبة تدفق tube of flow (شكل ١٢،١٧) . وإن أنبوبة تدفق كهذه قد تكون أنبوبة حقيقية تُغلّف التدفق ، أو قد تكون منغوسة imbedded في نمط تدفق أكبر ، فتمثّل بذلك جزءاً اختير لجرّد التركيز عليه . والمقصود بشكل ١٢،١٧ (أ) أن يُمثّل صورة أنبوبة تدفق عند لحظة معينة t . فللجزء المُطلّل من المائع في الأنبوبة مساحة A ، وطول Δl ، وكتلة

أنبوبة التدفق تحدها خطوط التيار

$$\Delta m = \rho A \Delta l, \quad (١٢،٤٤)$$

حيث ρ كثافة المائع . وعند لحظة لاحقة $t + \Delta t$ ، يكون هذا الجزء من المائع قد تحوّل إلى الأمام مسافة Δl [شكل ١٢،١٧ (ب)] ، بحيث يكون متوسط سرعته في الفترة Δt مُساوياً $v = \Delta l / \Delta t$ وقسمة طرفي المعادلة ١٢،٤٤ على Δt تُعطينا

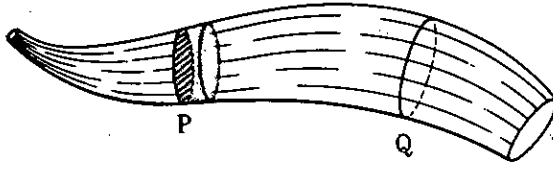
$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

فبالذهاب إلى النهاية التي يكون عندها Δl و Δt صغيرين ، ثم استبدال $\Delta l / \Delta t$ بالسرعة v ، نحصل على

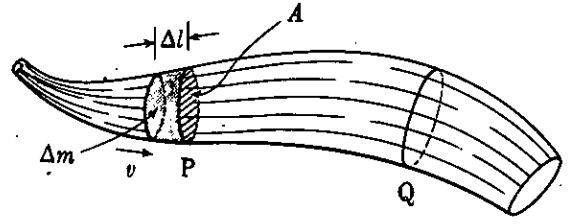
$$\frac{dm}{dt} = \rho A v. \quad (١٢،٤٥)$$

نعبّر لدفق الكتلة

والمشتقة dm/dt هي **دفع الكتلة mass flux** ؛ أي الكتلة التي تعبر المساحة المخططة في الأنبوبة عند النقطة P في وحدة الزمن . ويظهر على يمين المعادلة كثافة المائع ، ومساحة الأنبوبة ، وسرعة المائع ، جميعها محسوبة عند نفس النقطة P .



(ب) الزمن $t + \Delta t$



(أ) الزمن t

شكل ١٢،١٧ : أنبوبة تدفق . (أ) عند الزمن t ، يكون السطح الأمامي لعنصر المائع المظلل عند الموضع P . (ب) وعند الزمن $t + \Delta t$ ، يكون السطح الخلفي لعنصر المائع هذا عند P ... أي أن كتلة Δm قد تدفقت وتعدت P . وبما أن التدفق ثابت ، فإن نفس الكتلة من المائع ، Δm ، يجب أن تكون قد تعدت Q خلال هذا الزمن .

حان الوقت الآن لإدخال حفظ الكتلة في النقاش . فإبنا كانت الكتلة Δm التي عبرت النقطة P في الفترة الزمنية Δt ، فإنه يجب أن تكون نفس الكتلة قد عبرت النقطة Q في نفس الفترة الزمنية ؛ إذ بخلاف ذلك تكون الكتلة الكلية في الأنبوبة بين P و Q قد ازدادت أو نقصت . مثل هذا التغير في الكتلة يستحيل حدوثه لتناقضه مع فرضيتنا للتدفق المنتظم . ويمكن تلخيص النقاش ببساطة بواسطة العبارة

$$\frac{dm}{dt} = \text{constant}. \quad (١٢،٤٦)$$

ففي التدفق المنتظم ، يكون دفع الكتلة واحداً في كل مكان من أنبوبة التدفق . ووفقاً للمعادلة ١٢،٤٥ ، فإن هذا بدوره يعني أن

المعادلة الاستمرارية للتدفق المنتظم

$$\rho A v = \text{constant}. \quad (١٢،٤٧)$$

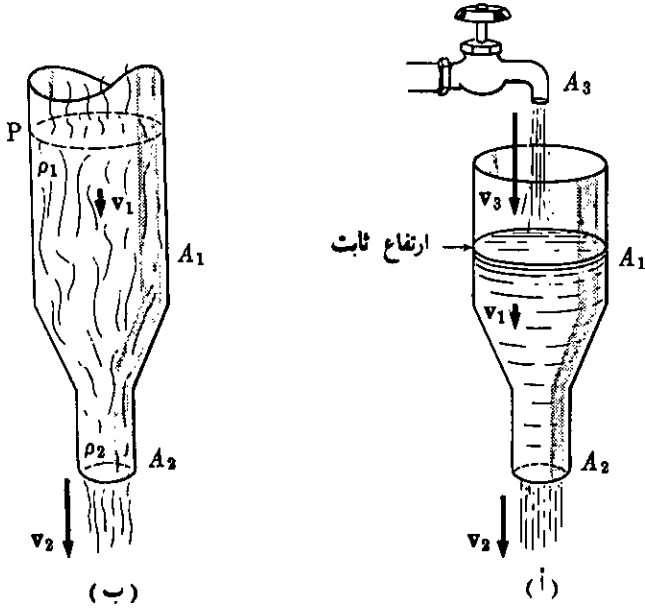
ومع أن كلاً من هذه العوامل الثلاثة قد يتغير من جزء لآخر في أنبوبة تدفق ، فإن حاصل ضربها يظل ثابتاً . فإذا اعتبرنا نقطتين موسومتين بالرقمين ١ و ٢ ، فإن المعادلة ١٢،٤٧ تكون مكافئة للتالي :

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2. \quad (١٢،٤٨)$$

وللسوائل شبه اللامنضغطة ، يكون العاملان ρ_1 و ρ_2 متساويين تقريباً ، فتُبسَّط المعادلة ١٢،٤٨ عندئذٍ إلى

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (\rho = \text{constant}). \quad (١٢،٤٩)$$

... إن حاصل الضرب $A v$ ، الذي يكون بُعْدُهُ (طول) $^3/\text{زمن}$ ، هو الدفع الحجمي



شكل ١٢,١٨ : مثالان على تدفق المائع المنتظم .
(أ) ماء في قمع . (ب) غاز مُنضَظ في أنبوب .

volume flux ؛ أي حجم المائع الذي يعبرُ نقطةً في الأنبوبة في وحدة الزمن . وللموائع اللامنضغطة ، يكون كلٌّ من دَقِّ الكتلة ودَقِّ الحجم ثابتاً في أنبوبة تدفق . وتُعرفُ المعادلة ١٢,٤٧ (أو نظيرتها ، المعادلة ١٢,٤٨) بالمعادلة الإستمرارية .

■ مثال ١ : يبين شكل ١٢,١٨ (أ) تدفقاً منتظماً للماء في قمع funnel . فإذا كان $A_1 = 5A_2$ ، فما السرعات النسبية للماء في الجزء العلوي من القمع (v_1) ، وعند مخرج outlet القمع (v_2) ، وفي المجرى أسفل قوّة الصنبور faucet (v_3) ؟

بما أنّ الماء مائعٌ شبه لامنضغط ، فإنّ المعادلة ١٢,٤٩ تنطبقُ هنا . وتكونُ نسبُ السرعات مجردةً معكوسٍ نسبِ المساحات :

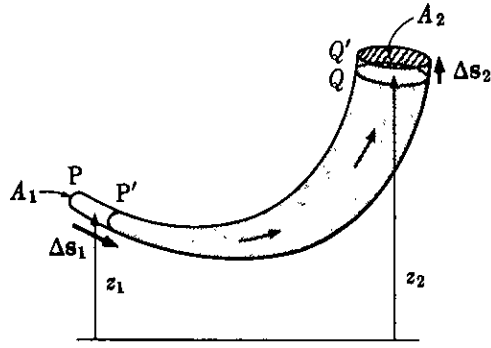
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2} = 5,$$

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{A_1}{A_3} = 25.$$

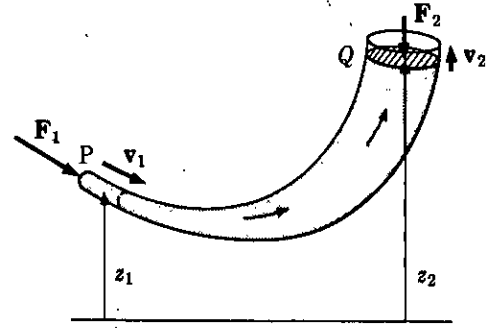
■ مثال ٢ : غاز مُنضَظ يتدفق بانتظام عبر أنبوبٍ مقطّعه العرضي A_1 ويخرج من فتحةٍ أُضيقَ مساحتها $A_2 = A_1/5$. فإذا كانت كثافته عند نقطةٍ ما P في الأنبوب ضعف كثافته عند المخرج ، كما كانت سرعته عند P $v_1 = ٢$ م/ث ، فما سرعته v_2 عند المخرج ؟

من المعادلة ١٢,٤٨ :

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} v_1 = 10v_1 = 20 \text{ m/sec.}$$



(ب)



(أ)

شكل ١٢،١٩ : التدفق المنتظم لمائع لا منضغط . عندما يتحرك السطح الأمامي لعنصر مائع من Q إلى Q' ويتحرك سطحه الخلفي من P إلى P' ، فإن قوتي الضغط F_1 و F_2 تبدلان شغلاً ، وتغير بذلك الطاقة الميكانيكية للمائع . إعتبرات الطاقة هذه تؤدي إلى معادلة برنولي (المعادلة ١٢،٥٩) .

فالكثافة الأقل ، كالمساحة الأصغر ، تزيد من سرعة التدفق .

□ معادلة برنولي للموائع اللامُنضغطة Bernoulli's Equation For Incompressible Fluids

عندما يتحرك عنصر من مائع على امتداد أنبوبة تدفق ، فإنه يكتسب أو يفقد طاقة استجابة للقوى المؤثرة عليه . وسنفترض أن المائع عديم اللزوجة بحيث لا تؤثر عليه قوى قص ، فلا يُهدر أي جزء من الطاقة كحرارة ؛ كما نفترض ، علاوة على ذلك ، أن الطاقة الداخلية للمائع تظل ثابتة (الأمر الذي يتطلب أن يكون المائع لا منضغطاً) . فتنحصر تغيرات الطاقة الممكنة الحدوث في تغير الطاقة الحركية عند تغير سُرّجه التدفق ، وفي تغير طاقة وضع الجاذبية عند تدفق المائع إلى مستويات أعلى أو أقل . ويحدث تبادل الطاقة بين أي جزء من المائع وجزء آخر مجاور بواسطة آلية mechanism الشغل المرافقة لقوى الضغط داخل المائع .

لاشتقاق معادلة للطاقة لهذا التدفق المثالي ، نعتبر ذلك القسم من المائع الذي يشغل عند لحظة معينة جزءاً من أنبوبة تدفق ، كالجزء المحصور بين النقطتين P و Q في شكل ١٢،١٩ (أ) . فأحد طرفي هذه القطعة ، عند P ، له مقطع عرضي A_1 ويتحرك بسرعة v_1 . أما الطرف الآخر ، عند Q ، فله مقطع عرضي A_2 ويتحرك بسرعة v_2 . ويكون الضغط عند P p_1 ، أما الضغط عند Q فهو p_2 . وخلال الفترة الزمنية Δt ، يتحرك الطرف الخلفي لقطعة المائع قيد الاهتمام إلى الأمام مسافة Δs_1 من P إلى P' ؛ بينما يتحرك الطرف الأمامي إلى الأمام مسافة Δs_2 من Q إلى Q' [شكل ١٢،١٩ (ب)] . فتكون محصلة الشغل الذي تبدله الأجزاء المجاورة من المائع

$$\Delta W = F_1 \cdot \Delta s_1 + F_2 \cdot \Delta s_2. \quad (12,50)$$

نبدل قوى الضغط شغلاً على مائع متحرك

وَنَسْتَخْدِمُ هذه المعادلة المفهوم الأساسي للشغل (المعادلة ١٠,٢٢). ونستطيع الاستفادة من كون قوة الضغط F_1 موازية للإزاحة Δs_1 (فتكون $F_1 \cdot \Delta s_1 = F_1 \Delta s_1$) ، و F_2 معاكسة للإزاحة Δs_2 (فتكون $F_2 \cdot \Delta s_2 = -F_2 \Delta s_2$). فبملاحظة أن $F_1 = p_1 A_1$ و $F_2 = p_2 A_2$ أيضاً ، نكتب

$$\Delta W = p_1 A_1 \Delta s_1 - p_2 A_2 \Delta s_2. \quad (12,51)$$

وما الاثنان $A_1 \Delta s_1$ في هذه المعادلة إلا ΔV_1 ؛ أي حجم أنبوبة التدفق بين P و P' . كذلك ، فإن $A_2 \Delta s_2 = \Delta V_2$ ؛ أي حجم أنبوبة التدفق بين Q و Q' . لكن هذين الحجمين متساويان : إذ أن التدفق منتظم ، فإن الكتلة التي تترك المنطقة PP' في الزمن Δt تساوي الكتلة الوافدة إلى المنطقة QQ' في نفس الزمن ؛ ونظراً لعدم قابلية المائع للانضغاط المفترضة هنا ، فإن الكتل المتساوية من المائع تشغل حجوماً متساوية . لذا نستطيع أن نكتب

$$A_1 \Delta s_1 = A_2 \Delta s_2 = \Delta V. \quad (12,52)$$

وبذلك يمكن إجراء مزيد من التبسيط على تعبير الشغل المحدد بالمعادلة ١٢,٥١ :

$$\Delta W = (p_1 - p_2) \Delta V. \quad (12,53)$$

ويتعين على هذا الشغل المبذول على قطعة المائع أن يساوي التغير في الطاقة الحركية بالإضافة إلى التغير في طاقة وضع القطعة :

$$\Delta W = \Delta K + \Delta U. \quad (12,54)$$

تغير طاقة المائع استجابة للشغل المبذول

... بالرغم من أن بعض المائع قد تدفق داخل المنطقة بين P و Q خلال الفترة الزمنية Δt والبعض الآخر قد تدفق خارجها ، فإن خواص المائع بين P و Q لم تتغير . فعند اللحظة المصورة في شكل ١٢,١٨ (ب) ، تكون كتلة المائع في هذه المنطقة وتوزيع الضغط والسرعة فيها كما كانا عليه عند اللحظة السابقة المصورة في شكل ١٢,١٨ (أ) . وعلى ذلك ، فإن التغير في طاقة قطعة المائع بأكملها ، التي كانت تقع في البداية بين P و Q ثم بين P' و Q' فيما بعد ، يجب أن يساوي الفرق بين طاقة الجزء QQ' وطاقة الجزء في المنطقة PP' . فإذا دلت Δm على الكتلة في أي من هذين الجزئين ، كان التغير في الطاقة الحركية

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2). \quad (12,55)$$

وإذا كان z مقياساً لارتفاع أنبوبة التدفق فوق مستوى قاعدة مختارة chosen base level ، كان التغير في طاقة الوضع

$$\Delta U = \Delta m g \cdot (z_2 - z_1). \quad (12,56)$$

واستخدام المعادلات ١٢,٥٣ ، و ١٢,٥٥ ، و ١٢,٥٦ في المعادلة ١٢,٥٤ يُعطينا

$$(p_1 - p_2) \Delta V = \frac{1}{2} \Delta m \cdot (v_2^2 - v_1^2) + \Delta m g \cdot (z_2 - z_1). \quad (12,57)$$

والنسبة $\Delta m / \Delta V$ تساوي ρ ، الكثافة الثابتة للمائع . * وعلى ذلك ، تقول المعادلة ١٢,٥٧ إلى

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) + \rho g \cdot (z_2 - z_1),$$

التي ، بدورها ، يمكن إعادة كتابتها على الصورة :

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2. \quad (12,58)$$

وبما أن الائتلاف $p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z$ له نفس المقدار عند النقطتين المختارتين اعتباراً P و Q ، فإنه يجب أن يظل على حاله في كل مكان على امتداد أنبوبة التدفق ؛ فنستطيع أن نكتب

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{constant}. \quad (12,59)$$

معادلة برنولي كنتيجة لمبدأ حفظ الطاقة

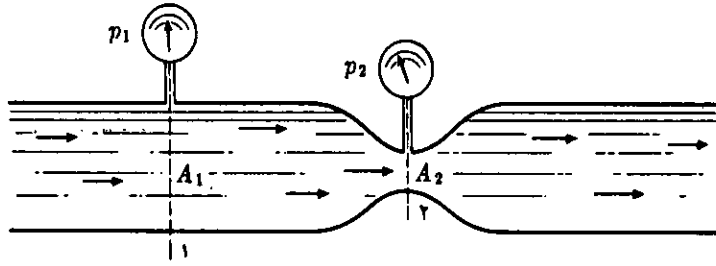
هذه هي معادلة برنولي *Bernoulli's equation* ، التي تسري للتدفق المنتظم لمائع عديم اللزوجة ولا منضغط . ويعود تاريخها إلى عام ١٧٣٨ ، عندما نشر دانيال برنولي Daniel Bernoulli - وهو عالم رياضيات سويسري (وأيضاً ما قد ندعوه الآن بالفيزيائي النظري) - أول عمل بارز في ديناميكا الموائع .

□ تطبيقات معادلة برنولي Applications of Bernoulli's Equation

(١) الاتزان الساكن : تقول المعادلة ١٢,٥٩ ، في حالة انعدام التدفق ، إلى

$$p + \rho g z = \text{constant},$$

* للمائع اللامنضغط ، نسري العبارة $\rho = \Delta m / \Delta V$ لأي حجم محدود . غيّر أن صلاحية المعادلة ١٢,٥٧ لتعتمد على الذهاب إلى النهاية $\Delta V \rightarrow 0$. فلقد افترضنا في اشتقاق المعادلة ١٢,٥٧ أن السرعة v_1 والمساحة A_1 ثابتان على امتداد المنطقة PP' ، وأن v_2 و A_2 ثابتان على امتداد المنطقة QQ' . وبسري هذان الافتراضان فقط في النهاية التي يقترب عندها Δs_1 و Δs_2 من الصفر .



شكل ١٢,٢٠ : حيثما يوجد اختناق في الأنبوب ، تكون سرعة التدفق أعلى والضغط أقل مما هما في بقية الأنبوب . ويُدعى أحياناً تناقص الضغط مع زيادة السرعة مبدأ برنولي .

مما يكافئ المعادلة ١٢,٣٠ ، التي تحكم الاتزان الساكن للمائع لامنضغط . ولقد اشتقت المعادلة السابقة بحمل القوة الكلية المؤثرة على عنصر من المائع مساوية للصفر . أما هنا فتتبع نفس النتيجة من اعتبارات طاقة .

(٢) التدفق في أنبوب أفقي : نحصل على تبسيط مفيد آخر لمعادلة برنولي عند اعتبار التدفق الأفقي . عندئذ يمكن إهمال الحد pgz ، وتتخذ المعادلة الصورة :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constant}. \quad (١٢,٦٠)$$

معادلة برنولي للتدفق الأفقي

إعتبر ، على سبيل المثال ، أنبوباً مقطوعه العرضي غير منتظم (شكل ١٢,٢٠) . فوفقاً للمعادلة ١٢,٦٠ ، يتناقص الضغط عند زيادة السرعة . وتُدعى هذه العبارة أحياناً بمبدأ برنولي *Bernoulli's principle* . كذلك تربط المعادلة الاستمرارية (المعادلة ١٢,٤٩) بدورها السرعة بمساحة المقطع العرضي ؛ فيمكن كتابة معادلة برنولي للموقعين الموسمين ١ و ٢ في شكل ١٢,٢٠ على الصورة :

مبدأ برنولي : السرعة الأعلى تعني الضغط الأقل

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \quad (١٢,٦١)$$

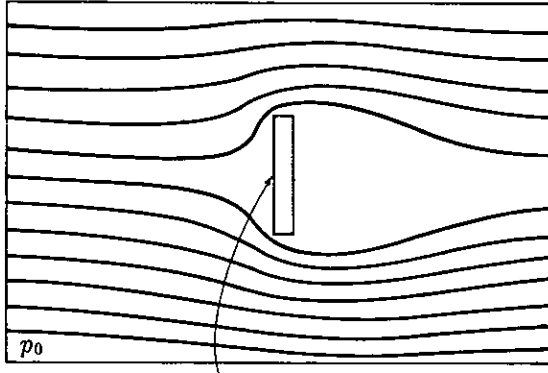
ومن المعادلة ١٢,٤٩ ، نجد أن

$$v_2 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right) v_1. \quad (١٢,٦٢)$$

فاذا عوضنا عن v_2 من المعادلة ١٢,٦٢ في المعادلة ١٢,٦١ ، حصلنا على

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1 \right] v_1^2. \quad (١٢,٦٣)$$

ونجد هذه المعادلة استخداماً في طريقة لتعيين سرجة التدفق بقياس الضغط . . . هب أن



شكل ١٢,٢١ : تدفق الهواء حول قرص ... إذا كانت سرعة التدفق أقل بكثير من سرعة الصوت ، فإن كثافة الهواء تتغير قليلاً ، ويصبح تقريب التدفق اللامضطرب سارياً .

نقطة الركود ، $v_1 = 0$ صفراً

للأنبوب المبيّن في شكل ١٢,٢٠ مقطعاً منتظماً مساحته A_1 في كلّ مكانٍ عدا منطقة اختناق constriction قصيرة مساحةً مقطعيها A_2 . فتكون المساحتان A_1 و A_2 معروفتين ؛ كما يمكن قياس فرق الضغط $p_1 - p_2$. عندئذٍ يمكن حساب السرعة v_1 في الجزء المنتظم من الأنبوب من الصيغة

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[(A_1/A_2)^2 - 1]}} \quad (١٢,٦٤)$$

التي تتبع مباشرةً من المعادلة ١٢,٦٣ .

٣) الركود stagnation والضغط الدينامي : بالرغم من كون الغاز مضغوطاً ، فإنه قد يُبدى أحياناً تدفقاً لامضطرباً تقريباً . عندئذٍ تصبح معادلة برنولي بصورة تقريبية . ومتطلب تحقيق هذا الشرط هو أن تكون سرعة التدفق صغيرة بالمقارنة مع سرعة الصوت في الغاز .

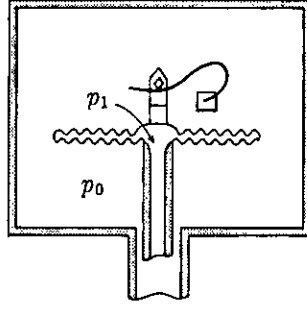
... يُبيّن شكل ١٢,٢١ خطوط التيار لتدفق الهواء البطيء حول قرص . فعند منتصف القرص ، تساوي سرعة التدفق صفراً : $v_1 = 0$. وتدعى هذه بنقطة ركود التدفق . فإذا أمكن وصف شروط التدفق المنتظم بعيداً عن القرص بواسطة الضغط p_0 والسرعة v_0 ، فإن معادلة برنولي تُعطينا الضغط p_1 عند نقطة الركود :

$$p_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 \quad (١٢,٦٥)$$

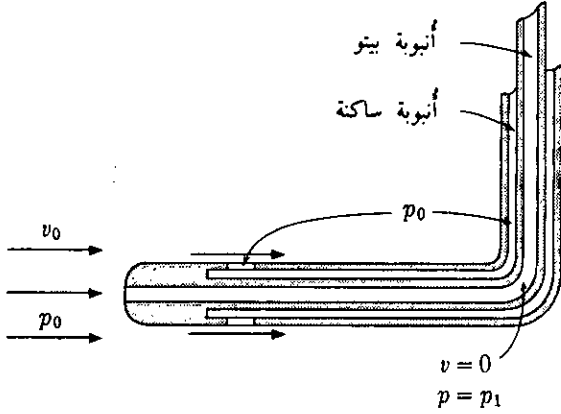
(لا نزال نفترض أن التغيرات في طاقة الوضع مهملة .) هب ، مثلاً ، أن سرعة التدفق هي عشر سرعة الصوت ، $v_0 = 33 \text{ م/ث}$ (٧٤ ميلاً/ث) . عندئذٍ تكون الزيادة في الضغط عند نقطة الركود

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho v_0^2 = \frac{1}{2}(1.29 \text{ kg/m}^3)(33 \text{ m/sec})^2 = 700 \text{ N/m}^2 .$$

عند نقطة ركود ، تساوي سرّجه المانع صفراً ؛ كما يكون للضغط نهاية عظيمة



شكل ١٢,٢٢ : مبدأ مقياس السرعة الهوائية . يتدفق الهواء مباشرة إلى أنبوبة بيتو الداخلية . وعندما يسكن ، يرتفع ضغطه من p_0 إلى p_1 . أما الضغط في أنبوبة خارجية ساكنة فيكون p_0 تقريباً ، مساوياً لقيمه في الهواء الخارجي . ويستجيب قرص منقرض corrugated ، أو علة مفرغة ، شبيهة لما هو موجود في البارومتر المعدني aneroid barometer ، لفرق الضغط $p_1 - p_0$. هذا ، ولا يبين في الشكل آلية نقل تمدد القرص وتقليصه إلى حركة مؤشر على مقياس .



وهكذا ، فإن نسبة هذا التغير في الضغط إلى الضغط الجوي العادي (10^5 ن/م^2) هي 7×10^{-3} ، أو ٠,٧ بالمئة . وتعرف أيضاً الكمية $\frac{1}{2} \rho v^2$ ، التي تمثل الطاقة الحركية لكل وحدة حجم ، « بالضغط الدينامي » dynamic pressure . وهي تتقارب في مقدارها مع الضغط العادي p_0 في ما يسمى بالمنطقة الصوتية transonic region عندما تكون سرعة التدفق متقاربة مع سرعة الصوت . أما في المنطقة الفوقصوتية supersonic ، فإن الضغط الدينامي يتجاوز الضغط العادي . وبالرغم من أن معادلة برنولي تصبح غير صالحة في هاتين المنطقتين من التدفق السريع للغاز ، فإن مفهوم الضغط الدينامي يظل مفيداً .

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \text{الضغط الدينامي}$$

٤) أنبوبة بيتو The Pitot Tube : تزودنا المعادلة ١٢,٦٥ بالأساس لفهم عمل أنبوبة بيتو (شكل ١٢,٢٢) ، التي نستخدم في قياس السرعة الهوائية airspeed للطائرات الدو صوتية (subsonic aircraft) [أي سرعتها بالنسبة إلى الهواء] . ففي داخل أنبوبة بيتو ، تتوقف حركة الهواء (نسبة إلى الطائرة) ؛ ويكون ضغطه هناك p_1 . أما الهواء الذي يتحرك حول الجزء الخارجي من أنبوبة بيتو بتغير طفيف في سرعته فيساوي ضغطه p_0 . ويقاس فرق الضغط $p_1 - p_0$ ؛ كما يُدرج مقياس ليقراً في تناسب طردي مع الجذر التربيعي لفرق الضغط هذا . فتكون السرعة النسبية للهواء للطائرة ، من المعادلة ١٢,٦٥ ،

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}} \quad (١٢,٦٦)$$

الفرق بين ضغط الركود وضغط الجريان الحر يحدد السرعة

وإنّ تدريجَ مقياسِ السَّرعَةِ الهوائيةِ airspeed meter يكونُ صحيحاً فقط عندما تُناهزُ كثافةُ الهواءِ القيمةَ ١,٢ كغ/م^٣، المناظرةَ لكثافةِ الهواءِ عند سطح البحر في ٢٠ س. أما عند الارتفاعاتِ العاليةِ، حيث الكثافةُ ρ أقلّ، فإنّ المعادلةَ ١٢,٦٥ تبينُ أنّه عند سرعةٍ معيّنة v_0 يكونُ فرقُ الضَّغطِ $p_1 - p_0$ أصغرَ. ويعني هذا أن قراءةَ مقياسِ السَّرعَةِ الهوائيةِ عند الارتفاعاتِ العاليةِ تكونُ أقلّ من السَّرعَةِ الهوائيةِ الحقيقيّةِ. ويبلغُ التصحيحُ نحواً من ٢ بالمئة لكلّ ألف قدم من الارتفاع. وإنّه لمن حُسْنِ طالعِ الطَّيْران أن تتناسبَ قوّةُ الرِّفْعِ على جناحِ الطَّائرة مع ρv_0^2 ، تماماً كما هو الحالُ لفرقِ الضَّغطِ $p_1 - p_0$. فإذا كان الأمرُ يقتضي هبوطَ الطَّائرة بأمان بسرعة ٧٠ ميلاً/س عند سطح البحر، فقد يتطلّب ٨٠ ميلاً/س مثلاً في مطار مُعَيَّن على ارتفاعٍ عالٍ. وتتساوى السَّرعَةُ الإضافيّةُ اللازمَةُ تماماً مع الخطأ في قراءة مقياسِ السَّرعَةِ الهوائيةِ. فالطَّيْرُ يقتربُ من كلا المطارين بنفس قراءة مقياسِ السَّرعَةِ الهوائيةِ، أي ٧٠ ميلاً/س. وتكونُ سرعتهُ الحقيقيّةُ في المطار المرتفع أكبرَ بالقدر الكافي بالضَّبط الذي يسمحُ لأجنحةِ طائرته أن توفرَ نفسَ قوّةَ الرِّفْعِ التي توفرتُ لديها في المطار الأقلّ ارتفاعاً.

١٢,٥ الانجرار الاحتكاكيُّ للهواءِ Frictional Air Drag

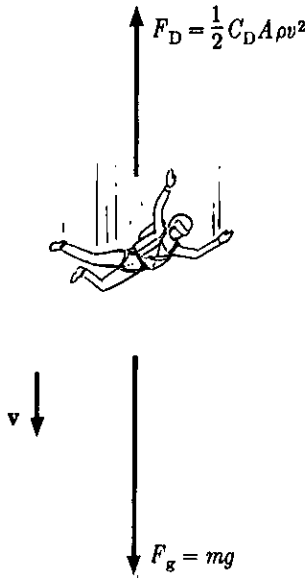
يؤثّرُ أيُّ مانعٍ بقوّةِ احتكاكيّةٍ على جسمٍ متحرّكٍ خلاله. فلأجسامٍ صغيرةٍ جداً متحرّكةٍ يبطء - كحببيّة grain غبارٍ مترسّبةٍ في الماء، مثلاً، أو قطيرةٍ صغيرةٍ من الماء ساقطةٍ خلال الهواء - تتناسبُ قوّةُ الاحتكاكِ هذه مع سرعةِ الجسم. أما للأجسامِ الأكبرِ المتحرّكةِ أسرعَ - كالطائرات، وكُرّاتِ القاعدةِ، وحجّاتِ البردِ hail stones، وغواصيّ الهواءِ skydivers - فتتناسبُ قوّةُ الاحتكاكِ مع مربّعِ السَّرعَةِ تقريباً. ويمكنُ كتابةُ قوّةِ الانجرارِ هذه، كما تُدعى، على الصُّورة:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D A \rho v^2, \quad (12,67)$$

فانونٌ تقريبيٌّ لقوّةِ الانجرارِ

حيث v سرعةُ الجسم، و A مساحةُ المقطعِ العرضيِّ، و ρ كثافةُ المائع، و C_D كميّةٌ لأبعديّةٌ تُدعى مُعاملُ الانجرارِ drag coefficient. وبالنسبةِ لأجسامٍ ذاتِ شكلٍ مُعَيَّن، كالكرّات، يكونُ معاملُ الانجرارِ ثابتاً على مدىٍ واسعٍ من الأحجامِ والسرّعات. وسنفرضُ فيما يتبعُ أنّ C_D ثابتٌ تماماً.

واضحٌ أنّ للصَّيغَةَ ١٢,٦٧ أهميّةً عمليّةً للسَّفرِ الجوّيِّ. ففي رحلةٍ جويّةٍ بسرعةٍ ثابتة، تتوازنُ قوّةُ الانجرارِ على طائرةٍ مع قوّةِ الدَّسْرِ. وبما أنّ قوّةَ الانجرارِ تتناسبُ مع v^2 ، فإنّ مُضَاعَفَةَ سرعةِ الطَّيْرانِ تفتضي زيادةَ قوّةِ الدَّسْرِ إلى أربعةٍ أضعافها. عندئذٍ تزدادُ القُدْرَةُ المبدولةُ (القوّةُ في السَّرعَةِ) إلى ثمانيةٍ أضعافها. كذلك، تتناقصُ قوّةُ الانجرارِ - وفقاً للصَّيغَةَ ١٢,٦٧ - عند تناقصِ كثافةِ الهواء. وهذا أحدُ أسبابِ تخليقِ الطَّائراتِ النَّفَّاثَةِ على ارتفاعاتٍ عالية.



شكل ١٢,٢٣ : في « السقوط الحر » ، تؤثر على الغواص الهوائي قوة الجاذبية وقوة الانجرار الاحتكاكي للهواء . وعندما يبلغ السرعة النهائية ، تكون محصلة هاتين القوتين صفراً .

مثال آخر ذو أهمية هو الهبوط الرأسي لغواص هوائي (شكل ١٢,٢٣) . فتؤثر عليه إلى أسفل قوة الجاذبية F_g ؛ كما تؤثر عليه إلى أعلى قوة الانجرار F_D . فإذا قسنا x إلى أسفل ، كانت مركبة x للقوة : $F_x = F_g - F_D$ ، أو

$$F_x = mg - \frac{1}{2} C_D A \rho v^2. \quad (١٢,٦٨)$$

من ناحية أخرى ، فإن السرعة النهائية v_T هي السرعة التي تكون لها F_x صفراً ؛ أي أنها

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{C_D A \rho}}. \quad (١٢,٦٩)$$

السرعة النهائية

فنتخذ المعادلة ١٢,٦٨ صورة أبسط عند التعبير عنها بدلالة v_T :

$$F_x = mg \left(1 - \frac{v^2}{v_T^2} \right). \quad (١٢,٧٠)$$

وبما أن $F_x = ma_x$ ، فإن محصلة التسارع إلى أسفل هي

$$a_x = g \left(1 - \frac{v^2}{v_T^2} \right). \quad (١٢,٧١)$$

التسارع عند السقوط إلى أسفل

ويستطيع المرء من هذه المعادلة - التي تمثل معادلة تفاضلية ؛ حيث أن $a_x = dv/dt = d^2x/dt^2$ - أن يجد السرعة كدالة في المسافة أو في الزمن ، أو أن يجد المسافة كدالة في الزمن . ولربما كانت الكمية ذات الأهمية العظمى بالنسبة للغواص الهوائي هي السرعة كدالة في المسافة ، $v(x)$ ؛ كما أنها أبسط دالة تستنبط من المعادلة ١٢,٧١ . فنستخدم المتطابقة

$$a_x = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dx} ; \quad (١٢,٧٢)$$

حيث نشتق هذه العلاقة كالآتي :

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dx} .$$

وبذلك يمكن كتابة المعادلة ١٢,٧١ على الصورة :

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dx} = g \left(1 - \frac{v^2}{v_T^2} \right) ,$$

التي تكافئ

$$\frac{d(v^2)}{1 - \frac{v^2}{v_T^2}} = 2g dx . \quad (١٢,٧٣)$$

نستبدل الآن المتغير بتعريف

$$u = \frac{v^2}{v_T^2} ; \quad (١٢,٧٤)$$

كما تكامل كلا طرفي المعادلة ١٢,٧٣ :

$$\int \frac{du}{1 - u} = \frac{2g}{v_T^2} \int dx .$$

فيعطينا التكامل

$$\ln (1 - u) = - \frac{2gx}{v_T^2} . \quad (١٢,٧٥)$$

... نختار هنا ثوابت التكامل بحيث يكون $u = v = 0$ عندما يكون $x = 0$. فإذا أعدنا وضع $u = v^2/v_T^2$ على الطرف الأيسر، وعرفنا المسافة المميزة x_c على اليمين بواسطة العلاقة

$$x_c = \frac{v_T^2}{2g} = \frac{m}{C_D A \rho} , \quad (١٢,٧٦)$$

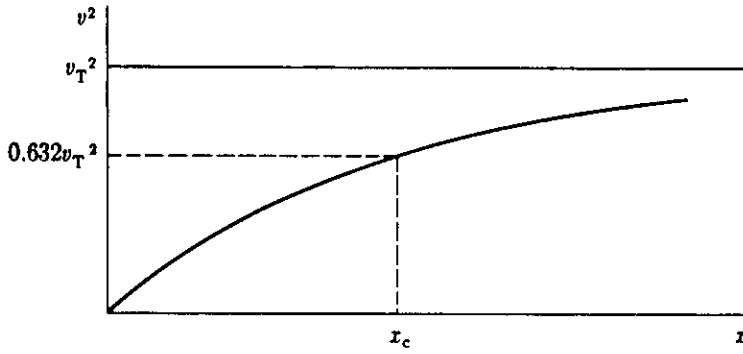
فإن المعادلة ١٢,٧٥ تؤول بهذه التغييرات إلى

$$\ln \left(1 - \frac{v^2}{v_T^2} \right) = - \frac{x}{x_c} .$$

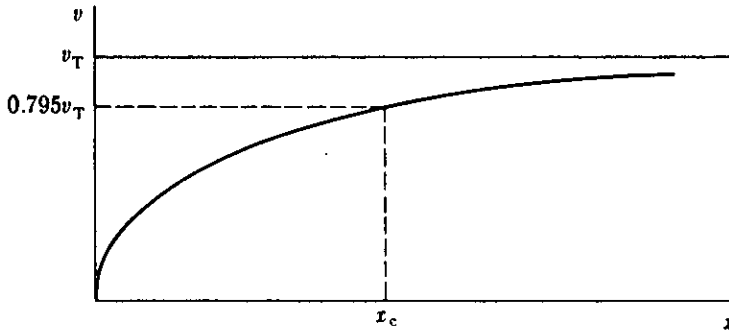
ويتبع من هذه المعادلة تعبير للدالة $v(x)$ ، من الأفضل كتابته بدلالة v :

$$v^2 = v_T^2 (1 - e^{-x/x_c}) , \quad (١٢,٧٧)$$

السرعة كدالة في المسافة عند السقوط
من السكون



(أ)



(ب)

شكل ١٢,٢٤ : رسمان بيانيان (أ) v^2 ضد x و (ب) v ضد x للسقوط من السكون ، على فرض أن قوة الانجرار تتناسب مع v^2 (المعادلة ١٢,٦٧) .

حيث يُعرَّف الثابتان اللذان يَظهران على اليمين ، v_T و x_c ، بالمعادلتين ١٢,٦٩ و ١٢,٧٦ . ويُبين شكل ١٢,٢٤ رسمين بيانيين لمربع السرعة v^2 ضد x وللسرعة v ضد x ؛ كما نترك كتمرين تقدير الكميتين v_T و x_c للغواص الهوائي ، اللتين تُحدَّدان مقياسي هذين الرسمين البيانيين .^٥

■ مثال : ما السرعة النهائية في الهواء لكرة طاولة كتلتها ٢,٥ غ ومساحة مقطعها العرضي ١١,١ سم^٢ ؟ وكم يجب أن تسقط قبل أن يتخفّض تسارعها إلى 0.5g ؟

يمكن اعتبار $C_D = 0.45$ كقيمة متوسطة لمعامل انجرار كرة ملساء ؛ كما نستطيع استعمال القيمة $\rho = 1.20 \times 10^{-3}$ غ/سم^٣ لكثافة الهواء . وباستخدام أرقام مُعبّر عنها بوحدات سرغ ث في المعادلة ١٢,٦٩ ، نجد أن

الدالتان الأخريتان اللتان يمكن اشتقاقهما من المعادلة ١٢,٧١ هما $v(t) = v_T \tanh(gt/v_T)$ و $x(t) = 2x_c \ln \{ \cosh(gt/v_T) \}$. وتدلّ $\cosh$ و $\tanh$ على دالتي الظل الزائدي hyperbolic tangent وجيب التمام الزائدي hyperbolic cosine .

$$v_1 = \sqrt{\frac{(2)(2.5 \text{ gm})(980 \text{ cm/sec}^2)}{(0.45)(11.1 \text{ cm}^2)(1.20 \times 10^{-3} \text{ gm/cm}^3)}} \\ = \sqrt{81.7 \times 10^4 \text{ cm}^2/\text{sec}^2} = 904 \text{ cm/sec} = 9.04 \text{ m/sec.}$$

وتُعادلُ هذه سرعة ٢٠ ميلاً/س تقريباً . أمّا للإجابة عن السؤال الثاني ، فنعودُ إلى المعادلة ١٢,٧١ ، حيث نجدُ أنّ $a_x = 0.5g$ عندما يكون $v^2 = 0.5v_T^2$. ويحدثُ هذا ، وفقاً للمعادلة ١٢,٧٧ ، عندما يكونُ

$$e^{-x/x_c} = 0.5 ;$$

وهو شرطُ يتحقّقُ بالعلاقة $x = 0.693x_c$. ويتبع من المعادلة ١٢,٧٦ أنّ

$$x_c = \frac{v_T^2}{2g} = \frac{81.7 \times 10^4 \text{ cm}^2/\text{sec}^2}{(2)(9.8 \times 10^2 \text{ cm/sec})} \\ = 417 \text{ cm} = 4.17 \text{ m.}$$

وعلى ذلك ، تكون مسافة السقوط لبلوغ تسارع قيمته $0.5g$:

$$x = 0.693x_c = 289 \text{ cm} = 2.89 \text{ m} ;$$

مما يعادلُ مسافة ٩,٥ قدم .

أمّا لكرة البغلة الصّغير تتحرّكُ ببطءٍ خلال مائع ، فيكونُ لقانونِ قوّة الانجرار شكلُ آخرُ يختلفُ تماماً عما ورَدَ في المعادلة ١٢,٦٧ هو

$$F_D = 6\pi\mu r v. \quad (١٢,٧٨)$$

قانونُ ستوكس : قوّة الانجرار للسرعة المنخفضة والحجم الصغير

وتنصُّ هذه الصّيغة ، التي تُدعى قانونُ ستوكس Stokes's law ، على أنّ قوّة الانجرار تتناسبُ طرديّاً مع نصفِ قُطرِ الكرة r ومع سرعتها v . وتُسمّى الكميّة μ لزوجة viscosity المائع . ويُعبّر عنها بوحدات كـ غ/م ث أو غ/سم ث ، حيث يُدعى الالتلاف الأخير من الوحدات بواحد poise . واللّزوجة مقياسٌ لإجهاد القصّ shear stress الذي قد يوجدُ في المائع (ويمكنُ الرجوعُ إلى تعريفها الدقيق في كتبٍ أكثر تقدماً) . كما أنّ اللّزوجة مقياسٌ لقوّة الاحتكاك المؤثرة على مائعٍ يتدفّق فوق سطحٍ صلبٍ ؛ وهذا سببُ ورودها في قانونِ ستوكس .

... كم هو صغير أو كم هو بطيء ينبغي أن يكون الجسمُ بُعْثَةً تحديد قوّة الانجرار بالمعادلة ١٢,٧٨ بدلاً من المعادلة ١٢,٦٧ ؟ تتوفّر الإجابة على وَجْهِ التّقريب بواسطة القيمة العددية لبارامترٍ يدعى بِعددي رينولدز Reynolds number . ويُعرّف هذا العددُ بالعلاقة

عدد رينولدز : بارامترٌ مقيّد لتدفّق المائع

$$R = \frac{\rho v d}{\mu}, \quad (١٢,٧٩)$$

حيث ρ كثافة المائع ، و μ لزوجته ، و v سرعة التدفق عبوراً بجسم (أو سرعة الجسم خلال

جدول ١٢,١ : مناطق تدفق المائع

عدد رينولدز	قانون قوة الانجرار
صفر إلى ١٠	قانون ستوكس ، المعادلة ١٢,٧٨ : $F_D \sim v$
١٠ إلى ٣٠٠	منطقة انتقال
10×3 إلى $10^3 \times 3$	معامل انجرار ثابت تقريباً ، المعادلة ١٢,٦٧ : $F_D \sim v^2$
أكبر من $10^3 \times 3$	بعض التفاوت في معامل الانجرار : F_D تتناسب مع v^2 بصورة تقريبية فقط

المائع (، و d قطر الجسم . ويمكن تحديد d لجسم غير منتظم الشكل بصورة تقريبية فقط ؛ أما بالنسبة لكرة ، فهو محدد تماماً . والقيم المختلفة لعدد رينولدز R تُحدد مناطق regimes مختلفة للتدفق يسود في كل منها قانون مختلف لقوة الانجرار . وتُلخص هذه المناطق المختلفة في جدول ١٢,١ .

١٢,٦ التصادمات الثنائية الجسم Two-Body Collisions

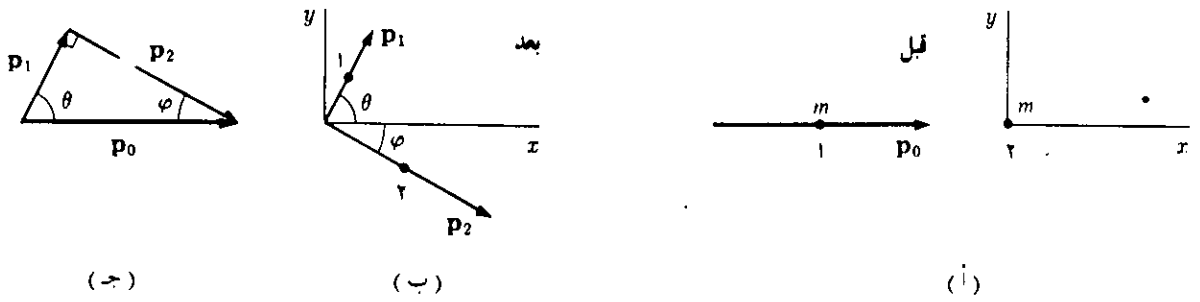
تبدأ تصادمات ثنائية الجسم في العديد من حقول الفيزياء ، بدءاً بكرات البلياردو وانتهاءً بالجسيمات الأولية . وسنعتبر في هذا البند مثالين : التصادم المرّن التام perfectly elastic لجسيمات متساوية الكتلة والتصادم اللامرّن التام completely inelastic لجسمين .

□ التصادم المرّن لجسيمات متساوية الكتلة : إطار المختبر

Elastic Collision of Equally Massive Particles: Laboratory Frame

إعتبر جسيمين متساويي الكتلة m ، يتحرك الأول منهما بزخم p_0 باتجاه الثاني ، الذي يكون في حالة سُكون [شكل ١٢,٢٥ (أ)] . فَيَتَشَكَّلُ الجسيم ١ ، بعد تصادمها ، بزخم p_1 يصنع زاوية θ مع الاتجاه الابتدائي للحركة ؛ بينما يرتد الجسيم ٢ بزخم p_2 يصنع زاوية ϕ مع الاتجاه الابتدائي للحركة [شكل ١٢,٢٥ (ب)] . ومن أطرفِ سِمَاتِ هذا التصادم ، إذا كان مرناً ، أن p_1 و p_2 يكونان دائماً متعامدين مع بعضهما البعض . لنبرهن هذه النتيجة إن معادلة حفظ الزخم لهذا المثال هي

$$p_1 + p_2 = p_0. \quad (١٢,٨٠)$$



شكل ١٢,٢٥ : (أ) جسيم كتلته m يقترب من جسيم ساكن له نفس الكتلة . (ب) بعد تصادمها ، ينطلق الجسيمان بزاويتي θ و ϕ مع الاتجاه الأصلي للجسيم ١ . (ج) إذا كانت الطاقة - مثلها مثل الزخم - محفوظة ، كان متجه الزخم النهائيان p_1 و p_2 متعامدين ، بحيث أن $\theta + \phi = \frac{1}{2}\pi$.

وبما أن التصادم المرن هو ، بالتعريف ، تصادمٌ تُحفظ فيه الطاقة الحركية ، فإن معادلة حفظ الطاقة تكون

$$\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} = \frac{p_0^2}{2m}, \quad (12,81)$$

حيث نستخدم - من قبيل الملاءمة - $p^2/2m$ بدلاً من $\frac{1}{2}mv^2$ ، كتعبير عن الطاقة الحركية . وباختزال العامل $2m$ ، نحصل على

$$p_1^2 + p_2^2 = p_0^2. \quad (12,82)$$

ويمكن تمثيل المعادلة ١٢,٨٠ بالرسم السهائي المبين في شكل ١٢,٢٥ (ج) . فتؤلف الأسهم التي تمثل p_1 ، و p_2 ، و p_0 أضلاع مثلث . وبموجب المعادلة ١٢,٨٢ ، فإن مجموع مربعي ضلعين في هذا المثلث يساوي مربع الضلع الثالث . هذه هي نظرية فيثاغورس . وبذلك يكون المثلث قائم الزاوية : p_1 و p_2 متعامدان .

ومما يُبهر الانتباه أيضاً التغير في الطاقة الحركية للجسيم ١ أثناء التصادم ؛ إذ تبين هندسة الشكل ١٢,٢٥ (ج) أن

$$p_1 = p_0 \cos \theta. \quad (12,83)$$

ومن ثم يؤدي تربيع طرفي هذه المعادلة والقسمة على $2m$ إلى علاقة للطاقة الحركية :

$$K_1 = K_0 \cos^2 \theta. \quad (12,84)$$

فعند $\theta = 0$ صفاً ، لا ينحرف الجسيم ١ ولا يفقد أية طاقة ($K_1 = K_0$) . كذلك ، عند الزاوية

$\theta = 45^\circ$ ، يكون $\cos^2 \theta = 0.5$ ، و $K_1 = 0.5K_0$. فَيُنْتِجُ الْجُسَيْمُ ١ عِنْدئذٍ بِنِصْفِ طاقته الحركية الابتدائية ؛ بينما يكتسب الجسم المرتد النصف الآخر . وباقتراب θ من $\pi/2$ ، فإن K_1 ، وفقاً للمعادلة ١٢,٨٤ ، تقترب من الصفر . ففي التصادم شبه المباشر ، يُنَحَرَفُ الْجُسَيْمُ السَّاقِطُ incident بزاوية 90° لكنه يُتْرَكُ بطاقة حركية مُهْمَلَةٌ . وعند التصادم المباشر تماماً ، تصبح زاوية الانحراف بلا معنى في الواقع ، لأن الجسم ١ يَسْكُنُ بينما ينطلق الجسم ٢ إلى الأمام مباشرةً ($\varphi = 0$) بطاقة حركية $K_2 = K_0$. لاحظ أن $\theta + \varphi = \pi/2$. وبتزايد زاوية الانحراف θ من صفراً إلى $\pi/2$ ، تتناقص زاوية الارتداد φ من $\pi/2$ إلى صفر . فأقصى قيمة ممكنة لكل من θ و φ هي $\pi/2$. ويتبع ذلك من حقيقة كونها زاويتين داخليتين لثلث قائم الزاوية [شكل ١٢,٢٥ (ج)] . وأخيراً ، نلاحظ أن التغير في الطاقة الحركية للجسم ١ يتحدد بالصيغة

$$\Delta K = K_0 \sin^2 \theta, \quad (12,85)$$

حيث $\Delta K = K_0 - K_1$. وتُمَثِّلُ هذه نتيجة بسيطة للمعادلة ١٢,٨٤ ما علاقة ΔK بالطاقة الحركية K_2 للجسم المرتد ؟

* التصادم المرن لجسيمات متساوية الكتلة : إطار مركز الكتلة

Elastic Collision of Equally Massive Particles : Center-of-Mass Frame

إننا نكتسب مزيداً من التبصر بفحص التصادم المرن للجسيمات المتساوية الكتلة في إطار إسناد مركز الكتلة . فيها أن مركز الكتلة يقع في منتصف المسافة بين الجسيمين ، فإن سرعته قبل التصادم هي

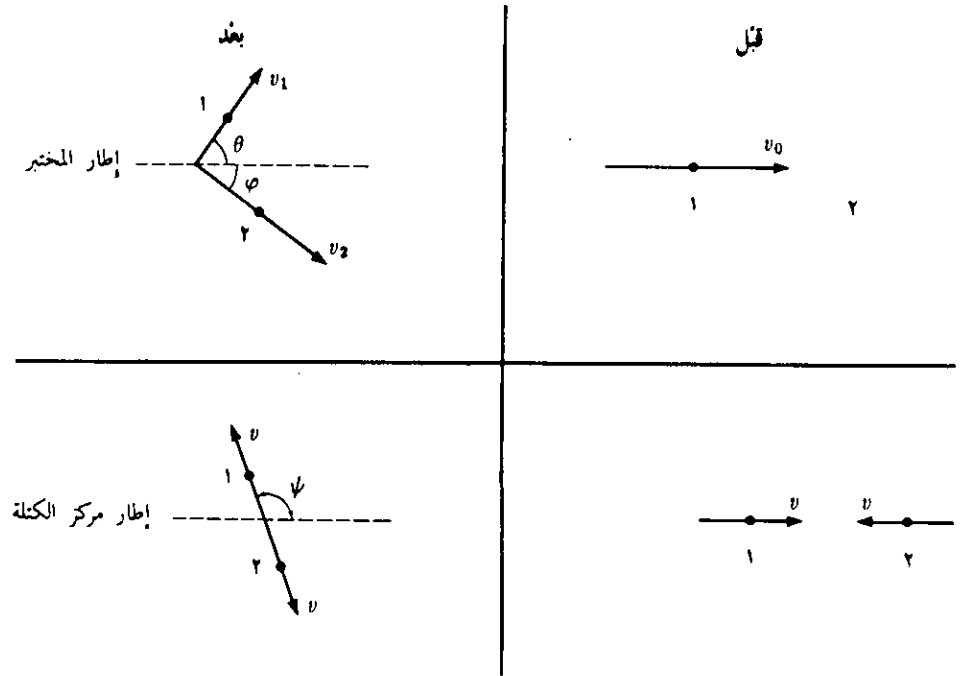
$$v_c = \frac{1}{2}v_0. \quad (12,86)$$

وبالطبع ، ينبغي أن تكون هذه سرعته بعد التصادم أيضاً . ويُقَارَنُ شكل ١٢,٢٦ التصادم قَبْلَ وَبَعْدَ حدوثه في كل من إطار المختبر وإطار مركز الكتلة . ففي إطار مركز الكتلة ، يقترب الجسيمان من بعضهما البعض بسرعة متساوية v - نفس سرعة مركز الكتلة . وبما أن الزخم الكلي في هذا الإطار يساوي صفراً ، فإن الجسيمين ينبغي أن يتباعدة أيضاً بسرعة متساوية على امتداد خط مستقيم . ويتطلب حفظ الطاقة أن تكون سرعة التباعد هذه بعد التصادم مساوية لسرعة الاقتراب v قبل التصادم . وهكذا ، وكما هو واضح في شكل ١٢,٢٦ ، فإن وصف التصادم المرن الثنائي الجسم يكون بسيطاً بصورة خاصة في إطار إسناد مركز الكتلة .

لا يتم أي تبادل للطاقة الحركية في إطار مركز الكتلة

من ناحية أخرى ، فإن سرعته أي جسيم v_c في إطار المختبر تساوي المجموع الاتجاهي لسرعة الجسم v_0 في إطار مركز الكتلة وسرعته مركز الكتلة v_c :





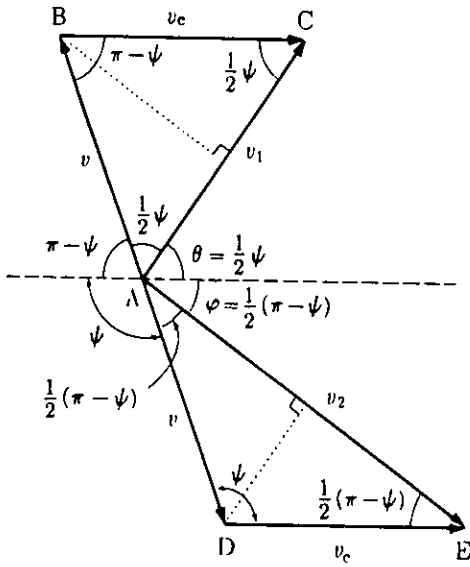
شكل ١٢،٢٦ : التصادم المرن لجسمين متساويي الكتلة يُبينُ الرّسمان العلويان (المشابهان لشكل ١٢،٢٥) منظر التصادم قبل وبعد حدوثه في إطار إسناد المختبر ؛ بينما يُبينُ الرّسمان السفليان نفس التصادم قبل وبعد حدوثه في إطار مركز الكتلة .

تحويل السّرجة بين إطارَي الإسناد

$$v_L = v_p + v_c. \quad (١٢،٨٧)$$

وبتطبيق ذلك على المثال موضع الدّراسة ، فإنّ هذه القاعدة تعني أنّ التحويل من إطار مركز الكتلة إلى إطار المختبر يتمّ بإضافة سرجة v_c ، مقدارها v واتجاهها إلى اليمين ، إلى كلّ سرجة في إطار مركز الكتلة . إعتبر ، مثلاً ، الجزء السفلي الأيسر من شكل ١٢،٢٦ . فإنّ إضافة السّرجة v_c إلى سرجة الجسم ١ تعطينا v_0 ، باتجاه اليمين ، وبمقدار $2v$ ؛ كما أنّ إضافة السّرجة v_c إلى سرجة الجسم ٢ تعطينا صفرًا . وباختصار ، فإنّ هذا التحويل يغيّر الجزء السفلي الأيسر من الشكل إلى الجزء العلوي الأيسر من نفس الشكل .

وتحوّل نفس القاعدة للجمع الاتجاهي الجزء السفلي الأيمن من شكل ١٢،٢٦ إلى الجزء العلوي الأيمن . ونبيّن هندسة هذا التحويل في شكل ١٢،٢٧ . إعتبر أولاً المثلث ABC . فإنّ الضلع AB ، ذا الطول v ، يمثّل السّرجة النهائيّة للجسم ١ في إطار مركز الكتلة . كذلك يمثّل الضلع BC ، ذو الطول v أيضاً ، سرجة مركز الكتلة . عندئذٍ ، فإن مجموع هاتين السّرجتين ، الممثل بالضلع AC ، يساوي السّرجة النهائيّة v_1 للجسم ١ في إطار المختبر . وبما أنّ ψ قد عرّفت بأنها زاوية انحراف الجسم ١ في إطار مركز الكتلة (شكل ١٢،٢٦) ، فإنّ



شكل ١٢,٢٧ : رسمٌ هندسيٌّ لتحويلِ السرعاتِ والزوايا من إطارِ مركزِ الكتلةِ إلى إطارِ المختبرِ... السرعتان v و v_c متساويتان.

الزاوية ABC تساوي $\pi - \psi$ ؛ في حين أن كلاً من زاويتي المثلث المتساوي الساقين ، BAC و BCA ، تساوي $\frac{1}{2}\psi$. وأخيراً ، فإن الزاوية التي يصنعها الضلع AC (أو v_1) مع الاتجاه الأفقي هي

$$\theta = \frac{1}{2}\psi. \quad (١٢,٨٨)$$

فزاوية انحراف الجسم ١ في إطار المختبر (θ) تساوي نصف زاوية انحرافه تماماً في إطار مركز الكتلة (ψ) . ويؤدي تطبيق منطقي هندسيٍّ مماثلٍ على المثلث ADE إلى النتيجة

$$\phi = \frac{1}{2}(\pi - \psi); \quad (١٢,٨٩)$$

أي أن زاوية ارتداد الجسم ٢ في إطار المختبر (ϕ) هي أيضاً نصف زاوية ارتداده في إطار مركز الكتلة ($\pi - \psi$) . فالزاوية بين الاتجاهين النهائيين لسرجهتي الجسمين هي ١٨٠° في إطار مركز الكتلة . وكما استنتجنا سابقاً ، فهي تساوي ٩٠° في إطار المختبر .

وأخيراً ، نستطيعُ الرِّبطَ بين مقدارَي السَّرجهتين النهائيَّتين في إطارَي الإسناد . فكلُّ خطٍّ متقطَّعٍ في شكل ١٢,٢٧ يقسمُ مثلثاً متساوي الساقين إلى مثلثين قائمين . واعتبارُ هذين المثلثين القائمين يقودنا إلى العلاقتين

$$v_1 = 2v \cos(\frac{1}{2}\psi),$$

$$v_2 = 2v \cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\psi).$$

وبالاستعانة بالمعادلتين ١٢,٨٨ و ١٢,٨٩ ، يمكنُ أيضاً كتابةُ هذا الزوجِ من المعادلاتِ على الصورة :

$$v_1 = v_0 \cos \theta, \quad (١٢,٩٠)$$

$$v_2 = v_0 \cos \varphi, \quad (١٢,٩١)$$

حيث استخدمنا هنا المتساوية

$$v_0 = 2v. \quad (١٢,٩٢)$$

□ التصادم اللامرن التام لجسمين Completely Inelastic Collision of Two Bodies

نستطيع تسمية تصادم بأنه لامرن « تام » إذا تحولَ خلاله أكبر جزء ممكن من الطاقة الحركية إلى أنواع أخرى من الطاقة . فاصطدام كرة من المعجون والتصاقها بأخرى هو مثال على تصادم كهذا ؛ حيث تتحول الطاقة الحركية إلى حرارة . كذلك يمكن أن يكون تصادم جسمين أوليين تصادماً لامرناً تاماً إذا تكونت جسيمات جديدة وإذا تحولَ أكبر جزء ممكن من الطاقة الحركية إلى طاقة كتلة .

إعتبر تصادماً على هذا النمط يصطدم فيه جسم كتلته m_1 وسرعته v_1 بجسم كتلته m_2 ويكون - بادئ ذي بدء - في حالة سكون (شكل ١٢,٢٨) . نفترض أولاً أن الزيادة في كتلة النظام مهملة ؛ فيكون ناتج التصادم جسماً كتلته $M = m_1 + m_2$. لتكن سرعته v_f . فإن حفظ الزخم ، مُعبّراً عنه بالعلاقة

$$m_1 v_1 = M v_f,$$

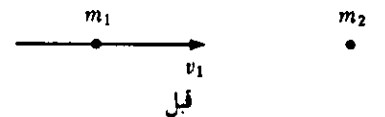
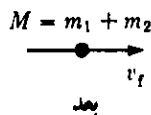
يُنقضي إلى التعبير الآتي للسرعة النهائية :

$$v_f = \frac{m_1}{M} v_1. \quad (١٢,٩٣)$$

ولقد تم الحصول على هذه النتيجة سابقاً (المعادلة ٨,٥٩) . وبهذا الآن الطاقة المتحوّلة .
فالتغير في الطاقة الحركية هو

$$\Delta K = K_1 - K_f = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} M v_f^2. \quad (١٢,٩٤)$$

فقدان الطاقة الحركية يؤدي بالضرورة إلى زيادة أشكال الطاقة الأخرى



شكل ١٢,٢٨ : تصادم لامرن تام . يكون الزخم محفوظاً ، أما الطاقة الميكانيكية فلا . (أنظر أيضاً شكل ٨,١٧) .

$$M = m_1 + m_2$$

ساكن
بعد



قبل

شكل ١٢,٢٩ : تصادم لامرن تام في إطار مركز الكتلة. ... الطاقة الحركية بعد التصادم تساوي صفراً.

وبالتعويض عن v_1 من الطرف الأيمن للمعادلة ١٢,٩٣ نجد، بعد التبسيط، أن

$$\Delta K = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2M}. \quad (١٢,٩٥)$$

ويمكن التعبير عن هذه النتيجة ببساطة أكبر على الصورة :

$$\Delta K = \frac{m_2}{M} \cdot K_1. \quad (١٢,٩٦)$$

الطاقة المتاحة

ونُدعى الكمية ΔK « بالطاقة المتاحة (أو المتوافرة) available energy ». فهي ذلك الجزء من الطاقة الحركية الابتدائية التي قد تتحول إلى أنواع أخرى من الطاقة. وإذا كان معظم الكتلة M ناتجاً عن الجسم الساقط (قطار شحن يصطدم بسيارة، مثلاً، أو جسم ألفا يصطدم بالكترون)، فإن النسبة m_2/M تصغر عن ١ كثيراً، وتكون الطاقة المتاحة ΔK أقل كثيراً من الطاقة الحركية الابتدائية K_1 ؛ فلا يمكن تحويل إلا القليل من الطاقة. وإذا كان الأمر على النقيض من ذلك (مثلاً، كرة ثلجية ترتطم برجل، أو إلكترون يرتطم بنواة)، فإن النسبة m_2/M تساوي ١ تقريباً؛ كما أن ΔK تساوي K_1 تقريباً؛ فيكون معظم الطاقة الحركية الابتدائية متاحاً للتحويل. أما في حالة تصادم جسيمات متساوية الكتلة، فإن النسبة m_2/M تساوي $\frac{1}{2}$ ، و $\Delta K = \frac{1}{2} K_1$.

وأسهل طريقة لإثبات أن الكمية ΔK هي حقاً القيمة العظمى للطاقة المتاحة للتحويل هي النظر إلى تصادم في إطار إسناد مركز الكتلة. ... يُبين شكل ١٢,٢٩ منظر إطار مركز الكتلة للتصادم الذي يظهر منظره في إطار المختبر في شكل ١٢,٢٨. فن التعريف العام لسرجه مركز الكتلة (المعادلة ٨,١٨)، يتبين أن مركز الكتلة يتحرك إلى اليمين في المختبر بسرجه

$$v_c = \frac{m_1}{M} v_1. \quad (١٢,٩٧)$$

وتكون سرجهنا الجسمين في إطار مركز الكتلة

$$v_1' = v_1 - v_c = \frac{m_2}{M} v_1, \quad (١٢,٩٨)$$

$$v_2' = 0 - v_c = -\frac{m_1}{M} v_1. \quad (12,99)$$

كما تكون الطاقة الحركية الكلية في إطار الإسناد هذا

$$K_c = K_1' + K_2' = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2. \quad (12,100)$$

فبالتعويض من المعادلتين ١٢,٩٨ و ١٢,٩٩ في المعادلة ١٢,١٠٠ ، نجد أن

$$K_c = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \left(\frac{m_2}{M} \right). \quad (12,101)$$

أما الزخم الكلي فيساوي صفرًا في إطار مركز الكتلة : $m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0$. لذا ، فإنه ليس من الضروري أن تتحرك نواتج التصادم في هذا الإطار ؛ وقد تساوي الطاقة الحركية النهائية صفرًا . فإن صح ذلك ، كانت الطاقة الحركية الابتدائية بأكملها متاحة للتحويل ؛ أي أن

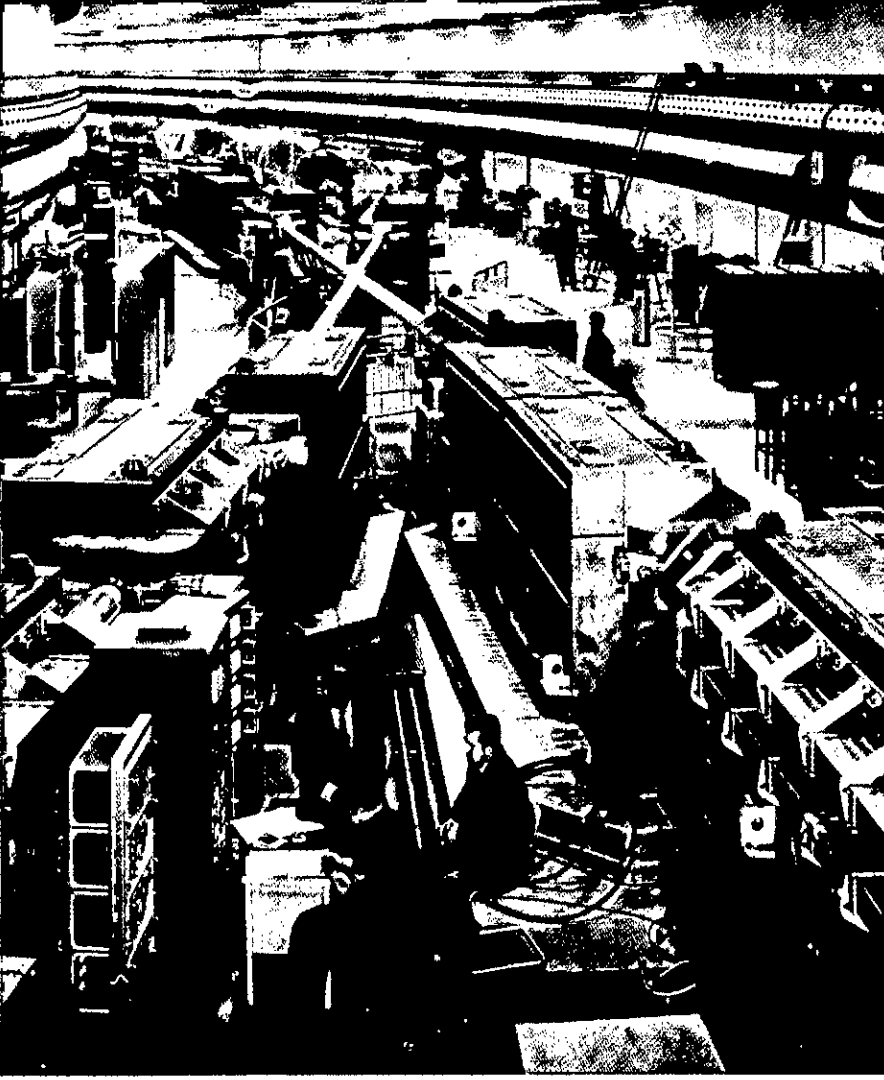
$$\Delta K = K_c. \quad (12,102)$$

والحقيقة أن المعادلتين ١٢,١٠٢ و ١٢,١٠١ تكافئان المعادلة ١٢,٩٦ . كما أن الطاقة المتاحة هي الطاقة الحركية لمركز الكتلة .

... وضعنا في الاشتقاق السابق $M = m_1 + m_2$ ، وهي فرضية حفظ الكتلة . أما لإنتاج كتلة جديدة في تصادم الجسيمات ، فيجب أن نستخدم بدلاً من ذلك $M = m_1 + m_2 + \Delta M$ ، حيث ΔM هي محصلة الزيادة في الكتلة . لكن بما أننا نستخدم صيغةً لانسبية nonrelativistic ($p = mv$ و $K = \frac{1}{2}mv^2$) ، فإن اشتقاقنا يسري فقط عند الطاقات المنخفضة نسبيًا ؛ حيث تكون الكتلة الجديدة ΔM عندئذٍ صغيرة بالمقارنة مع الكتلة الأصلية ، $m_1 + m_2$. ونتيجة لذلك ، تظل المعادلتان ١٢,٩٦ و ١٢,١٠٢ للطاقة المتاحة صالحتين تقريباً لجميع التصادمات اللانسبية حتى في حالة إنتاج كتلة جديدة .

وتظل هذه المبادئ سارية المفعول بالقرب من سرعة الضوء ؛ إلا أن الصيغ تتغير . وعلى وجه الخصوص ، عند الطاقات العالية جدًا ، فإن الطاقة المتاحة في تصادم بروتون - بروتون ($m_1 = m_2 = \frac{1}{2}M$) لا تساوي نصف الطاقة الحركية الابتدائية في إطار المختبر بل أقل من النصف . ففي المسارع النووي في بيركلي بولاية كاليفورنيا ذي الطاقة ٦ جـ.ف ، تكون الطاقة المتاحة في تصادم كهذا حوالي ٢ جـ.ف . كذلك ، في مختبر المسارع الوطني ، لا يُنتج بروتون طاقته ٥٠٠ جـ.ف عند ارتطامه ببروتون آخر سوى ٢٩ جـ.ف كطاقة متاحة . وبما أن المسارعات أجهزة باهظة التكاليف ، فإن هذا « الإسراف » في الطاقة ليمّا يُؤسف له . ويمكن تجنبه إذا كان الجسيمن المتصادمان كلاهما متحركًا ولهما سرجهتان متساويتان ومتضادتان

في إطار مركز الكتلة ، تكون كل الطاقة الحركية طاقة متاحة



شكل ١٢,٣٠ : الأشعة المتصادمة تُوجَّه البروتونات مغناطيسياً من مُسارع سيرن (في جنيف بسويسرا) ذي الطاقة ٢٨ جـ.ف إلى حلقتي تخزين مُقاطعتين . وتُبين هذه الصورة إحدى نقطتي التقاطع . فعند نقطة تقاطع أنيونتي الشعاعين ، يمكن للبروتونات أن تصطدم ببروتونات أخرى اصطداماً مباشراً تقريباً . وتبلغ الطاقة المتاحة في مثل هذا التصادم أكثر من ٥٠ جـ.ف . [المصدر : المنظمة الأوروبية للأبحاث النووية (سيرن) :

[. European Organization for Nuclear Research (CERN)]

قبل التصادم ، كما في شكل ١٢,٢٩ . عندئذٍ يتكافأ إطارا مركز الكتلة والمختبر ، وتصبح كل الطاقة الحركية طاقة متاحة . وللاستفادة من هذه الحقيقة ، فقد طُوِّر عددٌ من المختبرات « أشعة متصادمة colliding beams » (أنظر شكل ١٢,٣٠) ، حيث يجري تجميع الجسيمات المتحركة في اتجاهين متضادين في منطقة ضيقة تتصادم فيها وتُعطي أي جزء من (أو كل) طاقتها الحركية .^٥

تزيد الأشعة المتصادمة الطاقة المتاحة

٥ . أنظر : جيرارد ك. أونيل ، « حلقات تخزين الجسيمات » : Gerard K. O'Neill, "Particle Storage Rings" ، مجلة Scientific American ، عدد تشرين الثاني (نوفمبر) ، ١٩٦٦ .

إن مبادئ الميكانيكا لتغزو كل حقل من حقول العلوم والهندسة . وقد استعرضنا في هذا الباب مجرد نزر يسير من تطبيقات الميكانيكا . إلا أن للعلوم الأساسية من السلطان ما يجعلك ، نتيجة لدراسيتك هذه الأبواب ، أن تكتسب إدراكاً وهيمنة على مدى واسع من التطبيقات التي لم يرد ذكرها هنا والتي من الممكن ألا تكون حتى قد فكرت بها ؛ بل إن بعضها لم يفكر به أحد حتى الآن .

خلاصة الأفكار والتعاريف

الاحتكاك

- الاحتكاك السطحي هو ، بالتعريف ، قوة تؤثر بموازاة سطح تماس .
- للتماس الساكن ، يُعرّف معامل الاحتكاك الساكن μ_s بأنه النسبة بين قوة الاحتكاك العظمى والقوة العمودية (المعادلة ١٢,٤) .
- للتماس الانزلاقي ، يُعرّف معامل الاحتكاك الحركي μ_k بأنه النسبة بين قوة الاحتكاك والقوة العمودية (المعادلة ١٢,١٠) .
- لأجسام عادية الحجم والسرعة متحركة خلال الهواء ، تتناسب قوة الاحتكاك ، أو قوة الانجرار ، مع مساحة المقطع العرضي للجسم ومع مربع سرعته (المعادلة ١٢,٦٧) .
- يُحرز جسم ساقط سرعته النهائية عندما يتساوى مقدارا قوة الانجرار وقوة الجاذبية (المعادلة ١٢,٦٩) .
- يُعبّر عن الطاقة الحركية لجسم ساقط بدلالة دالة أسيّة في مسافة السقوط (المعادلة ١٢,٧٧) .
- للأجسام المجهرية المتحركة خلال الهواء ، تتبع قوة الانجرار
- قانون ستوكس (المعادلة ١٢,٧٨) ؛ فتتناسب مع قطر الجسم ومع سرعته .
- إذا كان جسم جاسي في حالة اتزان ساكن (استاتي) ، فإن القوة الكلية وعزم الدوران الكلي المؤثرين عليه ينبغي أن يساوي كلاهما صفراً .
- إن قوة الجاذبية المؤثرة على أجزاء نظام بالقرب من الأرض تكافئ قوة مفردة مؤثرة عند مركز كتلة النظام .
- في حل مسألة في الاستاتيكا ، يكون اختيار نقطة الأصل اعتباطياً ؛ وإن الاختيار المناسب لنقطة الأصل قد يجعل المسألة أسهل .

الموائع

- في الموائع ، كثيراً ما يكون بالإمكان إهمال قوى التوتر والقص ؛ فلا تبقى سوى قوى التضغط ، أو قوى الضغط ، قيد الاعتبار .
- الضغط هو كمية قياسية تُعرّف بأنها قوة التضغط لكل

وَحَدَّةٍ مَسَاحَةٍ فِي الْمَانِعِ .

ضُغُوطًا أَوْطًا ؛ وَهَذِهِ عِلَاقَةٌ تُدْعَى بِمَبْدَأِ بَرْنُولِي .

□ بِالنِّسْبَةِ لِمَانِعٍ فِي اتِّزَانٍ سَاكِنٍ ، يُحَكِّمُ الضَّغْطُ كِدَالَةً فِي الِارْتِفَاعِ بِوَاسِطَةِ مُعَادِلَةِ تَفَاضُلِيَّةٍ بَسِيطَةٍ هِيَ

□ تُدْعَى نَقْطَةً ذَوِ سَرَّجَةٍ صَفْرِيَّةٍ بِنَقْطَةِ رَكُودٍ ؛ فَهِيَ نَقْطَةٌ يَبْلُغُ عِنْدَهَا الضَّغْطُ نِهَآةَ عَظْمِي .

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g. \quad (12,29)$$

التَّصَادُمَاتُ النَّالِيَّةُ الْجِسْمِ

□ يَكُونُ الضَّغْطُ دَالَّةً خَطِيَّةً فِي الِارْتِفَاعِ لِمَانِعٍ لَا مُنْضَغَطٍ فِي حَالَةِ اتِّزَانٍ (المُعَادِلَةُ ١٢,٣٠ أَوْ ١٢,٣٢) .

□ التَّصَادُمُ الْعَرُونُ هُوَ ذَاكَ الَّذِي تَكُونُ فِيهِ الطَّاقَةُ الْحَرَكِيَّةُ الْكَلْبِيَّةُ مُحْفُوظَةً .

□ بِالنِّسْبَةِ لِمَانِعٍ مُنْضَغَطٍ تَتَنَاسَبُ كَثَافَتُهُ مَعَ الضَّغْطِ ، يَكُونُ الضَّغْطُ دَالَّةً أُسِّيَّةً فِي الِارْتِفَاعِ (المُعَادِلَةُ ١٢,٣٩ أَوْ ١٢,٤١) .

□ عِنْدَمَا يَصْدُمُ جِسْمٌ مُتَحَرِّكٌ جِسْمًا سَاكِنًا لَهُ نَفْسُ الْكَلَّةِ ، فَإِنَّ مَسَارِي الْجِسْمَيْنِ بَعْدَ التَّصَادُمِ يَتَعَامَدَانِ .

□ فِي مِثْلِ هَذَا التَّصَادُمِ ، يَسْتَطِيعُ الْجِسْمُ السَّاقِطُ أَنْ يَنْقَلِ أَيَّ جُزْءٍ مِنْ طَاقَتِهِ إِلَى الْجِسْمِ الْمُرْتَدِّ ، اعْتِمَادًا عَلَى زَاوِيَةِ الْإِنْخِرَافِ (المُعَادِلَةُ ١٢,٨٥) .

□ يُعَرَّفُ الْبَارُ بِأَنَّهُ الضَّغْطُ الَّذِي يَعَادِلُ ١٠° ن/م^٢ ، مِمَّا يُسَاوِي تَقْرِيبًا ١ (ضَغْطٌ) جَوِّيٌّ .

□ فِي إِطَارِ مَرْكَزِ الْكَلَّةِ ، تَتَسَاوَى زَخَامُ الْجِسْمِيَّاتِ وَتَتَصَادُّ ، قَبْلَ وَبَعْدَ التَّصَادُمِ عَلَى السَّوَاءِ .

□ مَبْدَأُ أَرْخِمِيدِسِ إِنَّ قُوَّةَ الطَّفْوِ إِلَى أَعْلَى عَلَى جِسْمٍ مَغْمُورٍ جُزْئِيًّا أَوْ كَلْبِيًّا فِي مَانِعٍ تَسَاوِي وَزْنَ الْمَانِعِ الْمُرَاحِ .

□ التَّصَادُمُ اللَّامَرُونُ النَّامُ هُوَ ذَلِكَ التَّصَادُمُ الَّذِي يَتِمُّ فِيهِ تَحْوِيلُ أَكْبَرِ جُزْءٍ مِمَّا مِمَّا مِنْ الطَّاقَةِ الْحَرَكِيَّةِ الْإِبْتِدَائِيَّةِ إِلَى أَنْوَاعٍ أُخْرَى مِنَ الطَّاقَةِ ؛ وَيُدْعَى هَذَا الْجُزْءُ بِالطَّاقَةِ الْمُتَاحَةِ .

□ فِي التَّدْفُقِ الثَّابِتِ ، يَكُونُ دَفْقُ الْكَلَّةِ ثَابِتًا ؛ وَيُعْطِينَا هَذَا الْمُعَادِلَةُ الْاسْتِمْرَارِيَّةُ

$$\rho A v = \text{constant}. \quad (12,47)$$

□ إِذَا اصْطَدَمَ جِسْمٌ مُتَحَرِّكٌ كَلَّتُهُ m_1 بِجِسْمٍ سَاكِنٍ كَلَّتُهُ m_2 ، فَإِنَّ النِّسْبَةَ $m_2/(m_1 + m_2)$ تُحَدِّدُ الْجُزْءَ الْمُتَاحَ مِنَ الطَّاقَةِ الْإِبْتِدَائِيَّةِ (المُعَادِلَةُ ١٢,٩٦) .

□ فِي التَّدْفُقِ اللَّامُنْضَغَطِ ، يُغَيِّرُ الشَّغْلُ الْمَبْدُولُ بِوَاسِطَةِ قُوَى الضَّغْطِ الطَّاقَةَ الْمِيكَانِيكِيَّةَ (حَرَكِيَّةً زَائِدَ وَضَعٍ) لِلْمَانِعِ ، وَيُقْضِي هَذَا التَّوَازُنُ الطَّاقِيَّ إِلَى مُعَادِلَةِ بَرْنُولِي

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{constant}. \quad (12,59)$$

□ فِي إِطَارِ اسْنَادِ مَرْكَزِ الْكَلَّةِ ، تَكُونُ الطَّاقَةُ الْحَرَكِيَّةُ بِرُمَّتِهَا طَاقَةً مُتَاحَةً .

□ فِي التَّنَسُّدِ الْإفْقِيِّ اللَّامُنْضَغَطِ ، يَكُونُ $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constant}$. عِنْدَئِذٍ تَسْتَلْزِمُ السَّرْعَاتُ الْأَعْلَى

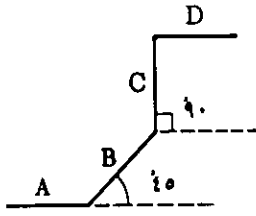
أَسْئَلَةُ

س ١٢,١ (١) لَا تَسْتَطِيعُ سَيَّارَةُ سِيَّاقِي أَنْ تَعْدَى تَسَارِعًا مُعَيَّنًا ، عَلَى سَطْحٍ مُحَدَّدٍ ، مِمَّا أَجْرِي مِنْ تَحْسِينَاتٍ

بند ١٢,١

على محرّكها . فلماذا يحدث هذا ؟ (٢) اقترح نوعاً من المركبات بدوالبب قد يكون خلوّاً من هذا التحديد .

س ١٢,٢ افرض جَدلاً أن معامل الاحتكاك الحركي لكتلة ما على لوح خشبي هو أكبر من معامل الاحتكاك الساكن . صِف ما قد يحدث عندما تزداد زاوية ميل اللوح مع الاتجاه الأفقي تدريجياً ابتداءً من الصفر . ماذا يحدث بالتحديد عندما تبلغ الزاوية قو ظا μ_s ($\text{arc tan } \mu_s$) وقو ظا μ_k ($\text{arc tan } \mu_k$) ؟



شكل ١٢,٣١ : سؤال ١٢,٣

س ١٢,٣ تُمثّل A في شكل ١٢,٣١ قُمر واد ؛ بينما تُمثّل B و C جدار مَبَسَّه mesa (أو جُرفٍ عالي bluff) ، وتشير D إلى قُمة المَبَسَّه . (١) فأَيُّ جزء من المظهر الجانبي profile يتكوّن على الأرجح من مادة مُفكّكة ؟ وأيُّ جزء يتكوّن على الأغلب من موادّ صَلْدَة ؟ (٢) لأيُّ جزء (أو أجزاء) من هذا المظهر الجانبي يُمكنُ حسابُ معامل الاحتكاك الساكن ؟ وما قيمته ؟

س ١٢,٤ يلاحظ أن أكواماً من مادة مُفكّكة ، كالرمل أو نشارة الخشب أو الحنطة ، يكون لها زوايا ركود (أو اتكاء) « مُميّزة تُستعاد مرةً بعدُ أخرى reproducible إذا زُوِدَتْ هذه الأكوام ببطء من علي . ناقشُ بعناية الاستنتاجات التي يمكنُ الحصولُ عليها من هذه الحقيقة . هل تُثبِتُ هذه أن قوّة الاحتكاك العُظمى المؤثّرة على قطعة من المادة تتناسبُ مع القوّة العموديّة على القطعة (المعادلة ١٢,٤) ؟

س ١٢,٥ سَمّ تأثيرين قد يجعلان زاوية ميل جوانب كومة من مادة مُفكّكة أقلّ من الزاوية الحرجة θ_c .

س ١٢,٦ لورغبت في حساب المركبة الأفقيّة العظمى للقوّة التي يؤثرُ بها إطارُ سيارةٍ بندرجٍ على رصيفٍ بدون انزلاق ، فهل سَتُستخدِمُ معامل الاحتكاك الساكن أم معامل الاحتكاك الحركي ؟ ولماذا ؟

س ١٢,٧ اقترح تعريفاً لمعامل احتكاك التدخُّرج rolling friction . لماذا يُختلّ - بصورة عامّة - أن يكون معامل احتكاك كهذا أقلّ كثيراً من معاملي الاحتكاك الساكن والاحتكاك الحركي ؟

س ١٢,٨ إذا نُرِعت كتلة ذات تنوّاتٍ سطحيّة صغيرة عن لوحٍ فِلَزيّ (مَعْدِنِيّ) وصُقِلَتْ polished ثم أُعيدَتْ إلى اللوح ، فإنَّ معامل احتكاكها يكون قد ازداد . فلماذا ؟

س ١٢,٩ تأخذُ النَظَريّاتُ المَجهريّةُ للاحتكاك بعين الاعتبار خشونة roughness السطح (الشبيبة بالحجارة والأخاديد ruts التي تُعَبِّقُ سَبَرُ سيارَةٍ على طريق ريفي) وقوّة التَصَالِه adhesion (الشبيبة بالقُطْران tar اللزج الذي يُعَبِّقُ سَبَرُ سيارَةٍ على طريق أَمْلَسَ) . اقرأ المزيد عن الاحتكاك في مَرَجِعٍ خارجي ، وقَدِّمُ تقريراً عن الأهميّة النسبيّة لهذين العاملين المساهمين في الاحتكاك السطحيّ .

س ١٢,١٠ كثيراً ما يُستخدَمُ التعبيران « مركزُ الجاذبيّة » و « مركزُ الكتلة » بالتبادل . فلماذا ؟

س ١٢,١١ (١) لماذا لا يتأثر جسمٌ في مجالٍ جاذبيّةٍ منتظمٍ بعزمٍ دورانيٍّ حول مركزِ كتلته ، أيّا كان شكلُهُ أو

• المَبَسَّه : هي مُضَبَّةٌ مستوية السطح متحدّرة الجوانب .

(عن القرد)

توزيع كتلته ؟ (٢) أذكر نتيجة فيزيائية هامة لهذه الحقيقة .

س ١٢،١٢ إذا كانت قاعدة سلم مرتكزة على أرض ملساء ، فإنه يتزلق دائماً ، مها كان معامل الاحتكاك عند نقطة تماسه مع الحائط . فسر ذلك .

س ١٢،١٣ يوجد لدى أمينة سر (سكرتيرة) ميزان زنبركي صغير لوزن مظاريف envelopes بريدية تصل زنتها إلى ٤ أونصات 4 oz . فتجد باستخدام هذا الميزان أنه لمن السهل تعيين وزن مظروف كبير وزن ١٢ أونصة أو أكثر إذا كان مركز كتلته عند مركز المظروف ، كما تستطيع ، بجهد أكبر قليلاً ، إيجاد وزن المظروف حتى لو لم تعلم مقدماً موقع مركز كتلته . اشرح طريقتها في العمل .

س ١٢،١٤ الضغط هو القوة على وحدة المساحة . فلماذا يُقاس الضغط غالباً بوحدة الطول ، مثل مليمترات زئبق ؟

بند ١٢،٣

س ١٢،١٥ (١) لماذا تكون السوائل لانضغطة تقريباً ؟ (٢) علل لماذا يستحيل وجود مادة لانضغطة بحق .

س ١٢،١٦ أي من خواص زيت السيارات تُقاس بدلالة وزنه ، وزن - ١٠ ، وزن - ٢٠ ، وزن - ٣٠ ، وهل جراً ؟

س ١٢،١٧ يستطيع بعض السوائل التأثير بضغط صغير سالب . فاذا يعني هذا ؟

س ١٢،١٨ في سفينة فضاء في حالة سقوط حر coasting spaceship ، يتشكل قدر يسير من الماء في كوب على هيئة كرة بدلاً من أن يطابق شكل الكوب . فلماذا ؟

س ١٢،١٩ لماذا يُستخدم الزئبق في البارومترات (مقاييس الضغط) ؟ ماذا يمكن أن تكون عيوب بارومتر مائي ؟

س ١٢،٢٠ اشرح عمل مصاصة من القش soda straw . أيها أصعب : المص خلال مصاصة قش طويلة أم قصيرة ؟ هل تعتمد سهولة الشرب بمصاصة على كثافة السائل ؟ أجب بدلالة الأفكار الأساسية لميكانيكا الموائع .

س ١٢،٢١ مقياس الارتفاع altimeter هو أداة تُترجم قياسات الضغط إلى قراءات ارتفاع . (١) إذا حُبل مقياس ارتفاع أسفل مهوى (مدخل) منجم mine shaft ، فهل يُسجل عمقه بدقة ؟ (٢) إذا أُنزل مقياس ارتفاع في بحيرة ، فهل يُسجل العمق بدقة ؟

س ١٢،٢٢ نُكتب بالطلاء على جوانب العديد من السفن أرقام تدل على المسافة الرأسية إلى الأسفل حتى قعر السفينة keel . اشرح كيفية استخدام هذه الأرقام في تحديد حمولة السفينة الإجمالية .

س ١٢،٢٣ (١) لماذا يطفو شخص بدين في الماء بسهولة أكبر من شخص نحيف ؟ (٢) لماذا يكون الطفو في الماء المالح أسهل منه في الماء العذب ؟ (٣) لماذا يجد الشخص النحيف الذي يطفو في الماء العذب

بشق النفس أنه من المفيد له أن يأخذ نفساً عميقاً (يشهق) inhale ؟ (٤) هل بمقدورك الطفو في شراب قوي (محلول نصفه كحول ونصفه ماء) ؟

س ١٢,٢٤ يتدفق الماء في أنبوب أفقي ذي مقطع عرضي دائري وقطر متغير . فكيف تعتمد سرعته على قطر الأنبوب ؟

س ١٢,٢٥ هل يستطيع الهواء التدفق بسرعة ثابتة عبر أنبوب ذي مقطع عرضي دائري وقطر متغير ؟ إن لم يصح ذلك ، فلماذا ؟ وإن صح ، فما الاستنتاجات الأخرى التي يمكنك التوصل إليها عن خواص الهواء في الأنبوب ؟

س ١٢,٢٦ نسري جميع قوانين الفيزياء المألوفة على كوكب خرافي mythical معين باستثناء واحد - هو أن كتلة أي جسم تعتمد على ارتفاعه فوق سطح الكوكب . (١) فهل يكون ممكناً ، على هذا الكوكب ، تدفق المائع المنتظم في أنبوب غير أفقي ؟ (٢) هل تصف المعادلة $dm/dt = \rho A v$ بدقة تدفق الكتلة عند أية نقطة ؟ (٣) وهل تصح المعادلة $\rho A v = \text{constant}$ ؟

س ١٢,٢٧ لماذا يضيق مجرى ماء يتدفق من حنفية مطبخ أثناء سقوطه ؟

س ١٢,٢٨ تحت أي شروط قد يكون مجرى ماء ساقط أسطوانة مقطوعها العرضي ثابت ؟ هل يكون مثل هذا التدفق لامنضغطاً ؟ وهل تنطبق عليه المعادلة الاستمرارية ؟

س ١٢,٢٩ هب أن التدفق الميّن في شكل ١٢,١٦ (ب) هو تدفق منتظم لامنضغط . (١) فأين تبلغ السرعة قيمتها القصوى وأين تبلغ قيمتها الدنيا ؟ (٢) أين يكون الضغط أكبر ما يمكن وأين يكون أقل ما يمكن ؟

س ١٢,٣٠ من الممكن ، من حيث المبدأ ، صنع مقاييس للسرعة الهوائية يدل على سرعة الطائرة الحقيقية بالنسبة إلى الهواء عند كل الارتفاعات . فما هي المعلومات التي يجب أن يزود بها المقياس بالإضافة إلى فرق الضغط في أنبوب بيتو ؟ وكيف يمكن الحصول على هذه المعلومات الإضافية ؟

س ١٢,٣١ ما هو التوّب (البخاري أو الغازي) cavitation ؟ وماذا يسببه ؟ هل يحدث في الغازات والسوائل على السواء ؟ وهل يبطل إما المعادلة الاستمرارية أو معادلة برنولي ؟

س ١٢,٣٢ لو كانت قوة انجرار الهواء الاحتكاكي على جسم مستقلة عن سرعته ، فهل كان الجسم سيحقق سرعة نهائية ؟ ناقش معدّل تبدّد dissipation الطاقة الحرارية بواسطة مثل هذا الجسم أثناء سقوطه في الهواء .

س ١٢,٣٣ هل محصلة القوة المؤثرة على غواص هوائي (المعادلة ١٢,٧٠) قوة محافظة ؟ علّل لماذا تكون أولاً تكون كذلك ؟

س ١٢,٣٤ عند ميلان محدّد لجناح wing على اتجاه حركته عبر الهواء (أي عند « زاوية الهجوم » له) ،

تكون نسبة قوة الدفع إلى قوة الانجرار على الجناح مستقلة تقريباً عن سرعة الجناح . فلماذا ؟

س ١٢,٣٥ تُسقط كرات من السكون في الهواء أزواجاً أزواجاً . حدد ، لكل من الأزواج الثلاثة الآتية ، أي الكرتين تصل الأرض أولاً : (أ) كرتان متساويتان في الكتلة ومختلفتان في نصف القطر ، (ب) كرتان متساويتان في نصف القطر ومختلفتان في الكتلة ، و (ج) كرتان متساويتان في الكثافة ومختلفتان في كلاً الكتلة ونصف القطر .

س ١٢,٣٦ المهدّي النيوتروني neutron moderator هو مادة تُستخدم لتقليل الطاقة الحركية للنيوترونات . لماذا يكون البارافين paraffin مهدّئاً جيداً ؟ ولماذا يكون الرصاص lead مهدّئاً رديئاً ؟

بند ١٢,٦

س ١٢,٣٧ لوحظ أن جسيماً معيناً كتلته m له نفس الطاقة الحركية K_1 في إطارَي إسناد مختلفين . فما السرعة النسبية الدنيا لإطارَي الإسناد هذين ؟ وما سرعتها النسبية القصوى ؟

س ١٢,٣٨ بما أن الأشعة المتصادمة توفر مثل تلك المزية بزيادة الطاقة المتاحة ، فلماذا لا تُبنى كل المسارعات بأشعة متصادمة ؟

تمارين

ت ١٢,١ تَمَيَّزُ حَصَاةٌ عَلَى لَوْحٍ خَشْبِيٍّ بِمَعَامِلِ احتكاك ساكن $\mu_s = 0.8$ ومعامل احتكاك حركي $\mu_k = 0.6$. أميل اللوح حتى بدأت الحَصَاةُ الساكنةُ أصلاً بالانزلاق . (١) فما زاوية اللوح مع الاتجاه الأفقي ؟ (٢) وما تسارع الحَصَاةِ أسفل اللوح ؟ (٣) استخدم طريقتين لإيجاد سرعة الحَصَاةِ بعد أن تنزلق ١ م على امتداد اللوح : (أ) ابدأ بتسارعها ؛ (ب) ابدأ باعتبارات طاقة .

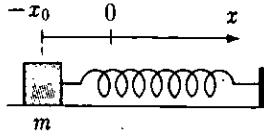
بند ١٢,١

ت ١٢,٢ يجلس رجل كتلته ٦٠ كـ و غلام كتلته ٢٠ كـ جنباً إلى جنب على المقعد الخلفي لـعربة غولف بدون أن يتوفر لها مسند قدم أو أي شيء يُمكن أن به . فلا يسقط أي منها عندما تتحرك العربة بتسارع $a = 0.3g$ ؛ لكن الغلام وحده يسقط عندما تتحرك العربة بتسارع $a = 0.4g$. فما الاستنتاجات المقدارية التي بمقدورك الانتهاء إليها عن معامل احتكاك أي من الشخصين مع المقعد ؟

ت ١٢,٣ يرغب رجل في تكوين رمل في منطقة مربعة مساحتها 12 في فناء بيته بدون أن يتناثر الرمل إلى المنطقة المحيطة . بين أن أكبر حجم من الرمل يستطيع تكوينه هو $\frac{1}{3}\mu$ ، حيث μ معامل الاحتكاك الساكن للرمل المرتكز على الرمل .

ت ١٢,٤ يُعَدُّ مَضِيفٌ مَائِدَةً بِالْخَرْفِ الصِّبْيِ الْفَاخِرِ ، ثُمَّ يَسْحَبُ بِتَبَاوٍ غِطَاءَ الْمَائِدَةِ مِنْ تَحْتَ الْأَطْبَاقِ . افترض أن للأطباق على الغطاء معامل احتكاك ساكن وحركي يمثلان للمتابينة (اللامتساوية) inequality $\mu_s > \mu_k$. (١) بأي تسارع ابتدائي يتوجب على المضيف أن يسحب الغطاء ؟ وبأي تسارع يتعين عليه أن يستمر في سحبه فور بدئه بالحركة ؟ (٢) ما هو الدور ، هذا إن وجد ،

الذي يلعبه معامل الاحتكاك بين الغطاء والمائدة في هذا الأداء ؟ (٣) لماذا يُحتمل أن يلاقي الشخص غير المتمرس نجاحاً جزئياً فقط عند أدائه الحيلة التالية : سحب غطاء المائدة جزئياً من تحت الأطباق بحيث تبدأ من ثم بالحركة ؟



شكل ١٢,٣٢ : تمرين ١٢,٥

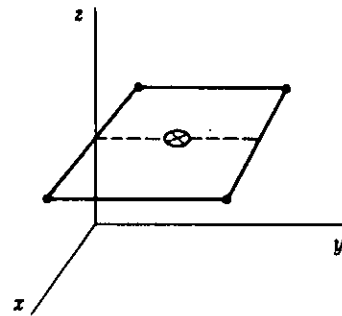
ت ١٢,٥ بين شكل ١٢,٣٢ كتلة قيمتها m متصلة بزنبرك وتستطيع الانزلاق فوق سطح أفقي . فتكون مركبتا القوة الأفقية التي تؤثر على الكتلة عندما تتحرك : القوة المرجعة (قوة الإعادة) للزنبرك $F_s = -kx$ ، وقوة احتكاك ثابتة $F_f = \pm \mu mg$ ، حيث تعتمد الإشارة على اتجاه الحركة . سحبت الكتلة جانباً إلى $x = -x_0$ ، ثم تركت . باستخدام اعتبارات طاقة ، بين أنها تنزلق إلى $x = x_0 - (2\mu mg/k)$ قبل أن تعكس اتجاهها .

بند ١٢,٢

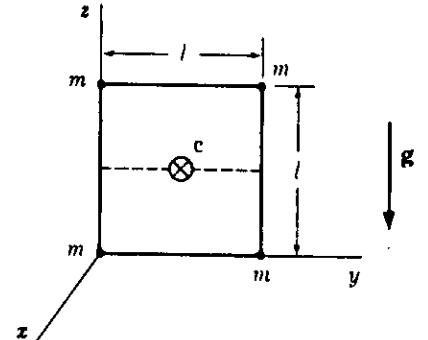
ت ١٢,٦ رُبِيت أربعة جسيمات متساوية الكتلة m عند زوايا مربع طول ضلعه l ، كما هو مبين في شكل ١٢,٣٣ (أ) . (١) احسب عزم الحاذبية الدوراني على كل جسيم بالنسبة إلى نقطة الأصل ، وبين أن مجموع هذه العزوم هو نفسه كما لو أثرت قوة مقدارها $4mg$ عند مركز الكتلة . (٢) أعد هذا البرهان مستخدماً مركز الكتلة كنقطة إسناد لحساب العزوم . (٣) أدير المربع الآن بزاوية 90° حول الخط المتقطع في الشكل ، مؤدياً إلى الترتيب المبين في شكل ١٢,٣٣ (ب) . أعد الجزئين ١ و ٢ .

ت ١٢,٧ إبدأ بشروط الاتزان الساكن لجسم جاسي لاشتقاق صيغة الفائدة الآلية لرافعة بسيطة .
ت ١٢,٨ حل مسألة الباب في مثال ١ بند ١٢,٢ ، باختيار نقطة أخرى خلاف B في شكل ١٢,٤ كنقطة الإسناد لحساب عزوم الدوران .

ت ١٢,٩ حل مسألة السلم في مثال ٢ بند ١٢,٢ ، باختيار نقطة أخرى خلاف قاعدة السلم كنقطة الإسناد لحساب عزوم الدوران .

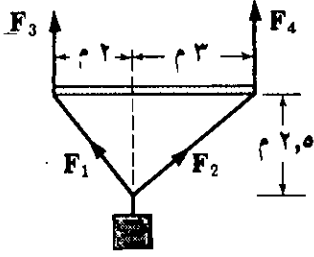


(ب)



(أ)

شكل ١٢,٣٣ : تمرين ١٢,٦



شكل ١٢,٣٤ : تمرين ١٢,١٣ .

ت ١٢,١٠ (١) أوجد تعبيراً لقوة الاحتكاك F_f المؤثرة على قاعدة السلم في شكل ١٢,٥ كدالة في المسافة s التي تسلكها الرجل على السلم . (٢) إذا كان معامل احتكاك السلم على الأرض $\mu_s = 0.35$ ، وزاوية ميل السلم مع الاتجاه الأفقي $\theta = 60^\circ$ ، فما المسافة التي يتسلقها الرجل على السلم ذي الطول ٣ م قبل أن ينزلق ؟

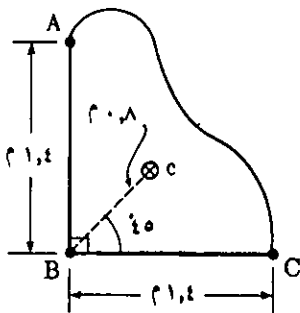
ت ١٢,١١ حل مسألة السلم في مثال ٢ ببند ١٢,٢ إذا كانت كتلة السلم $\frac{1}{2}M$ (حيث M كتلة الرجل) .

ت ١٢,١٢ يقبض رجل على طرف عمود بإحدى يديه ويُمسِكُ به أفقياً . كتلة العمود ١ كـ و طوله ٢ م . (١) فما القوة الكلية التي يؤثر بها الرجل على العمود ؟ (٢) وما عزم الدوران الكلي الذي يؤثر به على العمود ؟ (٣) إذا أمكن تقريب فعله على العمود بقوتين المسافة بينهما ١٠ سم وتؤثران باتجاهين متضادين ، فما مقدارا واتجاهها هاتين القوتين ؟

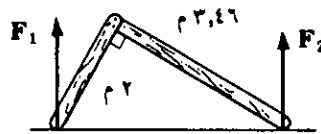
ت ١٢,١٣ جسم وزنه ٢٠٠٠ ن معلق كما هو مبين في شكل ١٢,٣٤ . فما مقدارا القوتين F_1 و F_2 ؟

ت ١٢,١٤ يزن العائق beam الأفقي المبين في الشكل الوارد في التمرين السابق ١٠٠٠ ن ، وتكون الحبال مُهملة الوزن . فما مقدارا القوتين F_3 و F_4 ؟

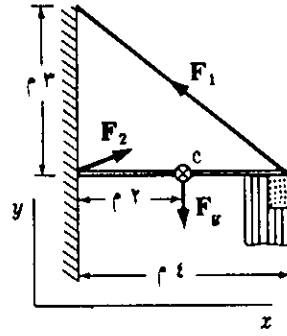
ت ١٢,١٥ لوحاً خشبياً طولها ٢ م وكتلة وحدة الطول لها واحدة ، بُنيت معاً بمسامير bolted ليُشكل حرف « L » . تسند القوتان الرأسيتان F_1 و F_2 التركيب عندما يرتكز على سطح أفقي ، كما هو مبين في شكل ١٢,٣٥ . فما النسبة F_1/F_2 ؟



شكل ١٢,٣٦ : تمرين ١٢,١٦ .



شكل ١٢,٣٥ : تمرين ١٢,١٥ .



شكل ١٢,٣٧ : تمرين ١٢,١٧.

ت ١٢,١٦ يحمل ثلاثة رجال بياناً (بيانو) piano كبيراً عند النقاط A ، B ، و C ، كما هو مبين في شكل ١٢,٣٦ . ويظهر في هذا الشكل أيضاً موقع مركز الكتلة للبيان . إذا كان وزن البيان ٣٥٠٠ ن ، فما القوة التي يؤثر بها كل رجل عندما يحمل البيان ساكناً فوق الأرضية ؟

ت ١٢,١٧ ترتكز سارية عَلمٍ كما هو مبين في شكل ١٢,٣٧ . وتكون كتلة السارية (مع العلم ٢٠ كـرغ ؛ كما يقع مركز كتلتها عند النقطة المبيّنة في الشكل . (١) حدد مركبتي x و y للقوى الثلاث F_1 ، F_2 ، و F_3 . (٢) إذا لم تثبت قاعدة السارية بالبنية ، فما الحد الأدنى لمعامل الاحتكاك الساكن للسارية مع البنية الذي يمنع السارية من الانزلاق ؟

ت ١٢,١٨ يُنقل ماء من بُعٍ خلال أنبوبٍ طوله ١٠٠ م أسفل تلٍ يميل بزاوية ٢٠ مع الاتجاه الأفقي . فما الضغط عند الطرف الأسفل للأنبوب ، عندما يكون مملوءاً بالماء الساكن ؟

ت ١٢,١٩ يضغط مكبس piston إلى الأسفل على السطح العلوي لوعاء ماء بضغطٍ يتزايد تدريجياً من ١ جوي إلى ١٠ جوي . (١) إذا كان الوعاء أسطوانة دائرية عمقها ١ م ، فإذا يحدث للضغط عند قاع الوعاء ؟ (٢) إذا كان عمق الوعاء ١ م وكانت مساحته عند القاع ضعف مساحته عند السطح العلوي ، فإذا يحدث للضغط عند القاع ؟

ت ١٢,٢٠ ما أقصى ارتفاع نظري يمكن رفع الماء إليه بواسطة مضخة رافعة lift pump (أ) من بئر قرب مستوى سطح البحر ؛ (ب) من بئر على ارتفاع ٥٠٠٠ قدم ؟ (تَمَصّ sucks « المضخة الرافعة الماء من بئر بتقليل ضغط الهواء في أنبوبٍ يمتد داخل الماء .)

ت ١٢,٢١ يبلغ عمق الماء في مربي مائي (خوض للأحياء المائية) aquarium ٠,٤ م كما يبلغ طول المربي ٠,٦ م . (١) فما القوة التي يؤثر بها الماء على أحد جوانب المربي ؟ (٢) ما القوة المضادة التي يؤثر بها الهواء الخارجي على هذا الجانب من المربي ؟ (٣) وما القوة الكلية للهواء والماء على جانب المربي ؟ بين أن هذه القوة الكلية كانت ستظل على حالها لو نُقل المربي إلى ارتفاع كبير .

ت ١٢,٢٢ يذهب رجلٌ مُعتاد على العيش في مُستوى سطح البحر للتزلج على ارتفاع ١٠٠٠٠ قدم . فبأي عامل يتناقص استنشاقه للأكسجين لكل زفزة (كل نفس) per breath ؟

(٢) لو تناقص الضَّغْطُ في طائرةٍ تَقْلُ تجاريّةٍ على ارتفاع ٣٥٠٠٠ قدم إلى ضغطِ الهواءِ الخارجيّ ، فكيف كان سيَقَارَنُ الأكسجينُ المتوافِرُ لكلِّ زَفْرَةٍ مع قيمَتِهِ عند سطحِ البحرِ ؟

ت ١٢,٢٣ (١) بَيْنَ أَنَّهُ ، للارتفاعاتِ التي تَقِلُّ عن بضعة كيلومترات ، بتناقصِ ضغطِ الهواءِ خطيّاً على وجهِ التقريبِ مع الإرتفاعِ وَفَقاً للصِّبْغَةِ

$$p = p_0 - \alpha y,$$

حيث p_0 هو الضَّغْطُ عند سطحِ البحرِ و y الإرتفاعُ . أوردَ تعبيراً للكَمِيَّةِ α يحتوي على مقاييسِ الإرتفاعِ b . (٢) ما النسبةُ المئويةُ لتناقصِ الضَّغْطِ لكلِّ ألفِ قدمٍ علوٍ عند الإرتفاعاتِ المنخفضة ؟

ت ١٢,٢٤ يكونُ مقياسُ معيَّنٌ للارتفاعِ صحيحاً في حدود ٢٠ قدماً ، ضمن بضعة آلاف قدمٍ فوق سطحِ البحرِ . فما الدِّقَّةُ المطلقةُ والنسبيةُ - على حدِّ سواء - لضغطِ الهواءِ التي يتعيَّنُ على المقياسِ أَنْ يتَحَسَّسَها ؟

ت ١٢,٢٥ (١) تطفو قطعةُ خشبٍ في الماءِ بحيثُ يكونُ ٤٠ بالمئة من حجمِها فوق السَّطحِ . فما كثافتُ الخشبِ ؟ (٢) هل تطفو قطعةُ الخشبِ هذه في الغازولين gasoline ؟ إن كان الأمرُ كذلك ، فأَيُّ نسبةٍ مئويةٍ تقريبيةٍ من حجمِها تكونُ فوق السَّطحِ ؟

ت ١٢,٢٦ يحتوي الجزءُ السفليُّ من وعاءٍ على ماءٍ ؛ بينما يحتوي الجزءُ العلويُّ منه على زيتٍ كثافتهُ ٠,٦ غ/سرم^٣ . أسْفِطْ جسمٌ كثافتهُ ٠,٩ غ/سرم^٣ في الوعاءِ . فما الجزءُ من حجمِ هذا الجسمِ الذي يكونُ - عند الاتزان - تحت السَّطحِ البينيِّ لِلزَّيْتِ والماءِ oil-water interface ؟

ت ١٢,٢٧ يَزِنُ جسمٌ ٣ ن في الهواءِ و ٢,٥ ن في الماءِ . (١) فما كثافتهُ ؟ (٢) وما وزْنُهُ عندما يُغْمَرُ في زيتٍ كثافتهُ ٦٠٠ كغ/م^٣ ؟

ت ١٢,٢٨ وعاءٌ سَعَتُهُ ١ لتر مفتوحٌ للهواءِ في غرفةٍ مختبرٍ ، وَجَدَ أَنَّهُ يَزِنُ ٥ ن بالضبطِ . فما وزْنُهُ تَحْتَ كُلِّ مِنَ الظُّرُوفِ التَّالِيَةِ ؟ (١) يُفَرِّغُ الوعاءُ ثم يُوزَنُ في الهواءِ . (٢) يُدْخَلُ في الوعاءِ ثانيةً هواءٌ ضغطُهُ ١ جَوِّيٌّ وَيُوزَنُ في الفراغِ vacuum . (٣) يُفَرِّغُ الوعاءُ وَيُوزَنُ في الفراغِ .

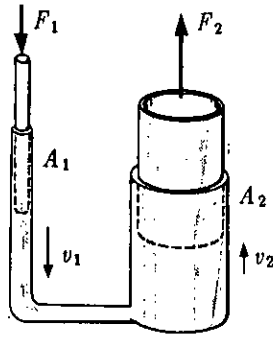
ت ١٢,٢٩ مُنْطَادُ هَواءٍ ساخنٍ يُزِيحُ ١٩٢٥ كغ من الهواءِ . يحتوي عند لحظةٍ معينةٍ على ١٦٠٠ كغ من الهواءِ الساخنِ ، بينما تكونُ بقيَّةُ كتلَتِهِ ٣٢٥ كغ ؛ وعلى ذلك ، فلا يتأثَّرُ بِمحْصَلَةِ قُوَّةٍ . بعد مَدَّةٍ قصيرةٍ تزدادُ كتلةُ الهواءِ داخلِ المنطادِ إلى ١٦٥٠ كغ . فما محْصَلَةُ القُوَّةِ المؤثِّرةِ على المنطادِ (مقداراً واتِّجَاحاً) ؟ وما تَسَارُعُ المنطادِ ؟ (ملاحظة : يكونُ الهواءُ داخلِ المنطادِ جزءاً من النِّظامِ المُتَسَارِعِ) .

ت ١٢,٣٠ يندفِّقُ الماءُ بانتظامٍ من أنبوبٍ قطره ثلاثة أرباع بوصة إلى أنبوبٍ قطره نصفُ بوصة . (١) فبأيِّ عاملٍ تتغيَّرُ سرعتهُ ؟ (٢) وبأيِّ عاملٍ يتغيَّرُ دَفْقُ كتلَتِهِ ؟

بند ١٢,٤

ت ١٢,٣١ عندما يمرُّ هواءٌ متدفِّقٌ بانتظامٍ من أنبوبٍ قطره ١ قدم إلى أنبوبٍ قطره ٦ بوصات ، تزيد كثافتهُ

بمقدار ٢٠ بالمئة . فبأي عامل تتغير سرعته ؟ وهل تتطلب هذه الإجابة بقاء درجة حرارة الهواء ثابتة ؟



شكل ١٢,٣٨ : تمرين ١٢,٣٢ .

ت ١٢,٣٢ الفائدة الآلية للمضخة المائية المبينة في شكل ١٢,٣٨ هي $M.A. = A_2/A_1$ ، حيث A_1 و A_2 مساحتا الأسطوانتين . اشتق هذه النتيجة بطريقتين : (١) إستخدم مبدأ باسكال والعلاقة بين القوة والضغط - طريقة استاتيكية ؛ و (٢) إستخدم المعادلة الاستمرارية وتساوي قدرة الداخل والخارج - طريقة ديناميكية .

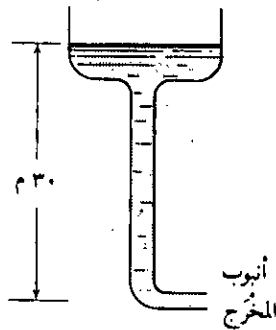
ت ١٢,٣٣ فرق الضغط بين طرفي أنبوب أفقي ينقل ماء هو ١ جوي . (١) فما التغير في الطاقة الحركية لكل وحدة حجم (بوحداث ج / م^٣) ماء تمر عبر الأنبوب ؟ (٢) وما التغير في الطاقة الحركية لكل وحدة كتلة (بوحداث ج / كغ) ماء تمر عبر الأنبوب ؟

ت ١٢,٣٤ (١) سائل كثافته $\rho = ٦٠٠$ كغ / م^٣ يتدفق خلال الأنبوب المبين في شكل ١٢,٢٠ . فإذا كانت نسبة المساحتين $A_1/A_2 = 1.5$ والفرق بين الضغطين ٠,٠٥ جوي ، فما السرعة v_1 ؟ (٢) إذا كان الضغط في الجزء المتسع من الأنبوب $p_2 = ٢$ جوي ، فما أقصى ضغط ممكن بمقدور هذا المائع أن يؤثر به عند أية نقطة في حالة تدفق أفقي منتظم ؟

ت ١٢,٣٥ ما هو الضغط عند نقطة الركود على كرة قاعدة مقربة من موقع الهدف home plate بسرعة ٣٠ م / ث ؟ عبر عن إجابتك بوحداث ن / م^٢ وجوي atmospheres .

ت ١٢,٣٦ كم ينبغي أن تكون سرعة تدفق هواء كثافته معيارية وضغطه جوي واحد حتى يكون ضغط الركود له ٢ جوي ؟ عبر عن الإجابة بوحداث م / ث وبعده ماخ (نسبة السرعة إلى سرعة الصوت) .

ت ١٢,٣٧ يمثل شكل ١٢,٣٩ أدناه خزان ماء يزود تجمعا سكانيا صغيرا . ويكون الضغط عند السطح العلوي للماء ١ جوي وسرعة الماء مهملة . (١) فما الضغط عند أنبوب المخرج exit pipe ، عندما لا يتدفق ماء ؟ (٢) يكتم يتناقص الضغط عند أنبوب المخرج إذا تدفق الماء هناك بسرعة ١٠ م / ث ؟ (٣) إذا كان للضغط عند أنبوب المخرج أن يظل فوق ٣ جوي ، فما أقصى سرعة ممكنة للتدفق خلال هذا الأنبوب ؟ (٤) إذا كانت الحاجة إلى الماء قد تناهز ١٠ كغ / ث ، فما الحد الأدنى المطلوب لقطر أنبوب المخرج للحفاظ على ضغط ٣ جوي أو أكثر ؟



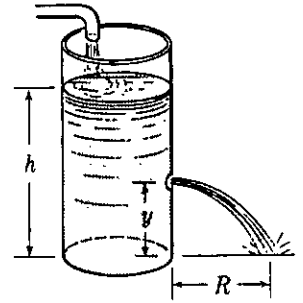
شكل ١٢,٣٩ : تمرين ١٢,٣٧ .

ت ١٢,٣٨ في لعبة صاروخ للأطفال ، يُرغمُ هواءٌ مضغوطٌ الماء على الخروج من فوهة nozzle صغيرة .
 هَبْ أَنْ ضَغَطَ الماء بداخل الصاروخ هو ٣ جوي وسرعته مهملة . (١) فعلى فرض أن الضغط عند
 الفوهة هو ١ جوي ، احسب سرعة النفاذ exhaust speed للماء . (٢) إذا كان معدل تدفق الكتلة
 من الفوهة ٠,٥ كغ/ث ، فما الكتلة التي يستطيع الصاروخ رفعها ؟ (يتحدد دفع الصاروخ
 بالمعادلة ٨,٦٩) .

ت ١٢,٣٩ (١) بين أن الضغط للتدفق المنتظم اللامضطرب في أنبوب أفقي يتحدد بالعلاقة

$$p = p_1 - \frac{C}{A^2}$$

حيث p_1 ضغط الركود (المعادلة ١٢,٦٥) ، و A مساحة مقطع الأنبوب ، الذي يمكن أن يكون
 متغيراً ، و C ثابت موجب . (٢) ما علاقة C مع تدفق الكتلة وكثافة المائع ؟ (٣) خطّط رسماً بيانياً
 للضغط p ضد A ، وأشير إلى سيمانه البارزة .



شكل ١٢,٤٠ : تمرين ١٢,٤٠

ت ١٢,٤٠ يتكوّن نمط pattern تدفق منتظم في أسطوانة بجانبها ثقب ، كما هو مبين في شكل ١٢,٤٠ .
 أثبت أن سرعة السائل المنبثق عن الثقب هي $v \cong \sqrt{2g(h-y)}$. هل تتغير هذه السرعة بتغير
 ضغط الهواء ؟

ت ١٢,٤١ تقطع نافورة jet الماء المنبثقة عن جانب الأسطوانة المبيّنة في التمرين السابق مسافة أفقية R قبل
 أن ترتطم بالأرض . (١) اشتق صيغة تحدد R . ما قيمة R لأسطوانة مائلة على القمر ، حيث
 تسارع الجاذبية g ؟ (٢) بين أن أقصى مدى لنافورة الماء هو $R_{max} = h$ ، وأنه يتحقق عندما
 يكون $y = \frac{1}{2}h$.

ت ١٢,٤٢ (١) ما فرق الضغط $p_1 - p_0$ في أنبوبة بيتو الذي يدل على سرعة هوائية مقدارها
 ٦٠ م/ث عند سطح البحر ؟ (٢) ما السرعة الحقيقية للطائرة بالنسبة إلى الهواء على ارتفاع
 ١٠٠٠٠ قدم ، إذا كان فرق الضغط في أنبوبة بيتو على حالته السابقة (جاعلاً بذلك قراءة
 مقياس السرعة الهوائية تساوي ٦٠ م/ث) ؟

ت ١٢,٤٣ تحقق من أن معامل الإبحار C_D في المعادلة ١٢,٦٧ هو لأبعدي .

بند ١٢,٥

ت ١٢,٤٤ (١) احسب نسبة قوتي الإبحار على طائرة نفاثة تطير بسرعة ٥٥٠ ميل/س على ارتفاع
 ٣٦٠٠٠ قدم وعلى طائرة بمحركات تطير بسرعة ٣٠٠ ميل/س على ارتفاع ٢٠٠٠٠ قدم .
 افرض أن لكلتا الطائرتين نفس المساحة الأمامية ومعامل الإبحار . (٢) باستخدام نفس
 الافتراضين ، احسب نسبة قوتي الإبحار على وسيلة نقل فوْصوْتِيَّة supersonic تطير بسرعة ١٥٠٠
 ميل/س على ارتفاع ٦٠٠٠٠ قدم وعلى الطائرة النفاثة الدوْصوْتِيَّة subsonic المذكورة آنفاً .

ت ١٢,٤ (١) كيف تعتمد القدرة اللازمة لتحريك طائرات لها نفس المساحة الأمامية ومعامل الانجرار على سرعتها في الهواء ؟ (٢) بين أن هذه العلاقة بين القدرة والسرعة لا تنطبق على الطائرات الثلاث ذات جهاز الهبوط الثابت والتي ترد خواصها في الجدول التالي . إقترح سبباً للاختلاف بين الصيغة النظرية البسيطة والمعطيات الفعلية . (٣) على فرض أن المساحات الأمامية للطائرات الأربع المذكورة في الجدول متساوية ، أوجد معاملات الانجرار النسبية لها .

نمط الطائرة	القدرة المستخدمة في الطيران (قدرة حصان)	سرعة الطيران (ميل/س)
جهاز هبوط ثابت	٧٠	١٠٥
fixed landing gear	١٠٥	١٢٥
	١٦٠	١٥٥
جهاز هبوط قابل للسحب	١٢٥	١٦٠
retractable landing gear		

ت ١٢,٤٦ بين أن تسارع جسم ساقط من السكون في الهواء يتحدد بالعلاقة

$$a_x(x) = g e^{-x/x_c},$$

حيث تقاس x إلى أسفل من نقطة بدء السقوط (و x هي المسافة المميرة التي تحددها المعادلة ١٢,٧٦) . افرض أن معامل الانجرار ثابت .

ت ١٢,٤٧ (١) إحصب بالتقريب السرعة النهائية لغواص هوائي قرب سطح البحر . قدر كتلته (أو كتلتها) ومساحة المقطع العرضي ؛ استخدم $C_D = 0.5$. (٢) ما المسافة المميزة x_c (المعادلة ١٢,٧٦) لهذه السرعة النهائية ؟

ت ١٢,٤٨ فك المعادلة ١٢,٧٧ بدلالة قوى x/x_c ، وبين أنه عندما يكون $x \ll x_c$ ، فإن سرعة جسم ساقط من السكون تتحدد تقريباً بالعلاقة :

$$v \cong \sqrt{2gx} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{x}{x_c} \right).$$

ت ١٢,٤٩ لوحظ أن كرتين نسبة قطريهما ٢ تظلان معاً أثناء سقوطهما ، وتبلغان نفس السرعة النهائية . فما الكثافة النسبية للكرتين ؟

ت ١٢,٥٠ (١) تتأثر قطيرة droplet صغيرة ساقطة في الهواء بقوة انجرار تحددها المعادلة ١٢,٧٨ . أوجد تعبيراً للسرعة النهائية للقطيرة v_T . (٢) بين بحجج وصفية أن القطيرة يجب أن تقترب من هذه السرعة في مسافة مميزة تتحدد بالعلاقة $x_c = v_T^2/g$.

ت ١٢,٥١ ما البعد الفيزيائي لعدد رينولدز المعرف بالمعادلة ١٢,٧٩ ؟

ت ١٢,٥٢ تساوي لزوجة الهواء $\mu = 1.8 \times 10^{-4}$ كغ/م ث . أجب عن السؤالين التاليين مستخدماً معطيات من جدول ١٢,١ . (١) ما مدى السرعة لكرة قطرهما ٢ سم الذي تتحدد فيه قوة انجرار الهواء بقانون ستوكس ؟ (٢) ما مدى السرعة الذي تناسب فيه قوة الانجرار مع v^2 ؟

ت ١٢,٥٣ كرتة pellet قطرهما 2×10^{-4} م وكتلتها 10^{-8} كغ تسقط في ماء لزوجته في درجة حرارة الغرفة هي $\mu = 1.0 \times 10^{-3}$ كغ/م ث . (١) بافتراض صحة قانون ستوكس ، احسب السرعة النهائية للكرتة ، وأوجد عدد رينولدز لها عند سرعتها النهائية ، ثم استخدم جدول ١٢,١ للتحقق من صحة الافتراض الابتدائي . (٢) أورد تقدير رتبة مقدار الزمن اللازم للكرتة لبلوغ السرعة النهائية إذا بدأت من السكون .

ت ١٢,٥٤ ندخل نيوترونات من مفاعل نووي reactor صهريجاً من الماء يحيط بها ، حيث تصطدم تبعاً ببروتونات (نوى الهيدروجين) . فيمكن اعتبار البروتونات ، للنيوترونات ذات الطاقة الكافية ، ساكنة تقريباً قبل أن تصطدم بها النيوترونات . (١) أوجد الطاقة النهائية لنيوترون طاقته ١ مغ . ف يرتطم بروتون وينحرف بزاوية (أ) ٣٠ ، (ب) ٤٥ ، أو (ج) ٦٠ . (٢) إذا كان النيوترون يفقد ، في المتوسط ، نصف طاقته الحركية في كل تصادم مع بروتون ، فما عدد التصادمات التقريبي مع البروتونات اللازم لتخفيض طاقة نيوترون من ١ مغ . ف إلى ١ كغ . ف ؟ (ملاحظة : تصطدم النيوترونات أيضاً بنوى الأكسجين في الماء ، لكنها تفقد طاقة أقل في مثل هذه التصادمات .)

بند ١٢,٦

ت ١٢,٥٥ يرتطم نيوترون طاقته ١٠ مغ . ف ببروتون ساكن . فإذا ارتد البروتون بطاقة مقدارها ٣ مغ . ف ، فما الزاوية التي يصنعها مساره مع اتجاه سقوط النيوترون ؟ وما زاوية انحراف النيوترون ؟

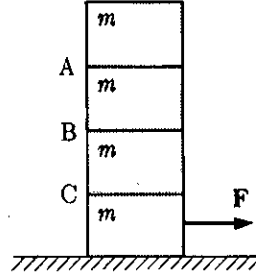
ت ١٢,٥٦ كرتا بلياردو متساويتا الكتلة تصطدمان اصطداماً مباشراً رأساً برأس ، فيظل مسارهما قبل وبعد التصادم على امتداد نفس الخط المستقيم . أثبت أنه في التصادم المرن ، « تتبادل الكرتان دوريهما » - بمعنى أن السرجة النهائية لكل منها تساوي السرجة الابتدائية للآخرى .

ت ١٢,٥٧ ما هي الطاقة المتاحة في كل من التصادمات التالية ؟ (١) نيوترون طاقته ١٠ مغ . ف يرتطم بنواة كربون ساكنة (كتلة النواة = $12 \times$ كتلة النيوترون) . (٢) نواة كربون طاقته ١٠ مغ . ف تصطدم ببروتون ساكن . (٣) نيوترون طاقته ١٠ مغ . ف يصدم بروتوناً ساكناً . (٤) بروتونان طاقة كل منهما ١٠ مغ . ف يصطدمان اصطداماً مباشراً رأساً برأس .

مسائل

م ١٢,١ استخدم الاحتكاك للمساعدة في تحريك صناديق كدست أربعة صناديق متائلة على الأرض ، كتلة كل منها m ، ثم أثّر بقوة F على الصندوق السفلي (أنظر شكل ١٢,٤١) . افرض أن معامل الاحتكاك الساكن والحركي متساويان ولهما نفس القيمة على جميع سطوح التماس ، بما فيها الأرض . (١) أثبت أن

أقصى تسارع بمقدور الصناديق أن تتحملة دون أن تنزلق هو μg . $a_{\max} = \mu g$. (٢) بين أنه عند تحطّي هذا التسارع ، فإن شرط عدم الانزلاق يُخرقُ آتياً عند السطوح الثلاثة A ، B ، و C ، و (٣) ما هي القوة الدنيا التي ينبغي أن يؤثر بها ، وما القوة العظمى التي يمكن التأثير بها ، لتحريك الصناديق بدون أي حادث؟



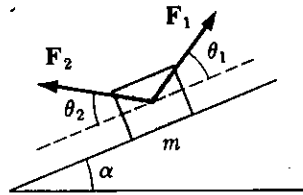
شكل ١٢،٤١ : مسألة ١٢،١ .

القوة الصغرى اللازمة لتحريك كتلة

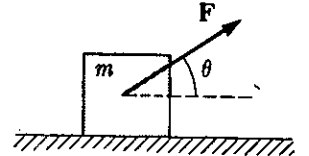
١٢،٢ م يؤثر رجل بقوة F على كتلة m ساكنة على سطح أفقي . ويكون معامل الاحتكاك الساكن للكتلة على السطح μ_s . بين أن القيمة الدنيا للقوة اللازمة لتحريك الكتلة هي

$$F = \frac{\mu_s mg}{\sqrt{1 + \mu_s^2}}$$

وأن الزاوية الضرورية لتأثير هذه القوة (أنظر شكل ١٢،٤٢) هي $\theta = \arctan \mu_s$.



شكل ١٢،٤٣ : مسألة ١٢،٣ .



شكل ١٢،٤٢ : مسألة ١٢،٢ .

١٢،٣ م ترتكز كتلة m على لوح يميل بزاوية α على الاتجاه الأفقي ، كما هو مبين في شكل ١٢،٤٣ ، ويكون ظل α $(\tan \alpha)$ أقل من معامل الاحتكاك الساكن μ_s . يرغب رجل ، كما في المسألة السابقة ، في أن يؤثر بأقل قوة تسمح بتحريك الكتلة . (١) بين أنه ، سواء تحركت الكتلة أعلى أو أسفل السطح المائل ، يتعين على القوة أن تؤثر عند نفس الزاوية مع هذا السطح ، وهي (٢) أثبت أن مقدارَي القوتَين اللازمَين هما $\theta_1 = \theta_2 = \arctan \mu_s$.

$$F_{1,2} = \frac{mg(\mu_s \cos \alpha \pm \sin \alpha)}{\sqrt{1 + \mu_s^2}}$$

حيث نحدد الإشارة الموجبة في البسط numerator F_1 (القوة اللازمة لتحريك الكتلة إلى أعلى) ؛ بينما نحدد الإشارة السالبة في البسط F_2 (القوة اللازمة لتحريك الكتلة إلى أسفل) .

القيمة الصغرى للشغل اللازم لتحريك كتلة

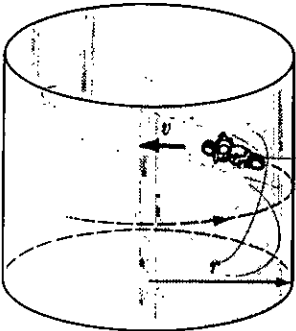
١٢،٤ م يكون الشغل اللازم لإزاحة الكتلة ، في كلتا المسألتين السابقتين ، أقل ما يمكن عندما تؤثر القوة

رأسياً إلى أعلى . (١) برهن هذه العبارة رياضياً لسطح أفقي . ما مقدار الشغل المبذول للإزاحة s ؟ (تحذير : لا تُرافق جميع النهايات الصغرى مشتقات صغرية .) (٢) فسّر ، باستخدام اعتبارات طاقة عامة ، لماذا تجعل القوة الرأسية أيضاً الشغل اللازم لتحريك كتلة أعلى لوح مائل أقل ما يمكن .

م ١٢,٥ الحركة بمعامل احتكاك حركي ثابت تتدحرج فتاة في «عربة» soapbox racer أسفل مستوى طوله ٥٠ م ويميل بزاوية ١٠° على الاتجاه الأفقي ، ثم تستمر في الحركة الحرة على سطح أفقي . فإذا كانت محصلة قوة الاحتكاك مستقلة تقريباً عن السرعة وتحدد بالمعادلة $12,10$ ، حيث $\mu_k = 0,05$ ، فما المسافة التي تتحركها على السطح الأفقي قبل أن تسكن ؟

م ١٢,٦ الاحتكاك على مجرى هوائي مستقيم يمال مجرى هوائي مستقيم بزاوية 2° (مسر) $0,035$ على الاتجاه الأفقي . تبدأ عربة من السكون وتنزل مسافة ٢ م أسفل المجرى ، ثم ترتد عن زنبرك ، لتعود إلى نقطة على مسافة ٢٠ سم من نقطة بدايتها . فإذا فقدت العربة ٥ بالمئة من طاقتها الحركية في الارتداد ، فما معامل الاحتكاك الحركي للعربة على المجرى ؟ (ملاحظة : إن مساواة القوة العمودية للمجرى المؤثرة على العربة مع وزن العربة ، mg ، تُعتبر تقريباً مقبولاً .) فرع اختياري : إذا توفر لديك مجرى هوائي مستقيم في المختبر ، استقصي خواصه الاحتكاكية بغيّة اختبار المعادلة $12,10$ والحصول على قيم تجريبية للمعامل μ_k . هل يكون μ_k مستقلاً عن السرعة ؟

م ١٢,٧ راكب دراجة نارية في كرنفال carnival يدور في دائرة أفقية حول الجدار الداخلي لأسطوانة دائرية نصف قطرها r (أنظر شكل ١٢,٤٤) . (١) إذا تميزت قوة الاحتكاك التي تمنع الإطارات من الانزلاق أسفل الحائط بمعامل احتكاك μ ، فما السرعة الدنيا v_{min} التي يتعين على راكب الدراجة أن يحافظ عليها ؟ (٢) إحص v_{min} بالميل / س ، إذا كان $\mu = 0,75$ و $r = 0,5$ م . (٣) ما زاوية ميلان راكب الدراجة على الاتجاه الرأسي ، وذلك حتى يمر اتجاه محصلة القوة التي يؤثر بها الحائط بمركز الدراجة عندما تدور بسرعة v ؟ (٤) ينبغي إدارة الدولاب الأمامي للدراجة قليلاً كي تتمكن من البقاء في دائرة أفقية . فبأي اتجاه يجب إدارتها ؟

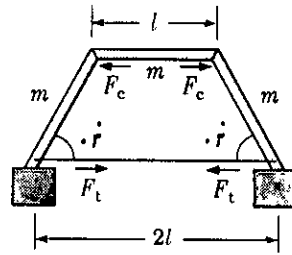


شكل ١٢,٤٤ : مسألة ١٢,٧ .

م ١٢,٨ مسائل الأثران الساكن يرغب رجل وزنه ١٠٠٠ ن في الركوب مع النقل المبيت في تمرين ١٢,١٣ (شكل ١٢,٣٤) ،

وذلك عند رفعه بدرجة ثابتة . فيستطيع الوقوف على الثقل ذي الوزن ٢٠٠٠ ن ، أو يستطيع الجلوس عند أية نقطة على امتداد العاتق الذي يزن ١٠٠٠ ن . فإذا كانت الحبال الأربعة - الإثنين الممتدان من الثقل السفلي والإثنان الممتدان إلى أعلى من طرفي العاتق - متساوية المتانة ، فما النقطة التي يجب أن يركب الرجل عندها لتقليل إمكانية انقطاع أحد الحبال ؟

١٢,٩ م ثلاث عوارض متساوية الكتلة m والطول l مرتبة كما هو مبين في شكل ١٢,٤٥ . يصل كبل خفيف الطرفين السفليين لاثنتين من العوارض . ويكون الاحتكاك مهملاً عند ركنيتي piers العوارض . أوجد قوة التضاغط F_c في العارضة العليا (وهي قوة تؤثر أفقياً إلى الخارج على العارضتين المائلتين) وقوة التوتر F_t في الكبل (وهي القوة التي تؤثر أفقياً إلى الداخل على العارضتين المائلتين) . (ملاحظة : يتوجب على العارضة العليا أن تؤثر أيضاً بمركبتين رأسيين للقوة على العارضتين المائلتين) .

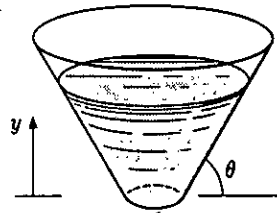


شكل ١٢,٤٥ : مسألة ١٢,٩ .

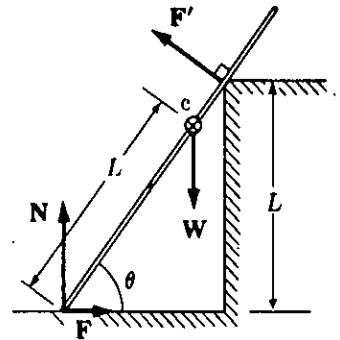
١٢,١٠ م يرتكز الطرف السفلي لسلم طوله $2L$ على الأرض ، بينما يرتكز طرفه العلوي على إفريز ledge أملس على ارتفاع L فوق الأرض (أنظر شكل ١٢,٤٦ أدناه) . يؤثر الإفريز بقوة F' على السلم ، باتجاه عمودي عليه ؛ في حين أن القوة التي تؤثر بها الأرض على السلم هي $F + N$ ، كما أن قوة الجاذبية هي W ، وتؤثر فعلياً عند مركز كتلة السلم . (١) برهن أنه إذا لم ينزلق السلم ، فإن النسبة بين قوة الاحتكاك والقوة العمودية على الأرض هي

$$\frac{F}{N} = \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta \sin \theta}$$

حيث θ زاوية ميل السلم على الاتجاه الأفقي . (٢) بين أنه إذا كان معامل الاحتكاك مع الأرض هو $\mu = 0.50$ ، فإن هنالك مدى للزوايا التي سيتزلق عندها السلم ؛ بينما لن ينزلق عند زوايا أصغر أو أكبر من هذا المدى . (ليس من الضروري تحديد المدى الزاوي بدقة ؛ أثبت فقط أنه موجود) .



شكل ١٢,٤٧ : مسألة ١٢,١١ .



شكل ١٢,٤٦ : مسألة ١٢,١٠ .

الضغط في وعاء جوائيه مائلة

م ١٢,١١ اشتق المعادلة ١٢,٢٩ $(dp/dy = -\rho g)$ لوعاء مخروطي (أنظر شكل ١٢,٤٧) ، آخذاً بعين الاعتبار الحقيقتين بأن المساحة عند الارتفاع $y + \Delta y$ أكبر قليلاً من المساحة عند الارتفاع y ، وأن الجدران تؤثر بمركبة قوة رأسية على المائع . إن أثري هاتين الإضافتين إلى التحليل الوارد في بند ١٢,٣ يُلفيان بعضهما البعض .

مائع لامنضغظ على كوكب صغير

م ١٢,١٢ مائع لامنضغظ كثافته ρ مخزون في صهريج على سطح كوكب صغير حيث لا يمكن إهمال تغير تسارع الجاذبية مع الارتفاع . ليكن نصف قطر الكوكب R وليكن تسارع جاذبيته $g = g_0 R^2 / (R + y)^2$ ، حيث y هو الارتفاع فوق السطح . (١) بين أن الضغط في السائل يتحدد بالعلاقة

$$p = p_0 - \rho g_0 y \frac{R}{R + y} .$$

(٢) خطط رسماً بيانياً للضغط p ضد y ، وأشر إلى سميانه البارزة عندما يكون $R \ll y$ و $R \gg y$. (٣) اعتبر صهريجاً ماء عمقها ٣٠ م ، أحدها على الأرض والآخر على كوكب نصف قطره ١٠٠ م . ما الخطأ الكسري الذي ينتج عن حساب فرق الضغط بين قمتي وقاعتي هذين الصهريجين باستخدام المعادلة ١٢,٣٠ .

مائع لامنضغظ على الأرض

م ١٢,١٣ يتحدد تسارع الجاذبية قرب الأرض ، لدرجة جيدة من التقريب ، بالعلاقة

$$g = g_0 \left(1 - \frac{2y}{R} \right) ,$$

حيث g_0 تسارع الجاذبية على السطح ، و R نصف قطر الأرض ، و y الارتفاع فوق سطح الأرض . (١) باستخدام هذه الصيغة للتسارع g ، أوجد تعبيراً للضغط p في مائع لامنضغظ كدالة في y . بين أن هذا التعبير يكافئ صيغة p الواردة في المسألة السابقة عندما يكون $y \ll R$.

م ١٢,١٤ (١) بين أن تسارع الجاذبية على عمق d في المحيط يتحدد بالعلاقة $g = g_0(R - d)/R$ ، حيث g_0 تسارع الجاذبية عند سطح البحر و R نصف قطر الأرض . (٢) باستخدام التقريب أن ماء المحيط لامنضغظ ، بكثافة ρ ، اشتق الصيغة التالية للضغط كدالة في العمق :

$$p = p_0 + \rho g_0 d \left(1 - \frac{d}{2R} \right)$$

(حيث $p_0 = 1$ جوي) . هل تبخس المعادلة ١٢,٣٠ قليلاً تقدير ضغط المحيط أم تعالي فيه قليلاً ؟ (٣) احسب ضغط المحيط على عمق ٨ كم . هل الفرق بين المعادلة ١٢,٣٠ والمعادلة المشتقة هنا ذو دلالة ؟

جو افترضى

م ١٢,١٥ تتناسب كثافة غاز افترضى مع مربع ضغطه . أورد تعبيرين لكثافة هذا الغاز وضغطه كدالة في الارتفاع في مجال جاذبية منتظم .

نموذج أسى مُحسن للجو

م ١٢,١٦ إن أثر نقصان درجة الحرارة مع زيادة الارتفاع يمكن أخذه بعين الاعتبار على وجه التقريب بكثافة كثافة الجو على الصورة :

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p \left(1 + \frac{y}{a} \right)$$

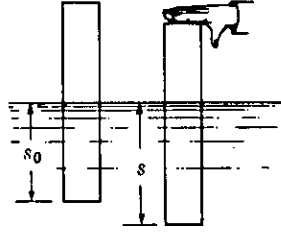
(قارن هذه مع المعادلة ١٢,٣٦) ، حيث y الارتفاع و a مسافة مميزة أكبر بكثير من مقياس الارتفاع b (المعادلة ١٢,٤٠) . (١) أثبت أن هذه الصيغة للكثافة تؤدي إلى التعبير التالي للضغط الجوي كدالة في الارتفاع :

$$p = p_0 e^{-y/b} e^{-y^2/2ab}$$

(٢) بمقارنة الرسمين البيانيين للجو المعياري في الولايات المتحدة والنموذج الأسّي في شكل ١٢,١٢ (أو، الأفضل من ذلك ، بالعودة إلى بيانات مُجدولة عن الضغط الجوي من مرجع خارجي) ، بين أن قيمة للثابت a تناهز ٦٠ كرم تؤدي ، إذا ما عوضت في المعادلة السابقة ، إلى تحسين ملموس على النموذج الأسّي البسيط .

التذبذب التوافقي لجسم عائم

م ١٢,١٧ أثقلت أسطوانة عند أحد طرفيها بحيث تطفو رأسياً في الماء . عند الاتزان ، تمتد مسافة s_0 أسفل سطح الماء (انظر شكل ١٢,٤٨) . (١) أثبت أنه إذا دُفعت الأسطوانة قليلاً إلى أسفل ثم تركت ، فإنها تتذبذب توافقياً بتردد زاوي يتحدد بالعلاقة $\omega = \sqrt{g/s_0}$. (٢) كيف يعتمد التردد الزاوي ، هذا إذا اعتمد على الإطلاق ، على كثافة السائل الذي تطفو فيه الأسطوانة ؟



شكل ١٢,٤٨ : مسألة ١٢,١٧ .

الماء في سقوط حر

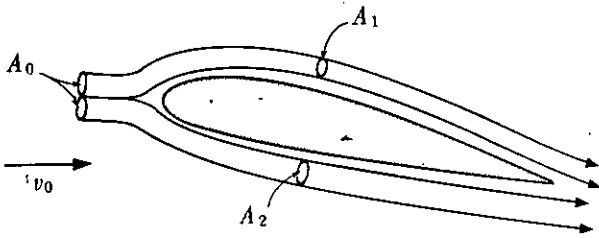
م ١٢,١٨ ينساب ماء من صنبور قطره الداخلي D بسرعة v_0 . اشتق علاقة لقطر تيار الماء المنساب كدالة في المسافة أسفل الصنبور . افرض أن الماء لا يتناثر إلى قطرات وأن احتكاك الهواء على الماء المنساب مهمَل .

م ١٢,١٩ يمر ماء ينساب من صنبور خلال حاجز screen ، فيتناثر إلى عدد هائل من القطرات الصغيرة . (١) صف سقوط الماء بدلالة ميكانيكا القطرات المفردة . افرض أن لجميع القطرات نفس الحجم ، وأنها تبحر الصنبور بنفس السرعة البطيئة ، وتقرب من نفس السرعة النهائية . (٢) صف سقوط الماء بدلالة خواصه الجزيئية بأخذ متوسط العديد من القطرات . استخدم ، على وجه الخصوص ، المعادلة الاستمرارية . (٣) خطط رسوماً بيانية وصفية ، كدالة في المسافة من الصنبور ، لسرعة الماء ، وكثافة قطرة مفردة ، والكثافة المتوسطة لعدد كبير من القطرات ، ومتوسط المسافة بين القطرات .

قوة الرفع على جناح

م ١٢,٢٠ يبين شكل ١٢,٤٩ أنبوبتي تدفق الهواء فوق وأسفل سطح جناح . (١) أوجد صيغة لمحصلة الضغط إلى أعلى على الجناح كدالة في كثافة الهواء ، p ، وسرعة الهواء نسبة إلى الجناح ، v_0 ،

ومتوسط مساحتي أنبوبي التدفق أعلى وأسفل الجناح A_1 و A_2 . لاحظ النتيجة المتضمنة هنا بأن قوة الرفع على الجناح تتناسب مع ρv_0^2 (شرط استقلال المساحتين A_1 و A_2 عن السرعة بصورة تقريبية، الأمر الذي يُعتبر تقريباً جيداً). (٢) إذا كانت طائرة تُحلّق بسرعة ٥٠ م/ث على ارتفاع تساوي عنده ρ ١,٠ كغ/م^٣، كما كانت المساحتان $A_1 \approx 0.8A_0$ و $A_2 \approx A_0$ ، فما القيمة العددية لقوة الرفع لكل وحدة مساحة؟ قدّر وزن ومساحة جناح طائرة خفيفة لترى فيما إذا كان العدد المحسوب معقولاً. (٣) يستلزم وجود الرفع أن الجناح ينبغي أن يُحرف الهواء إلى أسفل. فلماذا؟



شكل ١٢,٤٩ : مسألة ١٢,٢٠

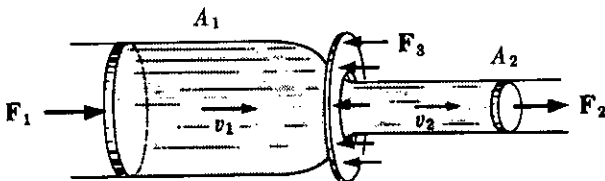
١٢,٢١ م أنبوب مستقيم طوله l ومساحة مقطعيه العرضي A يصل صهريج ماء ساخن عند أحد طرفي منزل إلى صنوبر عند الطرف الآخر للمنزل. يتدفق الماء في الأنبوب بسرعة v ، عندما يكون الصنوبر مفتوحاً تماماً. (١) باعتبار معدل تغير زخم الماء، اشتق تعبيراً للضغط الزائد عند صمام الصنوبر خلال الزمن Δt الذي يُغلق فيه الصنوبر. (٢) احسب هذا الضغط الزائد بالضغط الجوي للقيم $l = ١٠$ م، و $v = ٥$ م/ث، و $\Delta t = ٠,٢$ ث. فرع اختياري: أوجد ما يُعمل في شبكات الماء المترتبة لمنع ظاهرة المطرقة المائية «water-hammer effect» هذه من إصدار صوتٍ منجّوجٍ و/أو تدمير الأنابيب.

ظاهرة المطرقة المائية

١٢,٢٢ م تؤثر قوة F_1 على مكبس piston مساحته A_1 عند أحد طرفي أنبوب، وذلك لإرساء شريط تدفق منتظم لامتصاص في الأنبوب. وعند الطرف الآخر للأنبوب، يؤثر المائع بقوة F_2 على مكبس مساحته A_2 (أنظر شكل ١٢,٥٠). يتحرك المكبس والمائع بسرعة v_1 عند أحد طرفي الأنبوب، وبسرعة v_2 عند الطرف الآخر. (١) احسب قدرة الداخل عند المكبس الأول، وقدرة الخارج عند المكبس الثاني، ومعدل تغير الطاقة الحركية للمائع بين المكبسين. تحقق من أن الطاقة محفوظة. (٢) بين أن القوة F_3 اللازمة لمنع الأنبوب من الحركة هي

القوة والطاقة في تدفق الموائع

$$F_3 = F_1 \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1} \right) + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2} \right).$$



شكل ١٢,٥٠ : مسألة ١٢,٢٢

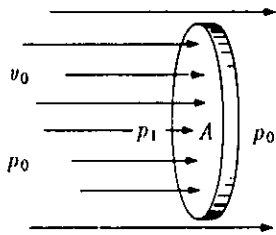
قانون تقريبي لقوة الإنجرار لمظلة هبوط (باراشوت) كبيرة

م ١٢,٢٣ عندما هبطت سفينة الفضاء أبولو ١٥ Apollo 15 عام ١٩٧١ ، واثنان فقط من مظلاتها parachutes مفتوحان ، كانت سرعة ارتطامها بالماء - حسباً ورد في الأنباء - ٣٢ قدماً/ث ؛ في حين أنه لو كانت مظلاتها الثلاث كلها مفتوحة ، لكانت سرعتها النهائية ٢٨ قدماً/ث . (١) إذا كانت قوة الإنجرار على مظلة لأبولو تتناسب مع v ، حيث v سرعتها ، فما قيمة الأس n ؟ (٢) ما ارتفاع السقوط الحر بدون احتكاك الذي يكافئ سرعة نهائية مقدارها ٣٢ قدماً/ث ؟

الشغل الذي يبذله جسم ساقط

م ١٢,٢٤ جسم متأثر بقوة الإنجرار الواردة في المعادلة ١٢,٦٧ يسقط من السكون مسافة l . أوجد الشغل الذي يبذله على الهواء بطريقتين : (١) أوجد F_D كدالة في المسافة x وأجر التكامل اللازم فوق x للحصول على الشغل . (٢) أوجد النقصان في الطاقة الميكانيكية للجسم أثناء سقوطه المسافة l .

نموذج بسيط للإنجرار

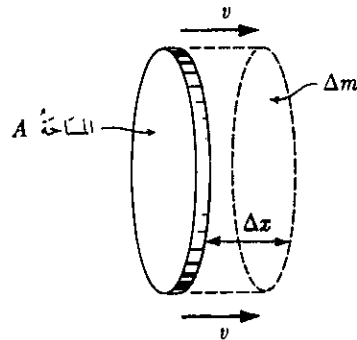


شكل ١٢,٥١ : مسألة ١٢,٢٥ .

م ١٢,٢٥ لحساب قوة الإنجرار على قرص مساحته A بطريقة بسيطة ، افرض أن الهواء ، ذا الضغط p_0 والسرعة v_0 بعيداً عن القرص ، يسكن عند أحد سطحي القرص ويبذل على حاله في الأماكن الأخرى . (أنظر شكل ١٢,٥١ المرافق . للحصول على صورة أكثر واقعية لما يحدث ، أنظر شكل ١٢,٢١) . هب أن الضغط خلف القرص مباشرة هو p_0 . فما محصلة القوة التي يؤثر بها الهواء على القرص ؟ وما معامل الإنجرار وفق طريقة الحساب النظرية البسيطة هذه ؟ فرع اختياري : أحصل على معلومات من مرجع خارجي عن معامل الإنجرار لقرص ، وقارن القيم الصحيحة مع القيمة التقريبية التي حسبتها .

م ١٢,٢٦ كبديل للطريقة المقترحة في المسألة السابقة ، حلل قوة الإنجرار على قرص بالطريقة التالية . دع القرص يتحرك في هواء ساكن بسرعة v . افرض أنه يتقدم القرص مسافة Δx ، فإنه يكسب سرعة v لكل الهواء في مساره في الأسطوانة ذات المساحة A والارتفاع Δx (الجزء المظلل من شكل ١٢,٥٢) . فيكتسب الهواء طاقة حركية ، وبذلك يفقد القرص طاقة حركية . ويمكن حساب قوة من معدل فقدان القرص للطاقة بين أن هذه القوة لها الشكل المبين في المعادلة ١٢,٦٧ . ما معامل الإنجرار المحسوب بهذه الطريقة ؟ (تكافئ هذه الطريقة النهج الأصلي الذي أتبعه نيوتن) .

فرع اختياري : اشرح علاقة هذه الطريقة مع الطريقة المستخدمة في المسألة السابقة .



شكل ١٢,٥٢ : مسألة ١٢,٢٦ .

١٢,٢٧ م تسقط كُرَيَّة من السُّكُونِ تحت تأثير الجاذبيَّة وقوَّة مُعَوِّفَة retarding تتناسبُ مع سرعتها . فتكونُ
الإِنْخِرَافُ
سرعتها النهائيَّة v_T . إشتقَّ الصَّيْغَتَيْنِ التَّالِيَتَيْنِ لسرعتها ومسافة سقوطها كدالتين في الزَّمن :

$$v = v_T(1 - e^{-gt/v_T}),$$

$$x = v_T t - \frac{v_T^2}{g} (1 - e^{-gt/v_T}).$$

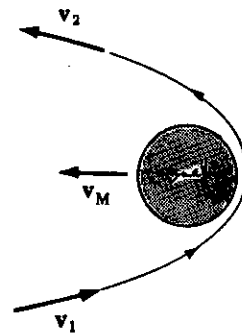
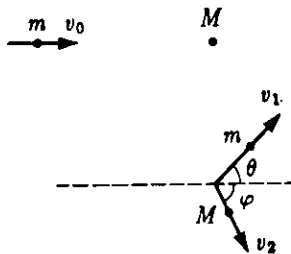
١٢,٢٨ م في حالة نيوترونات مُعْتَدِلَة الطَّاقَة تصدُّمُ بروتوناتٍ ساكنة ، يتناسبُ عددُ النيوترونات التي تنحرفُ
متوسطُ فقدانِ الطَّاقَة لنيوتروناتٍ
تصدُّمُ بروتوناتٍ
لكلِّ وَحْدَةٍ زاويَّة مع جَيْبِ ضِعْفِ زاوية الاستِطَارَة (النَّشْت) scattering :

$$\frac{dN}{d\theta} \sim \sin 2\theta.$$

(١) فما زاويةُ الإِنْخِرَافِ الأكثرُ احتمالاً ؟ وما زوايا الإِنْخِرَافِ الأقلُّ احتمالاً ؟ (٢) أوجدْ ،
لنيوترونات طاقَها الابتدائيَّة K_0 ، متوسطُ فُقدانِ الطَّاقَة في مثلِ هذه التَّصادمات . (ملاحظة :
هذا متوسطُ ذو وزنٍ إحصائيّ (weighted average) . (٣) ما صيغةُ $dN/d\psi$ ، أي عددِ
النيوترونات لكلِّ وَحْدَةٍ زاويَّة ، في إطار مركزِ الكتلة ؟

١٢,٢٩ م جسمٌ كتلته m له زخمٌ p_0 وطاقةٌ حركيَّة K_0 في إطارِ إسناد S_0 . فما زخمُ وطاقةُ الجسم ، في إطارِ
إسنادٍ S_1 يتحرَّكُ بسرَّجَهةٍ V_1 بالنَّسبةِ إلى الإطارِ S_0 ؟ أوردْ إجاباتٍ (أ) عامَّة ؛ و (ب) على
وجهِ الخصوصِ إذا كان $p_0 = p_{0l}$.

١٢,٣٠ م تقربُ سفينةُ فضاءٍ من القمرِ بسرَّجَهةٍ v_1 باتجاهِ مُعاكِسٍ تقريباً لسرَّجَهةِ القمرِ v_M (أنظر شكل
١٢,٥٣) . (١) بَيِّنْ أَنَّهُ من الممكنِ لسفينةِ الفضاءِ أَنْ تَبْرَحَ جوارَ القمرِ بسرعةٍ v_2 تقاربُ
 $v_1 + 2v_M$. (إقتراح : إعتبرِ اللِّقاءَ في مركزِ كتلةِ نظامِ القمرِ وسفينةِ الفضاءِ) . (٢) بعدَ لِّقاءٍ من
النَّوعِ المَبِينِ في الشَّكْل ، هل الأكثرُ احتمالاً أَنْ تَتَّبِعَ السفينةُ مساراً إهليلجياً حولِ الأرضِ أو أَنْ
تَقْلَتَ من الأرضِ ؟ (٣) هل ثَمَّةُ أيَّةِ حدودٍ من حيثِ المبدأ أو التَّطبيقِ العمليِّ لاستخدامِ لِّقاءاتٍ
مُتَعاقِبَةٍ معِ الأقمارِ والكواكبِ لمنحِ سفينةِ فضاءٍ طاقةً اعتباطيَّةً كبيرةً ؟ (إنَّ التَّخْطِيطَ لرحلاتٍ في
المستقبلِ إلى المُشْتَرِي وما يتلوهُ لِيَتَضَمَّنَ استخدامَ هذه الطَّريقةِ الفَيَّةِ لزيادةِ طاقةِ السَّفِينَةِ) .



شكل ١٢,٥٤ : مسألة ١٢,٣١ .

شكل ١٢,٥٣ : مسألة ١٢,٣٠ .

١٢,٣١ م يَصْطَلِدُ جُسَيْمٌ كَلَّتُهُ m وَسِرْعَتُهُ الْبَتْدَائِيَّةُ v_0 اصْطَدَّاماً مَرِئاً بِجُسَيْمٍ كَلَّتُهُ M فِي حَالَةٍ سَكُونٍ .
وَيَبِينُ شَكْلُ ١٢,٥٤ مَسَارِي الْجُسَيْمَيْنِ بَعْدَ التَّصَادَمِ . (١) أُكْتُبْ مَعَادِلَاتِ حَفْظِ الطَّاقَةِ وَالْكَتْلَةِ
الَّتِي تَحْكُمُ هَذِهِ الْعَمَلِيَّةَ . (٢) أَثْبِتْ أَنَّ سِرْعَةَ الْجُسَيْمِ ذِي الْكَتْلَةِ m بَعْدَ التَّصَادَمِ تَتَحَدَّدُ
بِالْعَلَاقَةِ

$$v_1 = v_0 \frac{\alpha \cos \theta \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}}{1 + \alpha},$$

حَيْثُ $\alpha = m/M$. يَبِينُ أَنَّ هَذَا يَتَّفَقُ مَعَ النَّتَائِجِ الَّتِي تَوْصَلُنَا إِلَيْهَا فِي الْمَثَلِ إِذَا كَانَتْ $\alpha = 1$.
(٣) إِعْتَبِرْ نِيُوتَرُونًا يَصْدِمُ دِيُوتَرُونًا (لَه $\alpha = \frac{1}{4}$) . فَلِمَاذَا يَجِبُ إِنْتِقَاءُ الْإِشَارَةِ + فِي الصُّبْغَةِ السَّابِقَةِ ؟
مَا أَقْصَى زَاوِيَةِ انْحِرَافٍ لِلنِّيُوتَرُونِ ؟ مَا أَقْصَى فَقْدَانِ نِسْبِيٍّ لَطَاقَتِهِ ؟ وَمَا الْفَقْدَانُ النَّسْبِيُّ لَطَاقَتِهِ عِنْدَ
 $\theta = 90^\circ$ ؟



الملاحق

Appendices

صفحة

- ١ — وَحَدَاتِ النِّظَامِ الدَّوْلِيِّ (SI) ٣ م
- ٢ — أ) الكَمِّيَّاتُ الفِيزِيَاءِيَّةُ : رَمُوزُهَا وَوَحَدَاتُهَا الدَّوْلِيَّةُ
ب) تَعْرِيبُ رَمُوزِ وَحَدَاتِ النِّظَامِ الدَّوْلِيِّ وَمِصْطَلَحَاتِهَا ٥ م
١٠ م
- ٣ — مُعْطَيَّاتُ عِدَدِيَّة ٢٠ م
- ٤ — عَوَامِلُ التَّحْوِيلِ ٣١ م
- ٥ — مُعَادَلَاتُ الكَهْرُومَغْنَاطِيَّيَّةِ بِوَحَدَاتِ النِّظَامِ الدَّوْلِيِّ
(م كس ث) وَالْوَحَدَاتِ الْعَاوِصِيَّةِ (س ر غ ث) ٣٤ م
- ٦ — صِيغُ رِيَاضِيَّة ٣٨ م
- ٧ — الدَّوَالُ الْمُثَلَّثِيَّة ٥٠ م
- ٨ — الدَّالَّةُ الْأَسْبَتِيَّة ٥٤ م
- ٩ — الدَّالَّةُ اللَّوْغَارِيْتِيَّة ٥٦ م

ملحق ١ . وَحَدَاتُ النِّظَامِ الدَّوْلِيِّ (SI)

(هذا الملحقُ مُقتبسٌ من تقريرِ ميكتلي « نظامُ الوَحَدَاتِ الدَّوْلِيَّ » :

E. A. Mechtly, "The International System of Units," NASA Report SP-7012, 1969,

الذي يمكنُ الحصولُ عليه من العنوانِ التالي :

Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. 20402, U.S.A.)

الوَحَدَاتُ الْأَسَاسِيَّةُ

الطول	المتَرُ METER (م) (m)
Length	هو الطُّولُ الذي يُساوي ١٦٥٠ ٧٦٣,٧٣ أطوال موجية wavelengths في الفراغ vacuum من الإشعاع radiation المُنَاطِرِ لانتقال transition ذرّة كريبتون ٨٦ بينَ المستويين 2p ₁₀ و 5d ₅ .
الكتلة	الكيلوغرام KILOGRAM (كـ غـ kg)
Mass	هو كتلة النَّمُودَجِ الدَّوْلِيِّ للكيلوغرام [الذي هو عبارةٌ عن أسطوانةٍ خاصّةٍ من أشابة (سبيكة) alloy بلاتين وإيريديوم محفوظةٍ بِقَيْوٍ في سيفرٍ بفرنسا] .
الزَّمن	الثَّانِيَةُ SECOND (ثـ sec*)
Time	هي الفترة الزَّمنية التي تُكافئُ ٩١٩٢ ٦٣١ ٧٧٠ دَوْرَةَ من الإشعاع المُنَاطِرِ لانتقال ذرّة سيزيوم ١٣٣ بينَ المستويين المفرطِي الدَّقَّةِ hyperfine levels لحالة الخُمُودِ ground state .
التَّيَّارُ [الكهربائيُّ]	الأمبير AMPERE (أـ A)
Current	هو ذلك التَّيارُ الكهربائيُّ الثَّابِتُ الذي ، لو أُبقيَ عليه في مُوصِّلَيْن conductors مستقيمين ومتوازيين ذَوِي طُولٍ لا متناهٍ ومقطَّعٍ عرضيٍّ دائريٍّ مُهمَلٍ وعلى بُعدٍ ١ م عن بعضهما البعض في الفراغ ، لأحدثَ بين هذين المُوصِّلَيْن قوَّةً لكل وَحْدَةٍ طُولٍ تُعَادِلُ ٢ × ١٠ ^{-٧} ن/م .
درجةُ الحرارة	الكلفن KELVIN (كـ K)
Temperature	هو الكسَرُ ٢٧٣,١٦/١ من درجة الحرارة الديناميَّة thermodynamic temperature لنقطة الماءِ الثَّلَاثِيَّةِ triple point .

• كذلك يُستخدَمُ عادةً الرَّمزُ s للثَّانِيَّةِ .

القنديلة CANDELA (قد cd) هي الشدة المنيرة، في الاتجاه العمودي، لسطح مساحته $(\frac{600000}{1})$ م² من جسم أسود blackbody عند درجة حرارة تجمد freezing البلاتين تحت ضغط ٣٢٥ ١٠١ ن/م².

الشدة المنيرة
Luminous intensity

بعض الوحدات الهامة الأخرى

النيوتن NEWTON (ن N) هو تلك القوة التي تُكسب كتلة ١ كغ تسارعاً مقداره ١ م/ث².

القوة
Force

الجول JOULE (ج J) هو الشغل الذي يُبذل عند إزاحة نقطة تأثير قوة مقدارها ١ ن مسافة ١ م باتجاه القوة.

الطاقة
Energy

الواط WATT (و W) هو القدرة التي تؤدي إلى إنتاج طاقة بمعدل ١ ج/ث.

القدرة
Power

الكولوم COULOMB (كل C) هو الشحنة التي ينقلها تيار كهربائي مقداره ١ أ في ١ ث.

الشحنة
Charge

الفولت VOLT (ف V) هو فرق الجهد بين نقطتي سلك موصول ينقل تياراً ثابتاً مقداره ١ أ عندما تساوي القدرة المبذولة بين النقطتين ١ و.

الجهد
Potential

الأوم OHM (م Ω) هو المقاومة الكهربائية بين نقطتي موصول عندما يحدث فرق جهد ثابت قدره ١ ف، ويؤثر بين هاتين النقطتين، تياراً مقداره ١ أ في هذا الموصل، حيث لا يكون هذا مصدراً لأي قوة دافعة كهربائية electromotive force.

المقاومة
Resistance

الفاراد FARAD (فد F) هو مواسعة مكثف كهربائي ينتج بين لوحيه فرق جهد ١ ف عندما يُشحن بشحنة ١ كل.

المواسعة
Capacitance

الهنري HENRY (هن H) هو مُحَاثَة دَاَرَة مُغَلَقَة closed circuit تنتج فيها قوة دافعة كهربائية مقدارها ١ ف عندما يتغير التيار في الدارة بانتظام بمعدل ١ أ/ث.

المُحَاثَة (المُوَاثَرَة)
Inductance

الفيبر WEBER (فب Wb) هو الدفق المغناطيسي الذي، عند وضعه دائرة مكونة من لفّة واحدة، يحدث فيها قوة دافعة كهربائية مقدارها ١ ف عندما يُخَفَّض إلى الصفر بمعدل منتظم في ١ ث.

الدفق المغناطيسي
Magnetic flux



ملحق ١٠٢) الكميات الفيزيائية : رموزها ووحداتها الدولية

الكمية	الرمز الشائع	الوحدة	الوحدة مُعبراً عنها بدلالة وحدات النظام الدولي الأساسية
تسارع	a	م / ث ^٢	m/sec ²
زاوية (مستوية)	θ, φ	دائرية (مسر) radian (rad)	
تسارع زاوي	α	مسر / ث ^٢	rad / sec ²
تردد زاوي	ω	مسر / ث	rad / sec
زخم زاوي	L, J	كـرغ م / ث ^٢	kg m ² /sec
غزل	S		
سرعة زاوية	ω	مسر / ث	rad / sec
سرعة زاوية	ω		
مساحة	S, A	م ^٢	m ²
عدد ذري	Z		
مواصلة	C	فاراد (فد) (= كل / ف) farad (F) (= C/V)	A ² sec ⁴ /kg m ²
شحنة	q, e	كولوم (كل) coulomb (C)	A sec
كثافة الشحنة			
الحجمية	ρ	كل / م ^٣	C/m ³
السطحية	σ	كل / م ^٢	C/m ²
الخطية	τ	كل / م	C/m

الكمية	الرمز الشائع	الوحدة	الوحدة مُعبراً عنها بدلالة وحدات النظام الدولي الأساسية
مُوصِّلِيَّةٌ	σ	١ / م ^٢ م ^(*)	أ ^٢ ث ^٣ / كـ غ م ^٣ $A^2 \text{ sec}^3 / \text{kg m}^3$
تِيَّارٌ (كهربائي)	I	أَمْبِير	أ A
كثافة التيار	J	أ / م ^٢	أ / م ^٢ A / m^2
كثافة	ρ	كـ غ / م ^٣	كـ غ / م ^٣ kg / m^3
ثابت العازل	κ_e		
إزاحة	s	متر	م m
مسافة	d		
طول	l, L		
عزم ثنائي قطبي كهربائي	p	كل م	أ ث م $A \text{ sec m}$
مجال كهربائي	E	ف / م	كـ غ م / أ ث ^٣ $\text{kg m} / A \text{ sec}^3$
دفع كهربائي	Φ_E	ف م	كـ غ م ^٣ / أ ث ^٣ $\text{kg m}^3 / A \text{ sec}^3$
قوة دافعة كهربائية	$\mathcal{V}$	فولت (ف)	كـ غ م ^٢ / أ ث ^٣ $\text{kg m}^2 / A \text{ sec}^3$
طاقة	E	جول (ج)	كـ غ م ^٢ / ث ^٢ $\text{kg m}^2 / \text{sec}^2$
طاقة داخلية	U		
طاقة حركية	K		
طاقة وضع	U		
إنتروپيا	S	ج / ك (كـ لـ سـ عـ ر / كـ kcal/K)	كـ غ م ^٢ / ث ^٢ كـ $\text{kg m}^2 / \text{sec}^2 \text{ K}$
قوة	F	نيوتن (ن)	كـ غ م / ث ^٢ $\text{kg m} / \text{sec}^2$
تردد	ν	هرتز (هـ ز)	ث ^{-١} sec^{-1}

(*) كذلك نستخدم هذه الأبيام الوحدة سيم / م للموصليّة ، حيث يُشير الرمز سيم (S) إلى سيمنس siemens ، ووحدة الموصلية الكهربائية conductance التي يُرمز إليها غالباً بالحرف G.

الكمية	الرمز الشائع	الوحدة	الوحدة مُعبراً عنها بدلالة وحدات النظام الدولي الأساسية
حرارة	Heat	Q	joule (J) جول (ج) (سُغراً أو كسُغراً) (cal or kcal)
مُحَاثَة (مُؤَاثَرَة)	Inductance	L	henry (H) هنري (هن)
عَزْمٌ ثَنَاقُطْبِيٌّ مغناطيسي	Magnetic dipole	μ	N m/T ن م / تس
مَجَالٌ مغناطيسي	Magnetic field	B	tesla (T) تسلا (تس) (= Wb/m ² م ² فب =)
دَفْقٌ مغناطيسي	Magnetic flux	Φ_B	weber (Wb) فيبر (فب)
كُتْلَة	Mass	m, M	KILOGRAM كيلوغرام
عَدَدٌ كُتْلِيٌّ	Mass number	A	
حرارة نوعية موليّة	Molar specific heat	C'	J/kmole K ج / كم مل ك (كسعر / كم مل ك) (kcal/kmole K)
وزن جزيئي	Molecular weight	M.W.	kg/kmole كسغ / كم مل (= gm/mole مل غ =) (= amu/molecule م / جزئي =)
عَزْمٌ قُصُور	Moment of inertia	I	kg m ² كسغ م ²
زَخَمٌ	Momentum	P	kg m/sec كسغ م / ث
دَوْرَة	Period	T	sec ث
نفاذية	Permeability	κ_m	
ثابت النفاذية	Permeability constant	μ_0	N/A ² ن / أ ² (= H/m م / هن =)

الكمية	الرمز الشائع	الوحدة	الوحدة مُعَبَّرًا عَنْهَا بِدَلَالَةِ وَحَدَاتِ النَّظَامِ الدُّوَلِيِّ الْأَسَاسِيَّةِ
Permittivity of space سَمَاحِيَّةُ الْفَرَاغِ	ϵ_0	كل ^٢ / ن م ^٢ (= F/m = فد / م)	أ ^٢ ث ^٤ / كـرغ م ^٣ $A^2 \text{ sec}^4 / \text{kg m}^3$
قُوَّةُ الْقُطْبِ Pole strength	P	ن / تس N/T	أ م A m
جَهْدٌ فُلْطِيَّةُ Potential Voltage	V	فولت (ف) (= J/C = ج / كل)	كرغ م ^٢ / أ ث ^٣ $\text{kg m}^2 / A \text{ sec}^3$
قُدْرَةٌ Power	P	واط (و) (= J / sec = ج / ث)	كرغ م ^٢ / ث ^٣ $\text{kg m}^2 / \text{sec}^3$
ضَغْطٌ Pressure	P, p	ن / م ^٢ N / m ²	كرغ / م ث ^٢ $\text{kg} / \text{m sec}^2$
مُقَاوَمَةٌ Resistance	R	أوم (م) (= V / A = ف / أ)	كرغ م ^٢ / أ ^٢ ث ^٣ $\text{kg m}^2 / A^2 \text{ sec}^3$
حَرَارَةٌ نَوْعِيَّةُ Specific heat (انظر أيضاً حرارة نوعية مولية)	C	ج / كـرغ ك (كـر سَعْر / كـرغ ك) J/kg K (kcal/kg K)	م ^٢ / ث ^٢ ك $\text{m}^2 / \text{sec}^2 \text{ K}$
درجة حرارة Temperature	T	كلفن KELVIN	ك K
زَمَنٌ time	t	ثانية SECOND	ث sec
عَزْمٌ دَوْرَانٌ Torque	T	ن م N m	كرغ م ^٢ / ث ^٢ $\text{kg m}^2 / \text{sec}^2$
سَرَجَهَةٌ سرعة Velocity Speed	v u	م / ث m/sec	م / ث m/sec
حَجْمٌ Volume	V	م ^٣ m ³	م ^٣ m ³
دَالَّةٌ مَوْجِيَّةُ Wave function	ψ	عادةً م ^{-٣/٢} (م ^{-١/٢} في بُعْدٍ وَاحِدٍ) m ^{-3/2} m ^{-1/2}	م ^{-٣/٢} m ^{-3/2}
عَدَدٌ مَوْجِيٌّ Wave number	$k, 1/\lambda$	م ^{-١} m ⁻¹	م ^{-١} m ⁻¹
طَوْلٌ مَوْجِيٌّ Wavelength	λ	م m	م m
شُغْلٌ Work	W	جُول (ج) (= N m. = ن م)	كرغ م ^٢ / ث ^٢ $\text{kg m}^2 / \text{sec}^2$

قائمة أبعادية بالمختصات المتعددة للوحدات

المختصر	الوحدة	المختصر	الوحدة
A	أمبير	ampere	هرتز
Å	أنغستروم	angstrom	بوصة
A.U.	وحدة فلكية	astronomical unit	جول
amu	وحدة كتلة الذرة	atomic mass unit	كلفن
atm	جوي	atmosphere	كิโลسعفر
C	كولوم	coulomb	كيلوغرام
°C	درجة سيلسيوس	degree Celsius	كيلومول
cal	سعفر	calorie	باوند
cm	سنتيمتر	centimeter	متر
deg (°)	درجة (زاوية)	degree (angle)	دقيقة
esu	وحدة اساتية كهربائية	electrostatic unit	نيوتن
eV	إلكترون فولت	electron volt	درجة رانكين
F	فاراد	faraday	دورات في الدقيقة
°F	درجة فهرنهايت	degree Fahrenheit	ثانية
fm	فيرمي ؛ فيمتومتر	fermi; femtometer	تسلا
ft	قدم	foot	فولت
G	غاوس	gauss	واط
gm	غرام	gram	فب
H	هنري	henry	مي م
hr	ساعة	hour	م

ملحق ٢. ب) تعريب رموز وحدات النظام الدولي ومصطلحاتها

كانت المنظمة العربية للمواصفات والمقاييس قد أعدت مشروعاً لتعريب رموز وحدات النظام الدولي ومصطلحاتها في الستينات ؛ ثم طرأت تعديلات على هذا المشروع ، إلى أن استقر رأي المنظمة على استبدال الرموز اللاتينية بالرموز العربية . وتم توزيع هذا المشروع المعدل على مؤسسات التوصيف العربية القطرية لدراسته واعتماده .

على هذا الأساس ، قامت مديرية المواصفات والمقاييس في وزارة الصناعة والتجارة في الأردن بتعميم مشروع المنظمة العربية للمواصفات والمقاييس على المؤسسات الرسمية وشبه الرسمية ذات العلاقة ، لإبداء الرأي قبل اعتماد المشروع . وتم تشكيل لجنة تضم ممثلين عن المؤسسات الرسمية لدراسة الموضوع . وعقدت اللجنة اجتماعها في مديرية المواصفات والمقاييس ؛ فبرز هنالك اتجاهان رئيسيان :

الأول : قبول استخدام الرموز اللاتينية كما هو وارد في مشروع المنظمة ، باعتبار أن المنظمة تمثل وجهات النظر العربية مجتمعة .
والثاني : استحداث نظام رموز جديدة يُستخدم فيه الحرف العربي بدلاً من الرمز اللاتيني . ومثل هذا النظام يمكنه الاستفادة من جهود المنظمة العربية السابقة في هذا المجال ، ومن جهود المؤسسات العربية الأخرى .

وبعد إقرار الاتجاه الثاني ورَفْض الاتجاه الأول ، باعتباره غير مقبول وطنياً وقومياً وغير ممكن عملياً ، طلبت اللجنة إلى الدكتور إبراهيم بدران إعداد مشروع متكامل لتعريب الرموز والمصطلحات ، يُعرض على اللجنة في وقت لاحق بغية مناقشته وتعديله حسب الضرورة . فقام الدكتور بدران بإعداد مشروع لتعريب الرموز والمصطلحات ، يستند إلى منهجية تختلف تماماً عن أسلوب العمل والمنهج اللذين اتبعتهما المنظمة العربية . وتم إرسال مشروع رسمي إلى مديرية المواصفات والمقاييس من خلال سلطة الكهرباء ، وحسب الأصول . ثم دُعيت اللجنة التي سبق أن كلّفت الدكتور بدران إعداد المشروع لإبداء رأيها ، غير أن شيئاً محدداً لم ينتج عن ذلك الاجتماع ، بسبب غياب بعض الأعضاء ، وقلة اهتمام البعض الآخر .

في هذه الأثناء قام الدكتور بدران بإعادة دراسة المشروع الذي تم إرساله إلى مديرية المواصفات والمقاييس ، وأدخل عليه التعديلات التي رآها ضرورية ، وأعد دراسة نظرية حول الموضوع أرفقها بالرموز المعربة . ونشرت الدراسة مع الرموز في العدد الأول من مجلة مجمع اللغة العربية الأردني .

بعد فترة قامتُ مديريَّةُ المواصفات والمقاييس بتعميم مشروع جديد (أقرب إلى مشروع منظمة المواصفات والمقاييس القديم باللغة العربية) على المؤسسات ذات العلاقة ، بما فيها سلطة الكهرباء الأردنية وجمع اللغة العربية الأردني وسواهما ، وطلبت إليها إبداء الرأي في المشروع المقدم تمهيداً لإقراره .

وفي إثر ذلك بادَرَ جمعُ اللغة العربية الأردني إلى تشكيل لجنة من ذوي الاختصاص والاهتمام العلمي واللغوي ، لدراسة مشروع مديريَّة المواصفات والمقاييس الأخير بغية الوصول إلى مشروع موحد مقبول ، تتوافر فيه الدقة العلمية إلى جانب القيمة اللغوية ومرونة الاستعمال . وتشكَّلت اللجنة على النحو التالي :

رئيساً	الأستاذ الدكتور عبد الكريم خليفة
عضواً	الأستاذ الدكتور أحمد سعيدان
مقرراً للجنة	الدكتور همام غصيب
عضواً	المهندس الدكتور ابراهيم بدران
عضواً	السيدة منى مهيبار

وعقدت اللجنة أولى جلساتها بتاريخ ١٩٧٨/٥/٣ ، وتمَّ خلال الجلسة الأولى تحديد المبادئ الأساسية التي يجب أن يقوم عليها نظام الرموز العربي الصحيح ، والتي أدت غيابها إلى وصول المنظمة العربية للمواصفات والمقاييس إلى طريق مسدود . ورأت اللجنة أن تدرُس كلاً من مشروع الدكتور بدران ومشروع مديريَّة المواصفات والمقاييس معاً ، للوصول إلى مشروع موحد يجمع مزايَا المشروعين .

وخلال الجلسات دار نقاش عام حول المشروعين ، أبرز فيه الدكتور بدران بشكل مركز الجهود التي بذلتها المنظمة العربية للمواصفات والمقاييس ، ولا تزال تبذلها في مضمار تعريب المصطلحات والرموز لَوَحَدَاتِ النظام الدولي وتوحيدها ؛ وانتهى إلى أن اختيار الرموز العربية بشكل غير منهجي ودون رؤية واضحة للموضوع بأكمله ، وكذلك دون محاولة تطوير مفهوم الحرف ووظيفته شكلاً ومضموناً ، أدَّى ويؤدِّي إلى طريق مسدود ؛ كما انتقد بشدة استخدام الرموز اللاتينية للمصطلحات العربية . فالمهم في نظره الاختيار الحكيم للمنهج الصحيح منذ البداية ، على أن يتوافر فيه عنصر المرونة ، بحيث لا يستوعب أفضل ما في الماضي من تجارب وآراء فحسب ، بل يستوعب أيضاً ما قد تحمله ثنانياً المستقبل من تطورات مُرتقبة . والأمل حينئذ أن يفي النظام المتكامل المرن بحاجة الطالب في مدرسته أو جامعته ، والباحث في مختبره ، والفني وغيره في مراكز أعمالهم . وقد عقبَ الحضور على ذلك بأنه يجب الاستفادة من الخصائص والمميزات الكثيرة للغة والأحرف العربية ، كالإمكانية التوافرة في كتابة الحرف الواحد بعدة صور ، كما في الخطوط العربية المعروفة .

إنَّ الركائز الأساسية التي يقوم عليها مشروع مديريَّة المواصفات والمقاييس هي :

- ١ - عدم إشراك أكثر من وَحدة بالرمز عينه .
- ٢ - عدم التشابه بين رموز الوحدَات من جهة ، ورموز الوحدَات والبادئات من جهة أخرى .

٣ - إبقاء رموز الوحدات والبادئات المتعارف عليها منذ فترة طويلة (في البلاد العربية) على ما هي عليه دون تغيير ؛ مثل المتر ، ويرمز إليه بالحرف (م) ؛ والثانية ، ويرمز إليها بالحرف (ث) ؛ واللتر ، ويرمز إليه بالحرف (ل) ؛ والسنتيمتر ، ويرمز إليه بالحرفين (سم) .

٤ - في حالة الاضطرار إلى رموز متعارف عليها سابقاً (في البلاد العربية) ، فليكن التغيير أقل ما يمكن كما وكيفاً .

٥ - تكون رموز الوحدات أحرفاً اعتيادية مثل (ب ، ن ، هـ ، ...) ؛ ورموز البادئات أحرفاً أو مقاطع متصلة ، مثل (سـ ، مـ ، كـ ، ...) .

٦ - تحقيق التوافق والانسجام بين الرمز العربي المقترح للوحدة أو البادئة والرمز الدولي لها قدر الإمكان .

٧ - تجنب الترجمة الحرفية للرموز ، لأن الرموز الدولية موضوعة بأحرف لغة أخرى غير العربية ، ولها خصائص ومميزات تختلف عن تلك التي للعربية ؛ فمن الملاحظ أنه لا يوجد في اللغة العربية ما يُعرف بالحرف الكبير والحرف الصغير ، كما في الإنجليزية ؛ لكن فيها ما يُعرف بأحرف عادية منفصلة ، وهي التي ترد في نهاية الكلمة ، مثلاً ؛ وأحرف متصلة ، وهي التي ترد في بداية الكلمة أو وسطها - يُضاف إلى هذا أن اللغة العربية من اللغات القلائل التي تُكتب بأحرف متصلة غير متقطعة .

أما المشروع المقابل فيعتمد على المبادئ الأساسية التالية :

- ١ - ثبات الرمز : فالرمز بالتعريف شكل ثابت يدل على المرموز إليه ؛ ويجب أن تكون هناك علاقة واضحة بين الرمز والمضمون .
- ٢ - استعمال الأحرف المستقلة (وهي أحرف البداية ؛ أي التي تكون في بداية الكلمة) ، مع إدخال حركة صغيرة عليها في نهايتها لتعطيها صفة الاستقلال ، مثل (غـ ، نـ ، يـ ...) ، للدلالة على الوحدات الاعتيادية التي لا تشكل أسماء أعلام . وهذه الأحرف هنا تقابل الأحرف الصغيرة في اللغة الإنجليزية .
- ٣ - استعمال الأحرف الاعتيادية للدلالة على الوحدات التي لها صفة اسم العلم . وهي في الغالب الوحدات التي تكون قائمة بذاتها ؛ بمعنى أنها ليست مضاعفات أو مشتقات لوحدات أخرى . وهذه الأحرف تقابل الأحرف الكبيرة في اللغة الإنجليزية .

٤ - الانفصال والاتصال : أن تكون الأحرف المستعملة كرموز مفصلة على الأغلب ، لكي تتمكن من تحقيق ثبات الرمز . وفائدة ذلك جلية في التعامل مع المعادلات البعدية و « حساب الوحدات » ، على غرار ما يجري في اللغات اللاتينية . على أية حال ، فليس ثمة ما يمنع من استعمال الأحرف المتصلة عند الحاجة .

٥ - سهولة التداول اللفظي للرمز ؛ وكذلك سهولة كتابته .

٦ - معاملة البادئات كأرقام تماماً ، لأن البادئة على الأغلب ليست سوى رقم محض ؛ ولهذا ينبغي أن يكون الرمز مهيئاً للاستخدام في المعادلات الرياضية .

وبعد دراسة المبادئ الأساسية المتقدم ذكرها للمشروعين ، اتفق أعضاء اللجنة على النظر بامعان في رموز وَحَدَاتِ النظامِ الدَّولِيِّ على ضوء تلك المبادئ . وبدأ العمل في وضع مشروع موحد ، رُوِعِت فيه الأسس التالية :

- ١ - عربيّة المشروع : فالمشروع عربيّ مبنىً وتعبيراً .
 - ٢ - ثبات الرمز : الرمز بالتعريف شكل ثابت لمضمون ما ؛ ولا بدّ من وجود علاقة واضحة بين الشكل والمضمون .
 - ٣ - الاتّصال والانفصال : فهذان من مزايا الأحرف العربيّة اللذان تجدر الاستفادة منها في مشروعنا هذا . ويُستحسن أن تكون الرموز أحرفاً منفصلة ثابتة قدر الإمكان ، أو مقاطع صغيرة محدّدة .
 - ٤ - عدم الخلط والتشابه بين الرموز ، لئلاّ يؤدي ذلك إلى تشويش القاري .
 - ٥ - مراعاة سهولة كتابة الرمز ، سواء في الكتابة اليدويّة أو الآليّة .
 - ٦ - مراعاة سهولة التداول اللفظي لهذه الرموز .
 - ٧ - معاملة البادئات على أنّها أرقام منفصلة عن الوحدّة اللاحقة بها .
 - ٨ - مراعاة أن تكون الرموز صالحة لوضعها في معادلات رياضيّة قابلة للعمليات الحسابيّة المتباينة ، من ضرب وقسمه وخلافها .
 - ٩ - مراعاة اتّساع الأحرف العربيّة أو ضيقها ، بمعنى كفاية الأحرف العربيّة بأشكالها وصورها لمثل هذا العدد الكبير من الرموز المختلفة التي ستوضع للوحدات المعروفة الآن ، وما قد يجد من وَحَدَاتٍ ورموزٍ أخرى .
 - ١٠ - أقرت اللجنة فكرة الدكتور بدران بإضافة حركة صغيرة للأحرف التي تكون في بداية الكلمة (ولُسمّها حركة الاستقلال) لكي تُعطي هذه الأحرف صفة الاستقلال والانتهاء . مثال ذلك : (الميم) تُسمّى حرفاً اعتيادياً إذا كانت على صورة (م) ؛ بينما تُسمّى حرفاً مستقلاً إذا كانت على صورة (مس) ؛ كما تُسمّى حرفاً متصلاً إذا كانت على صورة (مم) .
 - ١١ - أقرت اللجنة استعمال الإشارتين التاليتين :
- (-) لتقابل *dash* ؛ واسمها العربيّ المقترح « عَارِضَة » ؛ ويمكن استعمالها فوق الكتابة أو في وسطها .
- (/) لتقابل *slash* ؛ واسمها العربيّ المقترح « ماثلة » ؛ ويمكن استعمالها في المعادلات الرياضيّة وحسب الضرورة .
- لقد برز بعض الآراء أثناء تطبيق هذه الأسس ووضع رموز الوحدّات ، منها محاولة التمييز بين البادئات التي تزيد عن الواحد الصحيح وتلك التي تقل عنه ؛ غير أنّ التشرّيح الدقيق جعل الحضور يرفضون هذا الاقتراح ، لما قد يُسببه من تعقيد وإبهام في الكتابة والطباعة ، ولعدم إلفة استخدام مثل هذه الرموز في هذا المقام .
- وبعد خميس جلّسات متتالية خرجت اللجنة بالرموز المبيّنة في الجداول التالية :

جدول ١ : الوَحَدَاتِ الأساسية

الكمية	الوَحدة	الرَّمزِ الدَّولِيّ	الرَّمزِ العربيّ المقترح
الطُّول	متر	m	م
الكتلة	كيلوغرام	kg	كـغ
الزَّمن	ثانية	s	ث
التَّيار الكهربائيّ	أمبير	A	أ
الحِراة الدينامية	كلفن	K	كـ
كمية المادّة	مُول	mol	مـل
الشَّدة النيرة	قنديلة	cd	قـد

جدول ٢ : الوَحَدَاتُ المكْملة لَوَحَدَاتِ النِّظامِ الدَّولِيّ

الكمية	الوَحدة	الرَّمزِ الدَّولِيّ	الرَّمزِ العربيّ المقترح
الزَّاوية المستوية	دائرية	rad	مـر
الزَّاوية المجسّمة	مُجسّمة	sr	جـر

جدول ٣ : الوَحَدَاتِ المشتقة

الكمية	الوَحدة	الرَّمزِ الدَّولِيّ	الرَّمزِ العربيّ المقترح
تردّد	هرتز	Hz	هـز
قوة	نيوتن	N	نـ
ضغَط ؛ إجهاد	باسكال	Pa	بـس

الكمية	الوحدة	الرمز الدولي	الرمز العربي المقترح
طاقة ؛ شغل ؛ كمية حرارة	جُول	J	ج
قدرة	واط	W	و
شحنة كهربائية ؛ كمية كهرباء	كُولُوم	C	كل
جهد كهربائي ؛ فرق جهد ؛ قوة دافعة كهربائية	فولت	V	ف
مواصلة كهربائية	فاراد	F	فد
مقاومة كهربائية	أُوم	Ω	م
مواصلة كهربائية	سيمنس	S	سيم
دفق الحث المغناطيسي	فير	Wb	فب
كثافة التدفق المغناطيسي ؛ حث مغناطيسي	تسلا	T	تس
حث	هنري	H	هن
دفق منيري	لومن	lm	لم
استنارة	لكس	lx	لك

جدول ٤ : البادئات °

البادئة	الرمز الدولي	الرمز العربي المقترح	المدلول العددي
إِكْزَا	E	إِكْ	١٨١٠
پِيتَا	P	پِی	١٥١٠
تِیرَا	T	تِیر	١٢١٠
جِیْغَا	G	جِیر	٩١٠
مِیْغَا	M	مِیْغ	٦١٠
کِیلُو	k	کِیر	٣١٠
هَکْٹُو	h	هَیر	٢١٠
دِیکَا	da	دِکْ	١٠
دِیْسِی	d	دِیر	١-١٠
سِنْتِی	c	سِیر	٢-١٠
مِیْلِی	m	مِیر	٣-١٠
مَایْکِرُو	μ	مِیر	٦-١٠
نَانُو	n	نِیر	٩-١٠
پِیکُو	p	پِیر	١٢-١٠
فِیْمْتُو	f	فِیر	١٥-١٠
أَتُو	a	أِیر	١٨-١٠

° الحقيقة أَنَّ البادئتين إِكْزَا وپِيتَا لَمْ تَرِدَا مطلقاً في هذا المشروع ، لكنَّنا أضفناهما هنا من باب الاكتمال .

(المشرف)

جدول ٥ : وَحَدَاتُ إِضَافِيَّةٌ مَهْمَةٌ عَمَلِيًّا

الكمية	الوحدة	الرمز الدولي	الرمز العربي المقترح
زمن	دقيقة	min	د
	ساعة	h	س
	يوم	d	ي
زاوية مستوية	درجة	°	°
	دقيقة	'	'
	ثانية	"	"
حجم	لتر	l	ل
كتلة	طن	t	ط

جدول ٦ : وَحَدَاتُ إِضَافِيَّةٌ مُتَخَصِّصَةٌ

الكمية	الوحدة	الرمز الدولي	الرمز العربي المقترح
الطاقة	إلكترون فولت	eV	ء ف
كتلة الذرة	وحدة كتلة الذرة	U (amu)	و هـ
الطول	وحدة فلكية	A.U.	م هـ
	فرسخ	pc	ف خ
ضغط المائع	بار	bar	بر

أما الوَحَدَاتُ المُسْتَعْمَلَةُ في بعض المجالات المُتَخَصِّصَةِ الأخرى فقد أُبْقِيَ عليها دونَ رمزٍ، مثل ميل بحري دولي (١٨٥٢ م) ؛ هكتار (١٠ م^٢) ؛ عُقْدَةُ (٠,٥١٥ م / ث) ؛ بُوَّاز (٠,١ بس ث = ٠,١ ن ث / م^٢) ؛ ستوكس (١٠ م^{-٢} م^٢/ث) ؛ وهلم جرا. وأما درجة الحرارة المئوية، أو درجة حرارة سيلسيوس، فقد أُعْطِيَتِ الرَّمْزَ (س) بدلاً من (م). م^٢/ث) ؛

وبعد الانتهاء من وضع رموز الوَحَدَات ، انتقلت اللّجنة إلى مهمّة أخرى هي تعريبُ بعضِ المصطلحاتِ العلميّةِ الواردةِ في المشروع . فقامتُ بوضعِ المصطلحاتِ العربيّةِ التّالية :

المصطلح العلميّ العربيّ	المصطلح العلميّ الدّوليّ	
قُبُولِيّة ، بدلاً من « مُسَامَحَة » .	admittance	١ —
زَخَم زاويّ ، بدلاً من « كَمِيّة التَّحَرُّك الزّاويّ » .	angular momentum	٢ —
مُوَاسَعَة ، بدلاً من « مَنَفَذِيّة (سَعَة) » .	capacitance	٣ —
حراريّة سِلْسْيُوس ، بدلاً من « درجة الحرارة سِلْسْيُوس » . ^٥	Celsius temperature	٤ —
عَزْمُ ثَنَاقُطِيّ كَهْرَبَائِيّ ، بدلاً من « عَزْم ثَنَائِيّ القُطْبِيّة الكَهْرَبَائِيّة » .	dipole electric moment	٥ —
مُوَاسَعَة كَهْرَبَائِيّة ، بدلاً من « سَعَة كَهْرَبَائِيّة » .	electric capacitance	٦ —
قُوّة المجال الكَهْرَبَائِيّ ، بدلاً من « شِدّة المجال الكَهْرَبَائِيّ » .	electric field strength	٧ —
دَقَق ، بدلاً من « تَدَقَّق » .	flux	٨ —
معدّل تدفق الحرارة ، بدلاً من « مُعدّل سَرَيَانِ الحرارة » .	heat flow rate	٩ —
إِسْتِنَارَة ، بدلاً من « شِدّة اسْتِضَاء » .	illuminance	١٠ —
مُعَاوَقَة ، بدلاً من « مُمَانَعَة » .	impedance	١١ —
مَفْعُولِيّة ضَوْيّة ، بدلاً من « فَعَالِيّة ضَوْيّة » .	light efficacy	١٢ —
مُعَامِل التَّمَدُّد الخَطِّيّ ، بدلاً من « مُعَامِل التَّمَدُّد الطَّوِيلِيّ » .	linear expansion coefficient	١٣ —
مُخَارَجة مُنِيرِيّة ، بدلاً من « وجود ضَوْيّ » .	luminous exitance	١٤ —
دَقَق مُنِيرِيّ ، بدلاً من « فَيَض ضَوْيّ » .	luminous flux	١٥ —
مُولِيّة ، بدلاً من « تَرْكِيز الجُزْئِي الغَرَامِيّ » .	molality	١٦ —
مُولِيّ .	molar	١٧ —
سَعَة حراريّة مُولِيّة ، بدلاً من « السَّعَة الحراريّة للجُزْئِي الغَرَامِيّ » .	molar heat capacity	١٨ —
طاقة مُولِيّة دَاخِلِيّة ، بدلاً من « طَاقَة الجُزْئِي الغَرَامِيّ الدَّاخِلِيّة » .	molar internal energy	١٩ —

المصطلح العلمي العربي	المصطلح العلمي الدولي
كتلة مولية ، بدلاً من «كتلة الجزيء الغرامي» .	molar mass — ٢٠
حَجْمٌ مُوَلِّيٌّ ، بدلاً من «حَجْمُ الجزيء الغرامي» .	molar volume — ٢١
عَزْمُ الزَّخَم ، بدلاً من «عزم كمية التحرك الزاوي» .	moment of momentum — ٢٢
زَخَم ، بدلاً من «كمية التحرك» .	momentum — ٢٣
سَمَاحِيَّة ، بدلاً من «مَنْفَذِيَّة (سَمَاحِيَّة)» .	permittivity — ٢٤
دائرية ، بدلاً من «زاوية نصف قطرية (دائرية)» .	radian — ٢٥
إِشْعَاعِيَّة ، إِشْتِعَاع .	radiance, irradiance — ٢٦
مُخَارِجَةٌ مُشْعَّة ، بدلاً من «الوجود الإشعاعي» .	radiant exitance — ٢٧
شِدَّة مُشْعَّة ، بدلاً من «شدة الإشعاع» .	radiant intensity — ٢٨
مُرَاكَسَةٌ ، بدلاً من «مُفَاعَلَةٌ» .	reactance — ٢٩
إِحْجَامِيَّة ، بدلاً من «مُعَاوَفَةٌ» .	reluctance — ٣٠
شِدَّة صَوْتِيَّة ، بدلاً من «شدة الصوت» .	sound intensity — ٣١
سَرَّجَهَةٌ جُسَيْمِ الصَّوْت ، بدلاً من «سرعة صوت الجسم» .	sound particle velocity — ٣٢
قُدْرَةٌ صَوْتِيَّة ، بدلاً من «قُدْرَةُ الصوت» .	sound power — ٣٣
مُعَاوَفَةٌ صَوْتِيَّاتِيَّة نَوْعِيَّة ، بدلاً من «مُعَاوَفَةٌ صَوْتِيَّة نَوْعِيَّة» .	specific acoustic impedance — ٣٤
مَحْسَمَةٌ ، بدلاً من «زاوية فراغية (محسمة)» .	steradian — ٣٥
مُخَاضَعَةٌ ، بدلاً من «تَقْبِيلِيَّة» .	susceptance — ٣٦
تَوَتْرٌ ، بدلاً من «شدّ (توتر)» .	tension — ٣٧
حَرَارِيَّة دِينَامِيَّة ، بدلاً من «درجة الحرارة الدينامية» .	thermodynamic temperature — ٣٨
سَرَّجَهَةٌ ، بدلاً من «سرعة متجهة» .	velocity — ٣٩
سَرَّجَهَةٌ حَجْمِيَّة ، بدلاً من «سرعة الحجم» .	volume velocity — ٤٠

٥. لم نأخذ بهذا الاقتراح هنا ؛ بل آثرنا الإبقاء على المصطلح المؤلف «درجة حرارة» بدلاً من «حرارية» .

(المشرف)



ملحق ٣. مَعْطَيَاتٌ عَدَدِيَّةٌ

لِلْمُعْطَيَاتِ (الْبَيِّنَاتِ) الفيزيائية، أنظر - بالإضافة إلى هذا الملحق - الجداول المناسبة في متن الكتاب.

جدول ٣,١ بَعْضُ الجُسَيْمَاتِ الْأَوَّلِيَّةِ الْأَكْثَرِ أَهَمِّيَّةً

Some of the More Important Elementary Particles

جدول ٩,٢ بَعْضُ خَوَاصِّ المَدَارَاتِ الكوكبيَّةِ الَّتِي كَانَتْ مَعْرُوفَةً لِكِبْلَر

Some Properties of Planetary Orbits Known to Kepler

جدول ١١,١ الخَوَاصُّ الرَّئِيسِيَّةُ لِكَوَاكِبِ الشَّمْسِ التَّسْعَةِ المَعْرُوفَةِ

Principal Properties of the Sun's Nine Known Planets

جدول ١٣,١ دَرَجَاتُ حَرَارَةِ الإِسَالَةِ لِبَعْضِ الغَازَاتِ العَادِيَّةِ

Liquefaction Temperatures of Some Common Gases

جدول ١٣,٢ الحَرَارَاتُ النَّوعِيَّةُ لِبَعْضِ المَوَادِّ العَادِيَّةِ فِي دَرَجَةِ حَرَارَةِ الغُرْفَةِ

Specific Heats of Some Common Materials at Room Temperature

جدول ١٣,٣ حَرَارَاتُ الإِنصِهَارِ وَالتَّبَخِيرِ لِبَعْضِ المَوَادِّ العَادِيَّةِ تَحْتَ الضَّغْطِ الجَوِّيِّ

Heats of Fusion and Vaporization of Some Common Materials at Atmospheric Pressure

جدول ١٥,١ مُوصِّلِيَّاتُ بَعْضِ المَوَادِّ العَادِيَّةِ فِي دَرَجَةِ حَرَارَةِ الغُرْفَةِ

Conductivities of Some Common Materials at Room Temperature

جدول ١٥,٢ ثَوَابِتُ العَازِلِ لِبَعْضِ المَوَادِّ

Dielectric Constants of Some Materials

جدول ١٦,١ نَفَازِيَّاتُ κ_m وَتَأَثِّرِيَّاتُ χ_m مَخْتَارَةٌ

Selected Permeabilities κ_m and Susceptibilities χ_m

جدول ١٨,١ سُرْعَةُ الصَّوْتِ فِي المَوَادِّ العَادِيَّةِ

The Speed of Sound in Common Substances

جدول ٢٣,١ ترددُ عتبة (مُبدي) الكهروضوئية ودالة الشغل لبضعة فلزات (معادن)

Photoelectric Threshold Frequency and Work Function for Several Metals

جدول ٢٤,٣ الجدول الدوري للعناصر

Periodic Table of the Elements

جدول ٢٦,١ خواص اضمحلال ألفا لبضع نوى

Alpha-Decay Properties of Several Nuclei

أ - الثوابت الفيزيائية Physical Constants

[هذا الجدول مُقتبس من كتاب تيلور وبازكير ولانغينبرغ ، الثوابت الأساسية والدynamics الكهربائية الكمية ، :

B. N. Taylor, W. H. Parker, and D. N. Langenberg, *The Fundamental Constants and Quantum Electrodynamics* (New York: Academic Press, 1969).

ويمكن إيجاد مقالة مبسطة جيدة عن الثوابت الأساسية ، لنفس هؤلاء المؤلفين ، في عدد تشرين أول (أكتوبر) ، ١٩٧٠ ، من مجلة *Scientific American* . هذا ، وقد اختصرت الأرقام المدونة هنا بحيث يكون الشك في كل منها ± 1 - على الأكثر - في الخانة digit الأخيرة .]

القيمة	الرمز	الكمية
$6.67 \times 10^{-11} \text{ ن م}^2 / \text{كسغ}^2$ (أو م ^٣ / كسغ ث ^٢)	G	ثابت الجاذبية Gravitational constant
$6.022 \times 10^{23} \text{ جسيم / مول}$ (أو م ^٣ / غ)	N_0	عدد أفوغادرو Avogadro's number
$1.3806 \times 10^{-23} \text{ ج / ك}$ $8.617 \times 10^{-5} \text{ ء / ك}$	k	ثابت بولتزمان (ثابت الغازات المجهري) Boltzmann's constant (microscopic gas constant)
$1.60 \times 10^{-19} \text{ ك / ء}$	$\frac{1}{k}$	

القيمة	الرمز	الكمية
٨,٣١٤ ج / مل ك ١,٩٨٧٢ كرسفر / كرسمل ك	$R (= N_0 k)$	ثابتُ الغازاتِ الجاهريُّ Macroscopic gas constant
1.60219×10^{-19} كل 4.8033×10^{-10} esu	e	وَحْدَةُ الكَمِّ للشُّحْنَةِ Quantum unit of charge
9.6487×10^4 كل / مل 2.8926×10^4 esu / مل	$F (= N_0 e)$	ثابتُ فارادي (١ مُول من الكهرباء) Faraday's constant (1 mole of electricity)
8.85419×10^{-12} كل ^٢ / ن ^٢ م ^٢ 1.112650×10^{-10} كل ^٢ / ن ^٢ م ^٢	$\epsilon_0 \left(= \frac{1}{\mu_0 c^2} \right)$ $4\pi\epsilon_0 \left(= \frac{4\pi}{\mu_0 c^2} \right)$	سَمَاحِيَّةُ الْفَرَاغِ Permittivity of space
8.98755×10^9 ن ^٢ م ^٢ / كل ^٢ $4\pi \times 10^{-7}$ ن / أ ^٢ (بالضبط ، حسب التعريف)	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(= \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \right)$ μ_0	ثابتُ النفاذِيَّةِ Permeability constant
1.256637×10^{-6} ن / أ ^٢ 10^{-7} ن / أ ^٢ تماماً	$\frac{\mu_0}{4\pi}$	
2.997925×10^8 م / ث	c	سرعةُ الضَّوئِ Speed of light
6.6262×10^{-34} ج ث 4.1357×10^{-15} ء ف ث 4.1357×10^{-21} مغ ء ف ث	h	ثابتُ بلانك Planck's constant

الكمية	الرمز	القيمة
نسبة الشحنة إلى الكتلة للإلكترون Charge-to-mass ratio for electron	$\hbar \left(= \frac{h}{2\pi} \right)$	1.05459×10^{-34} ج ث 6.5822×10^{-16} ء ف ث 6.5822×10^{-22} مغ ء ف ث
كتلة الإلكترون Mass of electron	$\frac{e}{m_e}$	1.75880×10^{11} كل / كـرغ 5.2728×10^{17} esu / غ
كتلة البروتون Mass of proton	m_e	9.1096×10^{-31} كـرغ 5.4859×10^{-4} مـر
كتلة النيوترون Mass of neutron	m_p	1.67261×10^{-27} كـرغ 1.0072766 مـر $m_e (1836.11)$
الطاقة الذاتية للإلكترون Intrinsic energy of electron	m_n	1.67492×10^{-27} كـرغ 1.0086652 مـر $m_e (1838.68)$
الطاقة الذاتية للبروتون Intrinsic energy of proton	$m_e c^2$	0.51100 مغ ء ف
الطاقة الذاتية للنيوترون Intrinsic energy of neutron	$m_p c^2$	938.26 مغ ء ف
	$m_n c^2$	939.55 مغ ء ف

القيمة	الرمز	الكمية
$10^{-1} \times 1,0973731$	$R_{\infty} \left[= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e c^4}{4\pi\hbar^3 c} \right]$	ثابت ريدبرغ لنواة لامتناهية الكتلة Rydberg constant for infinitely massive nucleus
$10^{-1} \times 1,0967758$	R_H	ثابت ريدبرغ لهيدروجين ١ Rydberg constant for hydrogen 1
$10^{-3} \times 7,29735$ أو $137,036/1$	$\alpha \left(= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \right)$	ثابت التركيب الدقيق Fine structure constant
$10^{-11} \times 5,29177$ $\dot{m}, 0,529177$	$a_0 \left(= \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \right)$	نصف قطر بور Bohr radius
$10^{-12} \times 2,42631$	$\lambda_c \left(= \frac{h}{m_e c} \right)$	طول موجة كومبتون للإلكترون Compton wavelength of the electron
$10^{-13} \times 3,86159$ فر $386,159$	$\lambda_c \left(= \frac{h}{m_e c} \right)$	طول موجة كومبتون المختزل للإلكترون Reduced Compton wavelength of the electron
$10^{-24} \times 9,2741$ ج / تس	$\mu_B \left(= \frac{e\hbar}{2m_e} \right)$	مغنيطون بور Bohr magneton

التلافات مفيدة من الثوابت

$$\begin{aligned}
 & 10^{-28} \times 2,3071 \text{ ج} \\
 & 14,400 \text{ ء ف} \dot{m} \\
 & 1,4400 \text{ مغ ء ف فر}
 \end{aligned}$$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

الكمية	الرمز	القيمة
	hc	$3,1616 \times 10^{-21}$ ج م $1,97329 \times 10^{-27}$ ف م ١٩٧,٣٢٩ مغ ف فر
	$\frac{h^2}{2m_e}$	$6,1044 \times 10^{-29}$ ج م $3,8100$ ف م $3,8100 \times 10^{-4}$ مغ ف فر
	$\frac{h^2}{2m_p}$	$3,3246 \times 10^{-42}$ ج م $2,0751 \times 10^{-3}$ ف م $20,751$ مغ ف فر
	c^2	$8,98755 \times 10^{16}$ ج / كـرغ $9,3148 \times 10^8$ ف / فر ٩٣١,٤٨ مغ ف / فر

ب - مُعْطَيَاتُ أَرْضِيَّةٌ * Terrestrial Data

(* أنظر الحاشية أسفل جدول د، صفحة م ٣٠)

الكمية	القيمة
تسارعُ الجاذبيَّةِ عند سطح البحر Acceleration of gravity at sea level (g)	$9,80665$ م / ث ^٢ : قيمةُ الإسنادِ المعياريَّةِ $9,7804$ م / ث ^٢ عند خطِّ الإسْتَوَاءِ $9,8322$ م / ث ^٢ عند القُطْبَيْنِ

القيمة	الكمية
$5,98 \times 10^{24}$ كـرغ	كتلة الأرض Mass of earth (M_E)
$3,986 \times 10^{14}$ ن م ² /كـرغ (أوم ³ /ث ²)	كتلة الأرض مضروبة في ثابت الجاذبية Mass of earth times gravitational constant ($M_E G$)
$6,37 \times 10^6$ م 6370 كـم 3960 ميلاً $6378,2$ كـم عند خطّ الإستواء $6356,8$ كـم عند القطبين	نصف قطر الأرض Radius of earth (R_E)
$4,008 \times 10^7$ م 24902 ميل	المحيط الإستوائي للأرض Equatorial circumference of earth

الجو

$1,013 \times 10^5$ ن/م ²	ضَغْطُ الهَوَاءِ المعياري عند سطح البحر (٧٦٠ ملم من الزئبق)
$1,293$ كـرغ/م ³	Standard air pressure at sea level (760 mm of Hg)
$1,20$ كـرغ/م ³	الكثافة المعيارية للهواء الجاف عند سطح البحر وصفر ش Standard dry air density at sea level and 0 °C
	الكثافة النموذجية للهواء الرطب عند سطح البحر و ٢٠ ش Typical moist air density at sea level and 20 °C

القيمة	الكمية
٣٣١ م/ث ٧٤٠ ميلاً/س	سرعة الصوت في الهواء المعياري في صفر سُ Speed of sound in standard air at 0 °C
٣٤٤ م/ث ٧٧٠ ميلاً/س	السرعة النموذجية للصوت في الهواء الرطب في ٢٠ سُ Typical speed of sound in moist air at 20 °C
٧٨ ، N ₂ باللمة ٢١ ، O ₂ باللمة ١ ، Ar باللمة	التركيب التقريبي للغو، مُقدَّراً بعدد الجزيئات Approximate composition of atmosphere, by number of molecules
٢٨,٩٧	متوسط الوزن الجزيئي للهواء الجاف Mean molecular weight of dry air
$C_p = 0.2403$ كـ سُغْ / كـ غ ك $C_v = 0.1715$ كـ سُغْ / كـ غ ك $C_p' = 3.503R$ $C_v' = 2.500R$	الحرارتان النوعيتان للهواء المعياري Specific heats of standard air
١,٤٠١	نسبة الحرارتين النوعيتين للهواء المعياري Ratio of specific heats of standard air (γ)

ج - كثافات المواد العادية تحت الشروط المعيارية لدرجة الحرارة والضغط

Densities of Common Materials at Standard Conditions of Temperature and Pressure

الكثافة		المادة	
(كغ/م ^٣)	(غ/سم ^٣)		
٠,٠٨٩٩	$10^{-5} \times 8,99$	Hydrogen (H ₂)	هيدروجين
٠,١٧٨٥	$10^{-4} \times 1,785$	Helium (He)	هيليوم
١,٢٥٠	$10^{-3} \times 1,250$	Nitrogen (N ₂)	نيتروجين
١,٤٢٩	$10^{-3} \times 1,429$	Oxygen (O ₂)	أكسجين
١,٢٩٣	$10^{-3} \times 1,293$	Air	هواء
٦٦٠ - ٦٩٠ (٧٠٠ ~)	٠,٧ ~	Gasoline	غازولين
٨٠٦	٠,٨٠٦	كحول (إيثانول ؛ أو كحول أثيلي) Alcohol (ethanol)	
$10^3 \times 1,000$	١,٠٠٠	Water	ماء
$10^4 \times 1,360$	١٣,٦٠	Mercury	زئبق
$10^3 \times 2,70$	٢,٧٠	Aluminum	ألومنيوم
$10^3 \times 7,86$	٧,٨٦	Iron	حديد
$10^3 \times 8,96$	٨,٩٦	Copper	نحاس
$10^4 \times 1,14$	١١,٤	Lead	رصاص

القيمة	الكمية
$1,3272 \times 10^{-2} \text{ ن م}^2/\text{كغ}$ (أو $10^{-2} \text{ م}^3/\text{ث}^2$)	كتلة الشمس مضروبة في ثابت الجاذبية Mass of sun times gravitational constant ($M_s G$)
$6,960 \times 10^8 \text{ م}$ $R_E (10^9, 2)$	نصف قطر الشمس Radius of sun (R_s)
$365,26 \text{ ي}$ $3,156 \times 10^7 \text{ ث}$	دورة الأرض Period of earth
$2,98 \times 10^4 \text{ م/ث}$	متوسط السرعة المدارية للأرض Average orbital speed of earth
$5,93 \times 10^{-3} \text{ م/ث}^2$ ($6,05 \times 10^{-3} \text{ م/ث}^2$)	متوسط التسارع المداري للأرض Average orbital acceleration of earth

المصدر: كتاب ألن ، الكميات الفلكية :

C. W. Allen, *Astrophysical Quantities*, second edition (London: The Athlone Press, University of London, 1963).

وثمة مرجعان مفيدان آخران للمعطيات الفيزيائية هما :

Handbook of Chemistry and Physics (Cleveland, Ohio: The Chemical Rubber Co.),

الذي يقع باستمرار ؛ و

American Institute of Physics Handbook, third edition (New York: McGraw-Hill Book Co., 1972).



ملحق ٤ . عوامل التحويل

يُعَدُّ هذا الملحق عوامل التحويل مباشرة (مثل ٢,٥٤ سرم / بوصة) بدلاً من إدراجها في معادلات (على غرار ١ بوصة = ٢,٥٤ سرم) ، وذلك توجيهاً للملاءمة في حساب الوحدات . فيمكن ضرب أية كمية في ، أو قسّمها على ، عوامل تحويل مناسبة حيث أن كل عامل تحويل يُكَافِئ الواحد الصحيح . وعوامل التحويل المسبوقة بنقطة (•) هي دقيقة وتصلح لتعريف الوحدات بدلالة أخرى . فالعامل ٠,٣٠٤٨ م / قدم ، مثلاً ، يُعرّف القدم بأنه ٠,٣٠٤٨ م بالضبط .

١ - الطول

$$\begin{aligned} & \bullet ٣١٠ \text{ سرم}^3 / \text{لتر} \\ & ٠,٩٤٦٣٥ \text{ لتر} / \text{كوارت} \\ & ٣,٧٨٥٤ \times ١٠^{-٣} \text{ م}^٣ / \text{غالون} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet ٢١٠ \text{ سرم} / \text{م} \\ & \bullet ٣١٠ \text{ م} / \text{كسرم} \end{aligned}$$

٣ - الزمن

(اليوم هو متوسط يوم شمسي solar day ؛
أما السنة فهي سنة نجمية sidereal year .)

$$\begin{aligned} & \bullet ٣٦٠٠ \text{ ث} / \text{س} \\ & \bullet ٨,٦٤ \times ١٠^٤ \text{ ث} / \text{ي} \\ & ٣٦٥,٢٦ \text{ ي} / \text{سنة} \\ & ٣,١٥٥٨ \times ١٠^٧ \text{ ث} / \text{سنة} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet ٢,٥٤ \text{ سرم} / \text{بوصة} \\ & \bullet ١٢ \text{ بوصة} / \text{قدم} \\ & \bullet ٥٢٨٠ \text{ قدماً} / \text{ميل} \\ & \bullet ٠,٣٠٤٨ \text{ م} / \text{قدم} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet ١,٦٠٩٣٤٤ \times ٣١٠ \text{ م} / \text{ميل} \\ & \bullet ١,٦٠٩٣٤٤ \text{ كسرم} / \text{ميل} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ١,٤٩٥٩٨ \times ١١١٠ \text{ م} / \text{مرفر} \\ & ٩,٤٦١ \times ١٠١٠ \text{ م} / \text{سنة ضوئية} \\ & ٣,٠٨٤ \times ١٦١٠ \text{ م} / \text{فغ} \end{aligned}$$

٤ - السرعة

$$\begin{aligned} & \bullet ٠,٣٠٤٨ \text{ (م} / \text{ث)} / \text{(قدم} / \text{ث)} \\ & ١,٦٠٩ \times ٣١٠ \text{ (م} / \text{ث)} / \text{(ميل} / \text{ث)} \\ & ٠,٤٤٧٠ \text{ (م} / \text{ث)} / \text{(ميل} / \text{س)} \\ & ١,٦٠٩ \text{ (كسرم} / \text{س)} / \text{(ميل} / \text{س)} \\ & ٣١٢ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet ٦-١٠ \text{ م} / \text{مي م (أو م} / \text{مايكرون)} \\ & \bullet ١٠-١٠ \text{ م} / \text{م} \\ & \bullet ١٠-١٠ \text{ م} / \text{مرفر} \end{aligned}$$

٢ - الحجم

$$\bullet ٣-١٠ \text{ م}^٣ / \text{لتر}$$

٥ - التَّسَارُع

$$\bullet \quad ٠,٣٠٤٨ \text{ (م/ث}^2\text{) / (قدم/ث}^2\text{)}$$

$$\bullet \quad ١٠^\circ \text{ داين / ن}$$

$$\bullet \quad ١٠^{-٥} \text{ ن / داين}$$

$$٤,٤٤٨٢ \text{ ن / باوند - قوّة}$$

$$(١ \text{ باوند - قوّة } 1\text{bf} = \text{وزن } ١ \text{ باوند عند الجاذبيّة})$$

$$\text{المعياريّة [} g = ٩,٨٠٦٦٥ \text{ م/ث}^2\text{]}$$

٦ - الزَّاوِيَة

$$\bullet \quad ٦٠ \text{ ثانية قوسيّة (}^\circ\text{) / دقيقة قوسيّة (}^\circ\text{)}$$

$$\bullet \quad ٦٠ \text{ دقيقة قوسيّة (}^\circ\text{) / درجة (}^\circ\text{)}$$

$$\bullet \quad \pi/١٨٠ (\cong ٥٧,٣٠) \text{ درجة (}^\circ\text{) / دائريّة (مسر)}$$

$$\bullet \quad 2\pi (\cong ٦,٢٨٣) \text{ دائريّة / دَوْرَة}$$

١٠ - الضَّغْط

$$\bullet \quad ٠,١ \text{ (ن/م}^2\text{) / (داين/سم}^2\text{)}$$

$$\bullet \quad ١٠^\circ \text{ (ن/م}^2\text{) / بر}$$

٧ - الكُتْلَة

$$\bullet \quad ١٠^3 \text{ غ / كغ}$$

$$\bullet \quad ١,٠١٣٢٥ \times ١٠^\circ \text{ (ن/م}^2\text{) / جَوِّيّ}$$

$$\bullet \quad ١,٠١٣٢٥ \times ١٠^\circ \text{ (داين/سم}^2\text{) / جَوِّيّ}$$

$$\bullet \quad ١,٠١٣٢٥ \text{ بر / جَوِّيّ}$$

$$٤٥٣,٥٩ \text{ غ / باوند}$$

$$٠,٤٥٣٥٩ \text{ كغ / باوند}$$

$$٢,٢٠٤٦ \text{ باوند / كغ}$$

$$١٣٣,٣٢ \text{ (ن/م}^2\text{) / مرم من الزّئبق (صفر ش)}$$

$$٣,٣٨٦ \times ١٠^3 \text{ (ن/م}^2\text{) / بوصة من الزّئبق}$$

$$\text{(صفر ش)}$$

$$١,٦٦٠٥٣ \times ١٠^{-٢٧} \text{ كغ / م}$$

$$٦,٠٢٢٢ \times ١٠^{-٢٦} \text{ م / كغ}$$

$$٦,٠٢٢٢ \times ١٠^{-٢٣} \text{ م / غ}$$

$$٦,٨٩٥ \times ١٠^3 \text{ (ن/م}^2\text{) / (باوند-قوّة / بوصة}^2\text{)}$$

$$\text{أو psi}$$

٨ - الكُثَافَة

$$\bullet \quad ١٠^3 \text{ (كغ/م}^3\text{) / (غ/سم}^3\text{)}$$

$$١٦,٠١٨ \text{ (كغ/م}^3\text{) / (باوند/قدم}^3\text{)}$$

$$١,٦٠١٨ \times ١٠^{-٢} \text{ (غ/سم}^3\text{) / (باوند/قدم}^3\text{)}$$

١١ - الطَّاقَة

(للتَّحوِيل من كتلة إلى طاقة، أنظر
قيم ممّ الواردة في نهاية ملحق ١٣.)

- ١٠^٦ إرغ / ج
- ١٠^٧ ج / إرغ
- ١,٠٠ ش / ك
- ١,٨٠ ف / ش
- ١,٨٠ ز / ك
- ٤,١٨٤ ج / سُر
- ٤,١٨٤ ج / كه سُر
- ٣١٠ سُر / كه سُر
- $T (ك) = T (ش) + ٢٧٣,١٥$
- $T (ش) = [٣٢ - T (ف)] / ١,٨٠$
- $T (ك) = T (ز) / ١,٨٠$

(يُعرَفُ الكيلوسُغَر [كسُغَر] أيضاً
بالسُغَر الغدائي، أو السُغَر الكبير.)

١٤ - الكميات الكهربائية

(لاحظ أن ٢,٩٩٧٩ تُقَرَّبُ جَيِّدًا بِالرَّقْمِ ٣,٠٠.)

- الشحنة : $١٠ \times ٢,٩٩٧٩$ esu / كل
- التيار : $١٠ \times ٢,٩٩٧٩$ (esu / ث) / أ
- الجهد : ٢٩٩,٧٩ ف / فولت ساكن (statvolt)
- المجال الكهربائي : $١٠ \times ٢,٩٩٧٩$
- (ف / م) / (فولت ساكن / سُر)

- المجال المغناطيسي : ١٠ غاوس / تس
- اللدق المغناطيسي : ١٠ غاوس سُر^٢ / ف
- قوة القطب : ١٠ وَحْدَة سُرغ ث / ميشيل
- (وَحْدَة سُرغ ث = cgs unit = $\sqrt{\text{إرغ سُر}}$)
- ميشيل michell = أ م

- $١,٦٠٢١٩ \times ١٠^{-١٩}$ ج / ع ف
- $١,٦٠٢١٩ \times ١٠^{-١٣}$ ج / مغ ع ف
- ١٠ ع ف / مغ ع ف
- $٣,٦٠ \times ١٠$ ج / كروس (kW hr)
- $٤,٢٠ \times ١٠^{١٢}$ ج / كه طن (kiloton)
- $٤,٢٠ \times ١٠^{١٥}$ ج / مغ طن (megaton)
- ٠,٠٤٣٣٦ (ع ف / جزئي) / كسُر / مل
- ٢٣,٠٦ (كسُر / مل) / (ع ف / جزئي)

١٢ - القدرة

- ٧٤٦ و / قُدْرَة حصان (horsepower)

١٣ - درجة الحرارة

- ١,٠٠ ف / ز



ملحق ٥. معادلات الكهرومغناطيسية بوحدة النظام الدولي (مكث)
والوحدات الغاوسية (سرغث)

لا تُؤخذ الأقطاب المغناطيسية بعين الاعتبار في المعادلات التالية. كما تُناظر أرقام المعادلات تلك المثبتة في متن الكتاب.

أ- المعادلات التي تكون واحدة لكلتا العنيتين من الوحدات

المعادلة	وصف فحوى المعادلة
$I = \frac{dq}{dt}$	(١٥,٥) علاقة التيار بالشحنة
$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$	(١٥,١٨) علاقة المجال الكهربائي بالقوة الكهربائية
$\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$	(١٥,٣٠) تعريف الدفق الكهربائي
$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$	(١٦,١٩) تعريف الدفق المغناطيسي
$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	(١٦,٢٣) الصفة الحزونية للمجال المغناطيسي
$V = \frac{U}{q}$	(١٥,٥٥) تعريف الجهد
$V_2 - V_1 = - \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$	(١٥,٤٨) علاقتا الجهد بالمجال الكهربائي الساكن
$\mathbf{E} = -\nabla V$	(١٥,٦٧)
$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	(١٥,٨٤) قانون أوم
$V = IR$	(١٥,٨٨)
$P = IV$	(١٥,٥٧) القدرة المقترنة بالتيار وفرق الجهد
$P = I^2 R$	(١٥,١٠٧) القدرة في الدارة الخطية
$P = \frac{V^2}{R}$	(١٥,١٠٨)

المعادلة	وَصَفُ فَخْوَى المعادلة
$p = q\lambda$	(١٥,٧١) تعريف عزم الشَّاقْطِيّ الكهربائيّ
$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$	(١٥,٧٣) طاقة الشَّاقْطِيّ الكهربائيّ
$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$	(١٦,١٦) طاقة الشَّاقْطِيّ المغناطيسيّ
$C = \frac{q}{V}$	(١٥,١٠٩) تعريف المُوَاسَّعة
$U = \frac{1}{2}CV^2$	(١٥,١١٩) الطَّاقة المخزونة في مكثفٍ
$L = - \frac{\mathcal{V}}{\left(\frac{dI}{dt}\right)}$	(١٧,٤٤) تعريف المُحَاثَةِ (المُؤَاثَرَةِ)
$U = \frac{1}{2}LI^2$	(١٧,٧١) الطَّاقة المخزونة في مِحَثٍ inductor

ب - المعادلات التي تكون مختلفة لفتي الوَحَدَاتِ

المعادلة للوَحَدَاتِ الغَاوِسيَّةِ	المُعَادَلَةُ لَوَحَدَاتِ النِّظَامِ الدَّوْلِيِّ	وَصَفُ فَخْوَى المعادلة
$F_{12} = \frac{q_1 q_2 i_{12}}{r^2}$	$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 i_{12}}{r^2}$	(١٥,١٥) قانونُ كُولُوم
$E = \frac{qi_r}{r^2}$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qi_r}{r^2}$	(١٥,٢٠) المجالُ الكهربائيُّ لِشَحْنَةٍ نُقْطِيَّةٍ
$V = \frac{q}{r}$	$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$	(١٥,٦٠) الجَهْدُ لِشَحْنَةٍ نُقْطِيَّةٍ
$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	(١٥,٣٦) قانونُ غَاوَس
$E = 4\pi\sigma$	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	(١٥,٤٤) المجالُ الكهربائيُّ قُرْبَ مُوَصلٍ
$C = \frac{A}{4\pi d}$	$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$	(١٥,١١٢) مُوَاسَّعةٌ مَكثَفٍ ذِي لَوْحَيْنِ مُتَوَازِيَيْنِ
$u = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$	$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$	(١٦,٢٥) كثافةُ الطَّاقةِ لِجَالِ كَهْرُومَغْنَاطِيسِيّ
$\mathbf{F}_M = \frac{q'}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$	$\mathbf{F}_M = q' \mathbf{v} \times \mathbf{B}$	(١٦,٢٧) القُوَّةُ المغناطيسيَّةُ على شَحْنَةٍ مُنْحَرَكَةٍ
$d\mathbf{F} = \frac{I'}{c} d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$	$d\mathbf{F} = I' d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$	(١٦,٤٣) القُوَّةُ المغناطيسيَّةُ على عُصْرٍ تَبَّارٍ

المعادلة للوحدات الغاوسية	المعادلة لوحدات النظام الدولي	وصف فحوى المعادلة
$B = \frac{q v \times i_r}{c r^2}$	$B = \frac{\mu_0 q v \times i_r}{4\pi r^2} \quad (16,36)$	المجال المغناطيسي الذي تُحدثه شحنة متحركة
$dB = \frac{I ds \times i_r}{c r^2}$	$dB = \frac{\mu_0 I ds \times i_r}{4\pi r^2} \quad (16,56)$	المجال المغناطيسي الذي يُحدثه عنصر تيار
$r = \frac{p_{\perp} c}{q' B}$	$r = \frac{p_{\perp}}{q' B} \quad (16,30)$	نصف قطر الانحناء لشحنة تدور في مجال مغناطيسي
$\mu = \frac{q}{2mc} L$	$\mu = \frac{q}{2m} L \quad (16,54)$	العزم المغناطيسي لجسيم دائري
$\mu = \frac{IA}{c}$	$\mu = IA \quad (16,49)$	العزم المغناطيسي لعمود من التيار current loop
$\frac{dF}{ds} = \frac{2I_1 I_2}{c^2 d}$	$\frac{dF}{ds} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \quad (16,74)$	القوة لكل وحدة طول على تيارين متوازيين
$B = \frac{2I}{cx}$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (16,61)$	المجال المغناطيسي لسلك مستقيم
$B = \frac{4\pi n I}{c}$	$B = \mu_0 n I \quad (16,69)$	طويل المجال المغناطيسي داخل ملف حلزوني طويل
$\oint E \cdot ds = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_B}{dt}$	$\oint E \cdot ds = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (17,1)$	قانون الحث الكهرومغناطيسي electromagnetic
$\oint B \cdot ds = \frac{4\pi I}{c} + \frac{1}{c} \frac{d\Phi_E}{dt}$	$\oint B \cdot ds = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (17,29)$	قانون أمبير وقانون الحث المغنوكهربائي magnetoelectric
لا يوجد نظير لهذه المعادلة ؛ إذ تظهر c على نحو صريح في المعادلات الغاوسية	$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (17,77)$	سرعة الضوء

ج - الصورة التفاضلية لمعادلات ماكسويل

النظام الغاوسي	النظام الدولي
$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\mathbf{J}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$



ملحق ٦ . صِيَغٌ رِیَاضِیَّةٌ

بعض الصِّغِ الرِّیَاضِیَّةِ أدناه تتجاوزُ الاحتیاجاتِ المباشرةَ لهذا الكتاب ، وذلك بُغْیةَ توفيرِ مَرَجِعٍ للمقرراتِ أُخرى أو لشُغْلِ إضافيٍّ اختياريٍّ قد يرغبُ المدرِّسُ في تعينه . أمَّا إذا تَوَخَّيْتَ خُلاصَةً compendium من الصِّغِ أَشْمَلُ بكثيرٍ ، فانظرِ الطَّبعةَ الرَّابِعَةَ من كتابِ دَوَّيْتِ « جداولُ لتكاملاتٍ ومُعْطَيَاتٍ رِیَاضِیَّةٍ أُخرى » : Herbert Dwight, *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, 4th edition (New York : The Macmillan Company, 1961).

فهذا المَرَجِعُ الممتازُ، المعتدلُ حجماً وسِغراً، هو استِثَارٌ جَيِّدٌ . وسَيُثَبِّتُ فائدَتَهُ طِلَّةٌ سِرَّةٌ المِرَّةِ الدِّرَاسِیَّةِ والمِهْنِیَّةِ .

أ - الإِشَارَاتُ الرِیَاضِیَّةُ Mathematical Signs

= يُسَاوِي

≠ لَا يُسَاوِي

≈ يُسَاوِي، تَقْرِیباً

≡ مُتَطَابِقٌ مَعَ ؛ يُعْرَفُ بِأَنَّهُ

> أَكْبَرُ مِنْ

≥ أَكْبَرُ مِنْ أَوْ يُسَاوِي

» أَكْبَرُ بِكَثِيرٍ مِنْ

< أَصْغَرُ مِنْ

≤ أَصْغَرُ مِنْ أَوْ يُسَاوِي

« أَصْغَرُ بِكَثِيرٍ مِنْ

~ مُتَنَاسِبٌ مَعَ

[لاحظْ أَنَّ الانفِراجَ في الإِشَارَاتِ هـ - ١٠ أعلاهَ یَنبَغِي أَنْ یَكُونَ صَوْبَ الطَّرَفِ الْأَكْبَرِ فِي مُتَابِقَةِ (لامتساوية) inequality مَعْبُتَةٍ ، بَیْنَا یَجِبُ أَنْ یَكُونَ رَأْسُ الزَّوْیَةِ ، بِاتِّجَاهِ الطَّرَفِ الْأَصْغَرِ . وعلى ذلك ، فمدلولُ هذه الإِشَارَاتِ السَّتْ یُنطبقُ فقط على المُتَابِقَاتِ المَكْتُوبَةِ بالحروفِ اللَّاتِیْنِیَّةِ (من اليسارِ إلى اليمين) .]

(المشرف)

Arithmetic: Powers of 10

ب - الحِسَاب : قُوَى ١٠

$$10^a 10^b = 10^{a+b}$$

$$10^a / 10^b = 10^{a-b}$$

$$(10^a)^b = 10^{ab}$$

ج - الجَبْر Algebra

FRACTIONS الكُسُور □

$$a \left(\frac{b}{c} \right) = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{\left(\frac{b}{c} \right)}{d} = \frac{b}{cd}$$

$$\left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{c}{d} \right) = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b} \right)}{\left(\frac{c}{d} \right)} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

□ جَذْرَا مُعَادِلَةِ تَرْبِيعِيَّةٍ ROOTS OF A QUADRATIC EQUATION

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{فَإِنْ} \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{إِذَا كَانَتْ}$$

$$x = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma} \quad \text{فَإِنْ} \quad x^2 + 2\beta x + \gamma = 0 \quad \text{وَإِذَا كَانَتْ}$$

□ مَفْكُوكَاتُ ذَاتِ الْخَدَيْنِ BINOMIAL EXPANSIONS

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \quad : n \text{ (integer) } \quad \text{عَامِلِيٌّ factorial عَدَدٍ صَحِيحٍ}$$

$$\left(\frac{q}{n} \right) = \frac{q!}{n! (q-n)!} \quad : n \text{ و } q \text{ الصَّحِيحَيْنِ} \quad \text{مُعَامِلُ ذَاتِ الْخَدَيْنِ لِلْعَدَدَيْنِ الصَّحِيحَيْنِ}$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

كَيْ تَحْسَبَ الْكَمِيَّةَ $(a+b)^p$ ، اَكْتُبْهَا عَلَى الصُّورَةِ :

$$a^p(1+x)^p \quad \text{حيث} \quad x = b/a \quad \text{أو على الصورة :}$$

$$b^p(1+x)^p \quad \text{حيث} \quad x = a/b$$

$$(1 \pm x)^p = 1 \pm px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 \pm \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} x^3 + \dots$$

تكون هذه متسلسلة متناهية إذا كان p عدداً صحيحاً موجباً. أما لقيم p الأخرى، فتكون متسلسلة لامتناهية تتقارب converges للقيم $|x| < 1$.

حالات خاصة :

$$p = -1: \frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots$$

$$p = -2: \frac{1}{(1 \pm x)^2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots$$

$$p = \frac{1}{2}: \sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \pm \frac{1}{16}x^3 - \dots$$

$$p = -\frac{1}{2}: \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \mp \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

COMPLEX NUMBERS الأعداد المركبة □

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2}$$

$$|a + ib|^2 = (a + ib)(a - ib) = (a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$$

$$\theta = \arctan(b/a) \text{ و } r = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ حيث } a + ib = re^{i\theta}$$

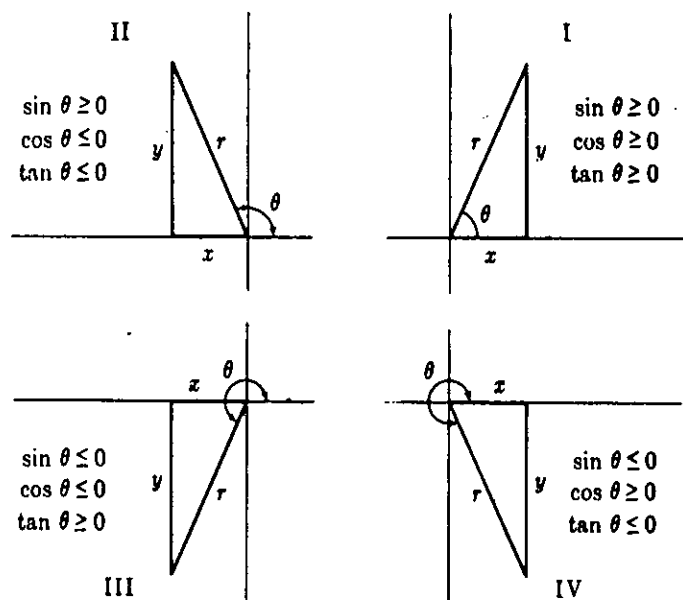
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Trigonometry د — المثلثات

DEFINITIONS OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS تعاريف الدوال المثلثية □

الدوال العكسية: inverse functions. إذا كانت θ (جا θ) $u = \sin \theta$ ، فإن (قو جا u) $\theta = \arcsin u$ ، ونكتب أحياناً

(جا⁻¹ u) $\theta = \sin^{-1} u$. ويرمز بالمثل إلى الدوال العكسية الأخرى: $\arccos u$ ، $\arctan u$ ، وهلم جرا.



$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{r}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{r}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{x}{y}$$

خواص بسيطة SIMPLE PROPERTIES □

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos \theta$$

$$\sin(\theta \pm \pi) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin \theta$$

$$\cos(\theta \pm \pi) = -\cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\tan\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta} = -\cot \theta$$

$$\tan(\theta \pm \pi) = \tan \theta$$

□ قِيمُ زَوَايَا خَاصَّةٍ VALUES FOR SPECIAL ANGLES

الزَاوِيَة					الدَّالَّة
٩٠	٦٠	٤٥	٣٠	(صفر)	
١	$0.8660 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$0.7071 = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	صفر	جا θ
صفر	$\frac{1}{2}$	$0.7071 = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$0.8660 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	١	جنا θ
∞	$1.7321 = \sqrt{3}$	١	$0.5774 = \frac{1}{\sqrt{3}}$	صفر	ظا θ

بالنسبة لقيم أخرى وللجداول، أنظر ملحق ٧.

□ صِيغٌ مِثْلِيَّةٌ TRIGONOMETRIC FORMULAS

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 \quad \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \sin \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad \cos \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad \tan \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

$$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$\sin A \pm \sin B = 2 \sin \left[\frac{1}{2}(A \pm B) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(A \mp B) \right]$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left[\frac{1}{2}(A + B) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(A - B) \right]$$

$$\cos A - \cos B = 2 \sin \left[\frac{1}{2}(A + B) \right] \sin \left[\frac{1}{2}(B - A) \right]$$

$$\tan A \pm \tan B = \frac{\sin (A \pm B)}{\cos A \cos B}$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos (A - B) - \cos (A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos (A - B) + \cos (A + B)]$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin (A - B) + \sin (A + B)]$$

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(n+1)\theta \right] \sin \left(\frac{1}{2}n\theta \right)}{\sin \left(\frac{1}{2}\theta \right)}$$

$$\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\cos \left[\frac{1}{2}(n+1)\theta \right] \sin \left(\frac{1}{2}n\theta \right)}{\sin \left(\frac{1}{2}\theta \right)}$$

□ خواص مثلث PROPERTIES OF A TRIANGLE

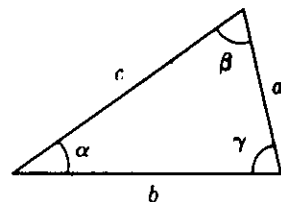
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



$$a^2 + b^2 = c^2 \quad : \left(\gamma = \frac{\pi}{2} \right) \text{ مثلث قائم}$$

□ مفكوكا متسلسلتين SERIES EXPANSIONS

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

تتقارب هاتان المتسلسلتان لسائر قيم x .

هـ — الدالتان الأسية واللوغاريتمية Exponential and Logarithmic Functions

للجداول والقيم العددية، أنظر الملحقين ٨ و ٩.

$$e = 2.71828$$

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$e^{-t/\tau} = 0.5 \quad \text{for} \quad t = \tau \ln 2 = 0.6931\tau$$

$$e^{t/\tau} = 2 \quad \text{for} \quad t = \tau \ln 2 = 0.6931\tau$$

$$e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{x^2}{2!} \pm \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \pm \dots$$

$$e^0 = 1$$

$$e^x / e^y = e^{x-y}$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$e^{-\ln x} = 1/x$$

تتقارب هذه المتسلسلة لجميع قيم x .

$$\ln e = 1$$

$$\ln (xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln (1/x) = -\ln x$$

$$\ln (e^x) = x$$

$$\ln a = 2.3026 \log_{10} a$$

$$\ln (1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right)$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln (x/y) = \ln x - \ln y$$

$$\ln (x^n) = n \ln x$$

$$\ln (a^x) = x \ln a$$

$$\log_{10} a = 0.43429 \ln a$$

تتقارب هاتان المتسلسلتان للقيم $|x| < 1$.

و — حساب التفاضل والتكامل Calculus

في الآتي f ، و g ، و u دوال؛ في حين أن a ، و b ، و n ثوابت.

□ بعض قواعد التفاضل SOME RULES OF DIFFERENTIATION

$$\frac{d}{dx} (fg) = \frac{df}{dx} g + f \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{df}{dx} g - f \frac{dg}{dx}}{g^2}$$

$$\frac{d}{dx} [f(u)] = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

□ خاصيتان خطيتان LINEARITY PROPERTIES

$$\frac{d}{dx} (af + bg) = a \frac{df}{dx} + b \frac{dg}{dx}$$

$$\int (af + bg) dx = a \int f dx + b \int g dx$$

□ التكامل المحدود THE DEFINITE INTEGRAL

$$D = \int_a^b f(x) dx = I(x) \Big|_a^b = I(b) - I(a),$$

حيث I هو التكاملُ غيرُ المحدود ، $I(x) = \int f(x) dx$ ، أو ضدَّ (نقيض) المشتقة $f(x) = dI(x)/dx$: antiderivative .

□ التكاملُ بالأجزاء INTEGRATION BY PARTS

$$\int_a^b f(x) \frac{dg}{dx} dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{df}{dx} g(x) dx$$

□ مُتَسَلِّسَةٌ تيلور TAYLOR SERIES

إذا وُجِدَتْ كُلُّ مُشْتَقَّاتِ دَالَّةٍ ما عند نقطةٍ معينة ، أمكن كتابة الدالَّةِ كمُتَسَلِّسَةٍ قُوَى حَوْلَ تلكِ النِّقْطَةِ . كذلك يمكنُ تقريبُ الدَّوَالِ التَّجْرِبِيَّةِ empirical على نفسِ المنوالِ .

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_{x_0} + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \left(\frac{d^3f}{dx^3} \right)_{x_0} + \dots$$

حيثُ تُحَسَّبُ جميعُ المُشْتَقَّاتِ عِنْدَ $x = x_0$.

□ بعضُ المُشْتَقَّاتِ SOME DERIVATIVES

(أنظر أيضاً جدول ٠,٥,٢)

$$\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} (\sin ax) = a \cos ax$$

$$\frac{d}{dx} (\cos ax) = -a \sin ax$$

$$\frac{d}{dx} (\tan ax) = a \sec^2 ax = \frac{a}{\cos^2 ax}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

(الإشارة + في الزنبرين الأول والرابع)
(الإشارة - في الزنبرين الثاني والثالث)

$$\frac{d}{dx} \left(\arccos \frac{x}{a} \right) = \frac{\mp 1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

(الإشارة - في الرّبعين الأوّل والثاني
الإشارة + في الرّبعين الثالث والرّابع)

$$\frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{x}{a} \right) = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx} (e^{ax}) = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx} (\ln ax) = \frac{1}{x}$$

□ بعض التكاملات غير المحدودة SOME INDEFINITE INTEGRALS

(أنظر أيضاً جدول ٥,٧ .)

يجب إضافة ثابت اعتباطي إلى كل من التكاملات التالية .

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

$$\int (a + bx)^n dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n+1)}, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln |a + bx|$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

$$\int \sqrt{a + bx} dx = \frac{2}{3b} (a + bx)^{3/2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a + bx}$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2}x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax|$$

$$\int \csc ax dx = \frac{1}{a} \ln |\tan \frac{1}{2}ax|$$

$$\int \sec ax dx = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{1 + \sin ax}{1 - \sin ax} \right)$$

$$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax|$$

$$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{1}{2}a \ln (a^2 + x^2)$$

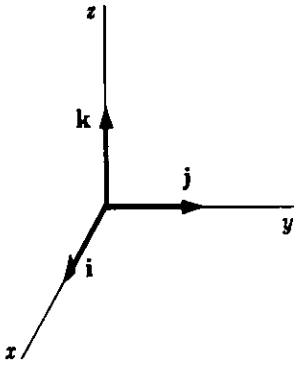
$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{1}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right) e^{ax}$$

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x$$

$$\int x \ln ax dx = \frac{1}{2}x^2 \ln ax - \frac{1}{2}x^2$$

ز - المتجهات Vectors



تكون متجهات الوحدة i ، j ، و k

موازية للمحاور x ، y ، و z ، على الترتيب.

المتجه بدلالة المركبات الديكارتية: $a = a_x i + a_y j + a_z k$

متجه الموضع: $r = xi + yj + zk$

مقدار متجه: $|a| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

□ حاصل الضرب القياسي SCALAR PRODUCT

$a \cdot b = ab \cos \theta$ ؛ حيث θ هي الزاوية الصغرى بين a و b .

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

□ حاصل الضرب الاتجاهي VECTOR PRODUCT

$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y)i + (a_z b_x - a_x b_z)j + (a_x b_y - a_y b_x)k$$

$|a \times b| = ab \sin \theta$ ؛ حيث θ هي الزاوية الصغرى بين a و b

$$a \times b = -b \times a$$

□ خواص متجهات الوحدة PROPERTIES OF UNIT VECTORS

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$$

$$j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j$$

ح - تفاضل وتكامل المتجهات Vector Calculus

F و G هنا دالتان اتجاهيتان؛ r دالة قياسية؛ a و b ثابتان عدديان.

□ المشتقات DERIVATIVES

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF_x}{dt} i + \frac{dF_y}{dt} j + \frac{dF_z}{dt} k$$

$$\frac{d}{dt}(f\mathbf{F}) = \frac{df}{dt}\mathbf{F} + f\frac{d\mathbf{F}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\frac{d\mathbf{F}}{dt} + b\frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt} \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \times \frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

□ التكاملات INTEGRALS

$$\int \mathbf{F}(t) dt = \left[\int F_x(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int F_y(t) dt \right] \mathbf{j} + \left[\int F_z(t) dt \right] \mathbf{k}$$

التكامل الخطي : line integral $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int F_{\parallel} ds$ ، حيث $F_{\parallel}$ هي مركبة $\mathbf{F}$ الموازية لمسار التكامل المعين عند كل نقطة .

التكامل السطحي : surface integral $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int F_{\perp} dS$ ، حيث $F_{\perp}$ هي مركبة $\mathbf{F}$ العمودية على سطح التكامل المعين (أو الموازية للمتجه $d\mathbf{S}$) عند كل نقطة .

□ عمليات اتجاهية تلزم في الأعمال الأكثر تقدماً VECTOR OPERATIONS NEEDED IN MORE ADVANCED WORK

يكون تدرج $gradient$ دالة قياسية دالة اتجاهية :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

في حين أن تباعد $divergence$ دالة اتجاهية يكون دالة قياسية :

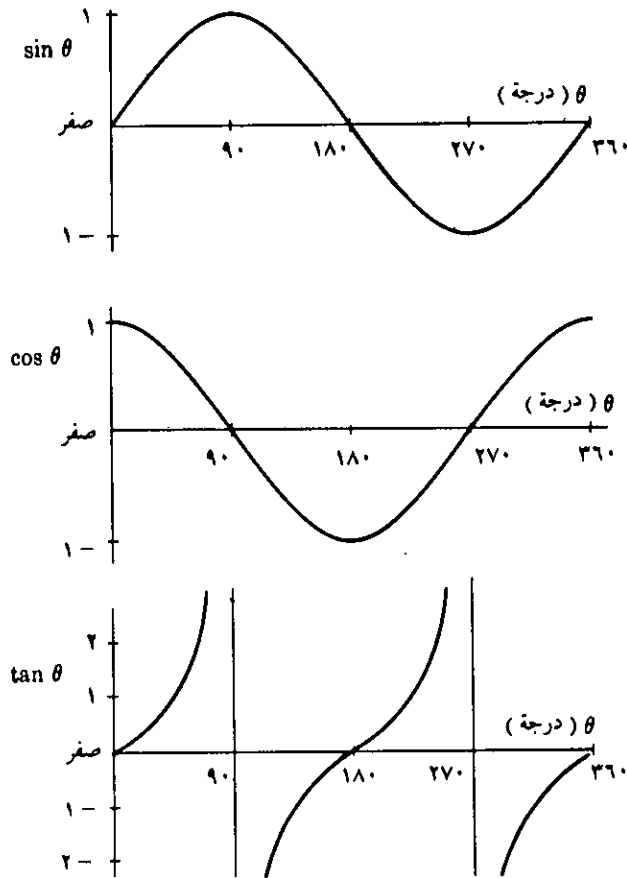
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

كما يكون التفاف $curl$ دالة اتجاهية دالة اتجاهية محورية :

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$



ملحق ٧ . الدَّوَالُ المثلثية



يُعطي الجدول على الصفحة التالية جـ θ ($\sin \theta$) ، وجـ θ ($\cos \theta$) ، و θ ($\tan \theta$) في الربع الأول
 • ($0 \leq \theta \leq 90 \text{ deg}$)

أما للربع الثاني ، فاجز القياس إلى الخلف ابتداءً من ١٨٠ ، ثم استخدم العلاقات

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \theta) &= \sin \theta \\ \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta \\ \tan(\pi - \theta) &= -\tan \theta\end{aligned}$$

كذلك للربع الثالث ، أجر القياس إلى الأمام ابتداءً من ١٨٠ ، واستخدم

$$\sin (\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos (\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan (\pi + \theta) = \tan \theta$$

وأخيراً للرُّبع الرابع ، أَجْرِ القياس إلى الخلف ابتداءً من صفر (أو ٣٦٠) ، ثُمَّ استخدم

$$\sin (-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos (-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan (-\theta) = -\tan \theta$$

هذا ، وَتَعَرَّفْ دوالٌ مثلثيةٌ أخرى بالعلاقات

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \csc \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

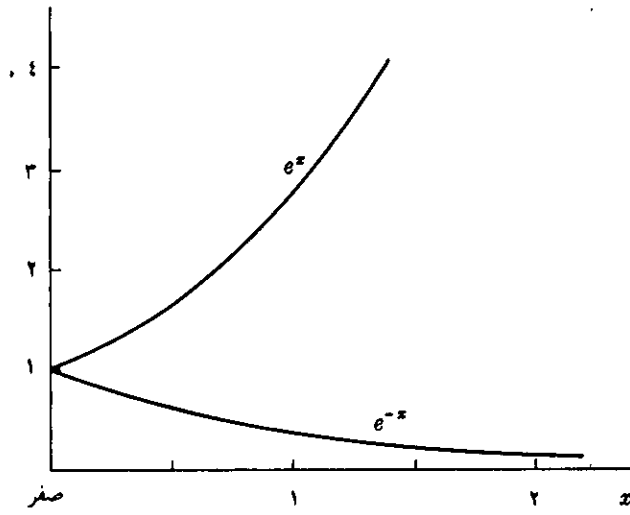
زاوية θ	جنا θ	جا θ	الزاوية θ		زاوية θ	جنا θ	جا θ	الزاوية θ	
			دائرية	درجة				دائرية	درجة
					٠,٠٠٠٠	١,٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠	صفر
٠,٢٨٦٧	٠,٩٦١٣	٠,٢٧٥٦	٠,٢٧٩٣	١٦	٠,٠١٧٥	٠,٩٩٩٨	٠,٠١٧٥	٠,٠١٧٥	١
٠,٣٠٥٧	٠,٩٥٦٣	٠,٢٩٢٤	٠,٢٩٦٧	١٧	٠,٠٣٤٩	٠,٩٩٩٤	٠,٠٣٤٩	٠,٠٣٤٩	٢
٠,٣٢٤٩	٠,٩٥١١	٠,٣٠٩٠	٠,٣١٤٢	١٨	٠,٠٥٢٤	٠,٩٩٨٦	٠,٠٥٢٣	٠,٠٥٢٤	٣
٠,٣٤٤٣	٠,٩٤٥٥	٠,٣٢٥٦	٠,٣٣١٦	١٩	٠,٠٦٩٩	٠,٩٩٧٦	٠,٠٦٩٨	٠,٠٦٩٨	٤
٠,٣٦٤٠	٠,٩٣٩٧	٠,٣٤٢٠	٠,٣٤٩١	٢٠	٠,٠٨٧٥	٠,٩٩٦٢	٠,٠٨٧٢	٠,٠٨٧٣	٥
٠,٣٨٣٩	٠,٩٣٣٦	٠,٣٥٨٤	٠,٣٦٦٥	٢١	٠,١٠٥١	٠,٩٩٤٥	٠,١٠٤٥	٠,١٠٤٧	٦
٠,٤٠٤٠	٠,٩٢٧٢	٠,٣٧٤٦	٠,٣٨٤٠	٢٢	٠,١٢٢٨	٠,٩٩٢٥	٠,١٢١٩	٠,١٢٢٢	٧
٠,٤٢٤٥	٠,٩٢٠٥	٠,٣٩٠٧	٠,٤٠١٤	٢٣	٠,١٤٠٥	٠,٩٩٠٣	٠,١٣٩٢	٠,١٣٩٦	٨
٠,٤٤٥٢	٠,٩١٣٥	٠,٤٠٦٧	٠,٤١٨٩	٢٤	٠,١٥٨٤	٠,٩٨٧٧	٠,١٥٦٤	٠,١٥٧١	٩
٠,٤٦٦٣	٠,٩٠٦٣	٠,٤٢٢٦	٠,٤٣٦٣	٢٥	٠,١٧٦٣	٠,٩٨٤٨	٠,١٧٣٦	٠,١٧٤٥	١٠
٠,٤٨٧٧	٠,٨٩٨٨	٠,٤٣٨٤	٠,٤٥٣٨	٢٦	٠,١٩٤٤	٠,٩٨١٦	٠,١٩٠٨	٠,١٩٢٠	١١
٠,٥٠٩٥	٠,٨٩١٠	٠,٤٥٤٠	٠,٤٧١٢	٢٧	٠,٢١٢٦	٠,٩٧٨١	٠,٢٠٧٩	٠,٢٠٩٤	١٢
٠,٥٣١٧	٠,٨٨٢٩	٠,٤٦٩٥	٠,٤٨٨٧	٢٨	٠,٢٣٠٩	٠,٩٧٤٤	٠,٢٢٥٠	٠,٢٢٦٩	١٣
٠,٥٥٤٣	٠,٨٧٤٦	٠,٤٨٤٨	٠,٥٠٦١	٢٩	٠,٢٤٩٣	٠,٩٧٠٣	٠,٢٤١٩	٠,٢٤٤٣	١٤
٠,٥٧٧٤	٠,٨٦٦٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٢٣٦	٣٠	٠,٢٦٧٩	٠,٩٦٥٩	٠,٢٥٨٨	٠,٢٦١٨	١٥

ظا θ	جنا θ	جا θ	الزاوية θ		ظا θ	جنا θ	جا θ	الزاوية θ	
			دائرية	درجة				دائرية	درجة
١,٤٨٢٦	٠,٥٥٩٢	٠,٨٢٩٠	٠,٩٧٧٤	٥٦	٠,٦٠٠٩	٠,٨٥٧٢	٠,٥١٥٠	٠,٥٤١١	٣١
١,٥٣٩٩	٠,٥٤٤٦	٠,٨٣٨٧	٠,٩٩٤٨	٥٧	٠,٦٢٤٩	٠,٨٤٨٠	٠,٥٢٩٩	٠,٥٥٨٥	٣٢
١,٦٠٠٣	٠,٥٢٩٩	٠,٨٤٨٠	١,٠١٢٣	٥٨	٠,٦٤٩٤	٠,٨٣٨٧	٠,٥٤٤٦	٠,٥٧٦٠	٣٣
١,٦٦٤٣	٠,٥١٥٠	٠,٨٥٧٢	١,٠٢٩٧	٥٩	٠,٦٧٤٥	٠,٨٢٩٠	٠,٥٥٩٢	٠,٥٩٣٤	٣٤
١,٧٣٢١	٠,٥٠٠٠	٠,٨٦٦٠	١,٠٤٧٢	٦٠	٠,٧٠٠٢	٠,٨١٩٢	٠,٥٧٣٦	٠,٦١٠٩	٣٥
١,٨٠٤٠	٠,٤٨٤٨	٠,٨٧٤٦	١,٠٦٤٧	٦١	٠,٧٢٦٥	٠,٨٠٩٠	٠,٥٨٧٨	٠,٦٢٨٣	٣٦
١,٨٨٠٧	٠,٤٦٩٥	٠,٨٨٢٩	١,٠٨٢١	٦٢	٠,٧٥٣٦	٠,٧٩٨٦	٠,٦٠١٨	٠,٦٤٥٨	٣٧
١,٩٦٢٦	٠,٤٥٤٠	٠,٨٩١٠	١,٠٩٩٦	٦٣	٠,٧٨١٣	٠,٧٨٨٠	٠,٦١٥٧	٠,٦٦٣٢	٣٨
٢,٠٥٠٣	٠,٤٣٨٤	٠,٨٩٨٨	١,١١٧٠	٦٤	٠,٨٠٩٨	٠,٧٧٧١	٠,٦٢٩٣	٠,٦٨٠٧	٣٩
٢,١٤٤٥	٠,٤٢٢٦	٠,٩٠٦٣	١,١٣٤٥	٦٥	٠,٨٣٩١	٠,٧٦٦٠	٠,٦٤٢٨	٠,٦٩٨١	٤٠
٢,٢٤٦٠	٠,٤٠٦٧	٠,٩١٣٥	١,١٥١٩	٦٦	٠,٨٦٩٣	٠,٧٥٤٧	٠,٦٥٦١	٠,٧١٥٦	٤١
٢,٣٥٥٩	٠,٣٩٠٧	٠,٩٢٠٥	١,١٦٩٤	٦٧	٠,٩٠٠٤	٠,٧٤٣١	٠,٦٦٩١	٠,٧٣٣٠	٤٢
٢,٤٧٥١	٠,٣٧٤٦	٠,٩٢٧٢	١,١٨٦٨	٦٨	٠,٩٣٢٥	٠,٧٣١٤	٠,٦٨٢٠	٠,٧٥٠٥	٤٣
٢,٦٠٥١	٠,٣٥٨٤	٠,٩٣٣٦	١,٢٠٤٣	٦٩	٠,٩٦٥٧	٠,٧١٩٣	٠,٦٩٤٧	٠,٧٦٧٩	٤٤
٢,٧٤٧٥	٠,٣٤٢٠	٠,٩٣٩٧	١,٢٢١٧	٧٠	١,٠٠٠٠	٠,٧٠٧١	٠,٧٠٧١	٠,٧٨٥٤	٤٥
٢,٩٠٤٢	٠,٣٢٥٦	٠,٩٤٥٥	١,٢٣٩٢	٧١	١,٠٣٥٥	٠,٦٩٤٧	٠,٧١٩٣	٠,٨٠٢٩	٤٦
٣,٠٧٧٧	٠,٣٠٩٠	٠,٩٥١١	١,٢٥٦٦	٧٢	١,٠٧٢٤	٠,٦٨٢٠	٠,٧٣١٤	٠,٨٢٠٣	٤٧
٣,٢٧٠٩	٠,٢٩٢٤	٠,٩٥٦٣	١,٢٧٤١	٧٣	١,١١٠٦	٠,٦٦٩١	٠,٧٤٣١	٠,٨٣٧٨	٤٨
٣,٤٨٧٤	٠,٢٧٥٦	٠,٩٦١٣	١,٢٩١٥	٧٤	١,١٥٠٤	٠,٦٥٦١	٠,٧٥٤٧	٠,٨٥٥٢	٤٩
٣,٧٣٢١	٠,٢٥٨٨	٠,٩٦٥٩	١,٣٠٩٠	٧٥	١,١٩١٨	٠,٦٤٢٨	٠,٧٦٦٠	٠,٨٧٢٧	٥٠
٤,٠١٠٨	٠,٢٤١٩	٠,٩٧٠٣	١,٣٢٦٥	٧٦	١,٢٣٤٩	٠,٦٢٩٣	٠,٧٧٧١	٠,٨٩٠١	٥١
٤,٣٣١٥	٠,٢٢٥٠	٠,٩٧٤٤	١,٣٤٣٩	٧٧	١,٢٧٩٩	٠,٦١٥٧	٠,٧٨٨٠	٠,٩٠٧٦	٥٢
٤,٧٠٤٦	٠,٢٠٧٩	٠,٩٧٨١	١,٣٦١٤	٧٨	١,٣٢٧٠	٠,٦٠١٨	٠,٧٩٨٦	٠,٩٢٥٠	٥٣
٥,١٤٤٦	٠,١٩٠٨	٠,٩٨١٦	١,٣٧٨٨	٧٩	١,٣٧٦٤	٠,٥٨٧٨	٠,٨٠٩٠	٠,٩٤٢٥	٥٤
٥,٦٧١٣	٠,١٧٣٦	٠,٩٨٤٨	١,٣٩٦٣	٨٠	١,٤٢٨١	٠,٥٧٣٦	٠,٨١٩٢	٠,٩٥٩٩	٥٥

زاوية θ	جا θ	جنا θ	ظا θ	الزاوية θ		جا θ	جنا θ	ظا θ	الزاوية θ	
				دائرية	درجة				دائرية	درجة
١٤,٣٠١	٠,٠٦٩٨	٠,٩٩٧٦	١,٥٠١٠	٨٦	٨٦	٦,٣١٤	٠,١٥٦٤	٠,٩٨٧٧	١,٤١٣٧	٨١
١٩,٠٨١	٠,٠٥٢٣	٠,٩٩٨٦	١,٥١٨٤	٨٧	٨٧	٧,١١٥	٠,١٣٩٢	٠,٩٩٠٣	١,٤٣١٢	٨٢
٢٨,٦٣٦	٠,٠٣٤٩	٠,٩٩٩٤	١,٥٣٥٩	٨٨	٨٨	٨,١٤٤	٠,١٢١٩	٠,٩٩٢٥	١,٤٤٨٦	٨٣
٥٧,٢٩٠	٠,٠١٧٥	٠,٩٩٩٨	١,٥٥٣٣	٨٩	٨٩	٩,٥١٤	٠,١٠٤٥	٠,٩٩٤٥	١,٤٦٦١	٨٤
∞	٠,٠٠٠٠	١,٠٠٠٠	١,٥٧٠٨	٩٠	٩٠	١١,٤٣٠	٠,٠٨٧٢	٠,٩٩٦٢	١,٤٨٣٥	٨٥



ملحق ٨. الدالة الأسية



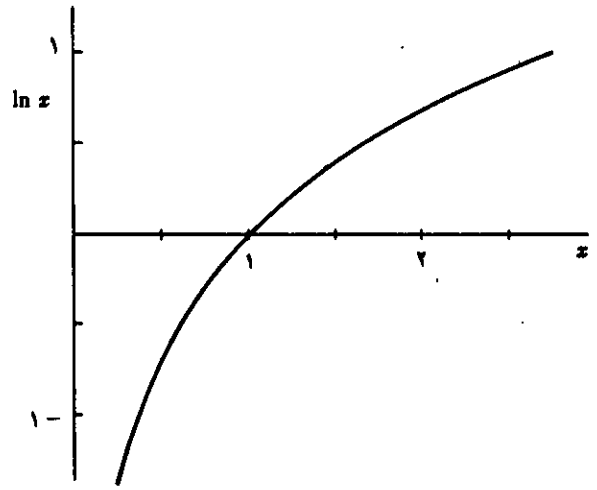
e^{-x}	e^x	x	e^{-x}	e^x	x
٠,٣٣٢٩	٣,٠٠٤٢	١,١	١,٠٠٠٠	١,٠٠٠٠	صفر
٠,٣٠١٢	٣,٣٢٠١	١,٢	٠,٩٠٤٨	١,١٠٥٢	٠,١
٠,٢٧٢٥	٣,٦٦٩٣	١,٣	٠,٨١٨٧	١,٢٢١٤	٠,٢
٠,٢٤٦٦	٤,٠٥٥٢	١,٤	٠,٧٤٠٨	١,٣٤٩٩	٠,٣
٠,٢٢٣١	٤,٤٨١٧	١,٥	٠,٦٧٠٣	١,٤٩١٨	٠,٤
			٠,٦٠٦٥	١,٦٤٨٧	٠,٥
٠,٢٠١٩	٤,٩٥٣٠	١,٦	٠,٥٤٨٨	١,٨٢٢١	٠,٦
٠,١٨٢٧	٥,٤٧٣٩	١,٧	٠,٤٩٦٦	٢,٠١٣٨	٠,٧
٠,١٦٥٣	٦,٠٤٩٦	١,٨	٠,٤٤٩٣	٢,٢٢٥٥	٠,٨
٠,١٤٩٦	٦,٦٨٥٩	١,٩	٠,٤٠٦٦	٢,٤٥٩٦	٠,٩
٠,١٣٥٣	٧,٣٨٩١	٢,٠	٠,٣٦٧٩	٢,٧١٨٣	١,٠

e^{-x}	e^x	x	e^{-x}	e^x	x
٠,٠٠٨٢٣	١٢١,٥١	٤,٨	٠,١١٠٨٠	٩,٠٢٥	٢,٢
٠,٠٠٦٧٤	١٤٨,٤١	٥,٠	٠,٠٩٠٧٢	١١,٠٢٣	٢,٤
			٠,٠٧٤٢٧	١٣,٤٦٤	٢,٦
٠,٠٠٤٠٩	٢٤٤,٦٩	٥,٥	٠,٠٦٠٨١	١٦,٤٤٥	٢,٨
٠,٠٠٢٤٨	٤٠٣,٤٣	٦,٠	٠,٠٤٩٧٩	٢٠,٠٨٦	٣,٠
٠,٠٠١٥٠	٦٦٥,١٤	٦,٥			
٠,٠٠٠٩١	١٠٩٦,٦	٧,٠	٠,٠٤٠٧٦	٢٤,٥٣٣	٣,٢
٠,٠٠٠٥٥	١٨٠٨,٠	٧,٥	٠,٠٣٣٣٧	٢٩,٩٦٤	٣,٤
			٠,٠٢٧٣٢	٣٦,٥٩٨	٣,٦
			٠,٠٢٢٣٧	٤٤,٧٠١	٣,٨
٠,٠٠٠٣٤	٢٩٨١,٠	٨,٠	٠,٠١٨٣٢	٥٤,٥٩٨	٤,٠
٠,٠٠٠٢٠	٤٩١٤,٨	٨,٥			
٠,٠٠٠١٢	٨١٠٣,١	٩,٠	٠,٠١٥٠٠	٦٦,٦٨٦	٤,٢
٠,٠٠٠٠٧	١٣٣٦٠,	٩,٥	٠,٠١٢٢٨	٨١,٤٥١	٤,٤
٠,٠٠٠٠٥	٢٢٠٢٦,	١٠,٠	٠,٠١٠٠٥	٩٩,٤٨٤	٤,٦



ملحق ٩. الدالة اللوغاريتمية

$\ln x$	x	$\ln x$	x
١,٥١٤١ -	٠,٢٢	٢٠,٧٢٣ -	٩-١٠
١,٤٢٧١ -	٠,٢٤	١٣,٨١٦ -	٦-١٠
١,٣٤٧١ -	٠,٢٦	١١,٥١٣ -	٥-١٠
١,٢٧٣٠ -	٠,٢٨	٩,٢١٠ -	٤-١٠
١,٢٠٤٠ -	٠,٣٠	٦,٩٠٨ -	٣-١٠
١,٠٤٩٨ -	٠,٣٥	٤,٦٠٥٢ -	٠,٠١
٠,٩١٦٣ -	٠,٤٠	٣,٩١٢٠ -	٠,٠٢
٠,٧٩٨٥ -	٠,٤٥	٣,٥٠٦٦ -	٠,٠٣
٠,٦٩٣١ -	٠,٥٠	٣,٢١٨٩ -	٠,٠٤
		٢,٩٩٥٧ -	٠,٠٥
٠,٥٩٧٨ -	٠,٥٥		
٠,٥١٠٨ -	٠,٦٠	٢,٨١٣٤ -	٠,٠٦
٠,٤٣٠٨ -	٠,٦٥	٢,٦٥٩٣ -	٠,٠٧
٠,٣٥٦٧ -	٠,٧٠	٢,٥٢٥٧ -	٠,٠٨
٠,٢٨٧٧ -	٠,٧٥	٢,٤٠٧٩ -	٠,٠٩
		٢,٣٠٢٥٩ -	٠,١٠
٠,٢٢٣١ -	٠,٨٠	٢,١٢٠٣ -	٠,١٢
٠,١٦٢٥ -	٠,٨٥	١,٩٦٦١ -	٠,١٤
٠,١٠٥٤ -	٠,٩٠	١,٨٣٢٦ -	٠,١٦
٠,٠٥١٣ -	٠,٩٥	١,٧١٤٨ -	٠,١٨
٠,٠٠٠٠	١,٠٠	١,٦٠٩٤ -	٠,٢٠



$\ln x$	x	$\ln x$	x
٢,٥٦٤٩	١٣,٠	١,٨٢٤٥	٦,٢
٢,٦٠٢٧	١٣,٥	١,٨٥٦٣	٦,٤
٢,٦٣٩١	١٤,٠	١,٨٨٧١	٦,٦
٢,٦٧٤١	١٤,٥	١,٩١٦٩	٦,٨
٢,٧٠٨١	١٥,٠	١,٩٤٥٩	٧,٠
٢,٧٧٣	١٦	١,٩٧٤١	٧,٢
٢,٨٣٣	١٧	٢,٠٠١٥	٧,٤
٢,٨٩٠	١٨	٢,٠٢٨١	٧,٦
٢,٩٤٤	١٩	٢,٠٥٤١	٧,٨
٢,٩٩٦	٢٠	٢,٠٧٩٤	٨,٠
٣,٠٩١	٢٢	٢,١٠٤١	٨,٢
٣,١٧٨	٢٤	٢,١٢٨٢	٨,٤
٣,٢٥٨	٢٦	٢,١٥١٨	٨,٦
٣,٣٣٢	٢٨	٢,١٧٤٨	٨,٨
٣,٤٠١	٣٠	٢,١٩٧٢	٩,٠
٣,٤٦٦	٣٢	٢,٢١٩٢	٩,٢
٣,٥٢٦	٣٤	٢,٢٤٠٧	٩,٤
٣,٥٨٤	٣٦	٢,٢٦١٨	٩,٦
٣,٦٣٨	٣٨	٢,٢٨٢٤	٩,٨
٣,٦٨٩	٤٠	٢,٣٠٢٥٩	١٠,٠
٣,٧٣٨	٤٢	٢,٣٥١٤	١٠,٥
٣,٧٨٤	٤٤	٢,٣٩٧٩	١١,٠
٣,٨٢٩	٤٦	٢,٤٤٢٣	١١,٥
٣,٨٧١	٤٨	٢,٤٨٤٩	١٢,٠
٣,٩١٢	٥٠	٢,٥٢٥٧	١٢,٥

$\ln x$	x	$\ln x$	x
٠,٩٥٥٥	٢,٦	٠,٠٤٨٨	١,٠٥
٠,٩٩٣٣	٢,٧	٠,٠٩٥٣	١,١٠
١,٠٢٩٦	٢,٨	٠,١٣٩٨	١,١٥
١,٠٦٤٧	٢,٩	٠,١٨٢٣	١,٢٠
١,٠٩٨٦	٣,٠	٠,٢٢٣١	١,٢٥
١,١٣١٤	٣,١	٠,٢٦٢٤	١,٣٠
١,١٦٣٢	٣,٢	٠,٣٠٠١	١,٣٥
١,١٩٣٩	٣,٣	٠,٣٣٦٥	١,٤٠
١,٢٢٣٨	٣,٤	٠,٣٧١٦	١,٤٥
١,٢٥٢٨	٣,٥	٠,٤٠٥٥	١,٥٠
١,٢٨٠٩	٣,٦	٠,٤٣٨٣	١,٥٥
١,٣٠٨٣	٣,٧	٠,٤٧٠٠	١,٦٠
١,٣٣٥٠	٣,٨	٠,٥٠٠٨	١,٦٥
١,٣٦١٠	٣,٩	٠,٥٣٠٦	١,٧٠
١,٣٨٦٣	٤,٠	٠,٥٥٩٦	١,٧٥
١,٤٣٥١	٤,٢	٠,٥٨٧٨	١,٨٠
١,٤٨١٦	٤,٤	٠,٦١٥٢	١,٨٥
١,٥٢٦١	٤,٦	٠,٦٤١٩	١,٩٠
١,٥٦٨٦	٤,٨	٠,٦٦٧٨	١,٩٥
١,٦٠٩٤	٥,٠	٠,٦٩٣١٥	٢,٠٠
١,٦٤٨٧	٥,٢	٠,٧٤١٩	٢,١
١,٦٨٦٤	٥,٤	٠,٧٨٨٥	٢,٢
١,٧٢٢٨	٥,٦	٠,٨٣٢٩	٢,٣
١,٧٥٧٩	٥,٨	٠,٨٧٥٥	٢,٤
١,٧٩١٨	٦,٠	٠,٩١٦٣	٢,٥

$\ln x$	x	$\ln x$	x
٥,٢٩٨	٢٠٠	٤,٠٠٧	٥٥
٥,٧٠٤	٣٠٠	٤,٠٩٤	٦٠
٥,٩٩١	٤٠٠	٤,١٧٤	٦٥
٦,٢١٥	٥٠٠	٤,٢٤٨	٧٠
٦,٣٩٧	٦٠٠	٤,٣١٧	٧٥
٦,٩٠٨	٣١٠	٤,٣٨٢	٨٠
٩,٢١٠	٤١٠	٤,٤٤٣	٨٥
١١,٥١٣	٥١٠	٤,٥٠٠	٩٠
١٣,٨١٦	٦١٠	٤,٥٥٤	٩٥
٢٠,٧٢٣	٩١٠	٤,٦٠٥	١٠٠



قَامُوسُ الْمُصْطَلَحَاتِ الوَاردَةِ فِي هَذَا الْكِتَابِ Glossary

مُلاحَظَات :

- ١ - هذا القاموسُ مُرتَّبٌ حسبَ الأبجديَّةِ الإنجليزيَّةِ ؛ ففي كلِّ صفحةٍ يُقرأُ أولاً النِّصْفُ الأيسرُ من أعلاه إلى أدناه ومن ثَمَّ النِّصْفُ الأيمن .
- ٢ - الحرفُ « ج » يرمزُ إلى « جَمْع » ؛ ومثلهُ المقطعُ *pl.* الذي يُشيرُ إلى كلمةٍ *plural* الإنجليزيَّةِ (= جَمْع) .
- ٣ - الظَّلَالُ المتفاوتةُ للمُصْطَلَحِ الواحدِ مَفْصُولةٌ بالشَّوْلَةِ المنقُوتة ؛ أمَّا المعاني المتباينة فتُوسَمُ بأرقامٍ مختلفة .

A

absolute	مطلق	aluminum (Al)	ألومنيوم
absolutely	بصورة مطلقة	ammonia (NH ₃)	نشايد
absorption	امتصاص	ampere (A)	أمبير (أ)
abstract	تجريدي	amplification	تكبير
accelerate	تسارع ؛ يُسارع	amplifier(s)	مكبر (ج : مكبرات)
acceleration	تسارع	amplitude	إتساع
accelerator	(١) مُسارع (٢) دَواسة السَّيَّارة	analysis	تحليل
action	فعل	aneroid barometer	بارومتر معدني
action at a distance	فعل (تأثير) عن بُعد	angle(s)	زاوية (ج : زوايا)
actual	فعلي	angle of repose	زاوية رُقود (اتكاء)
add	يجمع	angstrom (Å)	أنغستروم (أ)
addition	جمع	angular	زاوي
additive	جمعي	anharmonic	لا توافق
adhesion	التصاق	animate	حي
adjust	يُعدّل ؛ يضبط	anisotropy	عدم تكافؤ الاتجاهات
adjustable	قابل للتعديل	annihilation	محق (إفناء أو دُور)
advantage	فائدة	antibaryon	ضديد باريون
aerodynamics	ديناميكا هوائية	anticommutative	لا تبادلي
air	هواء	antiderivative	نقبض (ضد) مشتقة
airglow	وهج هوائي	antielectron (e ⁺)	ضديد إلكترون
airspeed	سرعة الطائرة بالنسبة إلى الهواء	antilambda particle (Λ ⁰)	ضديد جسيم لامدا
airspeed indicator	مؤشر مقياس السرعة الهوائية	antineutron (n̄)	ضديد نيوترون
air track	مجرى هوائي	antiparallel	مواز عكسياً
algebra	جبر	antiparticle(s)	ضديد جسيم (ج : ضديدات)
Alpha Centauri	ألفا قنطوري (نجم الظلمان)	antiproton (p̄)	ضديد بروتون
alpha particle (α)	جسيم ألفا	antiquark	ضديد كوارك
alternating-gradient	متعدد التدرج	apex	رأس
altimeter	مقياس الارتفاع	aphelion	نقطة الأوج (الشمسي)
altitude	ارتفاع	apogee	الأوج (القمر)
ق ٣		apparatus	أدوات

apparent	ظَاهِر ؛ ظَاهِرِيّ	atomic mass unit (amu; U)	وَحْدَةُ الكِتْلَةِ الذَّرِيَّةِ (مه)
application(s)	تَطْبِيق (ج : تَطْبِيقَات)	atomic nucleus	نَوَاةِ الذَّرَّةِ
approximate	يُقَرَّب ؛ تَقْرِيبِيّ	atomic number	عَدَدُ ذَرِيّ
approximately	تَقْرِيبًا	atomic physics	فِيزِيَاءُ ذَرِيَّةِ
approximation	تَقْرِب	atomic weight	وِزْنُ ذَرِيّ
a priori	قَبْلِيّ	attractive	جَاذِب ؛ جَاذِب
aquarium	مَرَسِيّ مَائِيّ	aurora australis	الشَّفَقُ القُطْبِيّ الجَنُوبِيّ
arbitrarily	اعْتِبَاطًا	aurora borealis	الشَّفَقُ القُطْبِيّ الشَّمَالِيّ
arbitrary	إِعْتِبَاطِيّ	available	مُتَاح ؛ مُتَوَافِر
arc(s)	قَوْس (ج : أَقْوَاس)	available energy	طَاقَةُ مُتَاحَةٍ (مُتَوَافِرَةٍ)
arctic	قُطْبِيّ (شَمَالِيّ)	average	مُتَوَسِّط
area(s)	مَسَاحَة (ج : مَسَاحَات)	axial	مِخْوَرِيّ
argument	إِتْسَاع (مُدْلُول عَلَيْهِ)	axiom(s)	مُسَلِّمَة (ج : مُسَلِّمَات)
Aristotelian	أَرِسْطُطَالِيّ ؛ أَرِسْطِيّ	axis (pl. axes)	مِخْوَر (ج : مَحَاوِر)
arithmetic	حِسَاب	axle	مِخْوَر الدُّوَلَاب
arrow(s)	سَهْم (ج : أَسْهُم ؛ سِهَام)		
arrow diagram	رَسْمُ سَهْمَانِيّ		
assembly line	خَطُّ تَجْمِيع		
assessment	تَقْيِيم		
associative property	خَاصِيَّةُ التَّرَافُق		
asteroid(s)	كُويْكِب (ج : كُويْكِبَات)		
astronaut(s)	رَائِد فِضَاء (ج : رُؤَاد)		
astronomical	فَلَكيّ		
astronomical unit (A.U.)	وَحْدَةُ فَلَكيَّةِ (مِرفه)		
astronomy	عِلْمُ الفَلَك		
astrophysics	فِيزِيَاءُ فَلَكيَّةِ		
atmosphere	جَو ؛ غِلَاف جَوِّيّ		
atom(s)	ذَرَّة (ج : ذَرَات)		
atomic	ذَرِيّ		
atomic clock	سَاعَة ذَرَّةِ		

barrel	ماسورة (بندقية أو مدفع)	board	رُقعة
barrier	حاجز	bob	نقل
baryon(s)	باريون (ج : باريونات)	boiling	غليان
baryon family	عائلة (أسرة) الباريونات	boldface type	بنط أسود (تخين)
baryon number	العدد الباريوني	bolted	ثبت بمسمار
base	قاعدة	bond(s)	آصرة (ج : أواصر)
base of logarithms	أساس اللوغارتمات	booster	مُعزّز
baseball	كرة قاعدة (بيسبول)	bound (charge)	(شحنة) مقيدة
basic	أساسي	boundaries	حدود
bathroom scale	ميزان حمام	boundary conditions	شروط حدية ؛ شروط الحدود الفاصلة
batter	حامل مضرب (كرة القاعدة)	bounded	محدود
bead	خرزة	bow	قوس
beam(s)	(١) شعاع (ج : أشعة) (٢) عاتق (ج : عواتق)	bowling	لعبة «البولينغ»
belt(s)	حزام (ج : أحزمة)	brake	يكتمح ؛ يفرمل
beta decay	اضمحلال بيتا	brakes	كمّاحات ؛ فرامل
bevatron	بيفاترون	braking period	فترة الكتمح (الفرملة)
billion(s)	بليون (ج : بلايين)	branch(es)	فرع (ج : فروع)
binary star	نجم ثنائي	breath	زفرة ؛ نفس
binomial	ذات الحدين	bridge	(١) قنطرة ؛ جسر (٢) لعبة «البريدج»
biochemistry	كيمياء حيوية	brightness	لمعان ؛ سطوع
biological vector	ناقل أحيائي	British thermal unit	وحدة حرارية بريطانية
biologist	أحيائي	bubble chamber	غرفة فقّاع
biology	أحياء	bucket	دلو
biosphere	مُحيط حيوي	bug	حشرة
blade(s)	(١) ريشة (ج : ريش) (٢) نصل (ج : نصال)	built-in	مُبيت
block	كتلة	bulb	مِصباح
block and tackle	بَكَارة	bulge	إنتفاخ ؛ نتوء
blow	ضربة	bulging	مُنتفخ

bulk	جُرْمِيّ	casino	نَادٍ لِلْقِمَارِ
bulk energy	طَاقَةُ جُرْمِيَّةٍ	catalogue	بَيَانٌ مُصَوَّرٌ (كَتَالُوغٌ)
bulk properties	خَوَاصُّ جُرْمِيَّةٍ	catapult	مِجَنَفَةٌ
bundle	حُزْمَةٌ	catenary	مَنْحَنِي سِلْسِلَةٍ (كَاتِنَةٍ)
buoyant force	قُوَّةُ الطَّفْوِ	cathedral	كَاتَدِرَائِيَّةٌ
bureau	دَائِرَةٌ ؛ مَكْتَبٌ	cathode	مَهْبِطٌ
burst(s)	نَبْضَةٌ (ج : نَبْضَاتٌ)	cathode rays	أَشْعَةُ الْمَهْبِطِ
bursting	انْفِجَارٌ	cathode-ray tube	أَنْبُوبَةُ الْأَشْعَةِ الْمَهْبِطِيَّةِ
C		causal	سَبَبِيّ
		cause and effect	سَبَبٌ وَمُسَبَّبٌ ؛ عِلَّةٌ وَمَعْلُولٌ
cabin	قَمَرَةٌ	cavitation	تَوَقُّبٌ
cable(s)	كَبْلٌ (ج : كَوَابِلُ)	celestial	سَمَاوِيّ
calculation	حِسَابٌ ؛ عَمَلِيَّةٌ حِسَابِيَّةٌ	Centaurus	(كَوْكَبَةٌ) قِنْطُورُسُ
calculational	حِسَابِيّ	center	مَرْكَزٌ
calculus	حِسَابُ التَّفَاضُلِ وَالتَّكَامُلِ	center of mass	مَرْكَزُ الْكُتْلَةِ
calorie	سُعْرٌ (حَرَارِيّ)	centimeter (cm)	سَنْتِيْمِتْرٌ (سَم)
Calorie	سُعْرٌ كَبِيرٌ (= كِيلُوسُعْرٌ)	central	مَرْكَزِيّ
camera	آلَةٌ تَصْوِيرٌ ؛ كَامِيرَا	centripetal	مَرْكَزِيّ جَائِدٌ
cancel	يُخْتَلِمْ ؛ يُبْلَغِي مَفْعُولٌ ؛ يَخْتَرِلُ	cent(s)	سِنْتٌ (ج : سِنَتَاتٌ)
cancellation	إِخْتِرَالٌ	century	قَرْنٌ
candela (cd)	قَنْدِيلَةٌ (قَد)	cesium (Cs)	سِيزِيُومٌ
cannon	مِذْفَعٌ	cgs	سَمِغْثٌ
Canopus	(نَجْمٌ) سُهَيْلٌ	chain	سِلْسِلَةٌ
car	سَيَّارَةٌ ؛ عَرَبَةٌ	chain hoist	رَافِعَةُ السِّلْسِلَةِ
carbon (C)	كَرْبُونٌ	chain rule	قَاعِدَةُ السِّلْسِلَةِ
cart	عَرَبَةٌ	chamber	غُرْفَةٌ
cart and horse paradox	نَفِيزَةُ الْعَرَبَةِ وَالْحِصَانِ	chance	مُضَادَّةٌ
Cartesian	دِيكَارْتِيّ	chandelier(s)	فُرْيَا (ج : فُرْيَاتٌ)
Cartesian coordinates	إِحْدَائِيَّاتٌ دِيكَارْتِيَّةٌ	change	تَغْيِيرٌ ؛ تَغْيِيرٌ
cascade	شَلَالٌ صَغِيرٌ	changeable	قَابِلٌ لِلتَّغْيِيرِ

chaos and order	فَوْضَى وَنِظَام	cloud chamber	غُرْفَةُ غَيْمَةٍ
charge(s)	شِحنة (ج : شِحنات)	clout	رَمِيَّة (في لُعبة الهوكي)
charge conservation	حِفْظ الشِحنة	cluster(s)	عُقُود (ج : عناقيد)
charge doublet	زَوْج شِحنات	coasting	سُقُوط حُرّ
charge multiplet	مُتَعَدِّد الشِحنة	coaxial	مُتَّحِد مِخْوَرِيًّا
charge singlet	أَحَادِي الشِحنة	coefficient(s)	مُعَامِل (ج : مُعَامِلَات)
charge-to-mass ratio	نِسْبَةُ الشِحنة إِلَى الكُتلة	co-factor	عَامِل مُشْتَرَك
charge triplet	ثَلَاثِي الشِحنة	coherent	مُتَمَاسِك ؛ مُتَرَابِط
chemical	كِيمِيَايِي	cohesion	تَمَاسِك ؛ تَرَابُط
chemistry	كِيمِيَاء	coin	قِطْعَةٌ نَقْدٍ مَعْدِنِيَّة
chess	شِطْرُنْج	coincide	يَتَطَابَق
chessboard	رُفْعَةُ الشِطْرُنْج	collapse	يَنْهَار (بِنَهَاي) ؛ إِنْهَار
chessman (pl. chessmen)	يَيْدِق (ج : يَيْدِيق) ؛ حَجَر (ج : أَحْجَار) الشِطْرُنْج	collide	يَضْطَلِم
chilled	بُرْد	colliding beams	أَشِعَّة مُتَصَادِمَة
china	خَزَف صِينِي	collision(s)	تَصَادُم (ج : تَصَادُمَات)
chlorophyll	كُلُورُوفِيل	column	عَمُود
circle(s)	دَائِرَة (ج : دَوَائِر)	comet(s)	مُذَنَّب (ج : مُذَنَّبَات)
circuit(s)	دَارَة (ج : دَارَات)	comic	هَزْلِي
circuitous	غَيْر مُبَاشِر	common sense	الْإِدْرَاك الْمَالُوف (الْفِطْرِي)
circular	دَائِرِي	communications	اتِّصَالَات
circus	سِيرْك	commutative	تَبَادُلِي
classical	كِلَاسِيكِي	commutative law	قَانُون التَّبَادُل
cliff	جُرْف (صَخْرِي)	commute	يَتَبَادَل
clip(s)	مِشْبَك (ج : مِشَابِك)	compass	بُوصْلَة
clock	سَاعَة	compass needle	إِبْرَة بُوصْلَة
clockwise	بِاتِّجَاه عَقْرَبِي السَّاعَة	complex number	عَدَد مُرَكَّب
closed orbit	مَدَار مُغْلَق	component(s)	مُرَكَّبَة (ج : مُرَكَّبَات)
closely packed	مُتَرَاصِّ بِأَحْكَام ؛ مَحْشُوك	composition	تَرْكِيب
closest approach	أَدْنَى اقْتِرَاب	compound	مُرَكَّب
clothesline	حَبْل غَسِيل	compress	يَضْغَط
ق ٧		compressible	مُنْضَغَط

compression	انضغاط	continuous	مُستمرّ ؛ مُتّصل
computer	حاسبة إلكترونية	continuously	بصورة مستمرة (متصلة)
concept(s)	مفهوم (ج : مفاهيم)	contradiction	تناقض
conception	فكرة	control jet	منفذ تحكم
conceptual	مفاهيمي	controller(s)	مراقب (ج : مراقبون)
concrete	(١) ماديّ	conversion	تحويل
	(٢) إسمنت	conversion factor	عامل تحويل
condensation	تكثيف	convertible	قابل للتحويل
condition(s)	(١) شرط (ج : شروط)	conveyor belt	حزام متحرك للنقل
	(٢) حالة (ج : حالات)	coordinate(s)	إحداثي (ج : إحداثيات)
conductor(s)	موصل (ج : موصلات)	coordinate system	نظام إحداثي
conductivity	موصلية	Copernican	كوبرنيكي
cone(s)	مخروط (ج : مخروطات)	corpuscle(s)	دقيقة (ج : دقائق)
conic section(s)	قطع مخروطي (ج : قطوع)	corpuscular	دقيقسي
connection(s)	صلة (ج : صلات)	correspond	يتناظر
conservation	حفظ	correspondence	تناظر
conservation law	قانون حفظ	corrugated	متغصن
conservative force	قوة محافظة	cosine (cos)	جيب تمام (جنا)
consistency	توافق ؛ إتساق	cosmic	كوني
consistent	متوافق ؛ متسق	cosmic radiation	إشعاع كوني
constancy	ثبات ؛ ثبوت	cosmological	كوني
constant(s)	ثابت (ج : ثوابت)	cosmology	علم الكونيات
constellation	كوكبة	coulomb (C)	كولوم (كل)
constraint(s)	قيّد (ج : قيود)	counter	عداد
constriction	إختناق	counterweight	ثقل توازن
contact	تماس	counting	عملية العدّ
content	محتوى	couple	إزدواج
continental	قاري	coupling	تقارن ؛ اقتران
continental Europe	القارة الأوروبية	crank	مرفق
	(باستثناء الجزر البريطانية)	crankshaft	عمود مرفقي
continuity equation	المعادلة الإستمرارية	creation	خلق

crew	طاقم	deflated	مُفَرَّغ (من الهواء)
criterion	مِحْك	deflection	انحراف
critical	خَرَج	deformation	تشويه
cross	شارة الصليب (X)	deforming	مُشَوِّه
cross-hatched	خطوط متعارضة	degree(s)	دَرَجَة (ج : دَرَجَات)
cross product	حاصل ضرب تَصَالِيبي	delimit	يُحَدِّد
cruise	يُطَوِّف	dense	كثيف
crumpling	تَهَشُّم	density	كثافة
crystal(s)	بِلَوْرَة (ج : بِلَوْرَات)	dependence	اعتماد ؛ تبعية
cubit(s)	ذراع (ج : أَذْرَعَة)	dependent	تابع
cumulative	تراكمي	depth	عُمق
current	تِيَّار	derivative(s)	مُشتقة (رياضية) (ج : مُشتقات)
curvature	انحناء	derivative function	دالة مُشتقة
curve(s)	منحنى (ج : مُنْحَنِيَّات)	derived	مُشتق
cycle	دَوْرَة	detecting	كاشف
cyclist	راكب دراجة	detector(s)	مِكْشَاف (ج : مَكْاشِف)
cyclotron	سايكلوترون	detergents	مواد تنظيف
cyclotron frequency	تردد السايكلوترون	determinant(s)	مُحدِّدَة (ج : مُحدِّدَات)
cylinder	أسطوانة	deviation	انحراف
cylindrical	أسطواني	diagram	رسم توضيحي
		dial	مُدْرَجَة مِقْيَاس
		diameter(s)	قُطر (ج : أَقْطَار)
		dichotomy	ثَنَائِيَّة
		difference	فَرْق
		differential calculus	حِسَاب التفاضل
		differential equation	مُعَادَلَة تَفَاضُلِيَّة
		differentiate	يُفَاضِل
		differentiating	مُفَاضِلَة
		differentiation	تَفَاضُل
		dimension(s)	بُعْد (ج : أبعاد)
		dimensional	بُعْدِي

D

dash	سِيَّاق قصير
dashed	مُتَقَطَّع
data	مُعْطِيَّات ؛ بَيِّنَات
decay	اضمحلال
decimal	عشري
deduce	يَسْتَنْجِ
deduction	إِسْتِنَاج ؛ إِسْتِدْلَال
definite	مَحْدُود ؛ مُحدَّد
definition	تَعْرِيف

dimensional consistency	تَوَافُقُ الْأَبْعَادِ	drag	إِنْجِرَار
dimensionality	بُعْدِيَّة	drift	إِنْجِرَاف
dimensionless	لَا بُعْدِيَّ	droplet(s)	قُطْرِيَّة (ج : قُطْرِيَّات)
direct	(١) مُبَاشِر (٢) طَرْدِي	dual	مُزْدَوِج
discontinuity	نقطة انقطاع	dumbbell	كُرْتَان حديديتان يربط بينهما قضيب
discontinuously	بصورة مُتَقَطعة (غَيْر مُستَمرة)	dynamic	دينامي
discrete	مُتَمَيِّز	dynamics	ديناميكا
disintegration(s)	إِنْجِلَال (ج : إِنْجِلَالَات)	E	
disk(s)	قُرْص (ج : أَقْرَاص ؛ قِرَاص)	earth	الأرض
displacement(s)	إِزَاحَة (ج : إِزَاحَات)	earthling	مَخْلُوق أَرْضِي ؛ إِنْ الْأَرْضِ
disposable	يُمْكِنُ التَّخَلُّصُ مِنْهُ (بسهولة)	east	شَرْق
dissipation	تَبَدُّد	eccentric	(١) غَرِيب الْأَطْوَار
dissolve	يُذِيب		(٢) مُخْتَلِف الْمَرْكَزِ (مُنْحَرَف عَنِ الْمَسَارِ الدَّائِرِيِّ)
distance(s)	مَسَافَة (ج : مَسَافَات)	eccentricity	إِخْتِلَاف مَرْكَزِي
distilled	يُسْتَقْفَر	ecliptic plane	مُسْتَوَى دَائِرَةِ الْبُرُوج
distributed	مُوزَع	ecology	عِلْمُ الْبَيْئَة
distribution	تَوْزِيع	edge	(١) حَافَة
distributive law	قَانُونُ التَّوْزِيع		(٢) ضِلْع
diver	غَوَاص	educated guess	تَخْمِين بَارِع
divisible	قَابِلٌ لِلْقِسْمَة	effect	أَثَر ؛ تَأْثِير ؛ مُسَبِّب ؛ مَعْلُول
dock	يَلْتَجِم	effective	فَعَال
dollar	دُولَار (\$)	efficiency	فَعَالِيَة
double	مُزْدَوِج	e-folding time	زَمَن طَيَّ ء
double counting	حِسَاب (عَدَّ) مُزْدَوِج	elastic	مَرْن
double star	نَجْم مُزْدَوِج	elasticity	مُرُونَة
doublet	زَوْج ؛ ثَنَائِي	electric	كَهْرَبَائِي
doubling	مُضَاعَف	electrify	يُكَهِّرِب
doughnut-shaped	حَلَقِي الشَّكْلِ	electromagnetic	كَهْرُومَغْنَاطِيْسِي
downhill	مُنْحَدَر	electromagnetism	كَهْرُومَغْنَاطِيْسِيَة
downward	إِلَى أَسْفَل ؛ تَنَازُلِي		

electron (e)	إلكترون	equation(s)	مُعَادَلَة (ج : مُعَادَلَات)
electron volt (eV)	إلكترون فولت (ء ف)	equator	خط الإستواء
electroscope	كشاف كهربائي	equilibrium	توازن ؛ إبتزان
electrostatics	كهرباء ساكنة	equinox	الاعتدال (الرَّبيعِيّ أو الخريفِيّ)
element(s)	عُنْصُر (ج : عُنْصُر)	equipment	أدوات
elementary	أوليّ	equipped	مُجَهَّز
elevated	رُفِع	equivalence	تَكَافُؤ
elevation	إرتفاع	equivalent	مُكَافِئ ؛ يُكَافِئ
eliminate	يُحْذِف ؛ يُزِيل	erg	إِرْغ
eliminating	حذف ؛ إزالة	error(s)	خطأ (ج : أخطاء)
ellipse(s)	قُطْع ناقص (ج : قُطُوع)	error bar	قَصْب خطأ
ellipsoid	مُجَسِّم قُطْع ناقص	escape	إفلات
elliptic function	دالّة ناقصية	escape speed	سُرْعَة الإفلات
elliptical	إهليلجيّ	estimate	يُقدِّر ؛ تَقْدِير
elongated	يُسْتَطِيل ؛ مُفْلَطَح	eta particle (η)	جُسيم إيتا
elongation	إِسْتَطَالَة	ether	أثير
emission	إنبعاث	Euclidean	أقليديّ
emit	يَبِث	evacuated	مُفَرَّغ
empirical	تجريبيّ	even	زَوْجِيّ ؛ شَفْعِيّ
empty	فارغ	evenness	زَوْجِيَّة ؛ شَفْعِيَّة
empty space	فَراغ	event(s)	حَادِثَة (ج : حَوَادِث)
emulsion	مُسْتَحْلَب	evolution	نُشُوء ؛ تَطَوُّر
energy	طاقة	exact	دقيق
energy balance	مِيزَان طاقِيّ	exact equation	مُعَادَلَة تَامَّة
energy diagram	رَسْم طاقِيّ ؛ مَخْطَط طاقة	exactly	تَمَامًا ؛ بِالضَّبْط
energy of being	طاقة كَيُونَة	exact solution	حَلّ تَام
engine	مُحَرِّك ؛ آلَة	exchange	يَتَبَادَل ؛ تَبَادُل
entity	« كَيُونَة »	executive	تَنفِيذِيّ
environment	مُحِيط	exert	يَبْذُل ؛ يُوَثِّر
ephemeris	فلكيّ ؛ زيجيّ	exhaust	عَادِم
equality	مُسَاوِيَة ؛ تَسَاوِي	exhaust fuel	وَقُود مُسْتَنْفَد

exhaust speed	سُرْعَةُ الْعَادِمِ
exit(s)	مَخْرَج (ج : مَخَارِج)
expand	يَفْكَ
expansion	مَفْكَوْك ؛ فَكّ
experiment(s)	تَجْرِبَة (ج : تَجَارِب)
experimental	تَجْرِيبيّ
experimentalist	عَالِم تَجْرِيبيّ
explicit	صَرِيح
explicitly	بَصْرَاحَة ؛ بِصُورَة صَرِيحَة
explosion	انْفِجَار
exponent	أَسّ
exponential	أَسّيّ
express	يُعْبِر عَنْ
expression	تَعْبِير
extension	إِسْطِطَالَة
external	خَارِجِيّ

F

fact(s)	حَقِيقَة (ج : حَقَائِق)
factor(s)	عَامِل (ج : عَوَامِل)
family	عَائِلَة ؛ أَسْرَة
faucet	صُنْبُور ؛ حَنْفِيَة
favored	تَفْضِيلِيّ
feedback	تَغْذِيَة مُرْتَدَة
femtometer (fm)	فِيمْتومتر (فـم)
fermi (fm)	فِيرْمِي (فـم)
Ferris wheel	دُولَاب فِرْس
few-body problem	مُغْضِلَة الْجُسِيَّاتِ الْمَعْدُودَة
fiber	وَتَر لَيْفِيّ (فِبر)
fiction	قِصَص خَيَالِيَة

fictional	خَيَالِيّ
field(s)	مَجَال (ج : مَجَالَات)
figure(s)	(١) شَكْل (ج : أَشْكَال) (٢) رَقْم (ج : أَرْقَام)
finances	مَوَارِد مَالِيَة
firing	إِنْطِلَاق
fixture	تَثْبِيَة
flash(es)	وَمَضَة (ج : وَمَضَات)
flat	مُسْتَوٍ
flattened	مُفْلَطَح
flea	بَرْغُوْث
flight	طَيْرَان
flight time	زَمَن الطَّيْرَان
flip	يَنْقَلِب
floor	أَرْضِيَة
flow	تَدْفُق
fluid(s)	مَائِع (ج : مَوَائِع)
fluorescent	فَلُورِيّ
flux	دَفْق
"fly formation"	« يُحَلِّق بِتَشْكِيلٍ وَاحِد »
flying saucer	طَبَق طَائِر
flywheel	حَدَافَة ؛ دُولَاب مُوَازَنَة
focus (pl. foci)	بُؤْرَة (ج : بُؤَر)
focusing	تَبْؤُر
food calorie	سُعْر غِذَائِيّ (كِيلُوسُعْر)
foot (pl. feet)	قَدَم (ج : أَقْدَام)
force(s)	قُوَّة (ج : قُوَى)
force constant	ثَابِت الْقُوَّة
forearm	سَاعِد
fork	شَوْكَة

formal	شَكْلِيّ	Galilean	غَالِيلِيّ
formula(s)	صِيغَة (ج : صِيغ)	Galilean transformation	تَحْوِيل غَالِيلِيّ
formulation	صِيَاغَة	gamma rays (γ)	أَشِعَّة غَامَا
four-dimensional	رُبَاعِيّ الأبعاد	gap	فُرْجَة
four-vector	مُتَّجِه رُبَاعِيّ	gas(es)	غَاز (ج : غَازَات)
fraction	كُسْر ؛ جُزْء	Gaussian	غَاوْسِيّ
fractional	كُسْرِيّ ؛ جُزْئِيّ	Gaussian units	وَحَدَات غَاوْسِيَّة
fragment	شَطِيقَة	gear(s)	(١) تُرْس (ج : تُرُوس) (٢) جِهَاز (ج : أَجْهَزَة)
frame(s)	إِطَار (ج : أَطْر)	Geiger counter	عَدَّاد غَايْغِر
frame of reference	إِطَار إِسْنَاد	general	عَامّ
franc	فِرَنْك	generality	عُمُومِيَّة
free fall	سُقُوط حُرّ	general theory of relativity	نَظَرِيَّة النَّسْبِيَّة الْعَامَّة
freight	شَحْن	generator(s)	مُولِّد (ج : مُولِّدَات)
frenetic	مَخْمُوم	geocentric	(نِظَام) مَرْكَزُ الْأَرْض
frequency	تَرَدُّد	geology	عِلْم الْأَرْضِيَّات (جِيُولُوجِيَا)
friction	إِخْتِكَال	geomagnetic	جِيُومَغْنَطِيسِيّ (مَغْنَطِيسِيّ أَرْضِيّ)
frictional	إِخْتِكَالِيّ	geometric arithmetic	حِسَاب هَنْدَسِيّ
frictionless	عَدِيم الإِخْتِكَال	geometrostatics	دِيْنَامِيكَا هَنْدَسِيَّة
frisbee	طَبَق طَائِر بِلَاسْتِيكِيّ	geometry	هَنْدَسَة
fulcrum	نَقْطَة اِزْتِكَاز	g force	قُوَّة g
function(s)	دَالَة (ج : دَوَال)	giant molecule	جُزْئِيّ عِمْلَاق
functional	دَالِيّ	girder	عَارِضَة (مَعْدِنِيَّة)
fundamental	أَسَاسِيّ	glow	وَهْج
funnel	قَمْع	gold (Au)	ذَهَب
furnace	فُور	golf	غُولْف
fuse	مِصْهَر	gondola	قَمَرَة (سَلَّة) الرِّكَّاب فِي مُنْطَاد
		good approximation	تَقْرِيْب جَيِّد
galactic	مَجَرِّيّ	goods	سِلْع
galaxy (pl. galaxies)	مَجَرَّة (ج : مَجَرَّات)	gradient	تَدْرُج (إِنْجِدَار)

G

grain(s)	حَبَّة (ج : حَبَبَات)
grandstand	مُدْرَج مَسْقُوف
graph	رَسْم بَيَانِي
graphical	بَيَانِي
graphically	بَيَانِيًّا
gravitation	جاذبية
gravitational constant	ثَابِت الجاذبية
gravitationally	جاذبيًّا
gravitational mass	كُتْلَة الجاذبية
gravitational radius	نُصْف قُطْر الجاذبية
graviton(s)	غرافيتون (ج : غرافيتونات)
gravity	جاذبية
great circle	دائرة عَظْمَى
group(s)	مَجْمُوعَة (ج : مَجْمُوعَات)
guy wire	سِلْك تَشْيِيت
gyration	تَدْوِيم
gyroscope	جَيروسكوب

H

hadron(s)	هَدْرُون (ج : هَدْرُونَات)
hail stones	حَبَّات بَرَد
half life	نِصْف عُمر [الأصح : عُمر النِّصْف]
handedness	الْيَقَاف
handle(s)	مِقْبَض (ج : مَقَابِض)
handwritten	مَكْتُوب بِخَطِّ الْيَد
hare	أَرْنَب بَرِّي
harmonic	تَوَافُفِي
H-bomb	قَنْبَلَة هَيْدْرُوجِينِيَّة
head	رَأْس

heading	«تَرْوِيسَة»
head-on	مَبَاشِر (رَأْسًا بِرَأْس)
heat	حَرَارَة
heated	مُحَمَّى
heat energy	طَاقَة حَرَارِيَّة
helical	حَلَزُونِي ؛ لَوِّلِي
helicopter	طَائِرَة عَمُودِيَّة (هَلِيكُوبْتِر)
heliocentric	(نِظَام) مَرْكَزُ الشَّمْس
helium (He)	هِيلِيُوم
hierarchy	هَرَمِيَّة ؛ تَسْلُسُلْ هَرَمِي
high-energy physics	فِيزِيَاء الطَّاقَاتِ الْعُلْيَا
highway	طَرِيق عَامَّ
hinge(s)	مُفَصَّلَة (ج : مُفَصَّلَات)
hint	تَلْمِيح
hockey	لُعْبَة الهُوكِي
hollowness	خَوَاء
home plate	مَوْقِعِ الْهَدَفِ (فِي كُرَة الْقَاعَة)
homogeneity	تَجَانُس
homogeneous	مُتَجَانِس
hook	خُطَاف
hoop(s)	طَوَق (ج : أَطْوَاق)
horsepower	قُدْرَة حِصَان
hour (hr)	سَاعَة (س)
hover	يَحُوم
hub	مِخْوَر
hydraulic	مَائِي
hydrodynamics	دِينَامِيكَا السَّوَائِلِ (هَيْدْرُودِينَامِيكَا)
hydrogen (H)	هَيْدْرُوجِين
hyperbola(s)	قِطْع زَائِد (ج : قُطُوع)
hyperbolic	زَائِدِي
hypotenuse	وَتَر

hypothetical	إفتراضيّ	inertial	قُصُوريّ
		inertial mass	كُتْلَةُ القُصُور
	I	infinite	لَا مُتَنَاهٍ
icy	جَلِيدِيّ	infinity	مَا لَا نِهَآيَةَ
identity (pl. identities)	مُتَطَابِقَةٌ (ج : مُتَطَابِقَات)	inflated	مَنْفُوخ
ignorance	جَهْل	inflection point	نَقْطَةُ انْعِطَاف
imaginary	وَهْمِيّ	inhale	يَشْهُقُ
imaginary number	عَدَدٌ نَخِيلِيّ	initial	إِبْتِدَائِيّ
immaterial	لَا مَادِّيّ	inject	يَحْقِنُ
impact	تَصَادُم	inner truth	حَقِيقَةُ جُورَانِيَّة (باطنة)
impart	يُكْسِبُ ؛ يَمْنَحُ	input	دَاخِل (نُوج)
impenetrable	غَيْرَ قَابِلٍ لِلَاخْتِرَاقِ	inset table	جَدْوَلٌ مُدْرَج
implication	لُزُوم	instability	عَدَمُ اسْتِقْرَار
imply	يَسْتَلْزِمُ ؛ يَعْني ضِمْنًا	instantaneous	لَحْظِيّ
impulse	(١) دَفْع	instructions	تَعْلِيمَات
	(٢) نَبْضَةٌ (ج : نَبْضَات)	instructive	مُتَقَفّ
impulsive	دَفْعِيّ	insurance company	شَرَكَةُ تَأْمِين
inanimate	لَا حَيّ ؛ غَيْرَ حَيّ	integer	عَدَدٌ صَحِيح
inch(es)	بُوصَةٌ (ج : بُوصَات)	integral	صَحِيح ؛ غَيْرُ كَسْرِيّ
incident	سَاقِط	integral calculus	حِسَابُ التَّكَامُل
inclined	مَائِل	integrand	مُكَامَل
incoming	مُقْبِل	integrate	يُكَامِل
incompressible	لَا مُنْضَغَط	integration	تَكَامُل
increment(s)	تَرَايُد (ج : تَرَايُدَات)	intensity	شِدَّة
indefinite	غَيْرُ مَحْدُود (مُحَدَّد)	interatomic	بَيْنَ ذَرِيّ (بَيْن ذَرِيّ)
independent	مُسْتَقِلّ	interchange	يَتَعَاض ؛ يَتَبَادَل
indicator	مُؤَشِّر	interchangeably	بَصُورَةٍ مُتَعَاوِضَةٍ (قَابِلَةٌ لِلتَّبَادُل)
indivisible	غَيْرَ قَابِلٍ لِلْقِسْمَةِ	interconnections	مُدَاخَلَات
inelastic	لَا مَرْن	intercontinental	بَيْنَ قَارِيّ (بَيْن قَارِيّ)
inelasticity	لَا مَرُونَة	interconvertible	قَابِلَةٌ لِلتَّحْوِيلِ فِيهَا بَيْنَهَا
inertia	قُصُور	interdependent	مُتَكَافِلَةٌ ؛ مُتَوَاقِفَةٌ

interface	سَطْح بَيْنِيّ	jet	(١) مِفْث ؛ نَفَاث
intermediary	صُورَة وَسْطَى ؛ وَسِيط		(٢) نَافُورَة
intermediate	مُتَوَسِّط	jet trainer	طَائِرَة نَفَاثَة لِلتَدْرِيب
internal	دَاخِلِيّ	joule (J)	جُول (ج)
international	دَوْلِيّ	journal	مَجَلَّة
interplanetary	بَيْنَكُوكِبِيّ (بَيْن كُوكِبِيّ)	Jupiter	(كُوكَب) المِشْتَرِي
intersection	(نَقْطَة) تَقَاطُع		
interstellar	بَيْنَجَمِيّ (بَيْن نَجْمِيّ)		K
interval(s)	فَتْرَة (ج : فَتَرَات)	kaon(s) (K)	كَيُون (ج : كَيُونَات)
interweaving	تَحَابُك	keel	فَقْر السَّفِينَة
intriguing	مُثِير	kelvin (K)	كِلْفِن (ك)
intrinsic	ذَاتِيّ	kilocalorie (kcal)	كِيلُوسُغَر (كسُغَر)
invariance	لَا تَغْيِير	kilogram (kg)	كِيلُوغَرَام (كسُغ)
invariant	لَا مُتَغْيِر	kilometer (km)	كِيلُومِتْر (كسَم)
inverse	مُعْكَوس ؛ عَكْسِيّ ؛ مُعَاكَس	kilomole (kmol)	كِيلُومُول (كسَمَل)
inverse-square law	قَانُون التَّرْبِيعِ العَكْسِيّ	kilowatt (kW)	كِيلُوَوَاط (كسَو)
inversion	تَعَاكُس (إِنْزِكَاس)	kinematic	كِينِمَاتِيّ
inward	مُتَّجِه إِلَى الدَّاخِل	kinematics	كِينِمَاتِيكَا (عِلْم الحَرَكَة المَجْرَدَة)
ion(s)	أَيُون (ج : أَيُونَات)	kinetic	حَرَكِيّ
ionization	تَأْيُون	kinetic energy	طَاقَة حَرَكِيَّة
iridium (Ir)	إِيرِيدِيُوم	knight	فَرَس (فِي الشَّطْرَنْج)
irrational number	عَدَد لَاجَذْرِيّ (أَصَمّ)	krypton (Kr)	كِرِيْطُون
isolated	مَعزُول		
isosceles triangle	مُثَلَّث مُنْسَاوِي السَّاقَيْن		L
isotope(s)	نَظِير (ج : نَظَائِر)	lag	تَخَلُّف
isotropic	مُتَكَافِيّ الأَتْجَاهَات	lambda particle (Λ^0)	جُسَيْم لَامْدَا
isotropy	تَكَافُؤُ اتِّجَاهَات	laser	لِيزَر
italic type	بَنْط مَائِل	laser ranging technique	طَرِيقَة تَحْدِيدِ المَدَى بِوَاسِطَةِ اللِّيزَر
ivory	عَاج	latitude	خَطَّ عَرْض

launching pad	منصة إطلاق	liquid nitrogen	سائل النيتروجين ؛ النيتروجين السائل
law(s)	قانون (ج : قوانين)	load	حمل
ledge	إفريز	loaded	حمل
left	يسار	loading	حمولة
left-handed system	نظام يساري	local	محلي
length	طول	localized	مُمرَكز
lepton(s)	ليبتون (ج : لبتونات)	locomotive	قاطرة
lever(s)	رافعة (ج : روافع)	logarithm(s)	لوغاريتم (ج : لوغاريثات)
lifetime	عمر	logarithmic	لوغاريتمي
lift	مِصعد	logic	منطق
lift force	قوة رفع	logical	منطقي
liftoff	إقلاع	logician	منطيق
lift pump	مِصخة رافعة	long	طويل
light	ضوء	long-range	بعيد المدى
light-year	سنة ضوئية	longitude	خط طول
limit(s)	(١) نهاية (ج : نهايات)	loose	لامتسبك
	(٢) حد (ج : حدود)	low-altitude	منخفض الارتفاع
limitation(s)	حد (ج : حدود) ؛ قيد (ج : قيود)	lower	أدنى
limiting process	عملية نهاية	lower limit	حد أدنى
line(s)	خط (ج : خطوط)	low-temperature phenomena	ظواهر درجات الحرارة المنخفضة
line integral	تكامل خطي	luminal	ضوئي
line segment	قطعة خطية	luminous intensity	شدة مِنبِرية
linear	خطي	lumped	مُكْتَل
linear equation	معادلة خطية	lunar	قَمَرِي
linear function	دالة خطية		
linear operation	عملية خطية		
linear operator	عامل (مؤثر) خطي		
linearity property	خاصية خطية		
link(s)	آصرة (ج : آواصر) ؛ حلقة (ج : حلقات)		
liquid(s)	سائل (ج : سوائل)		

M

magnetic	مَغْنَطِيسِيّ	meridian line	خَطّ زَوَال
magnetism	مَغْنَطِيسِيَّة	merry-go-round	دَوَّامَةٌ (مدينة الملاهي)
magnitude	مِقْدَار	mesa	مَيْسَّة ؛ هَضْبَة
many-body problem	مُعْضَلَة الْجُسَيْمَاتِ الْمُتَعَدِّدَة	meson(s)	مِيزُون (ج : مِيزُونَات)
marble	بَلْبَة	meteorite(s)	نَيْزَك (ج : نِيزَاك)
Mars	(كوكب) المَرِيخ	meteorology	عِلْم الأرْصَادِ الجَوِّيَّة
maser	مِيزَر	meter(s) (m)	مِتر (ج : أَمْتَار) (م)
mass(es)	كُتْلَة (ج : كُتَل)	metric	مِترِيّ
mass conservation	حِفْظ الكُتْلَة	metric mile	مِيل مِترِيّ (= ١٥٠٠ متر)
mass energy	طَاقَة الكُتْلَة	microcentury	مَائِكُرُونْ
mass flux	دَفْقُ الكُتْلَة	micrometer (μm)	مَائِكُرُونْ مِتر (م.م)
mass spectrometer	مِقْيَاس طَيْفِ الكُتْلَة	microscopic	مِجْهَرِيّ (مِكْرُوسَكُوبِيّ)
material(s)	مَادَة (ج : مَوَادّ)	microsecond (μsec)	مَائِكُرُونَانِيَّة (م.ث)
mathematical	رِیَاضِيّ	microwave region	مَنْطَقَة مَائِكُرُونَوُجِيَّة
mathematics	رِیَاضِيَّات	midair	وَسْطِ الهَوَاء
matter	مَادَة	midsection	مَقْطَع أَوْسَط
mean	مُتَوَسِّط	mile(s)	مِيل (ج : أَمْيَال)
mean life	مُتَوَسِّط العُمُر	million(s)	مِلْيُون (ج : مِلَايِين)
measure	يَقِيس	millimeter (mm)	مِلِیْمِتر (م.م)
measurement	قِیَاس	millisecond (msec)	مِلِی ثَانِيَة (م.ث)
measuring tape	شَرِیْطُ قِیَاس	mine	مَنْجَم
mechanical	مِیْكَانِیكِيّ ؛ آلِيّ	mine shaft	مَهْوَى (مَدْخَل) مَنْجَم
mechanical advantage	فَائِدَة آلِيَّة	minimize	يُخَفِّض إِلَى الحَدِّ الْأَدْنَى
mechanical energy	طَاقَة مِیْكَانِیكِيَّة	minus	نَاقِص
mechanism	آلِيَّة (مِیْكَانِیكِيَّة)	minute(s) (min)	دَقِيقَة (ج : دَقَائِق) (د)
medium	وَسْط	minute hand	عَقْرَب الدَّقَائِق
megaton (Mt)	مِیْغَاطْن (مغ ط)	misconception	فِكْرَة خَاطِئَة
megavolt (MV)	مِیْغَاوُولْت (مغ ف)	missile(s)	قَذِیْفَة (ج : قَذَائِف)
megawatt (MW)	مِیْغَاوَاط (مغ و)	mitt	قُفَّاز
mercury (Hg)	زَبَق	mixed product	حَاصِل ضَرْب مُخْتَلَط
Mercury	(كوكب) عُطَارِد	mks	م ك س ق ١٨

mode	طريقة ؛ وسيلة ؛ نمط	nanometer (nm)	نانومتر (نرم)
model	نموذج	nanosecond (nsec)	نانوثانية (نرث)
moderator	مُهْدِي	Napierian	نابيري
modern	حديث	natural logarithms	لُوغَارِثْمَات طَبِيعِيَّة
modernized	مُسْتَحْدَث	natural motion	حَرَكَة طَبِيعِيَّة
mole (mol)	مُول (مل)	natural philosophy	فلسفة طَبِيعِيَّة
molecular	جُزْئِي	nature	طَبِيعَة ؛ مَاهِيَّة
molecular mechanics	ميكانيكا جُزْئِيَّة	navigation	مِلَاحَة
molecule(s)	جُزْي (ج : جُزْئِيَّات)	nearly	تَقْرِيْباً
moment(s)	عُزْم (ج : عُزُوم)	nebula	سَدِيم ؛ غَيْمَة سَدِيمِيَّة
moment of inertia	عُزْم قُصُور	needle(s)	إِبْرَة (ج : إِبْر)
momentum (pl. momenta)	زَخَم (ج : زَخَام)	negative	سَالِب
momentum conservation	حِفْظ الزَخَم	Neptune	(كوكب) نِپْتُون
moon	قَمَر	neutral	مُتَعَادِل
motion	حَرَكَة	neutrino(s) (v)	نِيُوتْرِينُو (ج : نِيُوتْرِينَات)
mounted	مُنْصُوب	neutron(s) (n)	نِيُوتْرُون (ج : نِيُوتْرُونَات)
multidimensional	مُتَعَدِّد الأبعاد	neutron-star	نَجْم نِيُوتْرُونِي
multidisciplinary	مُتَعَدِّد الاهتمامات	Newtonian	نِيُوتُونِي
multiple	مُضَاعَف	nitrogen (N)	نَيْتْرُوجِين
multiple proportions	نِسَب مُتَعَدِّدَة	nodal	عُقْدِي
multiplet(s)	مُتَعَدِّد (ج : مُتَعَدِّدَات)	node(s)	عُقْدَة (ج : عُقَد)
multiplicative	مُضَاعِف	nomenclature	تَسْمِيَة المِصْطَلَحَات
multiplicity	تَعَدُّدِيَّة	non-Cartesian	لَا دِيكَارْتِي
multiplier(s)	مَضْرُوب (ج : مَضْرُوبَات)	noncommutative	لَا تَبَادُلِي
muon (mu meson) (μ^-)	مِيُون (مِيُونِيزُون)	noncommuting	لَا تَبَادُلِي
muon family	عَائِلَة (أُسْرَة) المِيُون	nonconservation	لَا حِفْظ ؛ عَدَم حِفْظ
mutually	بِالتَّبَادُل	non-Euclidean	لَا أُقْلِيدِي
muzzle	فُوهَة	non-Newtonian	لَا نِيُوتُونِي
muzzle velocity	سَرَّجَهَة فُوهِيَّة	nonphysical	لَا فِيزِيَاثِي
		nonrelativistic	لَا نِسْبِي

nonscientific	لَا عِلْمِيّ ؛ غَيْرِ عِلْمِيّ	odds	أَرْجَحِيَّة
nonuniformity	لَا انْتِظَام ؛ عَدَمُ انْتِظَام	ohm (Ω)	أُوم (Ω)
north	شَمَال	omega-minus (Ω^-)	أُومِيغَا - نَاقِص
North Star	النَّجْمُ الْقُطْبِيّ	omega particle (Ω)	جُسَيْمُ أُومِيغَا
nose	مُقَدَّمُ (الطَّائِرَةِ)	one-body	أَحَادِي الْجِسْم
nothingness	عَدَم ؛ لَاحُجُود	one-dimensional	أَحَادِي الْبُعْد
nozzle	فُوْهَة	one-to-one correspondence	تَنَاطُرٌ وَاحِدٌ لِّوَاحِدٍ
nuclear	نَوَوِيّ	open curve	مَنْحَنِي مَفْتُوح
nuclear physics	فِيْزِيَاءُ نَوَوِيَّة	operating	إِجْرَاءٌ عَمَلِيَّة
nucleon(s)	نِيُوكَلِيُون (ج : نِيُوكَلِيُونَات) ؛ [نُوتْرُون (ج : نُوتْرُونَات)]	operation(s)	عَمَلِيَّة (ج : عَمَلِيَّات)
nucleus (pl. nuclei)	نُوتْرُون (ج : نُوتْرُونَات)	operational	عَمَلِيَّاتِيّ
null	إِنْعِدَام	operational definition	تَعْرِيفٌ عَمَلِيَّاتِيّ
null vector	مُتَّجِهَةُ الْإِنْعِدَام	operationally	عَمَلِيَّاتِيًّا
number(s)	عَدَد (ج : أَعْدَاد)	operator	عَامِل (مُؤَثِّر)
numeric	كَمِيَّةٌ عَدَدِيَّة	optically transparent	شَفَافٌ لِلضَّوْءِ
numerical	عَدَدِيّ	optics	عِلْمُ الْبَصَرِيَّاتِ
nutate	يَتَرَنَّح	optimal	أَمْثَل
		orbit(s)	مَدَار (ج : مَدَارَات)
		orbital	مَدَارِيّ
		order	(١) رُتْبَة
			(٢) نِظَام
object	جِسْم ؛ شَيْء	order of magnitude	رُتْبَة مِقْدَار
objectivity	مَوْضُوعِيَّة	ore	خَامٌ مَعْدِنِيّ
observational	شُهُودِيّ	organic	عُضْوِيّ
observatory	مُرَصَّد	orient	يُوجِّه
observer(s)	مُرَاقِب (ج : مُرَاقِبُونَ)	orientation	تَوَجِّه
obstacle(s)	عَائِق (ج : عَوَائِق)	origin	نُقْطَةُ أَصْل
ocean(s)	مُحِيط (ج : مُحِيطَات)	orthogonal	مُتَعَامِد
ocean liner	عَابِرَة مَحِيطَات	oscillate	يَتَدَبَّدَب
odd	فَرْدِيّ ؛ وَثَرِيّ	oscillating	مُتَدَبَّدِب
oddness	فَرْدِيَّة ؛ وَثَرِيَّة	oscillator	مُتَدَبَّدِب ؛ مُتَدَبَّدِب

oscillatory	تَدْبُدْبِيّ	parentheses	حَاصِرَتَان ؛ قَوْسَان ؛ هِلَالَان
outer	بَرَانِيّ (ظَاهِر)	parsec (pc)	فَرْسَخ (فَخ)
outgoing	مُدْبِر	partial	جُزْئِيّ
output	خَارِج (نَاتِج)	partial derivative	مُشْتَقَّة جُزْئِيَّة
oven	تَنُور ؛ فُورْن	partially	جُزْئِيًّا
overestimate	تَقْدِير مُغَالِي فِيهِ	particle(s)	جُسَيْم (ج : جُسَيْمَات)
oxidation	تَاكْسُد	path(s)	مَسَار (ج : مَسَارَات)
		path independence	اِسْتِقْلَال مَسَارِيّ
	P	path-independent	مُسْتَقِلّ عَنِ الْمَسَار
		pathological	مُعْتَلّ
packed closely	مُتَرَاَصّ بِإِحْكَام ؛ مَحْشُوك	pavement(s)	رَصِيف (ج : أَرْضَفَة)
packet(s)	حُزْمَة (ج : حُزُم)	pebble(s)	حَصَاة (ج : حَصَيّ ؛ حُصَيّ)
painstaking	جَاهِد	pedantic	تَعْلِيمِيّ عَقِيم
pair(s)	زَوْج (ج : أَزْوَاج)	pellet	كُرِّيَّة ؛ رِصَاصَة زَائِفَة (مِنْ شَمْعٍ أَوْ وَرَق)
pairing	تَزَاوُج	pendulum	بَنْدُول (ج : بَنَادِل)
pan	وَعَاء ؛ مِقْلَاة	per cent	بِالْمِئَةِ (%)
pan balance	مِيزَان ذَو كَفَئَتَيْنِ	percentage	نِسْبَة مِئَوِيَّة
panorama	بَانُورَامَا (مَنْظَر شَامِل عَرِيض)	perigee	الْحَضِيض (الْقَمَرِيّ)
panoramic	بَانُورَامِيّ	perihelion	الْحَضِيض (الشَّمْسِيّ)
paperback	كِتَاب وَرَقِيّ الْغِلَاف	period	دَوْرَة ؛ زَمَن دَوْرِيّ
parabola	قَطْع مُكَافِيّ (ج : قُطُوع)	periodic	دَوْرِيّ
parabolic	مُكَافِيّ	periphery	مُحِيط
parachute	مِظَلَّة هَبُوط	perpendicular	عَمُودِيّ عَلَى ؛ مُتَعَامِد مَعَ
parachutist	مِظَلِّيّ	perspective	مَنْظُور
paradox(es)	تَقْبِضَة (ج : نَقَائِض) ؛ مُفَارَقَة (ج : مُفَارَقَات)	perspective view	رَسْم مَنْظُورِيّ
paradoxical	ظَاهِرِيّ التَّنَاقُض	perturbation(s)	تَرْجَاف (ج : تَرْجَافَات)
parallel	مُتَوَاز	perturbing	تَرْجَافِيّ
parallelepiped	مُتَوَازِي سَطُوح	phase	طَوْر
parallelogram	مُتَوَازِي أَضْلَاع	phase constant	ثَابِت الطَّوْر
parameter(s)	بَارَامِتْر (مُتَغَيِّر وَاسِط) (ج : بَارَامِتْرَات)	phenomenon (pl. phenomena)	ظَاهِرَة (ج : ظَوَاهِر)
		philosophy	فَلَسَفَة

photograph(s)	صُورَة (ج : صُور)	plant	نَبَات
photographic	فُوتُوغرافي	plasma	بلازما
photon(s) (r)	فُوتُون (ج : فُوتُونَات)	plastic	لَدَانِي (بلاستيكي)
photosynthesis	عَمَلِيَّة التَّخْلِيْق (التَّمثِيل) الضَّوْئِي	plate(s)	(١) لَوْح (ج : ألواح) (٢) طَبَق (ج : أَطْبَاق ؛ طَبَاق)
phraseology	صِبَاغَة لَفْظِيَّة	platinum (Pt)	بِلَاتِين
physical	(١) فِيزِيَاثِي (٢) مَادِّي	Pluto	(كوكب) بَلُوتُو
physics	فِيزِيَاء	point(s)	نُقْطَة (ج : نِقَاط ؛ نَقْط)
pickup truck	سَيَّارَة شَخَن صَغِيرَة	point mass	كُتْلَة نَقْطِيَّة
picosecond (psec)	بِيكُونَانِيَّة (بِث)	point particle	جُسَيْم نَقْطِي
pictorial	تَصْوِيرِي	poise (P)	بَوَاز
pier(s)	رَكِيزَة عَوَارِض (ج : رَكَائِز ؛ رَكَاز)	polar	قُطْبِي
pillow	وَسَادَة	polar coordinates	إِخْدَائِيَّات قُطْبِيَّة
pilot	رُبَّان طَائِرَة	pole(s)	(١) قُطْب (ج : أَقْطَاب) (٢) عَمُود (ج : أَعْمَدَة ؛ سَارِيَة (ج : سَوَارِ)
pi meson (pion) (π)	بَاي مِيزُون (بِيُون)	policyholder	حَامِل عَقْد تَأْمِين
pin(s)	مِشْبَك (ج : مَشَابِك) ؛ دَبُوس (ج : دَبَابِيس)	polish	بَضْفَل
ping-pong	كُرَة طَاوَلَة	polished	مَضْفُول
pinwheel	دَوَلَاب نَار	portable	سَهْل الحَمَل
pipe(s)	أَنْبُوب (ج : أَنْبِيب)	position	مَوْضِع
piston	مِكْبَس	position vector	مُتَجِه المَوْضِع
pitcher	قَاذِف (كُرَة القَاعِدَة)	positive	مُوجِب
pitot tube	أَنْبُوبَة بِيْتُو	positron (e^+)	بُوزِيْتْرُون
pivot (point)	(نقطة) المَرْتَكِز	postulate(s)	فَرَضِيَّة (ج : فَرَضِيَّات)
pivoted	مُثَبَّت عَلَى مِخْوَر	potential	جَهْد
placement	وَضْع	potential energy	طَاقَة وَضْع ؛ طَاقَة كَامِنَة
plane	(١) مُسْتَوِي (٢) طَائِرَة	potential well	بُز طَاقَة الوَضْع
plane figure	شَكْل مُسْتَوِي	pound	بَاوْنْد
planet(s)	كُوكَب (ج : كُوكَبَات)	power	قُدْرَة
planetary	كُوكَبِي	precession	إِسْتِيَاق (مُبَادَرَة)
plank	لَوْح خَشَبِي	precession of equinoxes	إِسْتِيَاقُ الإِعْتِدَالِيْن

preconception	فِكْرَةٌ مُسَبِّقَةٌ	propulsion	دَسْر (دَفْعٌ شَدِيدٌ)
prefix(es)	بَادِئَةٌ (ج : بادِئَات)	proton(s) (p)	بروتون (ج : بروتونات)
premium	قِسْطٌ تَأْمِينٌ	protractor	مِنْقَلَةٌ
presentation	عَرْضٌ	provisional	مَوْقَتْ
pressure	ضَغْطٌ	provisionally	مَوْقَتًا
primed	مَوْسُومٌ بِالْإِشَارَةِ (')	Proxima Centauri	القِنْطُورِي الْأَدْنَى
primitive	أَوَّلِيٌّ	pseudo	كَاذِبٌ ؛ زَائِفٌ
principal	رَئِيسِيٌّ	pseudoscalar	كَمِيَّةٌ قِيَاسِيَّةٌ كَاذِبَةٌ (زائفة)
principal axes	مُحَاوِرٌ رَئِيسِيَّةٌ	pseudovector	مَتَجَةٌ كَاذِبٌ (زائف)
Principia	المَبَادِيءُ (أو الْأَصُول)	psychology	عِلْمُ نَفْسٍ
principle	مَبْدَأٌ	Ptolemaic	بَطْلَمَيْوسِيٌّ ؛ بَطْلَمَيْيٌّ
probability	إِحْتِمَالٌ	puck	قُرْصٌ مَطَاطِييٌّ (في لعبة الهوكي)
probe	مِجَسٌّ ؛ مِسْبَارٌ	pull	يَسْحَبُ ؛ سَحَبٌ
probing	(عَمَلِيَّةٌ) جَسٌّ	pulsar	نَجْمٌ نَابِضٌ
problem	مَسْأَلَةٌ ؛ مُغْضِلَةٌ	pump(s)	مِضْحَخَةٌ (ج : مِضْخَاخٌ ؛ مِضْخَاخَات)
proceedings	مَحَاضِرٌ	pure mathematics	رِيَاضِيَّاتٌ بَحْثَةٌ
process	عَمَلِيَّةٌ	push	يُدْفَعُ ؛ دَفْعٌ
product	حَاصِلُ ضَرْبٍ	putty	مَعْجُونٌ
profile	مَظْهَرٌ جَانِبِيٌّ	pyramid	هَرَمٌ
program	بَرْنَامِجٌ	pyramided	عَلَى نَحْوِ هَرَمِيٍّ
projectile(s)	مَقْدُوفٌ (ج : مَقْدُوفَات) ؛ قَذِيفَةٌ (ج : قَذَائِف)		
projectile motion	حَرَكَةُ الْمَقْدُوفَات		
projection	إِسْقَاطٌ ؛ مَسْقَطٌ	quadrant(s)	رُبْعٌ (ج : أَرْبَاع)
pro or con	مُؤَيِّدٌ أَوْ مُعَارِضٌ (مَعَ أَوْ ضِدَّ)	quadratic	تَرْبِيعِيٌّ
propel	يَدْسِرُ	quadratic equation	مُعَادَلَةٌ تَرْبِيعِيَّةٌ
property (pl. properties)	خَاصِيَّةٌ (ج : خَوَاص)	quadratic function	دَالَّةٌ تَرْبِيعِيَّةٌ
proportion(s)	نِسْبَةٌ (ج : نِسَب)	qualitative	كَيْفِيٌّ ؛ نَوْعِيٌّ ؛ وَضْفِيٌّ
proportional to	يَتَنَاسَبُ مَعَ	quantitative	مِقْدَارِيٌّ
proportionality	تَنَاسُبٌ	quantity (pl. quantities)	كَمِيَّةٌ (ج : كَمِّيَّات)
proposition(s)	قَضِيَّةٌ (ج : قَضَايَا)	quantization	تَكْمِيَّةٌ

Q

quantized	مُكَمَّمٌ	ratio(s)	نِسْبَةٌ (ج : نِسَب)
quantum (pl. quanta)	كَمٌّ (ج : كَمَّات)	rational number	عَدَدٌ جَذَرِيٌّ (مُنْطَق)
quantum mechanics	ميكانيكا الكم	ray(s)	شُعَاع (ج : أَشِعَّة)
quantum unit	وَحْدَةٌ كَمٍّ	reaction(s)	(١) رَدٌّ فِعْلِيٌّ (ج : رُدُودٌ فِعْل)
quark(s)	كوارك (ج : كواركات)		(٢) تَفَاعُلٌ (ج : تَفَاعُلَات)
quasar(s)	شَيْهٌ نَجْمٌ (ج : أَشْبَاهُ نُجُوم)	real	حَقِيقِيٌّ
quiescence	هُمُودٌ	real axis	مِخْوَرٌ حَقِيقِيٌّ
quiescent	هَامِدٌ	real number	عَدَدٌ حَقِيقِيٌّ
quotient	خَارِجُ قِسْمَةٍ	rearward	إِلَى الْخَلْفِ
	R	reason(s)	سَبَبٌ (ج : أَسْبَاب)
race	سِيَّاقٌ	reasonable	مَعْقُولٌ
racing car	سَيَّارَةٌ سِيَّاقٌ	reasoning	مَنْطِقٌ ؛ تَفْكِيرٌ
radar	رادار (كاشوف)	rebound	يَرْتَدُّ
radial	(١) نِصْفُ قُطْرِيٍّ (نِصْفُ قُطْرِيٍّ) (٢) شُعَاعِيٌّ	recoil	يَرْتَدُّ ؛ إِرْتِدَادٌ
radian (rad)	(وَحْدَةٌ) دَائِرِيَّةٌ (مَسَر)	recoiling	مُرْتَدٌّ
radiation	إِشْعَاعٌ	reconcile	يُوفِّقُ
radical	مُتَطَرِّفٌ (راديكاليٌّ)	record	(١) يُسَجِّلُ ؛ سِجَلٌ (٢) قِيَاسِيٌّ
radio(s)	(١) مِذْبِيعٌ (ج : مِذْبِيعَات) ؛ رَادِيُو (ج : رَادِيَوَات) (٢) لَاسِلِكِيٌّ	rectangle	مُسْتَطِيلٌ
radioactive	مُشِعٌ ؛ إِشْعَاعِيٌّ	rectangular approximation	تَقْرِيبُ الْمُسْتَطِيلِ
radioactivity	نَشَاطٌ إِشْعَاعِيٌّ ؛ فَاعِلِيَّةٌ إِشْعَاعِيَّةٌ	reduce	(١) يُنْقِصُ ؛ يُخَفِّضُ ؛ يُقَلِّلُ (٢) يَخْتَزِلُ
radius (pl. radii)	نِصْفُ قُطْرٍ (ج : أَنْصَافُ أَقْطَار)	reduced Compton wavelength	طَوْلُ مَوْجَةٍ كُومْبِتُونِ الْمُخْتَزَلِ
radius of curvature	نِصْفُ قُطْرِ الْإِنْجَاءِ	reduced mass	كُتْلَةٌ مُخْتَزَلَةٌ
radius of gyration	نِصْفُ قُطْرِ التَّدْوِيمِ	reference	مَرْجِعٌ
rafter(s)	رَافِدَةٌ (ج : رَوَافِد)	reference frame	إِطَارُ إِسْنَادٍ
rally	مِهْرَجَانٌ	reference point	نُقْطَةُ إِسْنَادٍ
random	عَشَوَانِيٌّ	reflected	مَعْكُوسٌ
range	مَدَى	reflection	إِنْعِكَاسٌ
rate	مُعَدَّلٌ		

reflectional	انْعِكَاسِيّ	reversal	انْقِلَاب
regime(s)	مَنْطِقَة (ج : مَنَاطِق)	reversed	قَلْب ؛ مَقْلُوب
region(s)	مَنْطِقَة (ج : مَنَاطِق)	revolution(s)	دَوْرَة (ج : دَوْرَات)
relation, relationship	عِلَاقَة	revolve	يَدُور
relative	نِسْبِيّ	Reynolds number	عَدَد رَيْنولدز
relative acceleration	تَسَارُع نِسْبِيّ	rifle(s)	بَنْدُوقِيَة (ج : بَنَادِق)
relative motion	حَرَكَة نِسْبِيّة	rifled barrel	ماسورة مُحَرَزَة حَلَزُونِيًّا
relative speed	سُرْعَة نِسْبِيّة	right	يَمِين
relative to	نِسْبَة إِلَى	right-hand rule	قَاعِدَة الْيَدِ الْيُمْنَى
relative velocity	سَرَجَهَة نِسْبِيّة	right-handed system	نِظَام يَمِينِيّ
relativistic	نِسْبِيّ	right triangle	مُثَلَّث قائم (الزَّاوِيَة)
relativity	نِسْبِيّة	rigid	جَاسِيّ
relay race	سَبَاق التَّنَاوُب (أَوْ التَّنَاطُع)	rigidity	جَسَاءَة
repose	رُقُود ؛ اِتِّكَاء	rigorous	صَارِم
representative	مُمَثِّل ؛ تَمَثِيلِيّ	ring(s)	حَلَقَة (ج : حَلَقَات)
reproducibility	إِمْكَانِيّة إِعَادَة الْإِنْتِاج	roadbed	مَجْرَى الطَّرِيق
reproducible	مُسْتَعَاد	rocket(s)	صَارُوخ (ج : صَوَارِيخ)
repulsion	تَنَافُر	rocking	هَزَاز
repulsive	نَافِر	rod(s)	قَضَب (ج : قُضْبَان)
reservoir	خَزَان	role	دَوْر
resistance	مُقاوَمَة	roll	يَتَدَخَّرَج ؛ دَرَج
resolution (of a vector)	تَحْلِيل (مَتَّجِه)	roller coaster	أَفْعُوَانِيّة
resonance(s)	رَنِين (ج : رَنِينَات)	rolling	مُتَدَخَّرَج
rest	سُكُون	rope(s)	حَبْل (ج : حِبَال)
rest energy	طَاقَة السُّكُون	root(s)	جَذْر (ج : جُذُور)
rest mass	كُتْلَة السُّكُون	root-mean-square (rms)	جَذْر مُتَوَسِّط مُرَبَّع
restoring force	قُوّة مُرْجِعَة ؛ قُوّة إِعَادَة	rotate	يَدُور
retarding	مُعَوِّق	rotation	دَوْرَان
retractable	قَابِل لِلسَّحْب	rotational	دَوْرَانِيّ
retrograde	تَرَاجُعِيّ ؛ تَقَهْقُرِيّ	rotor	دَوَّار
retrorocket	صَارُوخ ارْتِدَاد	rough	خَشِين

roughness	خَشُونَة	screen	(١) شَاشَة (٢) حَاجِز
rule(s)	قَاعِدَة (ج : قَوَاعِد)	screw	لَوْلَب (بُرْغِي)
ruler	مِسْطَرَة	second(s) (sec)	ثَانِيَة (ج : ثَوَانٍ) (ث)
runner	عَدَاء	second derivative	مُسْتَقَة ثَانِيَة
runway	مَدْرَجَة	second-order	مِن الرُّبْعَة الثَّانِيَة
rut(s)	أُخْدُود (ج : أَحَادِيد)	seconds pendulum	بَنْدُول ثَوَانٍ
		section(s)	(١) بَنْد (ج : بُنُود) (٢) مَقْطَع (ج : مَقَاطِع)
		segment	قِطْعَة ؛ جُزْء
		self-consistency	تَوَافُق ذَاتِي ؛ اِتِّسَاق ذَاتِي
		semiconductor(s)	شِبْه مُوصِّل (ج : أَشْبَاه مُوصِّلات)
		semi-log	نِصْف لُوغَارِيْثْمِي
		sense	حِس
		separation	اِنْفِصَال
		series	مُتَسَلِّسَة
		services	خَدَمَات
		set	فِئَة
		setup	تَرْكِيب
		shaded	مُظَلَّل
		shadow(s)	ظِل (ج : ظِلَال)
		shaft	عَمُود إِدَارَة (تَدْوِير)
		shear	قَص
		shell	(١) قِشْرَة (ج : قِشَر) (٢) قَذِيفَة مِدْفَع (ج : قَذَائِف)
		shift	يُزْيِج ؛ إِزَاحَة
		shorthand	اِخْتِرَاز
		shower	وَابِل
		shrinking	اِنْكِمَاش
		SI	النِّظَام الدَّوْلِي
		(Système International)	(وهذا اختصار للتعبير الفرنسي)
			٢٦ ق

SI units	وَحَدَاتُ النِّظَامِ الدُّوَلِيِّ	soda straw	مَصَاصَةُ قَشَرٍ
side	ضِلْع ؛ جَانِب ؛ طَرَف	solar	شَمْسِيّ
sidereal	نَجْمِيّ ؛ فَلَكَيّ	solder	سِيكَّةُ إِحَام
sidewise	جَانِبِيّ	solid	صُلْب ؛ جَامِد
sigma particle (Σ)	جُسَيْمٌ سِيغْمَا	solid sphere	كُرَّةٌ مُضَمَّنَةٌ
signal(s)	إِشَارَةٌ (ج : إِشَارَات)	solid-state physics	فِيزِيَاءُ الْحَالَةِ الصُّلْبَةِ
significance	أَهْمِيَّة ؛ دَلَالَةٌ	solution(s)	حَلٌّ (ج : حُلُول)
significant figure	رَقْمٌ مَعْنَوِيّ	somersault	شَقْلَبَةٌ
simple	بَسِيط	sound	صَوْت
simple harmonic motion	حَرَكَةٌ تَوَافُيَّةٌ بَسِيطَةٌ	sound barrier	حَاجِزُ الصَّوْتِ
sine (sin)	جَيْب (جَا)	source	مَنْبَع
sinusoidal	شِبْهُ جَيْبِيّ	south	جَنُوب
Sirius	الشَّعْرَى الْيَمَانِيَّة	space	(١) مَكَان ؛ فَرَاغ
skate	يَتَزَلَّج ؛ مَزَلَج		(٢) فَضَاء
sketch	رَسْمٌ (يَبَانِي) تَخْطِيطِيّ ؛ رِسْمٌ رَسْمًا تَخْطِيطِيًّا ؛ يُخَطَّطُ رَسْمًا	spaceship	سَفِينَةُ فَضَاء
skid	يَتَزَلِّقُ جَانِبِيًّا	spacetime	زَمَكان
skier	مُتَزَلِّج	spacing	مَسَافَةٌ
skydiver	غَوَاصٌ هَوَائِيّ	spark(s)	شَرَارَةٌ (ج : شَرَار ؛ شَرَارَات)
slack	مُتَرَاخٍ	spark chamber	غُرْفَةُ الشَّرَارَةِ
slanting	مَائِل	spatial	مَكَانِيّ
slide	يَتَزَلِّقُ	specific impulse	دَفْعٌ نَوْعِيّ
slide rule	مِسْطَرَةٌ حَاسِبِيَّة	spectrometer	مِقْيَاسُ الطَّيْفِ
slope	مَبْل	spectrum (pl. spectra)	طَيِّف (ج : أَطْيَاف)
slot	شَقْب	speed(s)	سُرْعَةٌ (ج : سُرْعَات)
slug	قُرْصٌ (رَقِيق)	speedometer	مِقْيَاسُ (عَدَاد) السَّرْعَةِ
small oscillation	ذَبْذَبَةٌ صَغِيرَةٌ	sphere(s)	كُرَّةٌ (ج : كُرَات)
smooth	أَمْلَس ؛ مُمَهَّد	spherical	كُرَوِيّ ؛ كُرِّيّ
smoothly	بِصُورَةٍ مَلَسَاء	spherical coordinates	إِحْدَائِيَّاتُ كُرَوِيَّة
smoothness	مَلَاسَةٌ	spherical pendulum	بَنْدُولُ كُرَوِيّ
social sciences	عُلُومُ اجْتِمَاعِيَّة	spin	غَزْل

spin flip	إِنْقِلَابُ الْغَزْلِ ؛ إِنْقِلَابٌ مِغْزَلِيّ	stimulated	مُنْشَطٌ
spinless	عَدِيمُ الْغَزْلِ	stop watch	سَاعَةٌ تَوْقِيَتْ
spin motion	حَرَكَةٌ مِغْزَلِيَّةٌ	storage	تَحْزِينٌ
spinning	غَزَالٌ ؛ غَازِلٌ ؛ يَغْزِلُ	storm	عَاصِفَةٌ
spinor space	مَكَانٌ مِغْزَلِيّ	strain	مُطَاوَعَةٌ
spoke	بَرْمَقٌ	strange particle	جُسَيْمٌ غَرِيبٌ
sports	رِيَاضَةٌ بَدِّيَّةٌ	streamline(s)	خَطُّ التَّيَّارِ (ج : خُطُوطٌ)
sports car	سَيَّارَةٌ سِبَاقٍ	strength	قُوَّةٌ
spray	رَذَاذٌ	stress	إِجْهَادٌ
spray off	يَتَرَدَّدُ	stretching	مَطٌّ
spring	زُنْبُرُكٌ (نَابِضٌ)	string	خَيْطٌ ؛ وَرٌّ
sprocket	دُوَلَابٌ مُسَنَّ	stringent	مُتَشَدِّدٌ
square	بُرْجٌ ؛ مُرَبَّعٌ	strong	قَوِيٌّ
square root	جَذْرُ تَرْبِيعِيٍّ	structural	بَنِيَوِيٌّ
stability	إِسْتِقْرَارٌ	structure	بَنِيَّةٌ ؛ تَرْكِيبٌ
stable	مُسْتَقَرٌّ	stunt man	مُمَثِّلٌ بَدِيلٌ
stack(s)	يُكَدِّسُ ؛ كُدْسٌ (ج : أَكْدَاسٌ)	subatomic	دَوْنُ ذَرِيٍّ
stagnation	رُكُودٌ	subinterval	فَرَقَةٌ جُزْئِيَّةٌ
stalled car	سَيَّارَةٌ جَائِمَةٌ فِي مَوْقِفٍ مُعَلَّمٍ	subjectivity	ذَاتِيَّةٌ
standard(s)	مِيعَارٌ (ج : مَعَايِيرٌ) ؛ مِيعَارِيٌّ	submicroscopic	دَوْنُ مِجْهَرِيٍّ
star(s)	نَجْمٌ (ج : نُجُومٌ)	subnuclear	دَوْنُ نَوَوِيٍّ
state(s)	حَالَةٌ (ج : حَالَاتٌ)	subscript	رَمَزٌ (أَوْ حَرْفٌ) سُبْفِلِيّ
statcoulomb	كُولُومٌ سَاكِينٌ	subsection	بَنْدٌ فِرْعَسِيٌّ (جُزْئِيٌّ)
static	سَاكِينٌ ؛ اسْتَاتِيٌّ	subsonic	دُوصَوْنِيٌّ (دَوْنُ صَوْنِيٍّ)
statics	اسْتَاتِيكَا	substratum	طَبَقَةٌ أَسَاسِيَّةٌ
stationary	مُسْتَقَرٌّ ؛ ثَابِتٌ	subtend	يُقَابِلُ
statistical	إِحْصَائِيٌّ	subtle	دَقِيقٌ
stellar	نَجْمِيٌّ	subtract	يَطْرَحُ
stick	يَلْتَصِقُ	subtraction	طَرَحٌ
stiff	قَاسٍ	suck	يَمْصُ
stiffness	قَسَاوَةٌ	sulphide	كَبْرَيْتِيدٌ

sum	مَجْمُوع	synchrotron	سِنْكْرُوتْرُون
summation	جَمْع	synthesis	تَرْكِيب
sun	الشَّمْس	system(s)	نِظَام (ج : أَنْظِمَة)
sunrise	شُرُوق الشَّمْس	systematic	نِظَامِي
sunset	غُرُوب الشَّمْس	Système International (SI)	النِّظَام الدَّوْلِي
superconductivity	فَرْط المَوْصِلِيَّة	T	
superdrive	نَزْهَة فَوْعَادِيَّة (فَوْق عَادِيَّة)		
superheated	مُحَمَّى بِإِفْرَاط	table	(١) جَدْوَل
superimposed	مُثَبَّت فَوْق ؛ مُرَكَّب مَعَ		(٢) مَائِدَة ؛ مِئْصَدَة
superluminal	فَوْضُوْنِي (فَوْق ضَوْئِي)	tabular	جَدْوَلِي
supernatural	فَوْطَبِيعِي (فَوْق طَبِيعِي)	tachyon(s)	تَكْيُون (تَكْيُونَات)
supernormal	فَوْسَوِي (فَوْق سَوِي)	tail	ذَبِيل
superposition principle	مَبْدَأ التَّرَاكِب	takeoff	إِقْلَاع
supersaturated	مُشَبَّع بِإِفْرَاط	tangent (tan)	(١) ظِل (ظا)
supersonic	فَوْضُوْنِي (فَوْق صَوْتِي)		(٢) مُمَاسِّس
surface	سَطْح	tank	صَهْرِيح
surface area	مَسَاحَة سَطْحِيَّة	tape	شَرِيط
survey	يُعَايِن ؛ مُعَايَنَة	tar	قَطْرَان ؛ قَار
surveying	عَمَلِيَّة مَسْح الْأَرْضِي	target	هَدَف
suspension bridge	جِسْر مُعَلَّق	Taylor series	مُتَسَلِّسَة تَيْلُور
swan dive	غَطْسَة التَّم	technical	فَنِي (مُخْتَصَّص)
sway	يَتَمَائَل	technique	طَرِيقَة فَنِيَّة (مُخْتَصَّصَة)
sweep out	يَمْسَح ؛ يَكْنِس	technology	تَقْنِيَّة
swing	يَتَأَرْجَح ؛ تَأَرْجِح ؛ أَرْجُوْحَة	teleology	الْعَائِيَّة
switchyard	فَنَاء التَّحْوِيل	telescope	مِقْرَاب (تِلِسْكُوب)
swung	يَلْوَح	television	تِلْفَاز (تِلْفِزْيُون)
symbolic	رَمْزِي	temperature	دَرَجَة حَرَارَة
symmetry	تَمَاطُل ؛ تَنَاسُق	tennis tournament	دَوْرَة تِنِس (كَرَة المِضْرِب)
symmetry axis	مِخْوَر التَّمَاثُل	tension	تَوْتَر ؛ شَد
synchrocyclotron	سِنْكْرُوسَايْكْلُوتْرُون	tensor	مُمْتَدِّ (تَنْزُور) ؛ كَمِيَّة مُمْتَدَّة
synchronous	مُتْرَاوِن	term(s)	حَدِّ (ج : حُدُود)

terminal	نِهَائِيّ ؛ حَدِّيّ	top	خُذْرُوف
terminal speed	سُرْعَة نِهَائِيَّة (حَدِّيَّة)	torque	عَزْم دَوْرَان (تَدْوِير) ؛ عَزْم دَوْرَانِيّ
terrestrial	أَرْضِيّ	torsion balance	مِيزَان لَيّ
tesla (T)	تِسْلَا (نس)	tortoise	سُلْحَفَاة
test object	جِسْم اِخْتِبَار	toss	يَقْذِف ؛ قَذَف
theorem	نَظَرِيَّة (قَاعِدَة)	total	كُلِّيّ ؛ اِجْمَالِيّ
theory (pl. theories)	نَظَرِيَّة (ج : نَظَرِيَّات)	touchdown	هُبُوط ؛ حَطّ
thermal	حَرَارِيّ	toy	لُعْبَة
thermal energy	طَاقَة حَرَارِيَّة	toy balloon	بَالُون أَطْفَال
thermodynamics	دِيْنَامِيْكََا حَرَارِيَّة	trace out	يُخَطِّط
thermonuclear	نَوَوِيّ حَرَارِيّ (نَوَوِيّ حَرَارِيّ)	track	مَسَار ؛ مَجْرَى ؛ أَثَر
three-body	ثَلَاثِيّ الْأَجْسَام	tracking	تَبْع
three-dimensional	ثَلَاثِيّ الْأَبْعَاد	train	قِطَار
three-link	ثَلَاثِيّ الْحَلَقَات	trajectory (pl. trajectories)	مَسَار (ج : مَسَارَات)
three-vector	مُتَجِّه ثَلَاثِيّ	transformation(s)	تَحْوِيل (ج : تَحْوِيلَات)
thrust	دَفْع	transformer	مُحَوِّل
thumb	إِبْهَام	transient	جَائِر
thumbtack	مُسَيِّمِر إِبْهَامِيّ	translation	إِنْتِقَال
tic-tac-toe (tictacktoe)	لُعْبَة « التِّكْتَكْتُو »	translation(al) symmetry	تَمَاطِل إِنْتِقَالِيّ
tidal	مَدِّيّ - جَزْرِيّ	transmitted	مُرْسَل
tidal bulges	تُؤْءَات مَدِّيَّة - جَزْرِيَّة	transmute	يُحَوِّل
tie	قَضَب رَبْط (فِي سَكَّة حَدِيدِيَّة)	transonic	صَوْتِيّ
time	زَمَن ؛ زَمَان	transparent	شَفَاف
time trial	تَجْرِبَة زَمْنِيَّة	transverse	مُسْتَعْرِض
timing	تَوَقِيت	transverse displacement	إِزَاحَة مُسْتَعْرِضَة
tip	أَسَلَة ؛ رَأْس	trapeze artist	لَاعِب أَرَاكِيج السَّيْرِك
tipped	أَمِيلَ	trench(es)	خَنْدَق (ج : خَنْدَاق)
tire(s)	إِطَار (ج : إِطَارَات)	trial-and-error method	طَرِيقَة التَّجْرِبَةِ وَالْخَطَا
tire wear	إِهْتِرَاءُ الإِطَارَات	trial slide	إِنْزِلَاق تَجْرِبِيّ
TNT (trinitrotoluene)	تِي إِنْ تِي	triangle	مُثَلَّث

triangular	مُثلَّث الشَّكْلِ	ubiquitous	كُلِّي الوجود
trigger	يَقْدَح ؛ زَنْد	unavailable	لاَمُتَّاح
trigger a counter	يَقْدَح « زَنْد » عَدَّادٍ	unavailable energy	طَاقَة لاَمُتَّاحَة
trigonometric	مُثلَّثِي ؛ مُثلَّثَانِي	uncertainty	شَك ؛ لاَتَحْدِيد
trigonometric function	دَالَة مُثلَّثِيَة	underlining	خَطَ نَحْت ...
trigonometric identity	مُتطَابِقَة مُثلَّثِيَة	unfastened	غَيْر مُرْبُوط
trigonometric reasoning	مَنْطِق مُثلَّثَانِي	uniform	مُنْتَظَم
trigonometry	مُثلَّثَات	uniform circular motion	حَرَكَة دَائِرِيَّة مُنْتَظَمَة
trillion	تَرِيلْيُون (مليون مليون)	uniformity	إِنْتِظَام
triple	ثَلَاثِي ؛ يُضَاعَف ثَلَاثَ مَرَّات	unify	يُوحِّد
triple product	حَاصِل ضَرْب ثَلَاثِي	unit(s)	وَحْدَة (ج : وَحَدَات)
troops	جُنْد	unit vector	مَنْجِه الوَحْدَة
tropics	الْمَنْطِقَة الإِسْتَوَائِيَة	units arithmetic	حِسَاب الوَحَدَات
trough	خَوْض ؛ وِعَاء	units consistency	تَوَافُق الوَحَدَات
true	حَقِيقِي	unity	الْوَحْدَة ؛ الْوَاحِد الصَّحِيح
truism(s)	بَدَهِيَّة (ج : بَدَهِيَّات)	universality	الصِّفَة الْكُونِيَّة
truth	حَقِيقَة	universally	عَلَى نِطَاقٍ كُونِي
tube	أَنْبُوبَة	universe	كُون
tube of flow	أَنْبُوبَة التَّدْفُق	unstable	لاَمُسْتَقَر ؛ غَيْر مُسْتَقَر
tuning fork	شَوْكَة رَّانَة	unwind	يَنْحَل
turbine blade	نَصل التَّرْبِين	upper	أَعْلَى
turn	يُدِير ؛ أَنْعِطَاف	Uranus	(كَزَكَب) أُورَانُوس
turning point	نُقْطَة تَحَوُّل		
turntable	مَائِدَة دَوَّارَة		
twist	يَقْتَل ؛ يَلْتَوِي ؛ يَلْوِي ؛ لَي		
two-body	ثَنَائِي الْجِسْم		
type	نَمَط		
typical	نَمُودَجِي ؛ نَمَطِي		

vector(s)	مُتَّجِه (ج : مُتَّجِهَات)	water clock	سَاعَة مَائِيَّة
vector algebra	جَبْرُ المَتَّجِهَات	water hammer	مِطْرَقَة مَائِيَّة
vector arrow diagram	رَسْمُ سَهْمَانِيٍّ اِتِّجَاهِيٍّ	watt (W)	وَاط (و)
vector calculus	تَفَاضُلُ وَتَكَامُلُ المَتَّجِهَات	wattage rating	مُعَدَّلُ الوَاطِيَّة
vector product	حَاصِلُ ضَرْبِ اِتِّجَاهِيٍّ	wave(s)	مَوْجَة (ج : مَوْجَات)
vector quantity	كَمِيَّةٌ مَتَّجِهَةٌ	wave field	مَجَالٌ مَوْجِيٌّ
vector sum	مَجْمُوعٌ اِتِّجَاهِيٌّ	wavelength	طَوْلُ مَوْجِيٍّ
vectorial consistency	تَوَافُقُ المَتَّجِهَات	wavy	مُتَمَوِّجٌ
vehicle(s)	مَرْكَبَة (ج : مَرْكَبَات)	weak (nuclear) force	قُوَّةٌ (نَوَوِيَّةٌ) ضَعِيفَةٌ
vehicle propulsion	دَسْرُ المَرْكَبَات	wear	إِهْتِرَاءٌ
velocity	سَرَّجَهَة (سُرْعَة مُتَّجِهَة)	wedge	إِسْفِينٌ
Venus	(كَوْكَبُ) الزُّهْرَة	weight(s)	وَزْنٌ (ج : أَوْزَان)
vernier	وَرْنِيَّةٌ	weight lifter	رَافِعُ أَثْقَالٍ
vernier-thrust rocket	صَارُوخٌ دَفْعٍ ذُو وَرْنِيَّةٍ	weighted average	مُتَوَسِّطٌ مُوزُونٌ
vertical	رَاسِيٌّ	weightless	عَدِيمُ الْوِزْنِ
vibrating	مُهْتَزٌّ	west	غَرْبٌ
vibration	إِهْتِرَازٌ ؛ ذَبْدَبَة	wheel(s)	دَوَلَابٌ (ج : دَوَالِب)
violate	يَخْرِقُ ؛ يَتَنَاقَى (يَتَعَارَضُ) مَعَ	wind	جَنَاحٌ (ج : أَجْنَحَة)
violation	خَرْقٌ	wind triangle	رِيحٌ
viscosity	لَزُوْجَة	wing(s)	مِثْلُ الرِّيحِ
viscous	لَزِيْجٌ	wobble	يَتَرَنَّعُ ؛ يَتَمَايَلُ ؛ يَتَذَبْذَبُ
vise	مِلْزَمَة (مِشْدَلُ لَوْلِيَّيْنِ)	work	شَغْلٌ
visible	مُرْنِيٌّ	wrench	مِلْوِيٌّ (مِفْتَاحُ رَبْطِ)
visual record	سِجِلٌّ مُرْنِيٌّ		
volt (V)	فُولْت (ف)	X	
voltage	فُولْطِيَّة (جَهْدٌ كَهْرَبَائِيٌّ)	x axis	مِخْوَرٌ x
		x component	مَرْكَبَة x
		xi particle (Ξ)	جُسَيْمٌ اِكْسَائِيٌّ
waste	إِسْرَافٌ ؛ إِهْدَارٌ	Y	
watch	سَاعَة		

yard

يَاْرَدَة

Zeno's paradox

نَقِيضَة زِينُون

yardstick

عَصَا يَاْرَدِيَّة

zero

صِفْر

yo-yo

يُوِيُو

zero of potential energy

صِفْر طَاَقَة الْوَضْع

zero vector

مُتَجِه صِفْرِيّ

Z

zinc sulphide

كَبْرَيْتِيْد الْخَاَرْصِيْن

zeal

حَمَاسَة



قَامُوسُ الْأَعْرَابِ

(حَبِ الْأَنْجَلِيَّةِ الْإِنْجَلِزِيَّةِ)

ADAMS, John C. (1819-1892)

أَدَامز، جون ك. (١٨١٩ - ١٨٩٢)

ALDRIN, Edwin E., Jr. (1930-)

أَلْدَرِين، إدوين إ. [الابن] (١٩٣٠ -)

ANDERSON, Carl. D. (1905-)

أَنْدِرْسُون، كارل د. (١٩٠٥ -)

ARCHIMEDES (c. 287-212 B.C.)

أَرْخِمِيدِس (أَرْشَمِيدِس) (حوالي ٢٨٧ - ٢١٢ ق. م.)

ARISTOTLE (384-322 B.C.)

أَرِسْطُو طاليس (٣٨٤ - ٣٢٢ ق. م.)

BARDEEN, John (1908-)

بَارْدِين، جون (١٩٠٨ -)

BERNOULLI, Daniel (1700-1782)

بِرْنُولِي، دانييل (١٧٨٢ - ١٧٠٠)

BODE, Johann E. (1747-1826)

بُود، يُوْهَان إ. (١٧٤٧ - ١٨٢٦)

BOHR, Niels (1885-1962)

بُور، نيلز (١٨٨٥ - ١٩٦٢)

BOYLE, Robert (1627-1691)

بُويل، روبرت (١٦٢٧ - ١٦٩١)

BRAHE, Tycho de (1546-1601)

بَرَاهِي، تِيخو دي (١٥٤٦ - ١٦٠١)

CAVENDISH, Henry (1731-1810)

كَافِنْدِش، هنري (١٧٣١ - ١٨١٠)

CONDUITT, John (1688-1737)

كُونْدِيْت، جون (١٦٨٨ - ١٧٣٧)

COPERNICUS, Nikolaus (1473-1543)

كُوبَرْنِيكُوس، نيكولاوس (١٤٧٣ - ١٥٤٣)

DEMOCRITUS (c. 460-370 B.C.)

دِيمُوقْرِيطُس (حوالي ٤٦٠ - ٣٧٠ ق. م.)

DESCARTES, René (1596-1650)

دِيكَارْت، رينيه (١٥٩٦ - ١٦٥٠)

DICKE, Robert H. (1916-)

ديكي، روبرت ه. (١٩١٦ -)

DIRAC, Paul A. M. (1902-)

ديراك، بُول إ. م. (١٩٠٢ -)

EINSTEIN, Albert (1879-1955)

أَيْنْشْتَيْن، أَلْبِرْت (١٨٧٩ - ١٩٥٥)

EÖTVÖS, Roland von (1848-1919)

إِيْتِفِس، رولاند فون (١٨٤٨ - ١٩١٩)

EUCLID (lived c. 300 B.C.)

أُقْلِيدِس (عاش حوالي ٣٠٠ ق. م.)

FERMI, Enrico (1901-1954)

فِيرْمِي، إِنْريكو (١٩٠١ - ١٩٥٤)

FRANKLIN, Benjamin (1706-1790)

فَرَانْكَلِين، بِنْجَامِين (١٧٠٦ - ١٧٩٠)

GALILEI, Galileo (1564-1642)

غَالِيلِي، غالِيلِيُو (١٥٦٤ - ١٦٤٢)

- GAUSS, Karl Friedrich (1777-1855)
غاوس ، كارل فريدريش (١٨٥٥ - ١٧٧٧)
- GEIGER, Hans W. (1882-1945)
غايجر ، هانز ف . (١٩٤٥ - ١٨٨٢)
- GILBERT, William (1544-1603)
غلبيرت ، وليم (١٦٠٣ - ١٥٤٤)
- GLASER, Donald A. (1926-)
غليرز ، دونالد أ . (١٩٢٦ -)
- GOUDSMIT, Samuel A. (1902-1978)
غودسميت ، صموئيل أ . (١٩٧٨ - ١٩٠٢)
- HALLEY, Edmund (1656-1742)
هالي ، إدْمُونْد (١٧٤٢ - ١٦٥٦)
- HERSCHEL, Sir William (1738-1822)
هيرشيل ، سير وليم (١٨٢٢ - ١٧٣٨)
- HOOKE, Robert (1635-1703)
هُوك ، روبرت (١٧٠٣ - ١٦٣٥)
- HUYGENS, Christiaan (1629-1695)
هُويغنز ، كريستيان (١٦٩٥ - ١٦٢٩)
- KASNER, Edward (1878-1955)
كاسنير ، إدوارد (١٩٥٥ - ١٨٧٨)
- KEPLER, Johannes (1571-1630)
كبلر ، يوهانز (١٦٣٠ - ١٥٧١)
- LAPLACE, Pierre S. (1749-1827)
لابلاس ، بير س . (١٨٢٧ - ١٧٤٩)
- LEVERRIER, Urbain J.J. (1811-1877)
ليفرييه ، ايربان ج . ج . (١٨٧٧ - ١٨١١)
- LOVELL, James A., Jr. (1928-)
لوفيل ، جيمس أ . [الابن] (١٩٢٨ -)
- LOWELL, Percival (1855-1916)
لويل ، بيرسيفال (١٩١٦ - ١٨٥٥)
- MACH, Ernest (1838-1916)
ماخ ، إرنست (١٩١٦ - ١٨٣٨)
- MAUPERTUIS, pierre L.M. de (1698-1759)
مويرتوي ، بير ل . م . دي (١٧٥٩ - ١٦٩٨)
- MAXWELL, James Clerk (1831-1879)
ماكسويل ، جيمس كلارك (١٨٧٩ - ١٨٣١)
- NAPIER, John (1550-1617)
نايبر ، جون (١٦١٧ - ١٥٥٠)
- NEWTON, Sir Isaac (1642-1727)
نيوتن ، سير إسحق (١٧٢٧ - ١٦٤٢)
- PASCAL, Blaise (1623-1662)
باسكال ، بليز (١٦٦٢ - ١٦٢٣)
- PAULI, Wolfgang (1900-1958)
باولي ، فولفغانغ (١٩٥٨ - ١٩٠٠)
- PLANCK, Max K.E.L. (1858-1947)
بلانك ، ماكس ك . ا . ل . (١٩٤٧ - ١٨٥٨)
- POWELL, Cecil F. (1903-1969)
باول ، سيسيل ف . (١٩٦٩ - ١٩٠٣)

PTOLEMY [Claudius Ptolemaeus] (fl. 2nd century A.D.)

بَطْلَمَيْوس [الْقَلُودِي] (صَعِدَ نَجْمُهُ فِي الْقَرْنِ الْمِيلَادِيِّ الثَّانِي)

TITIUS, Johann D. (1729-1796)

تَيْتْيُوس، يُوَهَّان د. (١٧٢٩ - ١٧٩٦)

RUSSELL, Bertrand (1872-1970)

رَسِيل، بَرْتَرَانْد (١٨٧٢ - ١٩٧٠)

UHLENBECK, George E. (1900-)

أُولَنْبِك، جُورْج إ. (١٩٠٠ -)

RUTHERFORD, Lord Ernest (1871-1937)

رُذَرْفُورْد، لُورْد إِرْنِسْت (١٨٧١ - ١٩٣٧)

VAN ALLEN, James Alfred (1914-)

فَان آلِن، جِيَمْس أَلْفِرْد (١٩١٤ -)

SODDY, Frederick (1877-1956)

سُودِي، فِرْدْرِيك (١٨٧٧ - ١٩٥٦)

VAN DE GRAAFF, Robert Jemison (1901-1967)

فَان دِي غَرَّاف، رُوبَرْت جِيَمْسُون (١٩٠١ - ١٩٦٧)

STEVEN, Simon (1548-1620)

سْتِيْفِن، سِيْمُون (١٥٤٨ - ١٦٢٠)

WHITEHEAD, Alfred North (1861-1947)

وَاَيْتْهَد، أَلْفِرْد نُورْث (١٨٦١ - ١٩٤٧)

STOKES, George G. (1819-1903)

سْتُوكْس، جُورْج ج. (١٨١٩ - ١٩٠٣)

WILSON, Robert R. (1914-)

وِيلْسُون، رُوبَرْت ر. (١٩١٤ -)

TAYLOR, Brook (1685-1731)

تَايلُور، بْرُوك (١٦٨٥ - ١٧٣١)

WREN, Sir Christopher (1632-1723)

رِن، سِر كَرِسْتُوفَر (١٦٣٢ - ١٧٢٣)

THOMSON, Sir Joseph J. (1856-1940)

تُومْسُون، سِر جُوزِف ج. (١٨٥٨ - ١٩٤٠)

YUKAWA, Hideki (1907-)

يُوكَاوَا، هَيْدِيكِي (١٩٠٧ -)

