

حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية

تأليف

ايرل و. سووكوفسكي

الجزء الثاني

ترجم هذا الكتاب وطبع بنفقة مجمع اللغة العربية الأردني
في نطاق مشروعه لتعريب التعليم العلمي الجامعي

ترجمة الاساتذة التالية اسماؤهم (من قسم الرياضيات في الجامعة الاردنية)

الدكتور احمد علاونه

الدكتور وليد ديب

الدكتور حسن العزة

الاستاذ الدكتور احمد سعيدان

الدكتور محمد عرفات النشئة

الدكتور ديب حسين

أشرف على الترجمة وراجعها الدكتور احمد سعيدان

(حقوق الطبع والترجمة محفوظة لمجمع اللغة العربية الأردني)

١٩٧٩

Calculus

With Analytic Geometry

Earl W. Swokowski

محتويات الكتاب

٥١ - ١	الفصل الثالث عشر: المنحنيات المستوية والاحداثيات القطبية
١	١ — المنحنيات المستوية والمعادلات الوسيطة
٩	٢ — مماسات المنحنيات
١٢	٣ — نظام الاحداثيات القطبية
٢١	٤ — المعادلات القطبية للقطوع المخروطية
٢٨	٥ — المساحات باستخدام الاحداثيات القطبية
٣٤	٦ — اطوال المنحنيات
٤١	٧ — السطوح الدورانية
٤٩	٨ — تمارين مراجعة

الفصل الرابع عشر: المتجهات والهندسة التحليلية في ثلاثة أبعاد ١٥٢ - ٥٣

٥٣	١ — المتجهات ذوات البعدين
٦٨	٢ — نظم الاحداثيات المتعامدة في ثلاثة اتجاهات
٧٥	٣ — المتجهات في ثلاثة أبعاد
٨٧	٤ — الدراسة الهندسية للمتجهات
٩٧	٥ — الخطوط المستقيمة في الفضاء
١٠٢	٦ — المستويات
١١٢	٧ — الضرب المتجه

١٢٣	٨ — الاسطوانات والسطوح الدورانية
١٣٠	٩ — السطوح التربيعية
١٣٩	١٠ — المنحنيات في الفضاء
١٤٢	١١ — انظمة الاحداثيات الاسطوانية والكروية
١٤٨	١٢ — تمارين مراجعة
١٥٣ — ١٩٥	الفصل الخامس عشر: اقترانات القيم المتجهة
١٥٣	١ — تعريف
١٦٣	٢ — الحركة في الفضاء
١٦٩	٣ — تفاضل الاقترانات المتجهة القيم وتكاملها
١٧٦	٤ — الانحناء
١٨٧	٥ — مركبتا التسارع المماسية والعمودية
١٩٣	٦ — تمارين مراجعة
١٩٧ — ٢٧٧	الفصل السادس عشر: التفاضل الجزئي
١٩٧	١ — الاقترانات ذوات المتغيرات المتعددة
٢٠٥	٢ — النهايات والاتصال
٢١٣	٣ — المشتقات الجزئية
٢٢١	٤ — الزيادات والتفاضلات
٢٣١	٥ — قاعدة السلسلة
٢٤١	٦ — المشتقات المتجهة
٢٥٢	٧ — المستويات المماسية
٢٥٩	٨ — نقاط القيم للاقترانات ذوات المتغيرين
٢٦٥	٩ — مضروبات لاجرانج
٢٧٣	١٠ — تمارين مراجعة
٢٧٩ — ٣٦٥	الفصل السابع عشر: التكاملات المتعددة
٢٧٩	١ — التكاملات الثنائية
٢٨٦	٢ — ايجاد قيم التكاملات الثنائية
٢٩٨	٣ — المساحات والحجوم

٣٠٧	٤ — العزوم ومركز الكتلة
٣١٥	٥ — التكاملات الثنائية بالاحداثيات القطبية
٣٢٦	٦ — التكاملات الثلاثية
٣٣٩	٧ — تطبيقات التكاملات الثلاثية
٣٤٨	٨ — التكاملات الثلاثية في الاحداثيات الاسطوانية والكروية
٣٥٦	٩ — المساحة السطحية
٣٦١	١٠ — تمارين مراجعة
٤٥٣ - ٣٦٧	الفصل الثامن عشر : موضوعات في حساب المتجهات

٣٦٧	١ — الحقول المتجهة
٣٧٣	٢ — التكاملات الخطية
٣٩٢	٣ — استقلال التكامل الخطي عن مساره
٤٠٢	٤ — نظرية غرين
٤١٥	٥ — التباعد والجعدة
٤٢٠	٦ — التكاملات السطحية
٤٢٩	٧ — نظرية التباعد
٤٤٠	٨ — نظرية ستوكس
٤٥٠	٩ — تمارين مراجعة

٥١٢ - ٤٥٥	الفصل التاسع عشر : المعادلات التفاضلية
٤٥٥	١ — مقدمة
٤٦٢	٢ — المعادلات التفاضلية المضبوطة
٤٦٩	٣ — معادلات تفاضلية متجانسة
٤٧٢	٤ — معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى
٤٧٧	٥ — تطبيقات
٤٨٥	٦ — المعادلات التفاضلية الخطية ذات الرتبة الثانية
٤٩٤	٧ — المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة
٥٠٤	٨ — الحلول بالمتسلسلات
٥١٠	٩ — تمارين مراجعة

٥١٣	: الاستنتاج الرياضي	الملحق الأول
٥٢٠	: نظريات على النهايات والتكاملات	الملحق الثاني
٥٣٥	: الاقترانات المثلثية	الملحق الثالث
٥٤٣	: الجداول	الملحق الرابع
٥٤٧	: قواعد هندسية	الملحق الخامس
٥٤٩		قاموس المصطلحات

مقدمة المترجمين

هذا هو الجزء الثاني من كتاب التفاضل والتكامل لمؤلفه ايرل سوكوفسكي .

وهو يشمل الفصول ١٣ - ١٩ من الكتاب المذكور ويغطي مادة المساق الأول في السنة الثانية الجامعية ، بعد أن غطي الجزء الأول مادة مساق السنة الأولى .
عرض الجزء الأول من هذا الكتاب مادة التفاضل والتكامل التي يتلقاها الطالب عادة في السنة الأولى الجامعية أو ما يسمى بالمساقين ١٠١ ، ١٠٢ اما هذا الجزء فيعرض مادة المساق ٢٠١ مضافاً اليها فصل تمهيدي عن المعادلات التفاضلية قد يكفي الطلبة الذين لاينوون التخصص في الرياضيات أو الفيزياء .
وفي هذا الجزء كما سبقه حاولنا ان نبي الأعمال الحسابية بالعربية الا اننا كنا أكثر جرأة في تعريف الطالب بالرموز العالمية وفي استعمال بعض الحروف الانجليزية ذات الصيغة العالمية .

وبعد فنود ان نكرر القول بأن ما نقدمه هنا تجربة أولى قابلة للتعديل بتزايد خبرتنا من ناحية وبتلقي الملاحظات والتوجيهات البناءة من زملائنا من ناحية أخرى .

والله الموفق

المترجمون

الفصل الثالث عشر

المنحنيات المستوية والاحداثيات القطبية

Plane Curves and Polar Coordinates

سنناقش في هذا الفصل المعادلات القطبية والوسيطية للمنحنيات وستتضمن التطبيقات المساحات والمساحات وأطوال الأقواس والسطوح الدورانية .

١ — المنحنيات المستوية والمعادلات الوسيطة

إذا كان الاقتران $s = f(t)$ متصلا على الفترة I فإن بيان المعادلة $s = f(t)$ يسمى منحني مستويا . ولكن استخدام هذا التعريف للمنحنى المستوي فيه تقييد غير ضروري لانه يستبعد معظم القطوع المخروطية وكثيرا من المنحنيات الاخرى المفيدة والتعريف التالي كاف لمعظم التطبيقات .

(١-١٣) تعريف المنحنى المستوي : المنحنى المستوي مجموعة J من الأزواج المرتبة على الصورة

$$J = \{ (t, f(t)) : t \in I \}$$

حيث f ، f اقترانان متصلان على الفترة I .

وللتبسيط فائنا نسمي المنحنى المستوي بالمنحنى ، ومنحنى J في

(١-١٣) هو مجموعة النقط $J = \{ (t, f(t)) : t \in I \}$ في

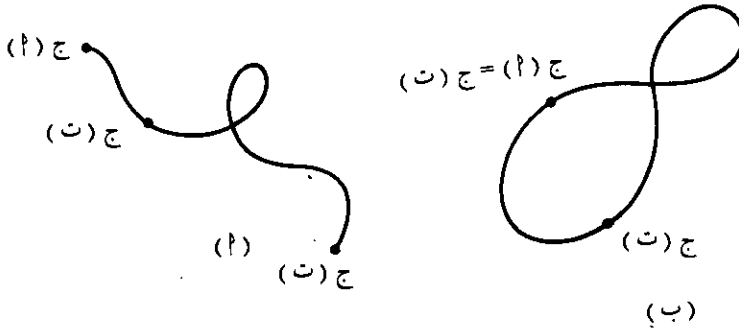
نظام الاحداثيات المتعامدة الذي يحدد الأزواج المرتبة في المجموعة J . وكل

J هي نقطة على المنحنى ونستخدم كلمة منحني لتعني بيان المنحنى .

وقد يكون من المفيد أن نتخيل أن النقطة J (t) ترسم المنحنى J عندما تتغير

ت على طول الفترة $ى$. وهذا يصح بوجه خاص في التطبيقات التي تمثل فيها الزمن $ج$ ($ت$) موقع النقطة المتحركة في المستوى في الزمن $ت$. ويسمى المنحنى $ج$ في (١٣ - ١) ممهدا (Smooth) اذا كان كل من $ق$ ، $ف$ ممهدا ، أي اذا كان $ق$ ، $ف$ متصلا .

وتشاهد في الشكل ١٣ - ١ مخططين لمنحنين عندما تكون $ى$ هي الفترة $[١ ، ٢]$. واذا كان $ج (١) \neq ج (٢)$ كما في الشكل ١٣ - ١ (١) فان $ج (١)$ ، $ج (٢)$ تسميان نقطتي نهاية المنحنى $ج$. لاحظ أن المنحنى الموضح في ١ يقطع نفسه بمعنى انه يوجد قيمتان مختلفتان للمتغيرات تعطي نفس النقطة . واذا كان $ج (١) = ج (٢)$ كما في الشكل ١٣ - ١ (٢) فان $ج$ تسمى منحنى مغلقا . واذا كان $ج (١) = ج (٢)$ ولم يقطع المنحنى $ج$ نفسه في أي نقطة اخرى فانه يدعى منحنى مغلقا بسيطا .



الشكل ١٣ - ١

ان اتصال كل من $ق$ ، $ف$ في (١٣ - ١) يتضمن أن كل تغير صغير في $ت$ يعطي تغيرا في موضع $ج (ت)$ على المنحنى $ج$. ويمكن استخدام هذه الحقيقة لعمل مخطط تقريبي لمنحنى $ج$ وذلك برسم عدة نقط ووصلها بالترتيب كما في المثال (١) القادم واذا كان $ج$ هو منحنى (١٣ - ١) فان المعادلتين

$$(٢-١٣) \quad س = ق (ت) , \quad ص = ف (ت)$$

حيث $ت$ في تسميان المعادلتين الوسيطتين للمنحنى $ج$ ويسمى $ت$ الوسيط . وعندما يتغير $ت$ خلال $ى$ فان النقطة $ج (س ، ص)$ ترسم المنحنى . ولان $ج (س ، ص) = ج (ت)$ فان (١٣ - ١) ، (٢ - ١٣)

هما صيغتان متكافئتان لوصف المنحنى ج . ومن الممكن احيانا حذف الوسيط في (١٣ - ٢) والحصول على معادلة للمنحنى ج بدلالة المتغيرين س ، ص .

مثال ١ : صف وخطط المنحنى ج = { (٢ ت ، ت - ١) } :
ت ∈ [١ - ، ٢]

الحل : في هذا المثال ق (ت) = ٢ ت ، ف (ت) = ت - ١

والمعادلتان الوسيطيتان لمنحنى ج هما

س = ٢ ت ، ص = ت - ١ ، حيث ١ - ت ≥ ٢ ≥ ٠ .
ويمكن استخدام هاتين المعادلتين لعمل جدول بالاحداثيات المتعامدة ج (س ، ص) كما يلي :

ت	١ -	١/٢ -	٠	١/٢	١	٣/٢	٢
س	٢ -	١ -	٠	١	٢	٣	٤
ص	٠	٣/٤ -	١ -	٣/٤ -	٠	٥/٤ -	٣

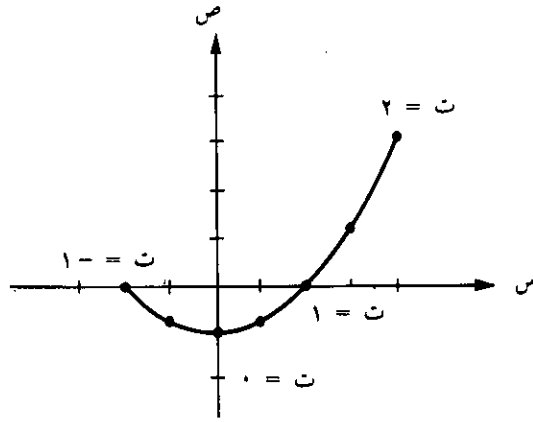
وبرسم النقط ، علما بان ق ، ف متصلان ، يمكننا رسم مخطط الشكل ١٣ - ٢ . ويمكن وصف المنحنى بشكل اكثر دقة بحذف الوسيط وذلك بحل المعادلة الاولى للمتغير ت فنجد أن ت = $\frac{ص}{٢}$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على

$$ص = (٢ \frac{ص}{٢}) - ١ \text{ أو } ص + ١ = \frac{١}{٤} س^٢$$

ومنحنى المعادلة الاخيرة قطع مكافئ محوره رأسي ورأسه النقطة (٠ ، ١) . والمنحنى ج هو جزء القطع المكافئ الموضح في الشكل ١٣ - ٢ . والمعادلات الوسيطية للمنحنيات ليست وحيدة ، فالمنحنى ج لهذا المثال يمكن اعطاؤه كما يلي

$$ج = \{ (ت^٣ ، \frac{١}{٤} ت^٤ - ١) : ت \in [\sqrt[٤]{٤} ، \sqrt[٤]{٢}] \}$$

أو بعبارات اخرى كثيرة .



الشكل ١٣ - ٢

مثال ٢ : اذا كانت المعادلتان الوسيطيتان للمنحنى ج هما
 $س = ج ت$ ، $ص = ج ت$ ، حيث $٠ \leq ت \leq ٢\pi$ ، صف المنحنى ج .

الحل : ان حذف الوسيط يعطينا المعادلة $س + ص = ٢$ وهكذا فان النقط الواقعة
 على ج هي الواقعة على دائرة الوحدة التي مركزها نقطة الاصل . وعندما تزداد
 ت من صفر الى ٢ ، فان ج (ت) تبدأ من النقطة ج (١ ، ٠) وترسم الدائرة
 مرة في اتجاه عكس عقارب الساعة . وفي هذا المثال من الممكن تفسير الوسيط
 هندسيا على انه طول القوس من النقطة ج (١ ، ٠) حتى النقطة ج (ت) ،
 كما هو موضح في الشكل ٩ - ١ .

مثال ٣ : جد معادلتين وسيطيتين للمستقيم الذي ميله م ويمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) .

الحل : معادلة الخط المستقيم هي

$$ص - ص_١ = م (س - س_١)$$

فاذا وضعنا $س = س_١$ ، $ت = ج$ ($س$ ، $ص$) تقع على المستقيم اذا وفقط
 اذا كان $ص - ص_١ = م (س - س_١)$ وينتج ان المعادلتين الوسيطيتين للمستقيم هما :
 $س = س_١ + ت$ ، $ص = ص_١ + م ت$ حيث $٠ \leq ت \leq ٢\pi$.
 وكما ورد في المثال (٢) يمكن وضع معادلات اخرى ، فاذا وضعنا

٥ ت ٣ بدل ت السابقة تكون $س = ١ + ٥ ت$ ، $ص = ١ + ٥ م$ ت ٣
معادلتى المستقيم .

مثال ٤ : ج نقطة معينة على محيط دائرة تتدحرج دون انزلاق على خط مستقيم في مستوى
ما ، أوجد المعادلات الوسيطة للمنحنى الذي ترسمه ج (يسمى هذا المنحنى
بالسيكلويد (Cycloid) او الدوارة

الحل : لنفرض أن نصف قطر الدائرة يساوي ١ وأنها تتدحرج على محور $س$ في مستوى
 $س$ ص وذلك في الاتجاه الموجب . فإذا كان احد مواضع ج هو نقطة الاصل
فان الشكل ١٣ - ٣ يرينا جزءا من المنحنى وأحد أوضاع الدائرة . فإذا كانت
 $م$ هي مركز الدائرة ، وط نقطة تماسها مع محور السينات فانه يمكن اتخاذ
الوسيط الذي هو مقياس الزاوية $ط م ج$ بالقياس الدائري وبما ان $وط$ هي
مسافة تدحرج الدائرة فان $وط = ط' ت$ ، وهكذا فان احداثيات $م$ هي
($ط$ ، $ت$) فإذا اعتبرنا نظاماً للاحداثيات $س$ ص نقطة الاصل له هي
 $م$ ($ط$ ، $ت$) وإذا كانت ج ($س$ ، $ص$) تعطي النقط ج بدلالة هذه
الاحداثيات فباستخدام (٧ - ٢٠) ، حيث $ع = ط$ ، $ك = ط$ يكون

$$(١٣-٣) \quad س = ط + ت ، ص = ص + ط$$

وإذا كانت هـ (كما في الشكل ١٣ - ٤) تدل على زاوية في الوضع المثالي

بالنسبة للاحداثيات $س$ ، $ص$ فان هـ $= \frac{\pi}{٢} - ت$ ، وهكذا يكون

$$س = ط جتا هـ = ط جتا (\frac{\pi}{٢} - ت) = ط - ط جتا ت$$

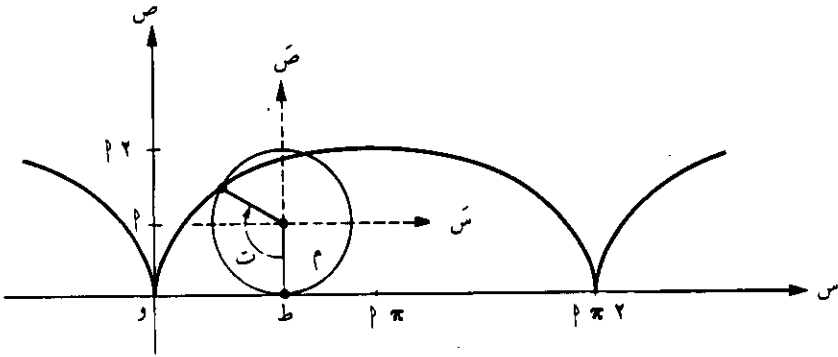
$$ص = ط جا هـ = ط جا (\frac{\pi}{٢} - ت) = ط جتا ت$$

وبالتعويض في (١٣ - ٣) نحصل على معادلتين للسيكلويد ، وهما

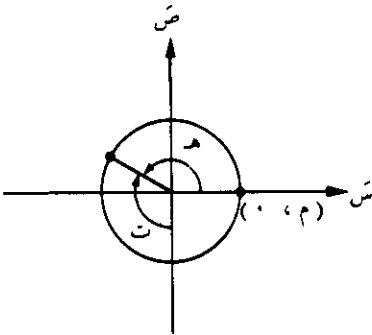
$$س = ط (ت - جتا ت) ، ص = ط (١ - جتا ت)$$

حيث $ت \in [0, 2\pi]$.

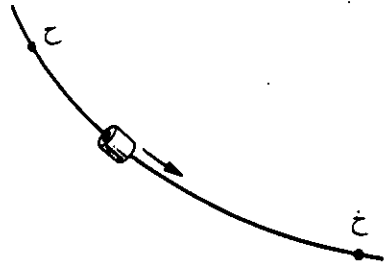
وإذا كانت $p > 0$ صفر فإن منحنى (١٣ - ٣) هو السيكلويد المعكوس الذي يحصل إذا تدرجت الدائرة تحت منحنى s . ولهذا المنحنى عدد من الصفات الفيزيائية المهمة. وبصورة خاصة لو فرضنا ان سلكا دقيقا يمر بنقطتين ثابتتين $ح$ ، $خ$ (كما في الشكل ١٣ - ٥) حيث يمكن تشكيل السلك بالطريقة المرغوبة. ولنفرض أن خرزة تنزلق على السلك والقوة الوحيدة المؤثرة عليها هي الجاذبية. ونسأل الآن السؤال التالي: ما هو المسار الذي تسلكه الخرزة لتنزلق من $ح$ الى $خ$ في اقصر فترة زمنية ممكنة؟ ومن الطبيعي أن نحمن أن المسار المطلوب هو قطعة الخط المستقيم من $ح$ الى $خ$ ، ولكن ليس هذا صحيحا. ومن الممكن البرهنة - مع بعض الصعوبة - على ان المسار الذي يحتاج الى أقل زمن ينطبق على منحنى (١٢ - ٣) حيث $p > 0$ ، $ح$ نقطة الاصل.



الشكل ١٣ - ٣



الشكل ١٣ - ٤



الشكل ١٣ - ٥

واليك صفة اخرى مهمة للمنحنى: لنفرض أن $ح$ هي نقطة الاصل، $خ$ هي النقطة التي احداثياتها السينية π ، $|p|$ ، وهي أدنى نقطة في السيكلويد

تحدث في القوس الاول الى اليمين من ح ، فن الممكن البرهنة على أن الخرزة تحتاج لنفس الزمن للوصول الى خ اذا تركت لتتزلق من أي نقطة بين ح ، خ . وقد نجابه انواعا من السيكلويد في المسائل العملية ، فمثلا عندما تتدحرج دراجة على طريق مستقيم فان المنحنى الذي ترسمه نقطة مثبتة على احد اسلاك العجلة هو منحني شبيه بالسيكلويد . وفي هذه الحالة ليس للمنحنى اركان حادة ولا تنقاط مع الطريق (محور س) كما يفعل منحني (١٣ - ٣) . وبالمثل اذا دارت عجلت قطار على خط حديدي فان المنحنى الذي ترسمه نقطة مثبتة على محيط العجل (الذي يمتد اسفل الخط الحديدي) يحتوي على عُرى موزعة على فترات منتظمة . لاحظ انه في هذه الحالة عندما يسير القطار الى الامام فهناك دائما نقط على العجلة تتحرك الى الخلف . وهناك انواع اخرى من السيكلويد كما في الترينين ١٩ ، ٢٠ .

تمارين :

في كل من التمارين ١ - ١٦ (؟) ارسم مخططا للمنحنى ج المعروف بالمعادلات الوسيطة المعطاة . (ب) جد معادلة في س ، ص للمنحنى الذي يحوي النقط الموجودة على ج .

- ١ . س = ت - ٢ ، ص = ٢ ت + ٣ ، ت في [٥ ، ٠] .
- ٢ . س = ٢ - ١ ، ص = ١ + ت ، ت في [٤ ، ١ -] .
- ٣ . س = ٢ + ١ ، ص = ٢ - ١ ، ت في [٢ ، ٢ -] .
- ٤ . س = ٣ + ١ ، ص = ٣ - ١ ، ت في [٢ ، ٢ -] .
- ٥ . س = ٤ - ٢ ، ص = ٢ ت + ٣ ، ت في ح .
- ٦ . س = ٣ ، ص = ٢ ، ت في ح .
- ٧ . س = ٤ ، ص = ٢ - ٤ ، ت في ح .
- ٨ . س = ٣ ، ص = ٣ + ٤ ، ت في [٥ ، ٠] .
- ٩ . س = ٢ جات ، ص = ٣ جات ، ت في [٢ ، ٠] .
- ١٠ . س = جات - ٢ ، ص = جات + ٣ ، ت في [٢ ، ٠] .
- ١١ . س = قات ، ص = ظات ، ت في (- ٢ ، ٢) .
- ١٢ . س = جتا ٢ ، ص = جات ، ت في [٢ ، ٢ -] .

- ١٣ . س = ت^٢ ، ص = ٢ ل ط ت ، في (٠ ، ∞) .
- ١٤ . س = جتا^٣ ت ، ص = جا^٣ ت ، ت في [٠ ، ٢ π] .
- ١٥ . س = جا ت ، ص = قتا ت ، ت في (٠ ، $\frac{\pi}{٢}$) .
- ١٦ . س = e ت ، ص = e⁻ ت ، ت في ج .
- ١٧ . اذا كانت ج_١ (س_١ ، ص_١) ، ج_٢ (س_٢ ، ص_٢) نقطتين مختلفتين ، اثبت
 أن س = (س_٢ - س_١) ت + س_١ ، ص = (ص_٢ - ص_١) ت + ص_١
 حيث ت في ج ، هما معادلتان وسيطيتان للمستقيم ل المار بالنقطتين ج_١ ،
 ج_٢ . جد ثلاثة ازواج اخرى من المعادلات الوسيطة للمستقيم ل . وأثبت أن
 هناك عدداً لا نهائياً من ازواج المعادلات الوسيطة للمستقيم ل .
- ١٨ . ما الفرق بين منحنى القطع الزائد ب^٢ س^٢ - ص^٢ = ب^٢ ب^٢ ومنحنى ص =
 ب جتا ت ، ص = ب جاز ت حيث ت في ج ؟
- ١٩ . اثبت ان
- س = ب جتا ت + ث ، ص = ب جا ت + ك
 حيث ت في [٠ ، ٢ π] ، هما معادلتان وسيطيتان للقطع الناقص الذي
 مركزه (ث ، ك) ، وطولا محوريه هما ٢ ب ، ٢ ب .
- ٢٠ . جد معادلات وسيطة للقطع المكافئ (١) الذي رأسه ر (٠ ، ٠) وبؤرته
 (٠ ، ب) ، (٢) رأسه (ث ، ك) وبؤرته (ث ، ك + ب) .
- ٢١ . د دائرة نصف قطرها نق تتدحرج داخل دائرة أخرى معادلتها س^٢ + ص^٢ =
 ب^٢ ، حيث ب > ب^٢ ، ج نقطة مثبتة على د ووضعها الابتدائي هو (٠ ، ب) .
 فاذا كان الوسيط ت هو قياس الزاوية التي تصنعها القطعة المستقيمة من والى
 مركز د مع محور السينات ، فأثبت أن المعادلتين التاليتين هما معادلتان وسيطيتان
 للمنحنى الذي ترسمه ج (ويسمى سيكلويد سفلي Hypocycloid)

$$س = (ب - ب^2) جتا ت + ب جتا \frac{ب - ب^2}{ب} ت .$$

$$ص = (ب - ب^2) جا ت - ب جا \frac{ب - ب^2}{ب} ت .$$

حيث t في $[0, 2\pi]$. وإذا كانت $b = \frac{p}{4}$ أثبت أن

$$s = p \text{ جتا } t, \quad v = p \text{ جا } t.$$

وارسم مخططا للمنحنى .

٢٢ . إذا كانت الدائرة د (في التمرين ٢١) تندرج في الجزء الخارجي على الدائرة الثانية جد معادلات وسيطة للمنحنى الذي ترسمه ج (يسمى هذا المنحنى سيكلويد علوي (Epicycloid))

٢ — مماسات المنحنيات :

رأينا في المثال (١) من البند السابق أن المنحنى ج الذي معادلته الوسيطيتان هما $s = 2t$ ، $v = 1 - t^2$ ، حيث t في $[-1, 2]$ ، يمكن التعبير عنه بالاحداثيات العمودية على الصورة $v = k(s)$ ، حيث k اقتران معرف على فترة مناسبة ، ويمكننا اخذ $k(s) = \frac{1}{4}s^2 - 1$ حيث $s \in [-2, 4]$ ، وينتج ان المماس عند اي نقطة على ج هو $k'(s) = \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}(2t) = t$.

وهنا سنقدم طريقة جديدة لايحاد الميل مباشرة من المعادلات الوسيطة:

لنفرض أن $s = q(t)$ ، $v = f(t)$ ، حيث t في I ، هما معادلتان وسيطيتان للمنحنى ج ، ولنفرض ان المنحنى ج يمكن تمثيله بالصورة $v = k(s)$ (س) حيث k اقتران بمجاله J . ولنفرض أن الاقترانات q ، f ، k قابلة للتفاضل كل في مجاله . فاذا كانت $(q(t), f(t))$ نقطة في ج فان احداثياتها تحقق المعادلة $v = k(s)$ أي أن

$$f(t) = k(q(t))$$

وبتطبيق قانون السلسلة (٣-٣٩) .

$$f'(t) = k'(q(t)) \cdot q'(t) = k'(s) \cdot q'(t)$$

وهكذا يكون

$$(١٣-٤) \quad k'(s) = \frac{f'(t)}{q'(t)} \quad \text{حيث } q'(t) \neq 0 \text{ صفرا.}$$

ولتذكر هذه الصيغة نستخدم الاصطلاحات التفاضلية

$$(5-13) \quad \frac{\frac{و}{ص}}{\frac{و}{س}} = \frac{و}{س} \quad , \quad \text{حيث} \quad \frac{\frac{و}{ت}}{\frac{و}{س}} \neq \frac{و}{ت}$$

مثال ١ : جد ميل كل من المماس والعمودي للمنحنى

ج = { (٢ ت ، ت - ١) : ت ∈ [١ ، ٢] } عند النقطة ج (ت) .

الحل : المنحنى ج هو نفسه الذي ناقشناه في المثال (١) من البند السابق (انظر الشكل ١٣-٢) . فباستخدام (٥-١٣) ، حيث س = ٢ ت ، ص = ت - ١ ، فان ميل المماس عند النقطة ج (ت) هو

$$\frac{و}{س} = \frac{٢ ت}{٢} = ت$$

لاحظ ان هذا يتفق مع ما ناقشناه عند بدء هذا البند . وميل العمودي هو

$$\frac{١}{ت} , \quad \text{حيث} \quad ت \neq ٠$$

اذا امكن تقسيم منحنى الى اجزاء كل منها منحنى معادلة على الصورة ص = ك (س) ، فانه يمكن استخدام المعادلة في (١٣-٤) أو (٥-١٣) لايجاد ميل المماسات للنقط في الاجزاء المختلفة . ففي المثال (٢) من البند السابق ناقشنا دائرة الوحدة ومعادلتها الوسيطتين س = جتا ت ، ص = جتا ت ، حيث ٠ ≤ ت ≤ ٢π ، فبتطبيق (٥-١٣) نجد ان

$$\frac{و}{س} = \frac{جتا ت}{جتا ت} , \quad \text{حيث} \quad جتا ت \neq ٠$$

وهكذا فانه عند $t = \frac{\pi}{4}$ ، فان الميل هو - ١ ، وعند $t = \frac{3\pi}{2}$ فان

الميل = صفراً ، وهكذا . اذا كانت جات $t = 0$ فان $t = 0$ أو $t = \pi$ وهذه تعطي نقاطاً على الدائرة لها مماسات رأسية .

سيتبع من المناقشة في الفصل التالي أن $(13-4)$ ، $(13-5)$ تعطيان ميل المماس عند النقطة ج (ت) لاي منحنى على الصورة $(13-1)$ ، حيث ق ، ف قابلتان للتفاضل ، ق (ت) $\neq$. وسنستخدم هذه الصيغ كلما احتجنا الى أن نجد ميل مماسات لمنحنيات معرفة بمعادلات وسيطية .

مثال ٢ : اذا كان للمنحنى ج المعادلتان الوسيطيتان $t^2 + 2t = 3$ ، $t = 5$ ، ص = ٢ - ٤ ت ، جد معادلة المماس عند النقطة $t = 1$.

الحل : باستخدام $(13-5)$

$$\frac{ص - ٢ - ٤ ت}{٢ + ٢ ت} = \frac{٤ - ت}{٢ + ٢ ت}$$

فعند $t = 1$ يكون ميل المماس $\frac{٢ - ٤}{٢ + ٢} = 0$ وذلك لان النقطة المرتبطة بالقيمة $t = 1$

هي ج (٢ ، ٣) ، ومعادلة المماس هي :

$$ص - ٢ = 0 \quad (س = ٣) \quad \text{أو}$$

$$٢س + ٥ص - ١٦ = 0 \quad \text{صفرأ}$$

تمارين :

١٠ - ١ جد ميل المماس عند $t = 1$ لكل من المنحنيات المعرفة في التمارين ١ - ١٠ من البند السابق .

١١ . اذا كانت $س = \frac{٢}{٣}$ ، $ص = ٢ - ٥$ هما معادلتان وسيطيتان للمستقيم ل ،

وكانت $s = t^4 - 7$ ، $v = 8 + t$ ٣ معادلتين وسيطيتين للمنحنى ج حيث t في ج ، جد بالاحداثيات العمودية معادلة المستقيم العمودي على ج الموازي للمستقيم ل .

١٢ . اذا كانت المعادلتان الوسيطيتان للمنحنى ج هي $s = 6 + t$ ، $v = t^3$ - ٢ ، حيث t في ج ، جد النقطة على ج التي يكون مماس المنحنى عندها عموديا على المستقيم ٣ $s + 5v - 8 = 0$.

١٣ . اذا اعطي المنحنى ج بالمعادلتين $s = 4t^2$ ، $v = 2t - 5$ ، حيث t في ج ، جد بالاحداثيات المتعامدة معادلة مماس المنحنى المار بالنقطة (٤ ، ١) .

١٤ . جد بالاحداثيات المتعامدة معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل عموديا على المنحنى المعطى بالمعادلتين $s = 3t^2 - 2$ ، $v = 2t^3$ ، حيث t في ج . في كل من التمارين ١٩ - ١٨ جد على المنحنيات المعطاة النقط التي يكون المماس عندها افقيا أو رأسيا . ارسم مخططا للمنحنى مبينا المماسات الأفقية والرأسية .

١٥ . $s = 4t^3$ ، $v = t^3 - 12t$ ، t في ج .

١٦ . $s = t^3 + 1$ ، $v = t^2 - 2t$ ، t في ج .

١٧ . $s = 3t^2 - 2t$ ، $v = \sqrt{t}$ ، $t \leq 0$.

١٨ . $s = \sqrt[3]{t}$ ، $v = \sqrt[3]{t} - t$ ، t في ج .

١٩ . ما هو المماس عند النقطة ج (t) على السيكلويد

$s = p$ ($t - ج.ا.ت$) ، $v = p$ ($١ - ج.ا.ت$)

حيث t في ج ، عند أي نقطة يكون المماس افقيا أو رأسيا ؟

وعند أي نقطة يكون ميل المماس مساويا ١ .

٢٠ . أجب عن أسئلة التمرين (١٩) بالنسبة للسيكلويد السفلي

$s = p$ ج.ا.ت ، $v = p$ ج.ا.ت ، حيث t في [٠ ، ٢ π] .

٣ — نظام الاحداثيات القطبية :

تعلمنا كيف نعين النقطة في المستوى بدلالة الاحداثيات المتعامدة ، وذلك باستخدام الزوج المرتب (p ، b) للدلالة على النقطة التي بعدها المتجهان عن محاور ومحور v هما p ، b . وهناك طريقة اخرى مهمة لتمثيل النقط وهي استخدام

الاحداثيات القطبية . وفي هذه الطريقة نستخدم ايضا ازواجاً مرتبة ولكن احد الزوجين هو قياس زاوية . ولوضع نظام الاحداثيات القطبية في مستوى نبدأ بنقطة ثابتة و ، ونسميها نقطة الاصل او القطب ونتخذ شعاعاً نقطة ابتدائه هي و ويسمى المحور القطبي . لنأخذ اي نقطة في المستوى (غير النقطة و) . فكما في الشكل ١٣ - ٦ اذا كان $r = l$ (و ، ج) وكانت θ قياس أي زاوية تحدد بالمحور القطبي والقطعة المستقيمة و ج ، فاننا نسمي (ر ، θ) الاحداثيين القطبيين للنقطة ج والزوج المرتب (ر ، θ) يعني النقطة ج . وكالعادة يعتبر قياس الزاوية موجبا اذا تولدت الزاوية من حركة المحور القطبي بعكس اتجاه عقارب الساعة وسالبا اذا كان الدوران باتجاه عقارب الساعة . ويمكن استخدام الدرجات أو القياس الدائري لقياس θ . ولأن ضلعي الزاوية يحددان في الواقع عدة زوايا فان الاحداثيات القطبية للنقطة ليست وحيدة ، مثلاً ($\frac{\pi}{3}$ ، ٣) ،

($\frac{\pi}{4}$ ، ٣) ($\frac{\pi}{4}$ ، ٣) جميعها تمثل نفس النقطة في المستوى (انظر الشكل ١٣ - ٧) . وسنعتبر ان ر يمكن ان تكون سالبة . وفي هذه الحالة يدل قياس |ر| من الوحدات على طول الضلع الثاني للزاوية θ ، نقيسها على الشعاع الذي رأسه و واتجاهه عكس اتجاه هذا الضلع . وفي الشكل ١٣ - ٨ تشاهد النقطتان المثلتان بالزوجين ($\frac{\pi}{4}$ ، ٣ -) ، ($\frac{\pi}{4}$ ، ٣ -) . وأخيراً لنتفق على أن النقطة ولها الاحداثيان

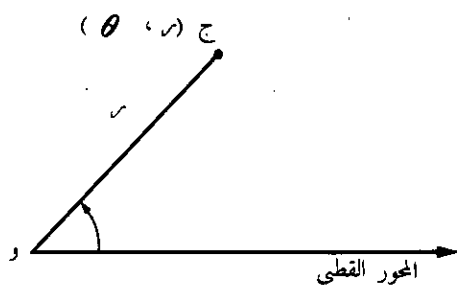
القطبيان (٠ ، θ) مهما تكن θ . واعطاء نقاط المستوى ازواجاً مرتبة (ر ، θ) يسمى نظام الاحداثيات القطبية ويسمى المستوى مستوى ر $\bar{\theta}$.

والمعادلة بالاحداثيات القطبية هي معادلة في ر ، θ . وحل المعادلة القطبية هو زوج مرتب (پ ، ب) يؤدي الى المساواة اذا عوضنا پ بدل ر و ب بدل θ . ومجموعة الحل للمعادلة هي مجموعة الحلول وبيانها هو مجموعة النقط في مستوى ر θ المتعينة بالحلول .

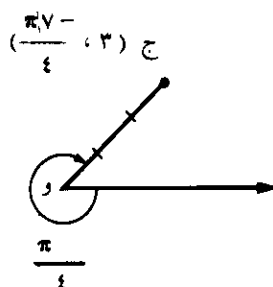
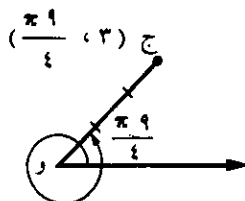
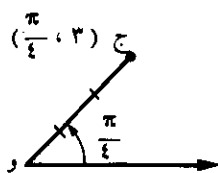
مثال ١ : ارسم مخططاً لمنحنى المعادلة ر = ٤ جا θ

الحل : الجدول التالي يحوي بعض حلول المعادلة .

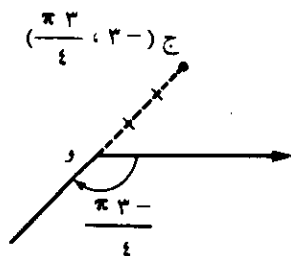
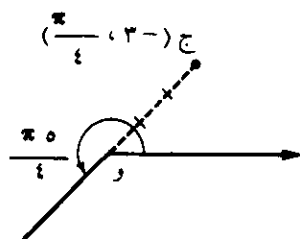
$$\begin{array}{ccccccc} \pi & \frac{\pi 5}{6} & \frac{\pi 3}{4} & \frac{\pi 2}{3} & \pi & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{6} & \theta \\ \cdot & 2 & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 4 & 3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2 & \cdot \end{array}$$



الشكل ١٣ - ٦



الشكل ١٣ - ٧



الشكل ١٣ - ٨

في الاحداثيات العمودية يكون منحنى المعادلة من امواج الجيب التي سعتها ٤ ودورتها ٢ . ولكن في الاحداثيات القطبية نجد أن النقط التي في الجدول تقع على دائرة نصف قطرها ٢ وتبعاً لذلك نرسم مخطط المنحنى (انظر الشكل ١٣ - ٩) . ولتسهيل الرسم مددنا المحور القطبي في الاتجاه السالب ورسمنا عموداً عليه من نقطة الاصل (القطب) . وسرد في المثال ٤ البرهنة على أن المنحنى دائرة . والنقط الاضافية التي نحصل عليها يجعل θ تتغير من π الى

٢ π تقع على نفس الدائرة . فمثلا ، الحل (-٢ ، $\frac{\pi}{6}$) يعطينا نفس

النقطة كالحل (٢ ، $\frac{\pi}{6}$) والنقطة التي احداثياها (-٢ $\sqrt{2}$ ، $\frac{\pi}{4}$) هي

نفسها النقطة التي احداثياها (٢ $\sqrt{2}$ ، $\frac{\pi}{4}$) ، وهكذا . واذا تركنا θ

تتغير خلال مجموعة الاعداد الحقيقية ج فسنحصل على نفس النقط مرة بعد
الآخرى بسبب دورية اقتران الجيب .

مثال ٢ : ارسم مخططا لمنحنى المعادلة $r = 2 + 2 \cos \theta$

الحل : يتناقص اقتران جيب التمام من ١ الى -١ عندما تتغير θ من ٠ الى π
وهكذا فان رتناقص من ٤ الى الصفر في هذه الفترة للمتغير θ . ونرى في
الجدول التالي بعض الحلول للمعادلة المعطاة :

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r	٣	٢ $\sqrt{2}$	٢	١	٠	٢	٢ $\sqrt{2}$	٣

وعندما تزداد θ من π الى 2π تتغير جتا θ من -١ الى ١ وهكذا
تزداد ر من صفر الى ٤ . وبوضع النقط ووصلها بمنحنى ممد نحصل على
المخطط المبين بالشكل ١٣ - ١٠ ، حيث استخدمنا ورق رسم بياني خاص
بالاحداثيات القطبية تخرج فيها الاشعة من و بزوايا مختلفة وفيها مجموعة دوائر
مركزها نقطة الأصل و يسمى هذا المنحنى بالمنحنى القلبي (Cardioid)

مثال ٣ : ارسم مخططا لمنحنى المعادلة $r = 2 \cos \theta$ ، $\theta < \pi$.

الحل : بدل وضع جدول بالحلول لنناقش المسألة كما يلي : اذا زادت θ من صفر

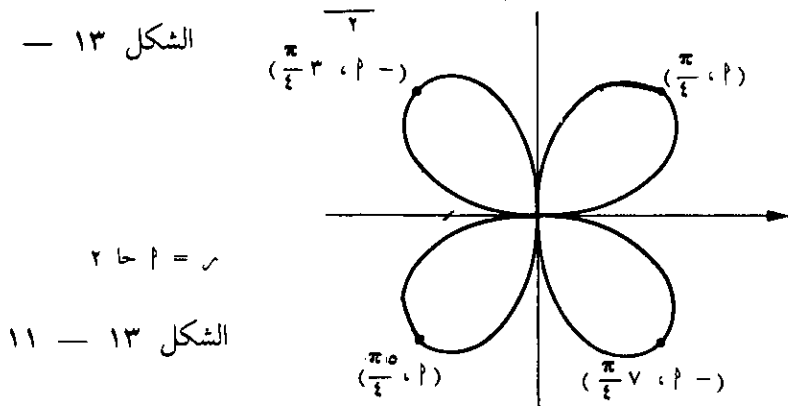
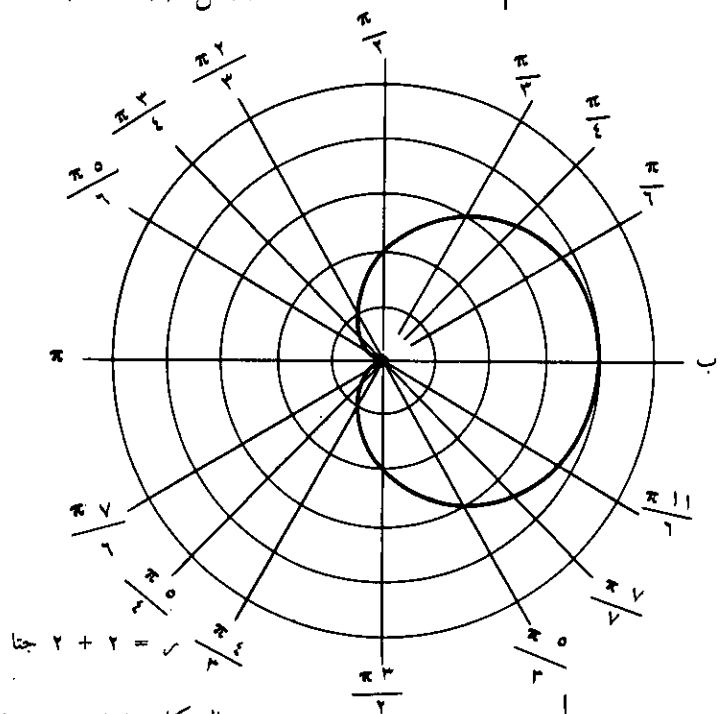
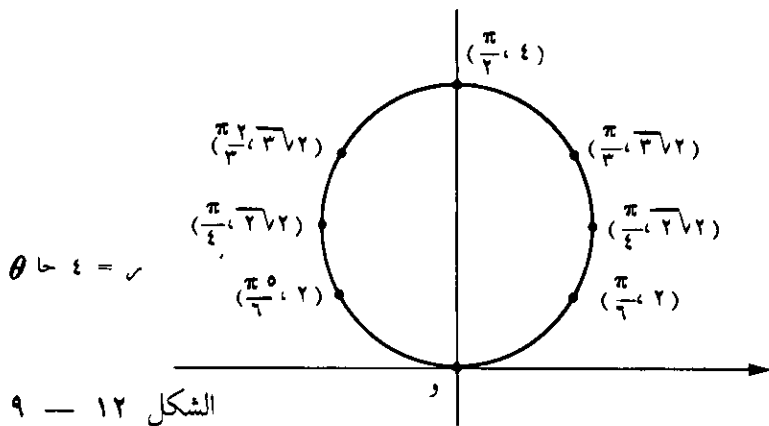
الى $\frac{\pi}{2}$ فان $2 \cos \theta$ تزداد من صفر الى $\frac{\pi}{2}$ وهكذا فان جتا θ يزداد

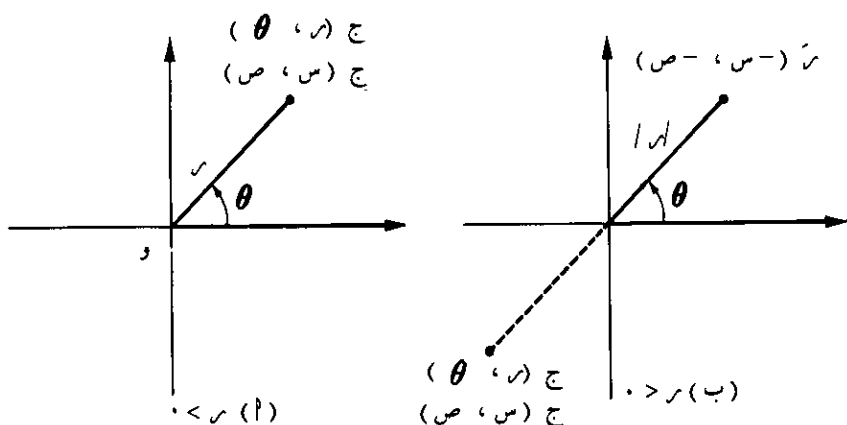
من صفر الى ١ ، والنتيجة ان ر يزداد من صفر الى $\frac{\pi}{2}$ في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

فاذا زادت θ من $\frac{\pi}{4}$ الى $\frac{\pi}{2}$ فان θ تزداد من $\frac{\pi}{2}$ الى π وبالنتيجة ينقص الطول r من $\frac{1}{2}$ الى صفر في الفترة $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ والنقط المناظرة على المنحنى تمثل عروة كما هو موضح في الشكل ١٣ - ١١. وسنترك للقاريء أن يثبت انه عندما تزداد θ من $\frac{\pi}{2}$ الى π فاننا نحصل على عروة مماثلة تحت العروة الاولى. لاحظ انه لهذا المجال $\pi > \theta > \frac{\pi}{2}$ وهكذا فان جا θ سالبة. ونحصل على عرى مماثلة لكل من الفترات $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$ ، $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ وفي الشكل ١٣ - ١١ رسمنا فقط النقط على المنحنى التي عندها تكون قيم r العددية أكبر ما يمكن. ويسمى هذا المنحنى وردة رباعية (أي ذات اربع ورقات).

وينتج من المعادلات القطبية منحنيات اخرى مهمة، بعضها مضمن في التمارين القادمة في نهاية هذا الباب. وللاحداثيات القطبية فائدة كبرى في التطبيقات التي تتضمن دوائر مراكزها في نقطة الاصل، أو مستقيمات مارة بنقطة الاصل، لان المعادلات التي لها هذه المنحنيات يمكن كتابتها بالصورة البسيطة $r = \theta$ أو $\theta = \text{ث حيث ث ثابت}$ (اثبت هذه الحقيقة). لنضع الآن نظامين للاحداثيات على مستوى واحد وليكن الاول هو نظام الاحداثيات الديكارتية والثاني نظام الاحداثيات القطبية، بحيث ينطبق محور s الموجب على المحور القطبي. وهكذا يمكن تعيين احداثيات ديكارتية (s, v) واحداثيات قطبية (r, θ) لكل نقطة j في المستوى. انه ليس من الصعب استنباط صيغ تعيين العلاقة التي تربط هذين النظامين الاحداثيين. فاذا كانت $r < 0$ فاننا نحصل على حالة شبيهة بتلك الموضحة في الشكل ١٣ - ١٢ (أ) واذا كانت $r > 0$ فاننا نحصل على الحالة الموضحة في الشكل ١٣ - ١٢ (ب)، حيث رسمنا ايضا النقطة j التي احداثياتها القطبيتان (r, θ) ، واحداثياتها الديكارتيتان $(-s, -v)$. ومع اننا في الشكل اعتبرنا θ زاوية حادة، فان المناقشة التي تلي ذلك تصح لجميع الزوايا. واذا كانت $r < 0$ في الشكل ١٣ - ١٢ (أ) فان

$$(13-6) \quad s = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta$$





الشكل ١٣ - ١٢

وعندما تكون $r > 0$ فإن $|r| = -r$ ومن الشكل ١٣ - ١٢ (ب) نجد

أن

$$\text{جنا } \theta = \frac{-s}{|r|} = \frac{-s}{-r} = \frac{s}{r}$$

$$\text{جا } \theta = \frac{-v}{|r|} = \frac{-v}{-r} = \frac{v}{r}$$

وبالضرب في r نحصل على (١٣ - ٦) . وهكذا فإن هذه الصيغة صحيحة عندما تكون r موجبة أو سالبة . وعندما تكون $r = 0$ فإن النقطة هي القطب ونجد أن (١٣ - ٦) تصح أيضا ، والصيغتان التاليتان من نتائج هذا النقاش :

$$(١٣ - ٧) \quad \text{ظا } \theta = \frac{v}{s}, \quad r^2 = s^2 + v^2$$

وبإمكاننا استخدام (١٣ - ٦) ، (١٣ - ٧) للتغيير من نظام للاحداثيات الى نظام آخر . والفائدة الأكثر أهمية هي في تحويل معادلة قطبية الى معادلة ديكارتية (في s, v) والعكس . وهذا موضح في الامثلة التالية :

مثال ٤ : أوجد معادلة في s, v لها نفس منحنى $r = 4 \text{ جا } \theta$.
الحل : ناقشنا المعادلة المعطاة في المثال (١) ومن المناسب ضرب طرفي المعادلة في r لنحصل على $r^2 = 4 \text{ رجا } \theta$. وتطبيق (١٣ - ٦) ، (١٣ - ٧) يعطينا

س^٢ + ص^٢ = ٤ ص ، والمعادلة الاخيرة مكافئة للمعادلة س^٢ +
(ص - ٢) = ٤ التي تمثل دائرة نصف قطرها ٢ ومركزها (٠ ، ٢) في
المستوى س ص .

مثال ٥ : أوجد المعادلة القطبية العامة للخط المستقيم .

الحل : نعلم ان كل خط مستقيم في مستوى س ص هو منحنى المعادلة الخطية P س +
ب ص + ج = ٠ ، وبالتعويض بدل س ، ص من (١٣ - ٦) نحصل على
المعادلة القطبية .
ر (P جتا θ + ب جا θ) + ج = صفرأ .

وقد يكون منحنى المعادلة القطبية متماثلاً بالنسبة لمحور السينات أو لمحور
الصادات أو لنقطة الأصل . وسنترك للقارئ أن يثبت انه اذا لم يغير التعويض
المشار اليه في الجدول التالي مجموعة الحل للمعادلة القطبية فان المنحنى له التماثل
المعطى :

التماثل	التعويض
محور س	- θ بدل θ
نقطة الاصل	- ر بدل ر
محور ص	$\pi - \theta$ بدل θ

ولتوضيح ذلك ، بما أن جتا ($\theta -$) = جتا θ فان منحنى المعادلة في
المثال (٢) (انظر الشكل ١٣ - ١٠) متماثل حول محور س ، وبما أن جا
($\pi - \theta$) = جا θ فان المنحنى في المثال (١) متماثل حول محور ص .
والمنحنى في المثال (٣) متماثل بالنسبة للمحورين ولنقطة الاصل . ويمكن ذكر
اختبارات اخرى للتماثل ولكن اختبار التماثلات السابقة من اسهلها في التطبيق .

تمارين :

ارسم مخططات لمنحنى المعادلات المعطاة في التمارين ١ - ١٨ .

(١) ر = ٥٠

$$\frac{\pi}{4} = \theta \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{6} = \theta \quad (3)$$

$$r = 2 \quad (4)$$

$$r = 4 \text{ جتا } \theta \quad (5)$$

$$r = 2 - \theta \quad (6)$$

$$r = 4(1 - \theta) \quad (\text{منحنى قلبي}) \text{ (Cardioid)} \quad (7)$$

$$r = 1 + 2 \text{ جتا } \theta \quad (\text{ليماكون}) \text{ (Limacon)} \quad (8)$$

$$r = 3 \text{ جتا } \theta \quad (\text{وردة ذات ثلاث ورقات}) \quad (9)$$

$$r = 4 \text{ جتا } \theta \quad (\text{وردة ذات عشر ورقات}) \quad (10)$$

$$r = 2 \text{ جتا } \theta \quad (\text{لمنسكيت}) \text{ (Limniscate)} \quad (11)$$

$$r = 2 \text{ جتا } \left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{منحنى قلبي}) \quad (12)$$

$$r = 4 \text{ قتا } \theta \quad (13)$$

$$r = 3 - \theta \quad (14)$$

$$r = 2 - \theta \quad (\text{الليماكون}) \text{ (Limacon)} \quad (15)$$

$$r = 2 + 2 \text{ قتا } \theta \quad (\text{الكونكويد}) \text{ (Conchoid)} \quad (16)$$

$$r = 2\theta, \theta < \dots \quad (\text{حلزوني}) \text{ (Spiral)} \quad (17)$$

$$r = \theta, \theta < 1 \quad (\text{حلزوني}) \text{ (Spiral)} \quad (18)$$

في التمارين ١٩ - ٢٦ أوجد المعادلة القطبية التي لها نفس منحنى المعادلة المعطاة :

$$r = 3 \quad (19)$$

$$r = 2 \quad (20)$$

$$r = 2 + 2 \text{ ص} \quad (21)$$

$$r = 8 \text{ ص} \quad (22)$$

$$r = 6 \quad (23)$$

- (٢٤) ص = ٦ س .
 (٢٥) س^٢ - ص^٢ = ١٦ .
 (٢٦) ٩ س^٢ + ٤ ص^٢ = ٣٦ .
 في التمارين ٢٧ - ٣٤ أوجد المعادلة في س ، ص التي لها نفس منحنى المعادلة القطبية المعطاة :

- (٢٧) ر جتا θ = ٥ .
 (٢٨) ر جا θ = ٢ - .
 (٢٩) ر - ٦ جا θ = ٥ .
 (٣٠) ر = ٢ (١ + جتا θ) .
 (٣١) $\rho = r$
 (٣٢) $\frac{\pi}{4} = \theta$
 (٣٣) ر ظا θ = ٤
 (٣٤) ر = ٤ قا θ .
 (٣٥) اذا كانت ج_١ (ρ ، θ) ، ج_٢ (ρ ، θ) نقطتين في المستوى ر θ .
 استخدم قانون جيب التمام للبرهنة على أن
 ل (ج_١ ، ج_٢) = $\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2 \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$.
 (٣٦) اثبت أن منحنى المعادلة القطبية ر = ρ جا θ + ب جتا θ هو دائرة ثم جد مركزها ونصف قطرها .

٤ — المعادلات القطبية للقطوع المخروطية :

في النظرية التالية نجد طريقة اخرى لوصف القطوع المخروطية .

(١٣-٨) نظرية : لنفرض أن ب نقطة ثابتة ول مستقيم ثابت في مستوى ما . ان

بمجموعة النقط ج في المستوى التي تحقق الشرط $\frac{ل(ج ، ب)}{ل(ج ، ط)} = \text{ثابتا}$

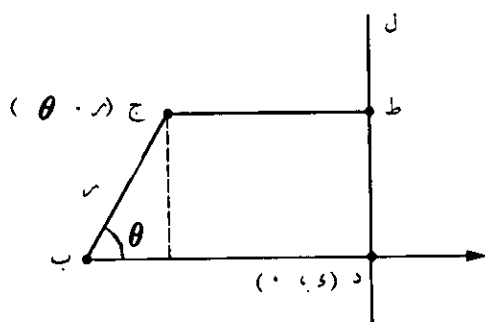
موجبا ، خ ، حيث ل (ج ، ط) هي المسافة بين ج والمستقيم ل ، هي قطع مخروطي . وزيادة على ذلك فان القطع مكافئ اذا كانت خ = ١ ، وناقص اذا كانت ٠ < خ < ١ ، وزائد اذا كانت خ > ١ .

يسمى الثابت x الاختلاف المركزي (eccentricity) للقطع .
 وسنرى ان النقطة b هي بؤرة للقطع . ويسمى المستقيم l دليل القطع
 (directrix) وسنبرهن (١٣-٨) اذا كانت $x \geq 1$ ونترك
 الحالة الثالثة $x < 1$. كتمرين للقاريء .

اذا كانت $x = 1$ في (١٣-٨) فان $l(ج، ب) = l(ج، ط)$
 واعتمادا على (٧-١) فاننا نحصل على قطع مكافئ بؤرته b ودليله l .
 واذا كان $x > 1$ فن المفيد أن نضع نظاما للاحداثيات القطبية في
 المستوى حيث b هي القطب والمستقيم l عمودي على المحور القطبي في النقطة
 $d(0، s)$ ، حيث $s < 0$. فاذا كانت $ج(ر، \theta)$ نقطة في المستوى
 بحيث $x = \frac{l(ج، ب)}{l(ج، ط)}$ ، فاننا نجد ، كما في الشكل ١٣-١٣ ، أن

$ج$ تقع الى اليسار من l . ولتكن $ج$ هي مسقط النقطة $ج$ على
 المحور القطبي . وبما أن $l(ج، ب) = r$ ، $l(ج، ط) =$
 $b - s - b = -s - r \cos \theta$ ، فينتج أن $ج$ تحقق الشرط في (١٣-٨)
 فقط عندما

$$x = \frac{r}{-s - r \cos \theta}$$



الشكل ١٣-١٣

أو بصيغة اخرى مكافئة :

$$(٩-١٣) \quad r = x - x \cos \theta$$

ويحل المعادلة للمتغير r نجد أن

$$\frac{u}{1 + x \text{ جتا } \theta} = r \quad (13-10)$$

وهذه هي المعادلة القطبية للمنحنى ، ونفس المعادلة نحصل عليها عندما تكون $x = 1$ ، ولكن في هذه الحالة لا تكون هنالك نقطة (r, θ) على المنحنى اذا كان $1 + \text{جتا } \theta = 0$ والمعادلة الديكارتية المكافئة للمعادلة $(13-9)$ هي :

$$\begin{aligned} \sqrt{s^2 + v^2} &= u - x \text{ س} \\ \text{فبترييع الطرفين وترتيب الحدود نجد أن} \\ (1-x)^2 (s^2 + v^2) &= s^2 + v^2 \\ \text{وبإكمال المربع في المعادلة السابقة وتبسيطها نحصل على} \\ \frac{u^2}{(1-x)^2} &= \frac{v^2}{1-x} + s^2 \left(\frac{1}{1-x} + 1 \right) \\ \text{ثم بقسمة الطرفين على } \frac{u^2}{(1-x)^2} \text{ نجد أن} \\ 1 &= \frac{(v - k)^2}{b^2} + \frac{(s - t)^2}{p^2} \end{aligned}$$

(انظر ٧-٢٢) والنتيجة ان المنحنى هو قطع ناقص مركزه في النقطة

$$\left(0, \frac{u - x}{1 - x} \right) \text{ على محور السينات ، حيث}$$

$$\frac{x}{1-x} = b \quad \frac{u - x}{1-x} = p$$

$$\text{ومن (٧-٩) جـ}^2 = 2^2 - 2^2 = \frac{2^2 \text{خ}^2}{2(2^2 \text{خ}^2 - 1)}$$

$$\text{ومنه جـ} = \frac{2^2 \text{خ}^2}{2^2 \text{خ}^2 - 1} \text{ وهذا يثبت ان ب بؤرة للقطع الناقص ، وينتج أن}$$

$$\text{خ} = \frac{2^2}{2^2 - 1} . \text{ ويمكن اعطاء برهان مماثل عندما تكون } \text{خ} < 1 .$$

وبالعكس بإمكاننا ان نثبت أن كل قطع مخروطي ليس دائرة يمكن التعبير عنه بالعلاقة (١٣-٨) ، وهذا يعطينا صورة للقطع المخروطي مكافئة لتلك التي نوقشت في الفصل السابع . وبما أن (٣-٨) تتضمن الانواع الثلاثة من القطوع المخروطية ، فانها تتخذ احيانا تعريفا للقطوع المخروطية

واذا استخدمنا لنقطة تقاطع المستقيم ل مع المحور القطبي النقطة (٠ ، ٥) الى اليسار من ب بدل د (٥ ، ٠) تنتج معادلة شبيهة بمعادلة (١٣-١٠) ولكن تكون اشارتها سالبة بدلا من اشارة موجبة . واذا اخذنا المستقيم ل موازيا للمحور القطبي خلال احدى النقطتين (٥ ، $\frac{\pi}{4}$) ، (٥ ، $\frac{\pi^3}{4}$) فان المعادلات المناظرة تحتوي جا θ بدلا من جتا θ . وبرهان هذه الحقائق متروك للقاريء . ولتلخيص ما سبق فان المعادلة القطبية التي لها احدى الصور

$$(11-13) \quad r = \frac{2^2 \text{خ}^2}{2^2 \text{خ}^2 - 1} , \quad r = \frac{2^2 \text{خ}^2}{2^2 \text{خ}^2 - 1} \text{ جتا } \theta$$

هي قطع مخروطي ، وهذا القطع يكون مكافئا اذا كانت $\text{خ} = 1$ ، وناقصا اذا كانت $0 < \text{خ} < 1$ ، وزائدا اذا كانت $\text{خ} < 1$.

مثال ١ : صف وارسم مخططا لمنحنى المعادلة

$$\frac{10}{3 + 2 \text{ جتا } \theta} = r$$

الحل : بقسمة كل من البسط والمقام على ٣ نحصل على

$$\frac{3/10}{1 + (3/2) \text{ جتا } \theta} = r$$

والتي لها احدى الصور (١٣ - ١١) حيث $x = \frac{2}{3}$ ، وهكذا فان المنحنى قطع ناقص بؤرته ب في القطب ومحوره الأكبر على المحور القطبي ويمكن ايجاد نقطتي نهاية المحور بوضع $\theta = 0, \pi$ وهذا يعطينا ر (٢ ، ٠) ، ر (١٠ ، π) ، وهكذا فان $2 = \rho = \rho(r, r) = 12$ أو $6 = \rho$. ومركز القطع الناقص هو منتصف القطعة المستقيمة ر ر أي (٤ ، π) . وباستخدام الحقيقة $x = \frac{2}{3}$ نجد أن جـ = $\rho = x = 6 = \frac{2}{3} \times 9 = 6$. وهكذا فان $2 = \rho = 2 - 2 = 36 - 16 = 20$ أي نصف القطر الاصغري ساوي ٢٠ . وتشاهد مخططا للمنحنى في الشكل ١٣ - ١٤ ، حيث وضعنا نظاما للاحداثيات الديكارتية فوق الاحداثيات القطبية .

مثال ٢ : صف وارسم مخططا لمنحنى المعادلة .

$$\frac{10}{2 + 3 \text{ جا } \theta} = r$$

الحل : للتعبير عن المعادلة باحدى الصور (١٣ - ١١) نقسم كلاً من البسط والمقام على ٢ فنحصل على :

$$\frac{5}{1 + (3/2) \text{ جا } \theta} = r$$

وهكذا فان $x = (3/2)$ والمنحنى قطع زائد احدى بؤرتيه في القطب ، ووجود جا θ يدلنا على أن محور القطع عمودي على المحور القطبي . ولايجاد

رأس القطع نضع جـ $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3}{2}$ في المعادلة المعطاة وهذا يعطينا

النقطتين ر $(\frac{\pi}{2}, 2)$ ، ر $(-\frac{\pi}{2}, 10)$ وهكذا فان

$2 = \rho = \rho(r, r) = 8$ أو $4 = \rho$ ويمكن استخدام النقطتين $(0, 6)$ ،

$(\pi, 6)$ على المنحنى للحصول على صورة تقريبية للفرع الاسفل للقطع

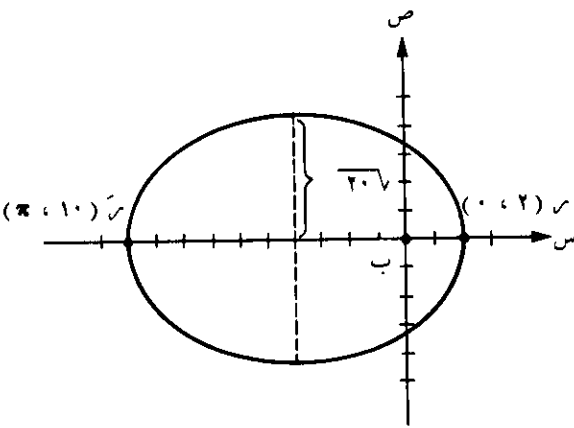
الزائد. ويمكن الحصول على الفرع الاعلى بالتماثل كما هو موضح في الشكل

١٣-١٥. وإذا شئنا دقة أكثر أو معلومات اضافية يمكن حساب

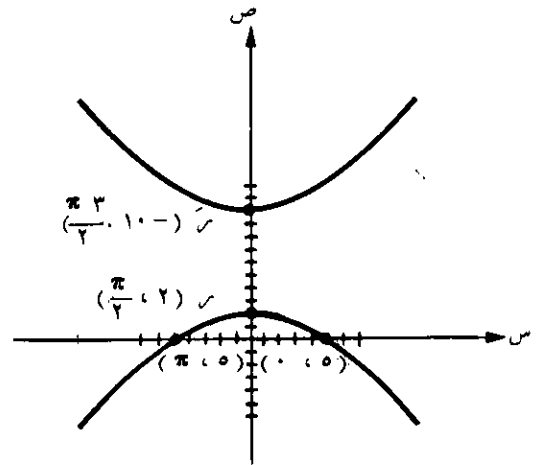
$$جـ = \rho = \rho = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

$$جـ = \rho = 2 = 36 - 16 = 20$$

ويمكن معرفة خطوط الاقتراب بالطريقة التقليدية .



الشكل ١٣ - ١٤ $\rho = \frac{10}{2+3 \cos \theta}$



الشكل ١٣ - ١٥ $\rho = \frac{10}{2+3 \cos \theta}$

تمارين :

في كل من التمارين ١-١٠ عرف وارسم منحنى المعادلة المعطاة :

$$(1) \quad \rho = \frac{12}{2+6 \cos \theta}$$

$$\frac{12}{\theta \text{ جا } 2 - 6} = r \quad (2)$$

$$\frac{12}{\theta \text{ جتا } 6 - 2} = r \quad (3)$$

$$\frac{12}{\theta \text{ جتا } 6 + 2} = r \quad (4)$$

$$\frac{3}{\theta \text{ جا } 2 + 2} = r \quad (5)$$

$$\frac{3}{\theta \text{ جا } 2 - 2} = r \quad (6)$$

$$\frac{4}{\theta \text{ جتا } 2 - 2} = r \quad (7)$$

$$\frac{4 \text{ قا } \theta}{1 - \theta \text{ قا } 2} = r \quad (8)$$

$$\frac{6 \text{ قتا } \theta}{3 + \theta \text{ قتا } 2} = r \quad (9)$$

$$(10) \quad r = \theta \text{ قتا } \theta - \theta \text{ ظتا } \theta$$

١١-٢٠ جد معادلات ديكارتية للمنحنيات في التمارين ١-١٠ .
في التمارين ٢١-٢٦ عبر عن المعادلة المعطاة في احدى الصور (١٣-١١)
ثم جد الاختلاف المركزي ومعادلة للدليل .

$$(٢١) \quad \text{ص}^2 = ٤ - ٤ \text{ س}.$$

$$(٢٢) \quad \text{س}^2 = ٢ - ١ \text{ ص}.$$

$$(٢٣) \quad ٣ \text{ ص}^2 - ١٦ \text{ ص} - \text{س}^2 + ١٦ = ٠$$

$$(٢٤) \quad ٥ \text{ س}^2 + ٩ \text{ ص}^2 = ٣٢ \text{ س} + ٦٤.$$

$$(٢٥) \quad ٨ \text{ س}^2 + ٩ \text{ ص}^2 + ٤ \text{ س} = ٤.$$

$$(٢٦) \quad ٤ \text{ س}^2 - ٥ \text{ ص}^2 + ٣٦ \text{ ص} - ٣٦ = ٠$$

في كل من التمارين ٢٧-٣٢ أوجد المعادلة القطبية للقطع الذي يؤثره في القطب المعطي اختلافه المركزي ومعادلة دليله .

$$(٢٧) \quad \text{خ} = \frac{1}{3}, \text{ ر} = ٢ \text{ قتا } \theta.$$

$$(٢٨) \quad \text{خ} = ٢, ٥, \text{ ر} = ٤ \text{ قتا } \theta.$$

$$(٢٩) \quad \text{خ} = ٤, \text{ ر} = -٣ \text{ قتا } \theta.$$

$$(٣٠) \quad \text{خ} = ٣, \text{ ر} = -٤ \text{ قتا } \theta.$$

$$(٣١) \quad \text{خ} = ١, \text{ ر جتا } \theta = ٥.$$

$$(٣٢) \quad \text{خ} = ١, \text{ ر جا } \theta = -٢.$$

$$(٣٣) \quad \text{جد معادلة قطبية للقطع المكافئ الذي يؤثره في القطب ورأسه } (٤, \frac{\pi}{2}).$$

(٣٤) أوجد المعادلة القطبية للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي يساوي ٣ / ٢ واحد رأسية (٤, $\pi / ٢$) واحدى يؤثره في القطب .

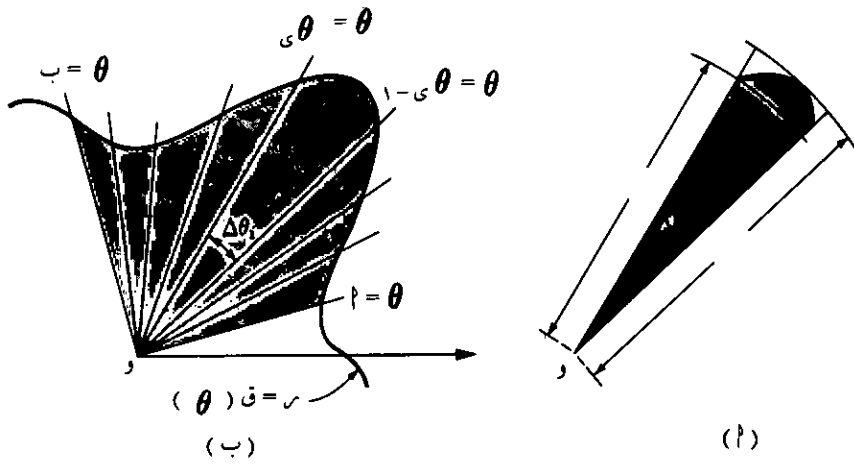
$$(٣٥) \quad \text{برهن } (١٣-٨) \text{ للحالة } \text{خ} < ١.$$

$$(٣٦) \quad \text{اشتق الصيغتين } \text{ر} = \frac{\text{خ}^2}{1 \pm \text{خ جا } \theta} \text{ في } (١١-١٣).$$

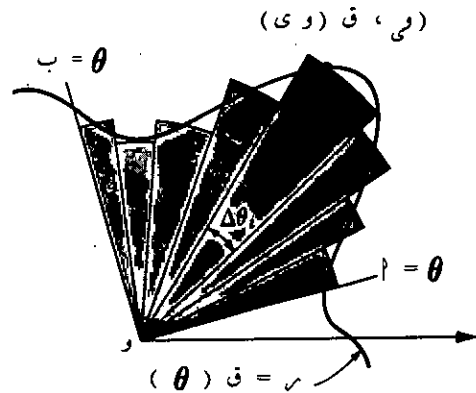
٥ — المساحات باستخدام الاحداثيات القطبية :

يمكن إيجاد مساحات بعض المناطق المحدودة بمنحنيات معطاة بمعادلات قطبية وذلك باستخدام القطوع الدائرية وبطريقة شبيهة بطريقة الاحداثيات الديكارتية التي استخدمت في الفصل الخامس : لنفرض أن ط منطقة في مستوى ر θ محدودة بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $\theta = p$, $\theta = b$ بالمرين بالنقطة و، حيث

ومن المناسب اعتبار (١٣-١٣) بأنها العملية التي تبدأ بمساحة قطاع دائري نموذجي من النوع الموضح في الشكل ١٣-١٧ ثم نمسح المنطقة ط بتغيير θ من ρ الى θ في حين تقترب كل θ من الصفر.



الشكل ١٣ - ١٦



مثال ١: جد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى القلبي $r = 2 + 2 \cos \theta$

الحل: (مخطط المنحنى مرسوم في الشكل ١٣-١٠). وسنجد مساحة النصف العلوي للمنطقة ثم نضاعف النتيجة. والاقتران Q في (١٣-١٣) يعطى بالقاعدة $Q(\theta) = 2 + 2 \cos \theta$. ولايجاد ρ ، θ نلاحظ القطاعات الدائرية التي ناقشناها سابقا. سيمسح النصف العلوي من المنطقة المحدودة للمنحنى القلبي عندما تتغير θ من صفر الى π . والنتيجة $\rho = 0$ ، $\theta = \pi$

$$\text{سـ} = 2 \times \frac{1}{4} \left[\pi (2 + 2 \text{ جتا } \theta) \right] \text{ و } \theta$$

$$= \left[\pi (4 + 8 \text{ جتا } \theta + 4 \text{ جتا }^2 \theta) \right] \text{ و } \theta$$

$$\text{وباستخدام المتطابقة جتا }^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \text{جتا } 2 \theta)$$

$$\text{سـ} = \left[\pi (6 + 8 \text{ جتا } \theta + 2 \text{ جتا } 2 \theta) \right] \text{ و } \theta$$

$$= \pi [6 + 8 \text{ جتا } \theta + 2 \text{ جتا } 2 \theta] = \pi 6$$

ويمكن إيجاد المساحة أيضا باستخدام (١٣-١٣) حيث $p = 0$ ، $b = 2\pi$.

لنناقش الآن اقرانين متصلين q ، f بحيث أن $q(\theta) \leq f(\theta)$ لجميع θ في الفترة $[p, b]$. ولتكن T هي المنطقة المحدودة بمنحنيات $r = q(\theta)$ ، $r = f(\theta)$ ، $p = \theta$ ، $b = \theta$ ، كما هو موضح في الجزء المظلل تظليلاً خفيفاً في الشكل ١٣-١٨. فيتضح أنه يمكن إيجاد المساحة S للمنطقة T بطرح مساحتي منطقتين من النوع الذي عالجناه سابقاً. وهكذا يكون

$$S = \frac{1}{4} \left[\int_p^b q(\theta)^2 d\theta \right] - \frac{1}{4} \left[\int_p^b f(\theta)^2 d\theta \right] \text{ أو}$$

$$(13-14) \quad S = \frac{1}{4} \left[\int_p^b (q(\theta)^2 - f(\theta)^2) d\theta \right]$$

ويمكن التعبير عن التكامل الأخير كنهاية لمجموع كما يلي :

$$(13-15) \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4} (q(\theta_1)^2 - f(\theta_1)^2) \Delta \theta + \dots + (q(\theta_n)^2 - f(\theta_n)^2) \Delta \theta \right] \text{ ويمكن}$$

التفكير بالمجموع (١٣-١٥) بأنه العملية التي تبدأ بمساحة منطقة

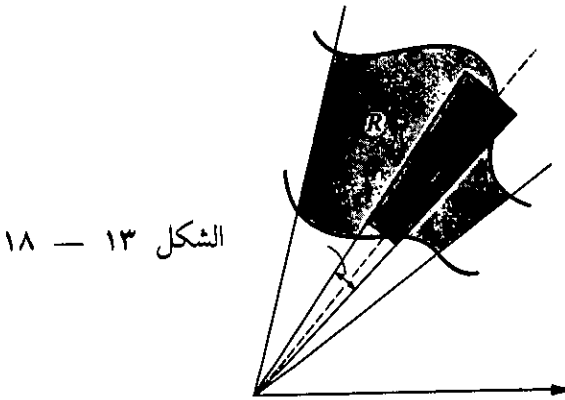
موضحة في الجزء المظلل داكنا في الشكل ١٣ - ١٨ ثم نمسح ط بأن نجعل θ تتغير من $\frac{\pi}{3}$ الى $\frac{2\pi}{3}$.

مثال ٢ : جد مساحة المنطقة التي داخل المنحنى القلبي $r = 2 + 2 \cos \theta$ جتا θ وخارج الدائرة $r = 3$.

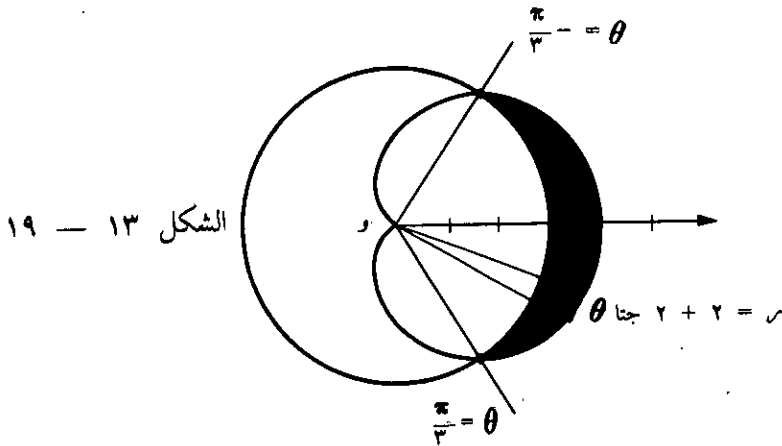
الحل : المنطقة مخططة في الشكل (١٣ - ١٩) ومعها قطاع قطبي للمساحة من النوع الذي ناقشناه في المجموع (١٣ - ١٥) : وبما أن المنحنيين يتقاطعان عند

النقطتين $(3, \frac{\pi}{3})$ ، $(3, \frac{2\pi}{3})$ ، فإن المنطقة ستغطي بالقطاع المشار اليه

عندما تتغير θ من $\frac{\pi}{3}$ الى $\frac{2\pi}{3}$. وباستخدام (١٣ - ١٤) ينتج :



الشكل ١٣ - ١٨



الشكل ١٣ - ١٩

$$\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right] d\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right] d\theta = \frac{\pi}{3}$$

وكما في المثال (١) يمكن إيجاد قيمة التكامل بجعل $\frac{1}{\sqrt{3}} = \theta$ (١ + جتا θ) ويترك للقارئ ان يثبت ان $s = 9 - (2/\sqrt{3})\pi$

تمارين :

في كل من التمارين ١ - ٨ ، جد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنيات المعادلات

المعطاة :

$$(١) \quad r = 6 - 6 \cos \theta$$

$$(٢) \quad r = 3 + 2 \cos \theta$$

$$(٣) \quad r = \frac{4}{1 - \cos \theta}, \quad \frac{\pi}{4} = \theta$$

$$(٤) \quad r = 2 \cos \theta, \quad \frac{\pi}{6} = \theta, \quad \frac{\pi}{3} = \theta$$

$$(٥) \quad r = 1 + \cos \theta, \quad 0 = \theta, \quad \frac{\pi}{4} = \theta$$

$$(٦) \quad r = 2 \cos \theta, \quad \frac{\pi}{6} = \theta, \quad \frac{\pi}{4} = \theta$$

$$(٧) \quad r = (1 + \cos \theta), \quad 2 = \theta, \quad \frac{\pi}{3} = \theta$$

$$(٨) \quad r = 3 \text{ جا } \theta^2, \theta = 0, \frac{\pi}{4} = \theta$$

(٩) جد مساحة المنطقة

$$\text{ط} = \{ \theta, r \} : (\theta, r) : \frac{\pi}{2} \geq \theta \geq 0, r \geq 0$$

(١٠) جد مساحة المنطقة :

$$\text{ط} = \{ \theta, r \} : (\theta, r) : \pi \geq \theta \geq 0, r \geq 0$$

في التمارين ١١ - ١٤ جد مساحة المنطقة المحدودة بعروة من منحنى المعادلة المعطاة :

$$(١١) \quad r = 2 \text{ جا } \theta, \theta < \pi$$

$$(١٢) \quad r = \pi \text{ جا } \theta, \theta < \pi$$

$$(١٣) \quad r = \pi \text{ جا } \theta, \theta < \pi$$

$$(١٤) \quad r = \pi \text{ جا } \theta, \theta < \pi$$

في التمارين ١٥ - ١٨ جد مساحة المنطقة الواقعة خارج منحنى المعادلة الاولى وداخل منحنى المعادلة الثانية :

$$(١٥) \quad r = 2 + 2 \text{ جا } \theta, r = 3$$

$$(١٦) \quad r = 2, r = 4 \text{ جا } \theta$$

$$(١٧) \quad r = 2, r = 8 \text{ جا } \theta$$

$$(١٨) \quad r = 1 - \theta \text{ جا } \theta, r = 3 \text{ جا } \theta$$

في التمرينين ١٩ ، ٢٠ جد مساحة المنطقة الواقعة داخل منحنى المعادلتين المعطاتين .

$$(١٩) \quad r = \sqrt[3]{\theta} \text{ جا } \theta, r = \theta$$

$$(٢٠) \quad r = 2(1 + \theta \text{ جا } \theta), r = 1$$

٦ — أطوال المنحنيات :

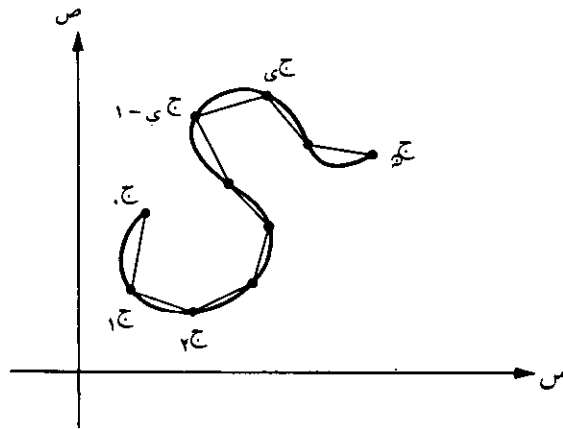
إذا اخذنا منحنى المعادلة ص = ق (س) ، حيث ق اقتران

ممهّد على $[p, b]$ ، فإن طول قوس المنحنى يمكن إيجاده باستخدام الصيغة (٣٢-٦) وإذا أعطي المنحنى بمعادلات وسيطية أو بمعادلة قطبية ، فإن (٦-٣٢) لا يمكن بالضرورة تطبيقها . وفي هذا البند سنستخرج صيغة يمكن استخدامها لمنحنيات أعم .

لنفرض ان المنحنى ج معطى بالمعادلات الوسيطة :

$$س = ق (ت) ، ص = ف (ت) .$$

حيث ق ، ف متصلان على الفترة $[p, b]$. ولنفرض ان ج لا يقطع نفسه أي ان قيا مختلفة بين p, b ، ب تعين نقطاً مختلفة على ج . لنفرض تجزئة ت للفترة $[p, b]$ معطاة بالنقط $p = ت_0 < ت_1 < \dots < ت_n = ب$ فإن $\Delta ت_i = ت_i - ت_{i-1}$ ، ولتكن $ج_i = (ق (ت_i) ، ف (ت_i))$ نقطة على المنحنى ج معينة بالنقطة $ت_i$. فاذا كان ل (ج_ج) هو طول القطعة المستقيمة ج_ج - ج_{١-ج} ، فإن الطول ل_ج للخط المنكسر الظاهر في الشكل ١٣-٢٠ يساوي



الشكل ١٣ - ٢٠

$$ل = \sum_{i=1}^n ل (ج_i ، ج_{i-1})$$

وبطريقة شبيهة بالتعريف (٥-١٥) نكتب

$$(١٣-١٦) ل = نها ل ت$$

$$|| ت || - .$$

ونسمي ل طول القوس من ج. الى ج. اذا كان لكل $\delta > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $|ل - ل| < \delta$ لاي تجزئة ت بحيث $||ت|| < \delta$ وباستخدام صيغة المسافة .

$$(17-13) \quad ل(ج-ي_1, ج-ي_2) = \sqrt{[ق(ت-ي_1) - ق(ت-ي_2)]^2 + [ف(ت-ي_1) - ف(ت-ي_2)]^2}$$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة (4-15) يوجد عدنان $وي$ ، $زي$ في الفترة $(ت-ي_1, ت-ي_2)$ بحيث أن

$$ق(ت-ي_1) - ق(ت-ي_2) = ق'(وي) \Delta(ت-ي_1, ت-ي_2)$$

$$ف(ت-ي_1) - ف(ت-ي_2) = ف'(زي) \Delta(ت-ي_1, ت-ي_2)$$

وبالتعويض في (17-13) وحذف العامل المشترك $\Delta(ت-ي_1, ت-ي_2)$ من داخل الجذر نحصل على

$$ل(ج-ي_1, ج-ي_2) = \sqrt{[ق'(وي)]^2 + [ف'(زي)]^2} \Delta(ت-ي_1, ت-ي_2)$$

وباستخدام (13-16) ينتج أن

$$(19-13) \quad ل = \lim_{||ت|| \rightarrow 0} \sqrt{[ق'(وي)]^2 + [ف'(زي)]^2} \Delta(ت-ي_1, ت-ي_2)$$

وذلك اذا وجدت النهاية .

واذا كانت $وي = زي$ لجميع $ي$ فان المجموع (13-19) هو مجموع ريمان

للاقتران ك المعرف بالقاعدة ك (ت) $\sqrt{[ق(ت)]^2 + [ف(ت)]^2}$.
 وإذا كان المنحنى ج ممهدا فان النهاية في (١٣ - ١٩) موجودة وطول منحنى
 ج من ج. الى جن يعطي بالصيغة

$$\left[\sqrt{[ق(ت)]^2 + [ف(ت)]^2} \right]_0^B = L \quad (٢٠ - ١٣)$$

ويمكن اثبات أن النهاية موجودة حتى ولو لم تكن $\lim_{ي \rightarrow ز} ي$ ، ولكن البرهان

يحتاج الى طرق متقدمة ولهذا حذف . ولتلخيص ما سبق ، فان الصيغة
 (٢٠ - ١٣) تعطينا طول المنحنى ج المعرف بمعادلات وسيطة وذلك اذا كان
 كل من ق ، ف اقترانا ممهدا على الفترة [٠ ، ب] ، كما أن المنحنى ج لا
 يقطع نفسه الا — احتمالا — في الحالة التي فيها ج (٠) = ج (ب) . ويمكن
 كتابة الصيغة (٢٠ - ٣٠) في صورة تفاضلية كالتالية :

$$\left[\sqrt{\left(\frac{د.ص}{د.ت} \right)^2 + \left(\frac{د.س}{د.ت} \right)^2} \right]_0^B = L \quad (٢١ - ١٣)$$

مثال ١ : أوجد طول قوس واحد للسيكلويد الذي معادلته الوسيطتان

$$س = ت - جات ، ص = ١ - جتا ت$$

الحل : المنحنى له الشكل الموضح في الشكل ١٣ - ٣ حيث نصف قطر الدائرة ٢
 يساوي الوحدة . ويمكن الحصول على قوس واحد عندما تتغيرت من صفر الى
 ٢ π . وبتطبيق (٢١ - ١٣) يكون :

$$\left[\sqrt{١ + (جات)^2} \right]_0^{2\pi} = L$$

وبما أن $جات^2 + ١ = ت$ فان الاقتران المكامل يصبح

$$\sqrt{2 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2 - 2\sqrt{2}} \text{ جتا } \theta$$

$$\text{وحيث أن جتا } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (جتا } \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ فإن } 2 - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} \text{ جتا } \frac{\pi}{4})$$

والنتيجة أن

$$\pi^2 \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \text{ جتا } \frac{\pi}{4} - 2 \right] = 0$$

$$0 = [1 - 2] \cdot 2 = 0$$

وإذا كان المنحنى ج هو بيان معادلة قطبية $r = c(\theta)$ حيث c ممهد على $[p, b]$. فباستخدام (١٣-٦) فإن المعادلات الوسيطة للمنحنى ج هي $s = c(\theta)$ جتا θ ، $v = c(\theta)$ صا θ

وهكذا نجد أن

$$s = \frac{c(\theta) \cos \theta}{\theta}$$

$$v = \frac{c(\theta) \sin \theta}{\theta}$$

وسنترك برهنة النتيجة التالية كتمرين

$$(13-22) \quad \frac{1}{\theta} [c(\theta) \cos \theta] + \frac{1}{\theta} [c(\theta) \sin \theta] = \frac{1}{\theta} \left(\frac{v}{\theta} \right) + \frac{1}{\theta} \left(\frac{s}{\theta} \right)$$

ويتبع من (١٣-٢١) ، باعتبار $\theta = t$ أن الطول ل للمنحنى ج من θ إلى $\theta = b$ هو

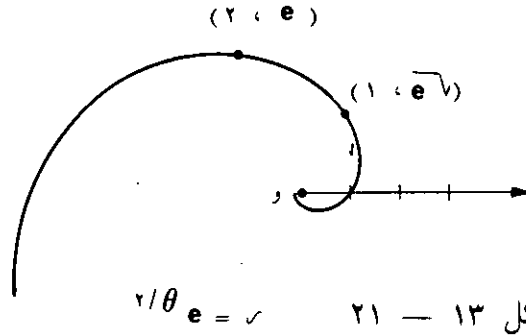
$$(13-23) \quad \int_{\theta}^b \sqrt{\left[\frac{1}{\theta} [c(\theta) \cos \theta] + \frac{1}{\theta} [c(\theta) \sin \theta] \right]^2} d\theta$$

مثال ٢ : أوجد طول المنحنى الحلزوني الذي معادلته القطبية

$$r = e^{\frac{\theta}{2}} \quad \text{من } \theta = 1 \text{ الى } \theta = 2.$$

الحل : نخطئ جزء من الحلزون بالشكل (١٣ - ٢١) حيث وضعت الاحداثيات

القطبية للنقط المناظرة لـ $\theta = 1$ ، $\theta = 2$.



وباستخدام (١٣ - ٢٣) حيث $q(\theta) = \frac{\theta}{2}$

$$L = \int_1^2 \sqrt{r^2 \left(\frac{1}{r} \right)^2 + r^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2} d\theta = \int_1^2 \sqrt{r^2 \left(\frac{1}{4} + 1 \right)} d\theta =$$

$$= \int_1^2 \sqrt{r^2 \cdot \frac{5}{4}} d\theta =$$

$$= \int_1^2 r \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \int_1^2 r d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} (e - e) =$$

واذا اردنا تقريبا للطول نجد أن $L \approx 2, 4$.

تمارين :

أوجد اطوال المنحنيات المعروفة في التمارين ١-٦ ،

- (١) $s = 5$ ، $t^2 = 2$ ، $t^3 = 1$ ، $t \in [0, 1]$.
 - (٢) $s = 3$ ، $t = 2$ ، $t = 2/3$ ، $t \in [0, 4]$.
 - (٣) $s = t$ ، $t = 2$ ، $t = 2$ ، $t \in [0, \pi/2]$.
 - (٤) $s = 10$ ، $t = 1$ ، $t = 2$ ، $t \in [0, 2]$.
 - (٥) $s = 10$ ، $t = 2$ ، $t = 2$ ، $t \in [0, \pi/3]$.
 - (٦) $s = 2$ ، $t = 2$ ، $t = 2$ ، $t \in [0, \pi]$.
 - (٧) أوجد طول المنحنى القلبي $r = 1 + \cos \theta$.
 - (٨) أوجد طول المنحنى الذي معادلته القطبية $r = \cos^3 \theta$.
 - (٩) أوجد طول الحلزون $r = e^\theta$ من $\theta = 0$ الى $\theta = 2$.
 - (١٠) أوجد طول الحلزون $r = \theta$ من $\theta = 0$ الى $\theta = \pi$.
 - (١١) أوجد طول المنحنى $r = \cos^2 \theta$ من $\theta = 0$ الى $\theta = \pi$.
 - (١٢) أوجد طول الحلزون $r = \theta^2$ من $\theta = 0$ الى $\theta = \pi$.
- المعادلات الوسيطة في كل من التمارين ١٣-١٦ تعطينا موضع النقطة (س ، ص) الجزئية في الزمن t . أوجد المسافة التي يقطعها الجزئيء خلال الفترة الزمنية المعطاة .

- (١٣) $s = 4 + t$ ، $t = 3$ ، $t = 5$ ، $t \in [0, 5]$.
- (١٤) $s = 2$ ، $t = 2$ ، $t = 2$ ، $t \in [0, \pi]$.
- (١٥) $s = t$ ، $t = 2$ ، $t = 2$ ، $t \in [0, \pi/2]$.
- (١٦) $s = 2$ ، $t = 2$ ، $t = 2$ ، $t \in [0, 4]$.
- (١٧) برهن (١٣-٢٢) .
- (١٨) في طريقة مشابهة للعمل في المساحات المستوية ، عرف مركز الثقل (س ، ص) للمنحنى واذكر صيغ تكاملات لايجاد (س ، ص) عندما يعطى المنحنى بالمعادلات الوسيطة (انظر (١٠-١٤) ، (١٠-١٦)) .

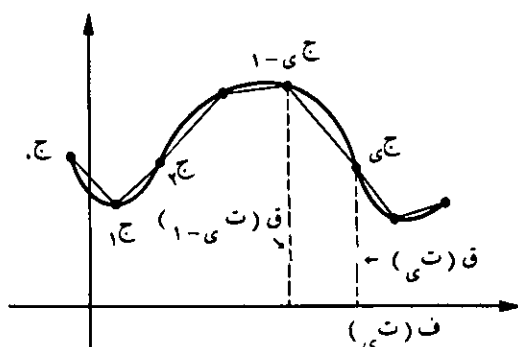
٧ — السطوح الدورانية :

. اذا دار منحنى مستو حول مستقيم في نفس المستوى فانه يولد سطحاً دورانياً .
 وكمثال على ذلك اذا دارت دائرة حول قطر فيها نحصل على سطح كرة . ويمكن ايجاد
 صيغ للمساحة الدورانية اذا كان المنحنى ج معقولا الى حد ما . وبصورة خاصة اذا كان
 المنحنى ج معطى بالمعادلتين الوسيطيتين $s = q(t)$ ، $v = f(t)$ ، حيث
 q ، f متصلان على الفترة $[p, b]$ ، وكان $f(t) \geq 0$ لجميع قيم t ، والشرط
 الأخير يعني أن المنحنى فوق محور السينات . وسنستخدم اصطلاحات البند السابق ،
 بفرض t تجزئة للفترة $[p, b]$ ، $J_i = q(t_i)$ ، $f(t_i)$ هي النقطة
 على ج المناظرة لـ t_i ، كما هو موضح في الشكل ١٣ - ٢٢ (١) . وبديهي انه كلما صغر
 القياس $\|t\|$ وقرب من الصفر ، فان الخط المنكسر ج الذي نحصل عليه بوصل
 ج_١ - ج_١ مع ج_٢ ، $y = 1, 0, 0, n$ ، هو تقريب للمنحنى ج وهكذا فان مساحة
 السطح المتولد من دوران ج حول محور السينات يكون تقريبا مساويا لمساحة السطح المتولد
 من دوران ج . وكما هو موضح في الشكل ١٣ - ٢٢ (ب) فان كل قطعة ج_١ - ج_٢ تولد
 السطح الدوراني لقطعة مخروط دائري قائم نصف قطري قاعدتيه $f(t_1)$ ، $f(t_2)$ ، ف
 (ت_١) وارتفاعه المائل يساوي لـ $(J_2 - J_1)$ ، ونعلم من الهندسة ان مساحة
 السطح المائل لقطعة المخروط الذي نصف قطري قاعدتيه r_1 ، r_2 وارتفاعه المائل h تعطى
 بالصيغة $(\frac{r_1 + r_2}{2})h$ وهكذا فان مساحة السطح المتولد من ج_١ - ج_٢ يساوي

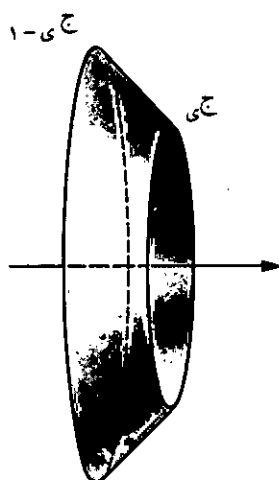
$$(١٣-٢٤) \quad \pi [f(t_2) - f(t_1)] \quad \text{لـ } (J_2 - J_1) \text{ ، ج_١ - ج_٢}$$

وبتجميع الحدود على الصورة (١٣ - ٢٤) من $y = 1$ الى $y = n$ نجد
 المساحة S_n للسطح المتولد من الخط المنكسر ج ، وبتعويض العبارة في

$$(١٣-١٨) \quad \text{بذل لـ } (J_2 - J_1) \text{ ، ج_١ - ج_٢ . فان}$$



(أ)



(ب)

الشكل ١٣ - ٢٢

$$\times \left[\text{ف}(ت-ي) + \text{ف}(ت-ي-١) \right] \pi \sum_{ي=١}^2 = \text{مساحة} \quad (٢٥-١٣)$$

$$\sqrt{[\text{ف}(ت-ي)]^2 + [\text{ف}(ت-ي-١)]^2} \Delta ت-ي$$

حيث $وي$ ، $زي$ في الفترة $[ت-ي-١, ت-ي]$. وباستخدام

(١٦-١٣) فإن منحنى $ج$ هو نهاية الطول لن للمنحنى $ج$ عندما $||ت|| \rightarrow 0$..
وهكذا فن الطبيعي تعريف المساحة للسطح المتولد من دوران $ج$ منحنى بانها

$$\text{مساحة} = \lim_{||ت|| \rightarrow 0} \dots \quad (٢٦-١٣)$$

ومن الطبيعي ان نتوقع اعتمادا على (٢٥-١٣) أن تعطى النهاية الاخيرة بالصيغة

$$\left[\text{ف}(ت) \pi \sum_{ي=١}^2 \sqrt{[\text{ف}(ت-ي)]^2 + [\text{ف}(ت-ي-١)]^2} \right] = \text{مساحة} \quad (٢٧-١٣)$$

أو بصورة تفاضلات

$$(٢٨-١٣) \quad \left[\pi \cdot 2^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{v}{t}\right)^2} \right]_p$$

وبرهان (١٣-٢٧) هو خارج نطاق هذا الكتاب .

وهناك طريقة سهلة لتذكر (١٣-٢٨) . فإذا اعتبرنا

$$\sqrt{\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{v}{t}\right)^2}$$

(س ، ص) تمثل نقطة في القوس الجزئي المناظر فان الاقتران المتكامل في (١٣-٢٨) يمكن اعتباره حاصل ضرب الارتفاع المائل في المحيط ٢ ص للدائرة المتولدة من دوران النقطة (س ، ص) .

وينتج انه اذا دار القوس ج حول محور الصادات فان سم تعطى بالصيغة

$$(٢٩-١٣) \quad \left[\pi \cdot 2^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{v}{t}\right)^2} \right]_p = \text{سم}$$

حيث يمكننا اعتبار أن ٢ π س محيط الدائرة التي ترسمها النقطة (س ، ص) الواقعة على المنحنى ج .

مثال ١ : استخدم (١٣-٢٧) لاثبات ان مساحة سطح الكرة التي نصف قطرها p يساوي ٤ π p^٢ .

الحل : اذا كان ج هو النصف الاعلى للدائرة س^٢ + ص^٢ = p^٢ فان السطح المطلوب يمكن الحصول عليه بادارة ج حول محور السينات . والمعادلات الوسيطة للمنحنى ج هي س = p جتا ت ، ص = p جتا ت في [٠ ، π] وبطبيق (١٣-٢٧) واستخدام المتطابقة جا^٢س + جتا^٢س = ١ ينتج ان

$$س = \left\{ \begin{array}{l} \pi \\ 2 \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{p \text{ جات } 2p \sqrt{\text{جات } 2p + \text{جات } 2p} \text{ و } t}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \pi \\ 2 \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{p \text{ جات } 2p \text{ و } t}$$

$$= - \left\{ \begin{array}{l} \pi \\ 2 \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{p \text{ جات } 2p}$$

$$= - \left\{ \begin{array}{l} \pi \\ 2 \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{p \text{ جات } 2p} = [1 - 1 -] \sqrt{p \text{ جات } 2p} .$$

واذا كان ج هو منحنى المعادلة ص = ق (س) ، حيث ق اقتران ممد على فترة [ب ، پ] ، فان المعادلتين الوسيطيتين للمنحنى ج هما
س = ت ، ص = ق (ت)

حيث ت ∈ [ب ، پ] . وباستخدام (١٣ - ٢٨) علما بان س = ت فان مساحة السطح المتولد من دوران ج حول محور السينات تعطى بالصيغة

$$(١٣ - ٣٠) \quad س = \left\{ \begin{array}{l} \pi \\ 2 \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{ق(س) + 1} \sqrt{ق(س)}$$

واذا دار منحنى حول محور الصادات فانه كما في (١٣ - ٢٩) يكون :

$$(١٣ - ٣١) \quad س = \left\{ \begin{array}{l} \pi \\ 2 \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} \sqrt{س + 1} \sqrt{ق(س)}$$

ويمكن اشتقاق صيغ مماثلة اذا كان ج منحنى س = ق (ص)
حيث ج ≥ ص ≥ ٥ .

مثال ٢ : اذا دار قوس القطع المكافئ ص = ٢س ، من (١ ، ١) الى (٤ ، ٢) حول محور السينات فجد مساحة السطح الناتج .

الحل : في الشكل ١٣ - ٢٣ نجد رسما توضيحيا للسطح . وباستخدام (١٣ - ٣٠) ، ص = ق (س) = س ٢/١ نحصل على

$$s = \int_1^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^2} \, d\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$s = \int_1^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^2} \, d\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$s = \int_1^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^2} \, d\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$s = \int_1^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^2} \, d\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$s = \int_1^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^2} \, d\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

ويمكن ايراد صيغ للرمز s اذا كان J معطى بالمعادلة القطبية
 $r = f(\theta)$ ، حيث $\theta \geq \theta_0$ وفي هذه الحالة فان
 المعادلات الوسيطة للمنحنى J هي

$$s = f(\theta) \cos \theta, \quad v = f(\theta) \sin \theta \quad \text{جا } \theta$$

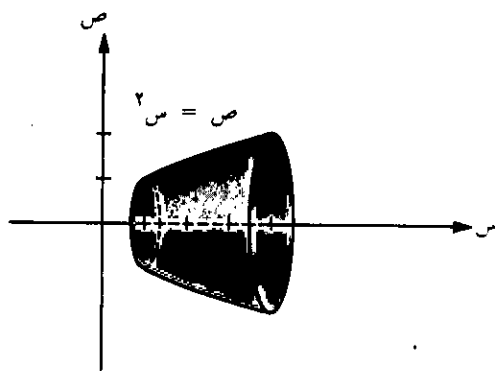
حيث $\theta \geq \theta_0$ واذ دار J حول المحور القطبي فبالتعويض في
 (١٣-٢٨) واستخدام (١٣-٢٢) نجد أن

$$(١٣-٣٢) \quad s = \int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta) \sqrt{1 + \left(\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\right)^2} \, d\theta$$

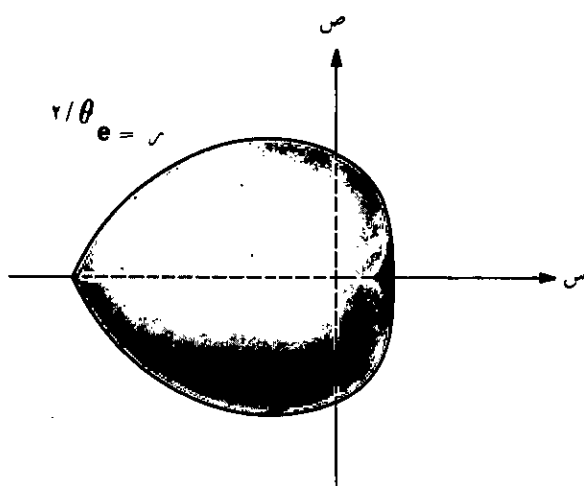
مثال ٣ : اذا دار جزء الحلزون $r = e^{2/\theta}$ من $\theta = 0$ الى $\theta = \pi$ حول محور السينات
 فجد مساحة السطح الناتج.

الحل : السطح موضح في شكل ١٣-٢٤ . فباستخدام (١٣-٣٢)

$$s = \int_0^{\pi} e^{2/\theta} \sqrt{1 + \left(\frac{-2}{\theta^2}\right)^2} \, d\theta$$



الشكل ١٣ - ٢٣ $ص = ص^2$



الشكل ١٣ - ٢٤ $ص/θ = ص$

$$ص = \int_0^\pi \left(\sqrt{\left(\frac{ص}{\theta} \right)^2 + \left(\frac{ص}{\theta^2} \right)^2} \right) d\theta \quad \text{جا } \theta \text{ من } 0 \text{ إلى } \pi$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{\frac{ص^2}{\theta^2} + \frac{ص^2}{\theta^4}} d\theta \quad \text{جا } \theta \text{ من } 0 \text{ إلى } \pi$$

$$= \int_0^\pi \frac{ص}{\theta^2} \sqrt{1 + \frac{1}{\theta^2}} d\theta \quad \text{جا } \theta \text{ من } 0 \text{ إلى } \pi$$

وباستخدام التكامل بالتجزئ نجد أن

$$\pi \int_0^{\pi} (\theta_e - \theta_e \cos \theta) \frac{\sqrt{\pi \theta}}{2} = \text{س}$$

$$(1 + \pi e) \frac{\sqrt{\pi \theta}}{2} =$$

تمارين :

في كل من التمارين ١ - ٨ أوجد مساحة السطح المتولد من دوران المنحنى المعطى حول محور السينات .

- (١) س = ت^٢ ، ص = ت^٢ ، ت = ٥ [٤ ، ٠] .
 - (٢) س = ت^٤ ، ص = ت^٣ ، ت = ٥ [٢ ، ١] .
 - (٣) س = ٢ جتا^٣ ت ، ٢ جتا^٣ ت ، ت = ٥ [٢/٣ ، ٠] .
 - (٤) س = ٢ (ت - جتا ت) ، ص = ٢ (١ - جتا ت) ، ت = ٥ [٠ ، ٢] .
 - (٥) ص = س^٣ من س = ١ الى س = ٢ .
 - (٦) ص = e^{-س} من س = ٠ الى س = ١ .
 - (٧) قوس واحد من منحنى ص = جتا س .
 - (٨) ١٢ ص = (٣ + س^٣) / س من س = ١ الى س = ٢ .
- في كل من التمارين ٩ - ١٦ أوجد مساحة السطح المتولد من دوران القوس المعطى حول محور الصادات .

- (٩) س = ت^{٢/١} ، ص = ١/٣ ت^٢ + ت^١ ، ت = ٥ [٤ ، ١] .
- (١٠) س = ت^٢ + ١ ، ص = ت^٢ + ٣ ، ت = ٥ [٢ ، ٠] .
- (١١) س = e^ت جتا ت ، ص = e^ت جتا ت ، ت = ٥ [٢/٣ ، ٠] .

- (١٢) س - ٣ ت^٢ ، ص = ت^٣ ، ت ∈ [١ ، ٠] .
- (١٣) س^٢ = ١٦ ص من (٠ ، ٠) الى (٨ ، ٤) .
- (١٤) س^٢ = ١ من (٠ ، ١) الى (٢ ، √٣) .
- (١٥) ص = لظ س من س = ١ الى س = ٢ .
- (١٦) ص = جتا ز س من س = ١ الى س = ٢ .
- في كل من التمارين ١٧ - ٢٠ جد مساحة السطح المتولد من دوران المنحنى المعطى حول المحور القطبي .

- (١٧) ر = ٢ + ٢ جتا θ .
- (١٨) ر^٢ = ٤ جتا ٢ θ .
- (١٩) ر = ٢ جتا θ .
- (٢٠) ر = ٢ جتا θ .
- (٢١) اذا دار القوس الاصغر للدائرة س^٢ + ص^٢ = ٢٥ بين النقطتين (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) حول محور الصادات فجد مساحة السطح المتولد .
- (٢٢) اذا دار القوس المذكور في تمرين ٢١ حول محور السينات فجد مساحة السطح المتولد .
- (٢٣) برهن ان مساحة سطح المخروط الدائري القائم الذي ارتفاعه p ونصف قطر قاعدته ب يساوي π ب $\sqrt{b^2 + p^2}$.
- (٢٤) اذا دار القطع الناقص ب^٢ س^٢ + ب^٢ ص^٢ = ب^٢ حول محور الصادات فجد مساحة السطح الناتج .
- (٢٥) نسمي السطح المتولد من دوران دائرة حول مستقيم لا يتقاطع معها وواقع في نفس مستواها إطاراً . جد مساحة سطح الاطار المتولد من دوران الدائرة س^٢ + ص^٢ = ب^٢ حول المستقيم .
- س = ب ، حيث . $p > b$.
- (٢٦) جعل العاكس في احد المصاييح الكشافه بشكل السطح المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره . فاذا كان قطر دائرة العاكس ٤ أقدام وعمقه قدماً واحداً فجد مساحته السطحية .

٨ — تمارين للمراجعة :

شفوية :

عرف أو ناقش كلا مما يلي :

- (١) المنحنيات المستوية .
- (٢) المنحنيات المغلقة .
- (٣) المعادلات الوسيطة .
- (٤) نظام الاحداثيات القطبية .
- (٥) بيان المعادلة القطبية .
- (٦) المساحات بالاحداثيات القطبية .
- (٧) طول المنحنى
- (٨) السطح الدوراني .

كتابية :

في التمارين ١ - ٣ ارسم مخططا لبيان المنحنى وجد معادله ديكارتية لبيان يحتوي

نقط المنحنى واستخرج ميل المماس عند النقطة التي تمثل $t = 1$.

$$(١) \quad s = \frac{1}{t} + 1, \quad v = \frac{2}{t} - t, \quad t \in [0, 4] .$$

$$(٢) \quad s = \text{جتا}^2 t - 2, \quad v = \text{جات} + 1, \quad t \in [0, 2\pi] .$$

$$(٣) \quad s = \sqrt{t}, \quad v = e^{-t}, \quad t \in [0, \infty)$$

$$(٤) \quad \text{اذا كانت } s = t^2, \quad v = 3t^3 + t^4 - 1, \quad t \in \mathbb{R} \text{ هما المعادلتان}$$

الوسيطيتان للمنحنى ج فأوجد الاحداثيات السينية لنقط عليه تمر مماسات المنحنى عندها بنقطة الاصل .

(٥) اذا اعطيت المنحنيات ج_١ ، ج_٢ ، ج_٣ ، ج_٤ بالمعادلات الوسيطة التالية :

$$\text{ج}_1 : \quad s = t^2, \quad v = t, \quad t \in \mathbb{R} .$$

$$\text{ج}_2 : \quad s = t^4, \quad v = t^2, \quad t \in \mathbb{R} .$$

$$\text{ج}_3 : \quad s = \text{جات}^2, \quad v = \text{جات}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

ج: س = e^2 ت ، ص = e^{-2} ت ، ت = e^3 ح .
 ارسم منحنيات ج_١ ، ج_٢ ، ج_٣ ، ج_٤ وناقش تشابهاتها واختلافاتها .
 في كل من التمارين ٦ - ١٣ ارسم منحنى المعادلة وجد معادلة في س ،
 ص لها نفس المنحنى .

$$(٦) \quad r = 2 + 3 \text{ جتا } \theta$$

$$(٧) \quad r = 6 \text{ جتا } 2\theta$$

$$(٨) \quad r = 8 \text{ قا } \theta$$

$$(٩) \quad r = 4 \text{ جتا } (\theta/2)$$

$$(١٠) \quad r = 6 - r \text{ جتا } \theta$$

$$(١١) \quad 0 = 1 - r$$

$$(١٢) \quad r = \frac{8}{\theta - 3 \text{ جا } \theta}$$

$$(١٣) \quad r = \frac{8}{3 \text{ جتا } \theta + 3}$$

(١٤) أوجد معادلة قطبية لكل من المنحنيين التاليين :

$$(أ) \quad r^2 = 2 \text{ ص} + 2 \text{ س} \quad \text{ص}$$

$$(ب) \quad r^2 = 2 \text{ س} - 2 \text{ ص}$$

(١٥) أوجد الاختلاف المركزي ومعادلة الدليل لكل من القطوع المخروطية التالية :

$$(أ) \quad 4 \text{ س}^2 + 3 \text{ ص}^2 + 10 \text{ ص} - 25 = 0$$

$$(ب) \quad 2 \text{ ص}^2 - 24 \text{ س}^2 - 20 \text{ س} = 4$$

(١٦) أوجد معادلة قطبية للقطع الزائد الذي بؤرته في القطب واختلافه المركزي ٢

$$\text{ومعادلة دليلة } r = 6 \text{ قا } \theta$$

(١٧) أوجد مساحة المنطقة المحدودة بعروة واحدة من منحنى $r^2 = 4 \text{ جا } 2\theta$

(١٨) أوجد مساحة المنطقة الواقعة داخل منحنى $r = 3 + 2 \text{ جا } \theta$ وخارج منحنى

الدائرة $r = 4$.

(١٩) المعادلتان $s = 2$ جان ، $v = 3$ جان تعطيان موضع النقطة (س ، ص) في

الزمن n . أوجد المسافة التي تقطعها هذه النقطة من $n = 0$ الى $n = \frac{\pi}{2}$

(٢٠) أوجد طول الحلزون $r = \frac{1}{\theta}$ من (١ ، ١) الى (٢ ، ٢/١) .

(٢١) أوجد مساحة السطح المتولد من دوران المنحنى $v = \sin s$ من $s = 0$ الى $s = \pi$ حول محور السينات .

(٢٢) اذا دار المنحنى $s = 2t^2 + 1$ ، $v = 4t - 3$ حيث $t \in [0, 1]$ ،
[١] حول محور الصادات ، فما مساحة السطح الناتج ؟

(٢٣) اذا دار قوس الحلزون $r = e\theta$ ، من (١ ، ٠) الى (e ، ١) ، حول

المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، فما مساحة السطح الناتج .

الفصل الرابع عشر

المتجهات والهندسة التحليلية في ثلاثة ابعاد

للمتجهات طبيعتان مختلفتان احدهما هندسية والاخرى جبرية . وفي التطبيقات نجد من الضروري فهم كلا الطبيعتين . ولهذا فدراستنا ستراوح بين هذين المضمارين فنؤكد الهندسة احيانا والجبر أحيانا أخرى . وللسهولة سنبداً بالمتجهات في مستوى واحد . وبعدها يمكن بسهولة توسيع البحث الى ثلاثة ابعاد وذلك بأخذ مركبة ثالثة بعين الاعتبار . وسنبحث ايضا بعض المواضيع الاساسية في الهندسة التحليلية المحسمة كالمستقيمات والمستويات والاسطوانات والسطوح الثنائية والمنحنيات في الفضاء .

١ — المتجهات ذوات البعدين :

ان الوحدة الفيزيائية التي يتم تحديدها بعدد حقيقي معين يشار اليها باسم الكمية القياسية ومن الامثلة على الكميات القياسية : درجة الحرارة والكتلة والكثافة . وهناك وحدات اخرى تدعى الكميات المتجهة أو المتجهات ولها مقدار واتجاه . ومن الامثلة عليها : سرعة ذرة تتحرك ، وقوة تؤثر على نقطة ، وبعد جسم يمضي في مسار مستقيم . ويمكن تمثيل المتجه هندسياً بقطعة مستقيمة متجهة حيث يشير طول القطعة واتجاهها الى مقدار المتجهة واتجاهه على الترتيب . ويدعى هذا التمثيل احيانا بالمتجهات الهندسية .

واذا امتد متجه هندسي من نقطة P (تدعى نقطة البداية
(Initial Point) الى نقطة B (تدعى نقطة النهاية

(Terminal Point) فن المعتاد ان نضع رأس سهم عند ب ونستعمل $\vec{P}$ للإشارة الى القطعة المستقيمة المتجهة (انظر الشكل ٤ - ١) . وقد تستعمل رموز اخرى للمتجهات كالحروف الكثيفة مثل $\vec{P}$ أو حروف على شكل $\vec{P}$. وإذا كان $\vec{P}$ متجهها هندسيا فيسمى طوله مقدار المتجه (Magnitude) ويرمز له بالرمز $|\vec{P}|$. ويكون المتجهان $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ متساويين ، ونكتب $\vec{P} = \vec{Q}$ ، اذا كان لهما نفس المقدار والاتجاه كما هو موضح في الشكل ١٤ - ١ . ونتيجة لذلك يمكن نقل المتجهات من موضع الى آخر بشرط الا يتغير المقدار والاتجاه . ونشير الى المتجهات من هذا النوع باسم المتجهات الحرة

لنأخذ $\vec{P}$ ليمثل ازاحة النقطة على القطعة المستقيمة من $\vec{P}$ الى $\vec{B}$ أي مسار نقطة تتحرك من $\vec{P}$ الى $\vec{B}$. فكما هو موضح في الشكل ١٤ - ٢ ان الازاحة $\vec{P}$ اذا تبعها الازاحة $\vec{B}$ تقودنا الى نفس النقطة التي تقودنا اليها ازاحة واحدة هي $\vec{P}$.

ويسمى المتجه الاخير بمجموع المتجهين الاول والثاني فنكتب

$$\vec{P} + \vec{B} = \vec{Q}$$

ولاننا نعالج هنا المتجهات الحرة فأى متجهين هندسيين يمكن جمعها بأن نضع نقطة بداية احدهما الى نقطة نهاية الاخر ثم نكمل كما في الشكل ١٤ - ٢ .

واليك طريقة اخرى لايجاد حاصل جمع متجهين هندسيين وذلك برسم متجهات مساوية للمعطاة ولها نفس نقطة البداية مثل $\vec{P}$ و $\vec{K}$ في الشكل ١٤ - ٣ . فاذا كونا متوازي الاضلاع $\vec{P}$ و $\vec{K}$ س ذي الضلعين المتجاورين $\vec{P}$ و $\vec{K}$ فيما أن $\vec{P} = \vec{K}$ س ينتج ان :

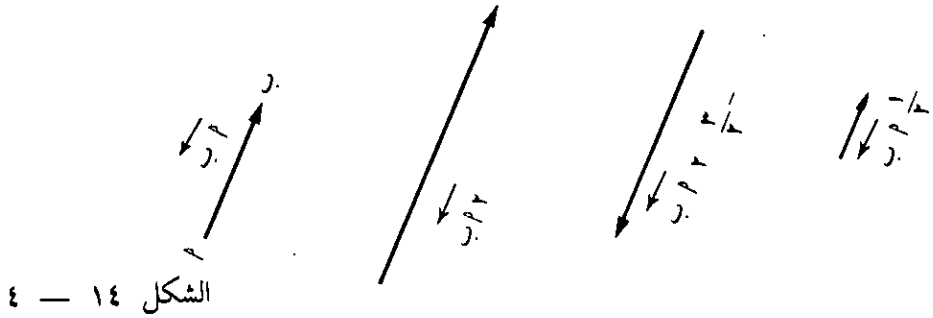
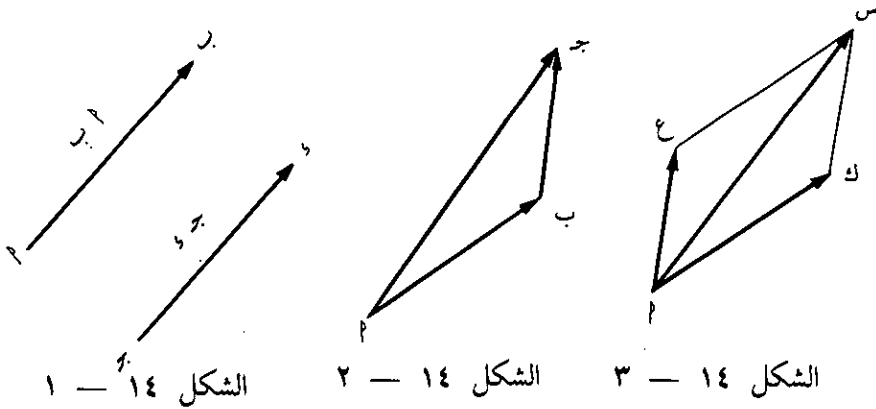
$$\vec{P} + \vec{K} = \vec{S}$$

واذا كان $\vec{P}$ و $\vec{K}$ قوتين تعملان عند $\vec{P}$ فيمكن ان نثبت في المختبر أن $\vec{S}$ هي القوة المحصلة اي القوة التي لوحدها تنتج نفس تأثير القوتين مجتمعتين . واذا كان $\vec{J}$ عدد حقيقيا وكان $\vec{P}$ متجهها هندسيا فيعرف حاصل الضرب $\vec{J} \vec{P}$ بالمتجه الذي مقداره $\vec{J}$ امثال مقدار $\vec{P}$ واتجاهه نفس اتجاه $\vec{P}$ ، اذا كانت $\vec{J} > 0$ ، وعكس اتجاه $\vec{P}$ اذا كانت $\vec{J} < 0$.

وفي الشكل ١٤ - ٤ ما يوضح هذا كله هندسيا .

واذا وقعت جميع المتجهات الهندسية التي ندرسها في مستوى احداثيات ثابت فيمكن ان تعين لنقط البداية والنهاية احداثيات وبذا تتحول العبارات المتعلقة بالمتجهات

الى لغة الجبر ، نغفل المعاني الحسية للمتجهات وتتناولها من وجهة نظر جبرية . وهذه الطريقة تتخذ المتجهات دورا مزدوجا ظاهره وجهة النظر الجبرية وباطنه ذلك التمثيل الهندسي السابق . ويمكن ان يعكس هذا الترتيب فنبدا بتعريف المتجه جبريا ومن ذلك ندرج الى المتجهات كبديل للتفسير الجبري . ولهذا الطريقة فوائد عديدة : منها ان براهين خواص المتجهات تصبح تمارين سهلة في الحسابات الجبرية بدلا من ان تكون مسائل هندسية . ومنها ان الاسلوب الجبري للمتجهات يمكن تصحيحه بسهولة حتى يشمل ثلاثة ابعاد أو أكثر .



بعد ذكر ما تقدم سنتقل الان الى وضع تعريف جبري للمتجهات تتبعه تفسيرات هندسية تتفق مع ما سبق ذكره . وتتضمن الصيغة الجبرية للمتجهات في بعدين ازواجا مرتبة من الاعداد الحقيقية . فكيلا يقع الالتباس بالرمز المستعمل في الفترات المفتوحة أو احداثيات النقط في المستوى سنستعمل $\langle s, v \rangle$ لتمثل الزوج المرتب الذي يشير الى المتجه . وسنشير ايضا الى ذلك الزوج المرتب برمز مثل P أو $\vec{P}$. أما الاعداد الحقيقية فسنستخدمها بالقياسية لتفريقها عن المتجهة .

(١٤-١) تعريف المتجهات في بعدين :

ان الفضاء المتجه V ذا البعد n هو مجموعة كل الأزواج المرتبة $\langle s, v \rangle$ من الأعداد الحقيقية التي تسمى متجهات وهي التي تحقق الشرطين التاليين :
 (1) حاصل جمع متجهين . اذا كان $\langle p, v \rangle = \langle q, w \rangle$ ، $\langle p, v \rangle$ وكان

$$\begin{aligned} & \text{متجهين كان} \quad \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle = \vec{b} \\ & \langle \vec{b}_1 + \vec{p}_1, \vec{b}_2 + \vec{p}_2 \rangle = \vec{b} + \vec{p} \end{aligned}$$

(ب) حاصل ضرب المتجهات بغير المتجهات .

اذا كان $\overleftarrow{p} = \langle p_1, p_2 \rangle$ وكان جـ عددا قياسيا كان $\overleftarrow{p} = \langle p_1, p_2 \rangle$ جـ p_1 جـ p_2 .

وتسمى الاعداد μ_1, μ_2 في $\langle \mu_1, \mu_2 \rangle$ مركبتي المتجه. ولهذا نقول لايجاد حاصل جمع متجهين نجمع المركبتين المتقابلتين. ويسمى المتجه μ الذي حصلنا عليه بضرب كل من مركبتي μ في ج. بالمضاعف القياسي للمتجه μ . واذا كان ج $\neq 1$. نستعمل احيانا الرمز $\frac{\mu}{ج}$ بدلا من $(\frac{1}{ج}) \cdot \mu$.

مثال ١ : اذا كان $\overleftarrow{p} = \langle 3, -2 \rangle$ وكان $\overleftarrow{b} = \langle -6, 7 \rangle$ أوجد الاتي :

$$\overleftarrow{C}^3 + \overleftarrow{P}^2(3) \overleftarrow{P}^2(2) \overleftarrow{C} + \overleftarrow{P}(1)$$

الحل : بتطبيق (١٤-١) ينتج الاتي :

$$\langle 0, \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{r} \rangle + \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \mathbf{v} + \mathbf{r} \quad (1)$$

$$\therefore \langle \Lambda - \epsilon_{12} \rangle = \langle 2 - \epsilon_{33} \rangle \xi = \overset{\leftarrow}{P} \xi \quad (2)$$

$$\langle 21, 18 \rangle + \langle 4, 6 \rangle = 3 + \overset{\leftarrow}{1} 2 \quad (3)$$

$$\langle 1V, 12 \rangle =$$

يعرف المتجه الصفري $\vec{0}$ على النحو $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$ ويعرف السالب $-\vec{p}$ للمتجه $\vec{p}$ $\vec{p} = \langle p_1, p_2 \rangle$ بالزوج المرتب $-\vec{p} = \langle -p_1, -p_2 \rangle$. وسيمثل غير الصفري $\vec{p} = \langle p_1, p_2 \rangle$ في مج $\mathbb{R}^2$ في مستوى الاحداثيات بمتجه هندسي $\vec{p}$ له نقطة بداية $\vec{p}$ (س، ص) ونقطة نهاية $\vec{p}$ (س + p_1 ، ص + p_2). وسيمثل المتجه الصفري $\vec{0} = \langle 0, 0 \rangle$ بأي نقطة في المستوى. وهناك تمثيلات عديدة في

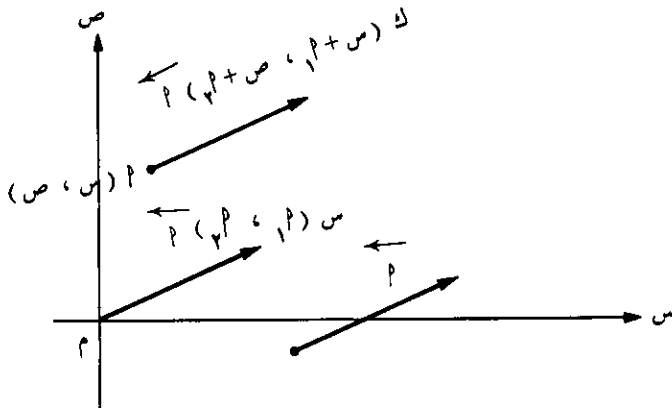
الشكل ١٤ - ٥ حيث وضع الرمز $\vec{P}$ بجانب متجه هندسي للإشارة الى انه يمثل المتجه $\vec{P}$ في مج $\vec{P}$. وفي الحياة العملية نستخدم كلمة (متجه) بدلا من (متجه هندسي) لانه يكون عادة واضحا اي نوع من المتجهات تعني.

واذا كانت P أي نقطة في مستوى احداثي وكانت M نقطة الاصل فيسمى $\vec{M}$ بمتجه الموضع (Position Vector) للنقطة P . فاذا كان $P = \langle \vec{P}_1, \vec{P}_2 \rangle$ فان متجه الموضع $\vec{M}$ للنقطة $S(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ انظر الشكل ١٤ - ٥) يسمى متجه الموضع الذي يقابل $\vec{P}$. وبالرغم من ان P لها عدة تمثيلات هندسية فيوجد متجه موضع وحيد يقابل $\vec{P}$.

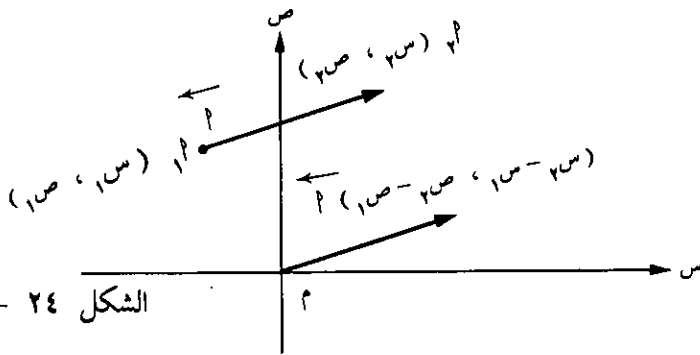
مثال ٢: اذا كان $P(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ و $Q(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ نقطتين. أوجد المتجه $\vec{P}$ الذي يمثله هندسياً $\vec{P}_1, \vec{P}_2$.

الحل: اذا كانت $P(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ نقطة بداية المتجه الهندسي الذي يقابل $\vec{P} = \langle \vec{P}_1, \vec{P}_2 \rangle$ فتكون نقطة النهاية هي $K(\vec{P}_1 + \vec{P}_2, \vec{P}_1 + \vec{P}_2)$. فاذا تطابقت K مع $Q(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ فتحصل على ان $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{Q}_1$ و $\vec{P}_2 = \vec{Q}_2 - \vec{P}_1$ ومن ثم فان $\vec{P} = \langle \vec{P}_1, \vec{Q}_2 - \vec{P}_1 \rangle$. وفي الشكل ١٤ - ٦ توضيح للرمز $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ وفيه ايضا يتبين متجه الموضع الذي يقابل $\vec{P}$.

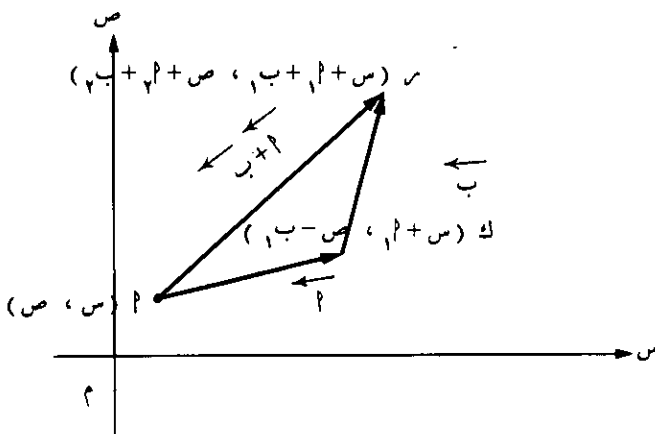
ومن السهل الحصول على تمثيل هندسي لحاصل جمع المتجهين $\vec{P} + \vec{Q} = \langle \vec{P}_1, \vec{P}_2 \rangle + \langle \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 \rangle = \langle \vec{P}_1 + \vec{Q}_1, \vec{P}_2 + \vec{Q}_2 \rangle$. فأولا تمثل $\vec{P}$ بمتجه $\vec{P}$ كـ بدايته النقطة $P(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$ ونهايته النقطة $K(\vec{P}_1 + \vec{P}_2, \vec{P}_1 + \vec{P}_2)$. ومن ثم ، كما هو واضح في الشكل ١٤ - ٧ ، تمثل $\vec{Q}$ بواسطة $\vec{R}$ حيث R هي النقطة $R(\vec{P}_1 + \vec{Q}_1, \vec{P}_2 + \vec{Q}_2)$. فاذا مثلنا $\vec{P} + \vec{Q} = \langle \vec{P}_1 + \vec{Q}_1, \vec{P}_2 + \vec{Q}_2 \rangle$ بمتجه بدايته النقطة J فتكون احداثيات نقطة نهايته $(\vec{P}_1 + \vec{Q}_1, \vec{P}_2 + \vec{Q}_2)$ وذلك تتطابق مع R . ومن ثم يكون التمثيل الهندسي للمتجه $\vec{P} + \vec{Q}$ هو $\vec{R}$ وهذا يطابق تعريفنا لحاصل جمع المتجهات الهندسية. وهذا يوضح كيف يمكن ان نراوح ما بين الصيغة الجبرية للمتجهات والتفسير الهندسي لها كقطعة



الشكل ١٤ - ٥



الشكل ١٤ - ٦



الشكل ١٤ - ٧

مستقيمة متجهة . وعلى القارئ ان يتدرب ليصبح قادرا على استعمال هاتين الصيغتين بنجاح .

وتنطوي النظرية التالية على اربع خواص هامة للمتجهات .

١٤-٢ نظرية :

اذا كانت $\vec{P}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{J}$ منتمية الى مع $\vec{P}$ فكل من الخواص التالية تتحقق :

$$(1) \quad \vec{P} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{P}$$

$$(2) \quad \vec{J} + (\vec{B} + \vec{P}) = (\vec{J} + \vec{B}) + \vec{P}$$

$$(3) \quad \vec{P} = \vec{0} + \vec{P}$$

$$(4) \quad \vec{0} = (\vec{P} -) + \vec{P}$$

ويسهل برهان (١٤-٢) باستخدام تعريف جمع المتجهين وخصائص الاعداد

الحقيقية . فمثلا في (١) اذا اخذنا $\vec{P} = \langle \vec{P}_1, \vec{P}_2 \rangle$ ، $\vec{B} = \langle \vec{B}_1, \vec{B}_2 \rangle$ فيا ان $\vec{P} + \vec{B} = \langle \vec{P}_1 + \vec{B}_1, \vec{P}_2 + \vec{B}_2 \rangle$ و $\vec{B} + \vec{P} = \langle \vec{B}_1 + \vec{P}_1, \vec{B}_2 + \vec{P}_2 \rangle$ فان

$$\vec{P} + \vec{B} = \langle \vec{P}_1 + \vec{B}_1, \vec{P}_2 + \vec{B}_2 \rangle = \langle \vec{B}_1 + \vec{P}_1, \vec{B}_2 + \vec{P}_2 \rangle = \vec{B} + \vec{P}$$

ويترك بقية البرهان للتمرين . وعلى القارئ ان يعطي تفسيراً هندسياً لحقائق (١٤-٢) .

وعملية طرح المتجهات التي يرمز لها بالرمز - تعرف كالآتي :

(١٤-٣) تعريف عملية طرح المتجهات

اذا كان $\vec{P}$ ، $\vec{B}$ مع $\vec{P}$ فان

$$\vec{P} - \vec{B} = \vec{P} + (\vec{B} -)$$

فاذا استعملنا رمز الزوج المرتب السابق لكل من $\vec{P}$ و $\vec{B}$ ينتج ان

$$-\vec{B} = \langle -\vec{B}_1, -\vec{B}_2 \rangle \text{ فينتج من (١٤-٣) و (١٤-١) ان}$$

$$\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2} = \overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2} = \overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2}$$

ولهذا يمكن إيجاد $\overrightarrow{P} - \overrightarrow{B}$ بمجرد طرح مركبتي $\overrightarrow{B}$ من مركبتي $\overrightarrow{P}$ كلاً من التي تقابلها .

مثال ٣ : إذا كان $\overrightarrow{P} = \langle ٤ ، ٥ \rangle$ وكان $\overrightarrow{B} = \langle ٢ ، ٣ \rangle$ فأوجد $\overrightarrow{P} - \overrightarrow{B}$.

$$\text{الحل : } \overrightarrow{P} - \overrightarrow{B} = \langle ٤ ، ٥ \rangle - \langle ٢ ، ٣ \rangle = \langle ٢ ، ٢ \rangle$$

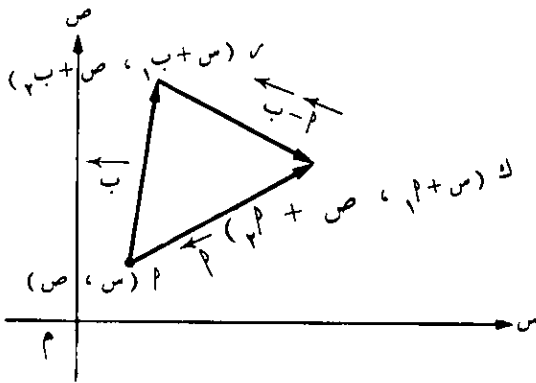
ولإيجاد $\overrightarrow{P} - \overrightarrow{B}$ هندسياً لنمثل أولاً $\overrightarrow{P}$ و $\overrightarrow{B}$ بالمتجهين $\overrightarrow{P}$ و $\overrightarrow{B}$ اللذين لهما نفس نقطة البداية P (س ، ص) ونقطة النهاية K (س + P_1 ، ص + P_2) و R (س + B_1 ، ص + B_2) على الترتيب (انظر شكل ١٤ - ٨) . فإذا استعملنا ركن نقطة بداية للمتجه الهندسي $\overrightarrow{P} - \overrightarrow{B}$ = $\langle P_1 - B_1 ، P_2 - B_2 \rangle$ ستكون أحداثيات نقطة النهاية هي (س + $P_1 - B_1$ ، ص + $P_2 - B_2$) وهي نفس K . وهذا يبين أنه يمكن تمثيل $\overrightarrow{P} - \overrightarrow{B}$ بالمتجه $\overrightarrow{RK}$.

(١٤ - ٤) تعريف اتجاه المتجهات :

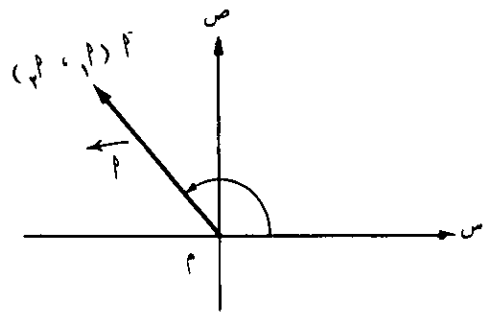
إن اتجاه المتجه غير الصفري $\overrightarrow{P} = \langle P_1 ، P_2 \rangle$ هو أصغر زاوية غير سالبة θ بين محور السينات الموجب و متجه الموضع $\overrightarrow{P}$ الذي يقابل $\overrightarrow{P}$. وتسمى الزاوية θ في (١٤ - ٤) باتجاه $\overrightarrow{P}$.
فالاتجاه θ للمتجه النموذجي $\overrightarrow{P}$ (أو $\overrightarrow{P}$) يبينه الشكل ١٤ - ٩ . لاحظ أن $\theta \geq ٠$ ، $\theta < \pi$.

$$\text{إذا كانت } P_1 \neq ٠ \text{ ، فإن } \theta = \arctan \frac{P_2}{P_1}$$

يقال إن المتجهين لهما اتجاهان متعاكسان إذا كان اتجاهاهما يختلفان بمقدار π . وكمثال فإن $\overrightarrow{P}$ و $-\overrightarrow{P}$ لهما اتجاهان متعاكسان . ومن المناسب أن نفترض أن المتجه الصفري $\overrightarrow{0}$ له جميع الاتجاهات .



الشكل ١٤ - ٨



الشكل ١٤ - ٩

واتجاه المتجه الهندسي $\vec{p}$ ك يعرف باتجاه متجه الموضع $\vec{m}$ $\vec{p}$ الذي نحصل عليه بنقل $\vec{p}$ ك بحيث تنطبق $\vec{p}$ على نقطة الاصل $\vec{m}$.

(١٤-٥) نظرية :

إذا كان $\vec{p} = \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle$ متجهها غير الصفر وكان ج عددا قياسيا غير الصفر أيضا فان $\vec{p}$ وج $\vec{p}$ لها نفس الاتجاه إذا كانت ج > ٠ ولها اتجاهان متعاكسان إذا كانت ج < ٠.

البرهان : لنفرض ان اتجاهي $\vec{p} = \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle$ وج $\vec{p} = \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle$ ج $\vec{p}$ هما θ و ϕ على الترتيب.

إذا كانت $\vec{p}_1 = ٠$ فان ج $\vec{p}_1 = ٠$ وتكون النقطتان $\vec{p}_1$ و $\vec{p}_2$ (ب) و (ج) إذا تقعان على محور الصادات ويتبع ان $\vec{p}$ و $\vec{p}$ لها اتجاه واحد إذا كانت ج < ٠ واتجاهان متعاكسان إذا كانت ج > ٠. وإذا كانت $\vec{p}_1 \neq ٠$ فان

$$\text{ظا } \theta = \frac{\text{ج } \vec{p}_2}{\text{ج } \vec{p}_1} = \frac{\vec{p}_2}{\vec{p}_1} = \text{ظا } \phi$$

ومن هنا فانه اما ان تكون $\phi = \theta$ أو $\phi = \theta \pm ١٨٠$ حسب كون ج < ٠ أو ج > ٠. وهذا يكمل البرهان.

(١٤-٦) تعريف مقادير المتجهات

يعرف المقدار $|\vec{P}|$ للمتجهة $\vec{P} = \vec{P}_1, \vec{P}_2$ بالمعادلة

$$\sqrt{{P_1}^2 + {P_2}^2} = |\vec{P}|$$

ويتبع من صيغة المسافة أن $|\vec{P}|$ هو مقدار اي متجه هندسي يقابل $\vec{P}$. لاحظ

ايضا ان $|\vec{P}| \geq 0$ وان

$$|\vec{P}| = 0 \text{ اذا وفقط اذا كان } \vec{P} = \vec{0}$$

ويجب التمييز بوضوح بين الرمز المستعمل لمقدار المتجه والرمز جـ الذي يستعمل للقيمة المطلقة للعدد جـ.

مثال ٤ : ارسم متجه موضع يقابل كلا من المتجهات التالية وأوجد مقدار كل منها واتجاهه :

$$\vec{P} (P) = \langle 3, -3 \rangle$$

$$\vec{B} (B) = \langle 0, -2 \rangle$$

$$\vec{J} (J) = \langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$$

الحل : ان متجهات الموضع مرسومة في الشكل ١٤ - ١٠ . وبتطبيق (١٤-٦) و

(١٤-٤) فاننا نحصل على النتائج التالية :

$$|\vec{P}| (P) = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$|\vec{B}| (B) = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2, \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$|\vec{J}| (J) = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1, \quad \theta = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$$

(١٤-٧) اذا كان $\vec{P}$ متجها وكان جـ قياسيا فان

$$|\vec{P}| = |\vec{J}|$$

البرهان : اذا اخذنا $\vec{P} = \langle P_1, P_2 \rangle$ فان

$$\vec{J} = \langle J_1, J_2 \rangle$$

وباستخدام (١٤-٦) وخصائص الاعداد الحقيقية فان

$$\sqrt{{J_1}^2 + {J_2}^2} = |\vec{J}| = \frac{\sqrt{{P_1}^2 + {P_2}^2}}{|\vec{P}|} = \frac{|\vec{P}|}{|\vec{P}|} = 1$$

ويستج عن النظرية (١٤ - ٧) ان طول المتجه الهندسي الذي يقابل $\overleftarrow{p}$ هو ج مضروباً في طول المتجه الهندسي الذي يقابل $\overleftarrow{p}$. ومقارنة هذا مع (١٤ - ٥) نرى ان الصيغة الجبرية ل ج $\overleftarrow{p}$ في (١٤ - ١) تطابق التفسير الهندسي الذي بحثناه عند بداية هذا البند ووضحناه بالشكل ١٤ - ٤. وفي النظرية التالية بعض خصائص ضرب المتجه بعدد قياسي.

(١٤ - ٨) نظرية : اذا كانت $\overleftarrow{p}$ ، $\overleftarrow{b}$ مج $\overleftarrow{p}$ وكان ج ، $\overleftarrow{p}$ قياسيين فان الخواص التالية تتحقق .

$$\begin{aligned} (١) \quad \overleftarrow{b} + \overleftarrow{p} &= \overleftarrow{(b + p)} \\ (٢) \quad \overleftarrow{p} + \overleftarrow{p} &= \overleftarrow{p} (١ + ج) \\ (٣) \quad \overleftarrow{p} (ج + ز) &= \overleftarrow{p} ج + \overleftarrow{p} ز \\ (٤) \quad \overleftarrow{p} &= \overleftarrow{p} ١ \\ (٥) \quad \overleftarrow{p} \cdot ٠ &= ٠ = \overleftarrow{p} \cdot ج \end{aligned}$$

البرهان : سنبرهن (١) ونترك براهين باقي الخصائص كتمارين .

$$\begin{aligned} \text{ضع } \overleftarrow{p} &= \overleftarrow{p} ، \overleftarrow{p} < \overleftarrow{p} ، \overleftarrow{b} > = \overleftarrow{b} ، \overleftarrow{p} < \overleftarrow{p} ، \overleftarrow{b} > \text{ فتتج ان} \\ \overleftarrow{p} + \overleftarrow{p} &= \overleftarrow{(b + p)} \text{ ج} \\ &= \overleftarrow{p} ج + \overleftarrow{p} ج \\ &= \overleftarrow{p} ج + \overleftarrow{p} ج \\ &= \overleftarrow{p} ج + \overleftarrow{p} ج \end{aligned}$$

ويعرف المتجهان الخاصان $\overleftarrow{h}$ و $\overleftarrow{u}$ كما يلي

$$(١٤ - ٩) \quad \overleftarrow{h} = < ٠ ، ١ > ، \overleftarrow{u} = < ١ ، ٠ > .$$

ويمكن استعمال هذين المتجهين للحصول على طريقة اخرى للتعبير عن المتجهات في مج $\overleftarrow{p}$. وبالتحديد اذا كان $\overleftarrow{p} = < \overleftarrow{p} ، \overleftarrow{p} >$ فان

$$\begin{aligned} \overleftarrow{p} &= < \overleftarrow{p} ، ٠ > + < ٠ ، \overleftarrow{p} > \\ &= \overleftarrow{p} < ١ ، ٠ > + \overleftarrow{p} < ٠ ، ١ > \end{aligned}$$

اي ان

$$(١٤-١٠) \quad \vec{P} = \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle = \vec{p}_1 \underline{هـ} + \vec{p}_2 \underline{و}.$$

والمجموع الذي على الطرف الايسر في (١٤-١٠) يسمى تجميعا خطيا
Linear Combination للمتجهين $\underline{هـ}$ ، $\underline{و}$ فاذا استخدمنا هذه

الرموز يمكن كتابة القواعد السابقة للجمع والطرح والضرب بعدد قياسي كما يلي
حيث $\vec{b} = \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle = \vec{b}_1 \underline{هـ} + \vec{b}_2 \underline{و}$ كالتالي :

$$(\vec{p}_1 \underline{هـ} + \vec{p}_2 \underline{و}) + (\vec{b}_1 \underline{هـ} + \vec{b}_2 \underline{و}) = (\vec{p}_1 + \vec{b}_1) \underline{هـ} + (\vec{p}_2 + \vec{b}_2) \underline{و}$$

$$\underline{ج} (\vec{p}_1 \underline{هـ} + \vec{p}_2 \underline{و}) = (\underline{ج} \vec{p}_1) \underline{هـ} + (\underline{ج} \vec{p}_2) \underline{و}.$$

$$(\vec{p}_1 \underline{هـ} + \vec{p}_2 \underline{و}) - (\vec{b}_1 \underline{هـ} + \vec{b}_2 \underline{و}) = (\vec{p}_1 - \vec{b}_1) \underline{هـ} + (\vec{p}_2 - \vec{b}_2) \underline{و}$$

وتبين هذه الصيغ ان التجميعات الخطية لـ $\underline{هـ}$ و $\underline{و}$ يمكن اعتبارها جمعا عاديا .

مثال ٥ : اذا كان $\vec{P} = \vec{p}_1 \underline{هـ} + \vec{p}_2 \underline{و}$ ، $\vec{b} = \vec{b}_1 \underline{هـ} - \vec{b}_2 \underline{و}$ ، فعبّر عن
 $\vec{P} - \vec{b}$ بصيغة علاقة بين $\underline{هـ}$ و $\underline{و}$.

$$\text{الحل : } \vec{P} - \vec{b} = \vec{p}_1 \underline{هـ} + \vec{p}_2 \underline{و} - (\vec{b}_1 \underline{هـ} - \vec{b}_2 \underline{و}) =$$

$$= (\vec{p}_1 - \vec{b}_1) \underline{هـ} + (\vec{p}_2 + \vec{b}_2) \underline{و}$$

$$= \underline{٧هـ} + \underline{١٧و}$$

والمتجه الوحدة (أو متجه الوحدة) هو المتجه الذي مقداره ١ . فالمتجهان $\underline{هـ}$ ،
 $\underline{و}$ في (١٤-٩) كل منهما وحدة وكذلك المتجه $\underline{ج}$ في المثال ٤ من هذا البند

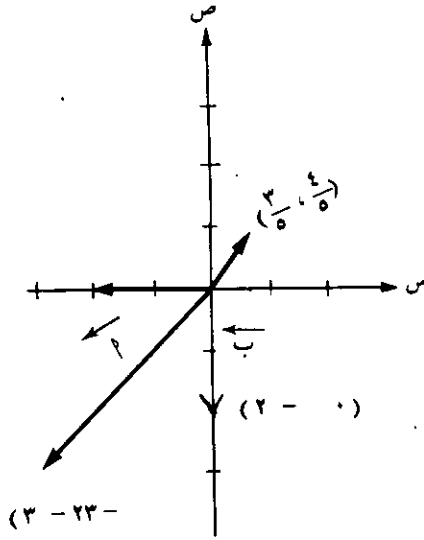
(١٤-١١) نظرية :

اذا كان $\vec{P}$ متجها غير الصفر فمتجه الوحدة $\vec{P}$ الذي له نفس اتجاه $\vec{P}$ يعطى

$$\text{بالمعادلة } \vec{P} = \frac{1}{|\vec{P}|} \vec{P}$$

البرهان : بما أن $|\frac{1}{|\vec{P}|} \vec{P}| = 1$. فيتبع من (١٤-٥) ان $\vec{P}$ له نفس اتجاه $\vec{P}$.

وباستخدام (١٤-٧) فان



الشكل ١٤ - ١٠

$$1 = \frac{1}{|P|} |P| = \frac{1}{|P|} \overrightarrow{P} = \frac{\overrightarrow{P}}{|P|} = \overrightarrow{P^*}$$

فيكون $\overrightarrow{P^*}$ متجه وحدة .

مثال ٦ : أوجد متجه وحدة له نفس اتجاه $\underline{P}$ هـ - ٣ و $\underline{Q}$ هـ - ٤ .

الحل : بما أن $\overrightarrow{P^*} = \frac{\overrightarrow{P}}{|P|} = \frac{1}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5}$ فينتج من (١٤-١١) أن

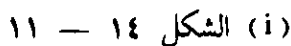
$$\overrightarrow{P^*} = \frac{1}{5} (\underline{P} - \underline{Q}) = \frac{3}{5} \underline{P} - \frac{4}{5} \underline{Q}$$

والصيغة $\overrightarrow{P^*} = \frac{1}{5} \underline{P} - \frac{4}{5} \underline{Q}$ هـ $\underline{P}$ و للمتجه $\overrightarrow{P^*} = \langle \underline{P}, \underline{P} \rangle$

لها تفسير هندسي : فتجهات الموضع التي تقابل $\underline{P}$ هـ ، و $\underline{Q}$ موضحة في (١) من الشكل ١٤-١١ .

وبما أن $\underline{P}$ هـ ، و $\underline{Q}$ هما متجهتا وحدة فيمكن تمثيل $\underline{P}$ هـ ، $\underline{Q}$ و بمتجهين أحدهما أفقي والآخر عمودي ومقدارهما $|\underline{P}|$ و $|\underline{Q}|$ على الترتيب كما هو موضح في (٢) من الشكل ١٤-١ .

ويمكن اعتبار متجه الموضع $\overrightarrow{P^*}$ كحاصل جمع هذين المتجهين . ولهذا السبب تسمى $\underline{P}$ بالمركبة الأفقية و $\underline{Q}$ بالمركبة العمودية للمتجه $\overrightarrow{P^*}$.



تمارين :

(١) اثبت (٢) - (٤) من (١٤ - ٢) . وكذلك اعط تعليلًا هندسيًا يبرر الاستنتاجات .

(٢) اثبت (٢) - (٥) من (١٤ - ٨) .
 اثبت كلا من الخصائص في التمارين ٣ - ١٠ حيث $\vec{p}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مجزئ ، جـ
 عدد قياسي .

$$\vec{p} - = \vec{p} (1 -) \quad (3)$$

$$\overleftarrow{p} - j = \overleftarrow{p} (j -) \quad (4)$$

$$\overleftarrow{C} - \overleftarrow{P} = (\overleftarrow{C} + \overleftarrow{P}) - (0)$$

$$\vec{C} \cdot \vec{J} - P \cdot \vec{J} = (\vec{C} - \vec{P}) \cdot \vec{J} \quad (6)$$

(v) إذا كان $\vec{p} = \vec{b} + \vec{c}$ فإن $\vec{p} - \vec{c} = \vec{b}$

(٨) اذا كان $\vec{p} = \vec{b} + \vec{c}$ فان $\vec{a} = \vec{b}$

(٩) اذا كان $\vec{p} = \vec{q}$ وكانت ج $\neq$ فان $\vec{p} = \vec{q}$.

(۱۰) اذا كان جـ $\overleftarrow{p} = \overleftarrow{p}$ وكان $\overleftarrow{p} \neq \overleftarrow{p}$ فان جـ = .

في كل من التمارين ١١ - ٢٠ أوجد $\vec{P} + \vec{B}$, $\vec{P} - \vec{B}$, $\vec{P}$, $\vec{B}$, $\vec{P} + \vec{B}$, $\vec{P}$

١٥٠

$$\langle \varepsilon, 1 \rangle = \overset{\leftarrow}{\cup} \langle 3 - \varepsilon, 2 \rangle = \overset{\leftarrow}{p} \quad (11)$$

$$\langle 3, 2 \rangle = \overleftarrow{1}, \langle 7, 2 \rangle = \overleftarrow{1} \quad (12)$$

$$\langle 1, 2 \rangle \rightarrow \xi = \overset{\uparrow}{\underset{\downarrow}{\cup}}, \langle 2, 3 \rangle \rightarrow \eta = \overset{\uparrow}{\underset{\downarrow}{\cap}} \quad (13)$$

$$\therefore \langle \psi, \psi \rangle = 1 \quad \langle \psi, \psi \rangle = 1 \quad (14)$$

$$\underline{و} \ 5 - \underline{هـ} \ 3 = \underline{ج} \ 2, \ \underline{و} \ 2 + \underline{هـ} = \underline{ف} \ 1 \quad (15)$$

- (١٦) $\vec{P} = -5\vec{h} + \vec{w}$ ، $\vec{B} = -4\vec{h} + \vec{w}$
- (١٧) $\vec{P} = -(4\vec{h} - \vec{w})$ ، $\vec{B} = 2(\vec{h} - 3\vec{w})$
- (١٨) $\vec{P} = 8\vec{w}$ ، $\vec{B} = (3 -)(-2\vec{h} + \vec{w})$
- (١٩) $\vec{P} = 2\vec{w}$ ، $\vec{B} = -3\vec{h}$
- (٢٠) $\vec{P} = 0$ ، $\vec{B} = \vec{h} + \vec{w}$
- في التمارين ٢٠-٢٦ أوجد المتجه $\vec{P}$ الذي تمثله الهندسي $\vec{P}$ ك وارسم $\vec{P}$ ك ومتجه موضع يقابل $\vec{P}$.

- (٢١) $\vec{P} (1, -4)$ ، ك (٣ ، ٥)
- (٢٢) $\vec{P} (7, -3)$ ، ك (٤ ، ٢ -)
- (٢٣) $\vec{P} (2, 5)$ ، ك (٥ ، ٤)
- (٢٤) $\vec{P} (-4, 6)$ ، ك (٢ - ، ٤ -)
- (٢٥) $\vec{P} (-3, 1)$ ، ك (٤ - ، ٦)
- (٢٦) $\vec{P} (2, 3)$ ، ك (٠ ، ٦ -)

في التمارين ٢٧-٣٠ ارسم المتجهات الهندسية التي تقابل $\vec{P}$. $\vec{B}$. $\vec{P} + \vec{B}$ ،

- $\vec{P} - \vec{B}$ ، $\vec{P} 2$ ، $\vec{B} 3 -$.
- (٢٧) $\vec{P} = 3\vec{h} + 2\vec{w}$ ، $\vec{B} = -\vec{h} + 5\vec{w}$
- (٢٨) $\vec{P} = -5\vec{h} + 2\vec{w}$ ، $\vec{B} = \vec{h} - 3\vec{w}$
- (٢٩) $\vec{P} = -\langle 6, 4 \rangle$ ، $\vec{B} = \langle 3, 2 - \rangle$
- (٣٠) $\vec{P} = \langle ., 2 \rangle$ ، $\vec{B} = \langle 0, 2 - \rangle$

في التمارين ٣١-٣٨ أوجد مقدار $\vec{P}$ واتجاهه

- (٣١) $\vec{P} = \langle 3 - , 3 \rangle$
- (٣٢) $\vec{P} = \langle \sqrt{3}, 2 - , 2 - \rangle$
- (٣٣) $\vec{P} = \langle ., 5 - \rangle$
- (٣٤) $\vec{P} = \langle 10, 0 \rangle$
- (٣٥) $\vec{P} = -4\vec{h} + 5\vec{w}$
- (٣٦) $\vec{P} = 10\vec{h} - 10\vec{w}$
- (٣٧) $\vec{P} = 18\vec{w}$
- (٣٨) $\vec{P} = \vec{h} + \vec{w}$

في التمارين ٣٩ - ٤٢ أوجد متجه وحدة له ($\vec{p}$) نفس اتجاه $\vec{p}$ (ب) اتجاه معاكس لاتجاه $\vec{p}$.

$$(٣٩) \quad \vec{p} = -\vec{a} - ٨\vec{b} + ١٥\vec{c}$$

$$(٤٠) \quad \vec{p} = ٥\vec{a} - ٣\vec{b}$$

$$(٤١) \quad \vec{p} = \langle ٥, ٢ \rangle$$

$$(٤٢) \quad \vec{p} = \langle ٦, ٠ \rangle$$

٢ - نظم الاحداثيات المتعامدة في ثلاثة ابعاد :

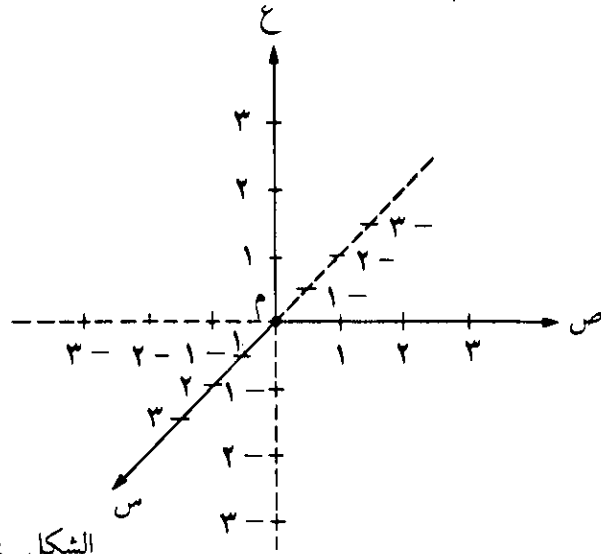
لكي نبحث خصائص المتجهات الهندسية في الفضاء يلزم ان نقدم نظام احداثيات ذا ثلاثة ابعاد . وهذا يتم بثلاثيات مرتبة من الاعداد الحقيقية . فالثلاثي المرتب ($\vec{p}, \vec{b}, \vec{a}$) هو مجموعة { $\vec{p}, \vec{b}, \vec{a}$ } مكونة من ثلاثة اعداد فيها $\vec{p}$ العنصر الاول ، $\vec{b}$ العنصر الثاني ، $\vec{a}$ العنصر الثالث . ويرمز لجميع عناصر الثلاثي المرتب بالرمز $\vec{p} \times \vec{b} \times \vec{a}$. ونقول ان الثلاثين المرتبين ($\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$) و ($\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$) متساويان ونكتب .

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$$

اذا فقط اذا كان $\vec{p}_1 = \vec{b}_1, \vec{p}_2 = \vec{b}_2, \vec{p}_3 = \vec{b}_3$.

ولكي نعين نقطة في الفضاء نختار نقطة ثابتة م (تدعى نقطة الاصل) ونعتبر ثلاثة خطوط احداثية متعامدة مثنى مثنى (تسمى محاور س ، ص ، ع) تلتقي في م . كما هو موضح في الشكل ١٤ - ١٢ . ولتسهيل تخيل هذا النظام يمكن ان نتخيل ان المحورين الصادي والسيني يقعان في مستوى الورقة في حين أن العيني ينطلق من الورقة معامدا لها . ويسمى هذا النوع من نظام الاحداثيات بالنظام الايمن أو نظام اليد اليمنى . واذا تبادل محورا السينات والصادات يصير النظام الناتج نظاما أيسر . ويسمى مستوى الاحداثيات الناتج عن محور السينات والصادات مستوى س ص . وذلك المستوى الناتج عن محور السينات والعينات بمستوى س ع .

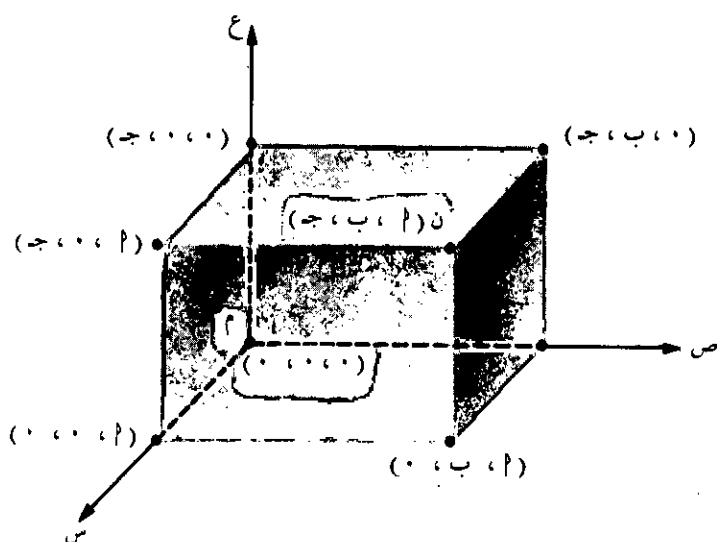
واذا كانت ن نقطة فسقطها على محور السينات له احداثي ما وليكن $\vec{p}$ ويسمى الاحداثي السيني للنقطة ن . ويمكن اعتبار الاحداثي السيني للنقطة ن بأنه المتجه من المستوى ص ع الى ن وبالمثل فالاحداثيان $\vec{b}$ و $\vec{a}$ لمسطي ن على محوري الصادات والعينات على الترتيب يدعيان بالاحداثي الصادي والاحداثي العيني للنقطة ن .



الشكل ١٤ - ١٢

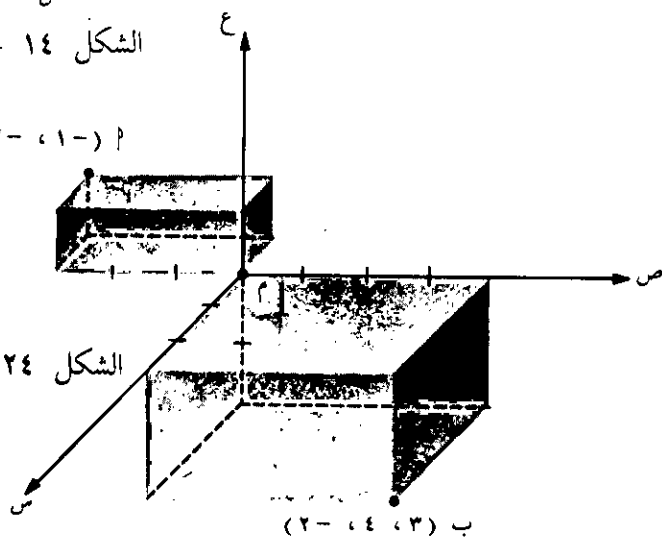
ونستعمل الثلاثي (١، ب، جـ) ليشير الى احداثيات النقطة ن بالاضافة الى ن نفسها. ونستعمل الرمز ن (١، ب، جـ) ايضا ليدل على النقطة ن التي احداثياتها ١، ب، جـ. واذا لم تقع ن على احد المستويات الاحداثية فان المستويات الثلاثة التي تمر خلال ن موازية لمستويات الاحداثيات تكون مع هذه المستويات متوازي مستطيلات كما يظهر الشكل ١٤ - ١٣ حيث تظهر الرؤوس الثمانية على النحو الذي وصفناه. وبالعكس فلكل ثلاثي مرتب (١، ب، جـ) من الأعداد الحقيقية توجد نقطة ن احداثياتها ١، ب، جـ.

ومفهوم رسم نقط في هذا النظام يشبه مفهوم الرسم في بعدين. ولتسهيل الرسم نجد من الملائم احيانا إنشاء متوازي مستطيلات كما يبين الشكل ١٤ - ١٣ وفي الشكل ١٤ - ١٤ عينت النقطتان ١ (١، ٣، ١)، ب (٣، ٤، ٢) ان هذا التناظر بين نقاط الفضاء وبين الثلاثيات المرتبة من الاعداد الحقيقية التي سبق وصفها يدعى نظام الاحداثيات المتعامدة في ثلاثة ابعاد. ومستويات الاحداثيات الثلاثة تجزيء الفضاء الى ثمانية أجزاء تدعى الأثمان. والثن الذي يتكون من جميع النقط ن (١، ب، جـ) حيث ١، ب، جـ موجبة يدعى الثمن الاول.

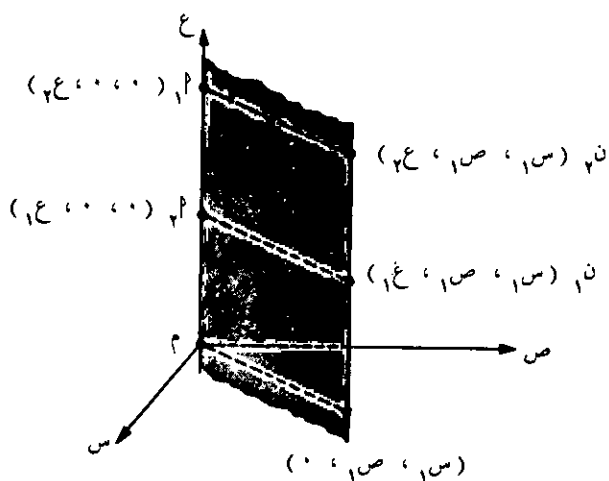


الشكل ١٤ — ١٣

$(١, ٣ - , ١ -) پ$



الشكل ٢٤ — ١٤



وليس من الصعب إيجاد صيغة للمسافة ل (ن_١ ، ن_٢) بين النقطتين ن_١ ، ن_٢ .
 فإذا كانت ن_١ ، ن_٢ على خط مواز لمحور العينات كما هو موضح في الشكل
 (١٤ - ١٣) وكان مسقطاهما على محور العينات هما م_١ (٠ ، ٠ ، ع_١) و م_٢ (٠ ، ٠ ، ع_٢)
 على الترتيب فان

$$ل (ن_1 ، ن_2) = ل (م_1 ، م_2) = |ع_1 - ع_2|$$

وتتحقق صيغ مشابهة اذا كان الخط المار بالنقطتين ن_١ ، ن_٢ موازيا لمحور السينات أو
 الصادات . واذا كانت هناك حالة من النوع الموضح في الشكل ١٤ - ١٦ فيكون المثلث
 ن_١ م_١ ن_٢ قائم الزاوية ومن ثم فباستعمال نظرية فيثاغورس يكون

$$ل (ن_1 ، ن_2) = \sqrt{ل (م_1 ، م_2)^2 + ل (م_1 ، ن_2)^2}$$

وبما ان ن_١ و م_١ تقعان في مستوى مواز للمستوى س ص فيتبع من صيغة المسافة في بعدين
 أن [ل (م_١ ، ن_٢)]^٢ = (س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢

ومن الملاحظة السابقة فان

$$ل (م_1 ، م_2) = \sqrt{(ع_2 - ع_1)^2}$$

وبالتعويض في الصيغة اعلاه عن ل (ن_١ ، ن_٢) نحصل على صيغة للمسافة في ثلاثة
 ابعاد كالتالي :

$$(١٤ - ١٢) ل (ن_1 ، ن_2) = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2 + \frac{1}{3} [ع_2 - ع_1]^2}$$

لاحظ انه اذا كانت ن_١ ، ن_٢ تقعان على المستوى س ص اي أن ع_١ = ع_٢ = ٠ .
 فان (١٤ - ١٢) تتحول الى صيغة المسافة في بعدين .

مثال ١ : أوجد المسافة بين م (١ - ، ٣ - ، ١) و ب (٣ ، ٤ ، ٢) .

الحل : رسمت النقطتان م و ب في الشكل ١٤ - ١٤ .

باستخدام (١٤ - ١٢) فان

$$ل (م ، ب) = \sqrt{(١ - ٣)^2 + (٣ + ٤)^2 + \frac{1}{3} (١ - ٢)^2}$$

$$= \sqrt{٧٤} = ٨ + ٤٩ = ١٦$$

استنادا الى الشكل (١٤ - ١٦) والمثلثات المتشابهة يمكن برهان النتيجة
 التالية :

(١٤ - ١٣) نقطة المنتصف

ان منتصف القطعة المستقيمة من P_1 (س₁، ص₁، ع₁) الى P_2 (س₂، ص₂، ع₂) هو

$$\left(\frac{14+14}{2}, \frac{15+15}{2}, \frac{16+16}{2} \right)$$

وكمثال على (١٤-١٣) خذ النقطتين $\mathbf{p}$ و $\mathbf{b}$ كما في المثال ١ فتكون احداثيات منتصف القطعة $\mathbf{p}$ هي $(1, \frac{1}{p}, -\frac{1}{p})$.

ويعرف بيان المعادلة في ثلاثة متغيرات $\mathbf{s}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{e}$ بأنه مجموعة النقط $(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{ج})$ في نظام احداثي متعامد بحيث ان الثلاثي المرتب $(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{ج})$ هو حل للمعادلة أي ان المساواة تحصل عندما نعوض $\mathbf{p}$ ، $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{ج}$ بدلا من $\mathbf{s}$ ، $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{e}$ على الترتيب. وبيانات معادلات كهذه هي سطوح من نوع ما. ومن السهل استنتاج معادلة يكون بيانها كرة نصف قطرها $\mathbf{r}$ ومركزها النقطة $\mathbf{m}$ (هـ، ك، ل).

فكما هو موضح بالشكل ١٤-١٧، فالنقطة P (س. ص، ع) تقع على الكرة اذا وفقط اذا كان L (م، P) $= R$.

وبتطبيق صيغة المسافة (١٤-١٢) نحصل على المعادلة العامة لكرة نصف قطرها r ومركزها m (هـ، ك، ل) كالآتي :

$$r = {}^2(\text{ل} - \text{ع}) + {}^2(\text{ك} - \text{ص}) + {}^2(\text{هـ} - \text{س}) \quad (14-13)$$

وإذا ربيعنا واختصرنا يمكن كتابة (١٤ - ١٤) بالصيغة

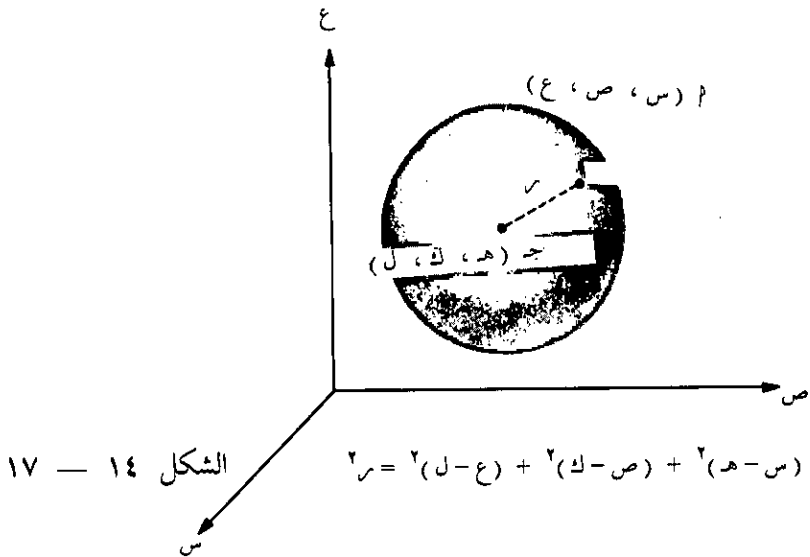
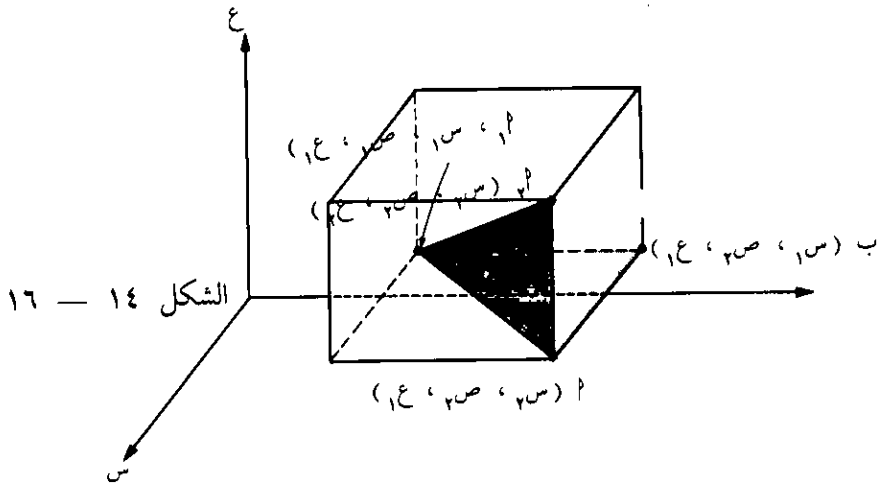
$$٠ = س + ص + ج + ع + ز$$

حيث ان المعاملات اعداد حقيقية

وبالعكس اذا بدأنا بمعادلة بهذه الصيغة فبأكمال المربع يمكن كتابة الطرف الايمن كما في (١٤-١٤) ويكون البيان ان وجد كرة أو نقطة .

مثال ٢ : ابحاث بيان المعادلة

$$٠ = ٤ + ع ٤ + ص ٨ + س ٦ - ٢ع + ٢ص + ٢س$$



الحل : نرتب عملنا كالآتي :

$$\begin{aligned} ٤ - &= (ع٤ + ٢ع) + (ص٨ + ٢ص) + (س٦ - ٢س) \\ &= (ع٤ + ٢ع) + (١٦ + ص٨ + ٢ص) + (٩ + س٦ - ٢س) \\ &٤ + ١٦ + ٩ + ٤ - \end{aligned}$$

$$٢٥ = ٢(٢ + ع) + ٢(٤ + ص) + ٢(٣ - س)$$

ومقارنة المعادلة الاخيرة بالصيغة (١٤-١٤) يتبع ان البيان هو كرة نصف

قطرها ٥ ومركزها م (٣ ، ٤ ، ٢) .

تمارين :

في التمارين ١-٦ ارسم النقطتين P ، ب وأوجد

(١) ل (P ، ب) (٢) منتصف P ب .

(١) P (٢ ، ٤ ، ٥ -) ، ب (٤ ، ٢ - ، ٣)

(٢) P (١ ، ٢ - ، ٧) ، ب (٢ ، ٤ ، ١ -)

(٣) P (٤ - ، ٠ ، ١) ، ب (٣ ، ٢ - ، ١)

(٤) P (٤ - ، ٥ ، ٠) ، ب (٠ ، ١ ، ١)

(٥) P (١ ، ٠ ، ١) ، ب (١ ، ١ ، ٠)

(٦) P (٠ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ - ، ٨ - ، ٤)

في التمرينين ٧ و ٨ اذا كان P وب رأسين متقابلين في متوازي مستطيلات وجوهه موازية للمستويات الاحداثية فأوجد احداثيات الرؤوس الاخرى .

(٧) P (٢ ، ٥ ، ٣ -) ، ب (٤ - ، ٢ ، ١)

(٨) P (٣ - ، ٢ ، ٦) ، ب (١ ، ٥ ، ١ -)

في التمرينين ٩ و ١٠ اثبت أن P ، ب ، ج هي رؤوس مثلث قائم الزاوية وأوجد مساحته

(٩) P (٢ ، ٠ ، ١) ، ب (٣ ، ١ ، ٢) ، ج (١ ، ٢ ، ٠)

(١٠) P (٤ - ، ٣ ، ٢) ، ب (٦ - ، ٢ ، ١) ، ج (٧ - ، ٦ ، ٥) .

في التمارين ١١-١٤ أوجد معادلة الكرة التي مركزها م ونصف قطرها ر

(١١) م (٣ ، ١ - ، ٢) ، ر = ٣

(١٢) م (٤ - ، ٥ ، ١) ، ر = ٥

(١٣) م (٥ - ، ٠ ، ١) ، ر = ١٢

(١٤) م (٠ - ، ٣ - ، ٦) ، ر = $\sqrt{3}$

(١٥) أوجد معادلة الكرة التي مركزها (٢ - ، ٤ ، ٦) بحيث تكون كالآتي :

(P) مماسة للمستوى ص ع (ب) مماسة للمستوى س ع

(ب) مماسة للمستوى س ص .

(١٦) أوجد معادلة الكرة التي قطرها P ب حيث

P (١ ، ٤ ، ٢) وب (٧ - ، ١ ، ٢)

في التمارين ١٧-٢٢ أوجد مركز الكرة المعطاة ونصف قطرها .

$$(١٧) \quad ٠ = ٢ + ع + ص - ٤س + ٢ع + ٢ص + ٢س$$

$$(١٨) \quad ٠ = ٣٤ + ع + ١٠ص - ٦س + ٢ع + ٢ص + ٢س$$

$$(١٩) \quad ٠ = ١٦ + ٨ص + ٨س - ٢ع + ٢ص + ٢س$$

$$(٢٠) \quad ٠ = ٣ - ٨ص + ٤س - ٢ع + ٢ص + ٢س$$

$$(٢١) \quad ٠ = ٤ص + ٢ع + ٢ص + ٢س$$

$$(٢٢) \quad ٠ = ٢ص + ٢ع - ٢ص$$

(٢٣) أوجد معادلة مجموعة النقط التي تبعد ابعادا متساوية عن النقطتين

١ (٢، ١-، ٣) و ٢ (١-، ٥، ١) . صف بيان المعادلة .

(٢٤) حل التمرين ٢٣ بالنسبة للنقطتين ١ (٥، ٠، ٤) و ٢ (٢، ١-، ٧) .

(٢٥) صف البيان لكل من المعادلات الآتية :

$$(١) \quad ع = ٥ \quad (ب) \quad ص = ٢ \quad (ج) \quad س = ٠$$

(٢٦) صف البيان للمعادلة $٠ = ع ص س$

في التمارين ٢٧-٣٠ صف المنطقة مـ في نظام إحداثي ذي ثلاثة ابعاد .

$$(٢٧) \quad م = \{ (ع، ص، س) : ١ \geq ع + ص + س \}$$

$$(٢٨) \quad م = \{ (ع، ص، س) : ١ < ع + ص + س \}$$

$$(٢٩) \quad م = \{ (ع، ص، س) : |ع| \geq ٣، |ص| \geq ٢ \}$$

$$(٣٠) \quad م = \{ (ع، ص، س) : ١ = ع + ص + س \}$$

٣ — المتجهات في ثلاثة ابعاد :

بطريقة مشابهة لما مرّ في البند الاول يمكن تعريف النظام مجـ في ثلاثة ابعاد بمجموعة جميع الثلاثيات المرتبة $\langle ١، ٢، ٣ \rangle$ من الاعداد الحقيقية التي تحقق بعض الشروط المعينة . وتدعى الاعداد $١، ٢، ٣$ بمركبات المتجه $\langle ١، ٢، ٣ \rangle$.
وكالسابق نشير الى الاعداد الحقيقية بالاعداد القياسية .

$$\text{اذا كان } \vec{١} = \langle ١، ٢، ٣ \rangle \text{ وكان } \vec{ب} = \langle ١، ٢، ٣ \rangle \text{ } \vec{ب} = \langle ١، ٢، ٣ \rangle$$

وكان جـ عددا قياسيا فان الجمع والضرب بعدد قياسي يعرفان كالآتي :

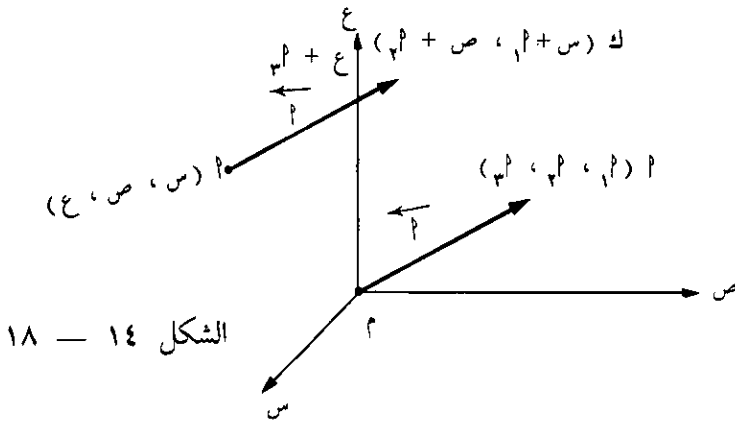
$$\vec{ب} + \vec{ب} = \langle ١، ٢، ٣ \rangle + \langle ١، ٢، ٣ \rangle = \langle ٢، ٤، ٦ \rangle$$

$$\vec{ب} = \langle ١، ٢، ٣ \rangle = \langle ١، ٢، ٣ \rangle$$

والمتجه الصفري هو $\langle 0, 0, 0 \rangle$. وسالب $\vec{P}$ هو $-\vec{P} = \langle -P_1, -P_2, -P_3 \rangle$. ويعرف الطرح كالآتي :

$$\vec{P} - \vec{Q} = \langle P_1 - Q_1, P_2 - Q_2, P_3 - Q_3 \rangle$$

ويمكن دون اية صعوبة تعميم خصائص المتجهات في بعدين لتشمل ثلاثة ابعاد في متجه وذلك بان نأخذ مركبة ثالثة في الحساب . وبشكل خاص فالخواص المبينة في (١٢-٢) و (١٤-٨) برهانها جاهز .



الشكل ١٤ - ١٨

ويمكن تمثيل المتجه $\vec{P} = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$ في متجه بنظام احداثي متعامد وذلك بواسطة متجه هندسي $\vec{P}$ كمن نقطة بداية اختيارية $P(S, V, E)$ ونقطة نهاية ك $(S+P_1, V+P_2, E+P_3)$ كما هو موضح في الشكل (١٤-١٨) . وكالسابق فالمتجهات الهندسية يشار اليها احيانا بالمتجهات لان المعنى يكون واضحا من المناقشة . واذا كانت احداثيات P هي (P_1, P_2, P_3) فيسمى $\vec{P}$ (انظر الشكل ١٤-١٨) بمتجه الموضع الذي يقابل $\vec{P} = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$. والتفسير الهندسي لحاصل جمع المتجهات في ثلاثة ابعاد هو نفسه كما هو الحال في بعدين . والمقدار $|\vec{P}|$ للمتجه $\vec{P} = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$ هو طول أي تمثيل هندسي له .

وبتطبيق صيغة المسافة (١٤-٢) نستنتج ان

$$|\vec{P}| = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$$

لاحظ ان $|\vec{P}| \geq 0$. ويكون $|\vec{P}| = 0$ اذا وفقط اذا كان

$$|\vec{P}| = 0 \quad \text{وكما هو الحال في البعدين يمكن اثبات أن}$$

$$|\vec{P}| = |\vec{P}| \quad \text{جـ}$$

مثال ١ : اذا كان $\vec{P} = \langle 2, 5, -3 \rangle$ وكان

$$\vec{B} = \langle -4, 1, 7 \rangle \text{ أوجد } \vec{P} + \vec{B}, \vec{P} - \vec{B} \text{ وكذلك } |\vec{P}|.$$

الحل :

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{B} &= \langle 2, 5, -3 \rangle + \langle -4, 1, 7 \rangle = \langle -2, 6, 4 \rangle \\ \vec{P} - \vec{B} &= \langle 2, 5, -3 \rangle - \langle -4, 1, 7 \rangle = \langle 6, 4, -10 \rangle \\ |\vec{P}| &= \sqrt{2^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{38} \end{aligned}$$

$$|\vec{P}| = \sqrt{38} \text{ ويكون المتجه } \vec{P} \text{ متجه وحدة اذا كان } 1 = |\vec{P}|$$

والمتجهات الخاصة

$$\vec{e}_1 = \langle 1, 0, 0 \rangle, \vec{e}_2 = \langle 0, 1, 0 \rangle, \vec{e}_3 = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\vec{e}_1 = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

مهمة لان أي متجه $\vec{P} = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ يمكن التعبير عنه كتجميع خطي للمتجهات $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

وبالتحديد فان

$$\vec{P} = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle = p_1 \vec{e}_1 + p_2 \vec{e}_2 + p_3 \vec{e}_3$$

وكما هو في البند الاول فقواعد الجمع والطرح والضرب بعدد قياسي يمكن تحويلها بسهولة للرموز $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

ومن الملائم احيانا ان نعتبر $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ كمجموعة جزئية من $\mathcal{M}$ وذلك باعتبار

$$\vec{e}_1 = \langle 1, 0, 0 \rangle, \vec{e}_2 = \langle 0, 1, 0 \rangle, \vec{e}_3 = \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

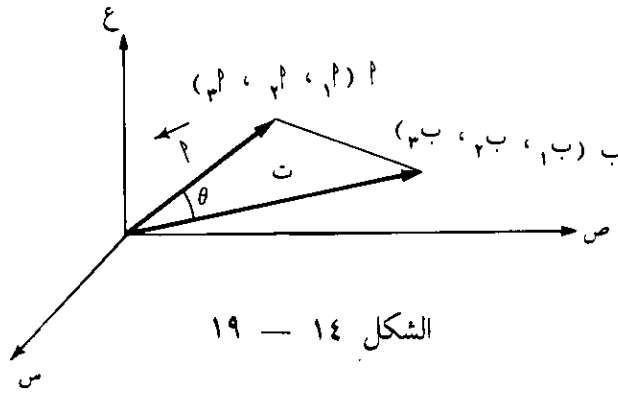
واذا عملنا هذا فلن يكون هناك أي فارق اساسي بين المتجهين $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ وفي

(٩-١٤) والمتجهين $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ والمعرفين اعلاه.

والمفهوم التالي الذي سنقدمه له عدة تطبيقات فيزيائية ورياضية. وبالاسلوب

الذي اتبعناه في عملنا سابقا سنبدأ بالتعريف الجبري ونعطي تفسيراً هندسياً

وفيزيائياً في نهاية البند.



(١٤-١٥) تعريف الضرب الداخلي : (inner product)

إذا كان $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ و $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ وكان $\vec{B} \cdot \vec{P} = \langle \vec{B}, \vec{P} \rangle$ فيكون الضرب الداخلي $\vec{B} \cdot \vec{P}$ كالآتي :

$$\vec{B} \cdot \vec{P} = P_1 B_1 + P_2 B_2 + P_3 B_3$$

ويسمى الضرب الداخلي أيضا بالضرب القياسي أو الضرب النقطي . ومن المهم ملاحظة أن $\vec{B} \cdot \vec{P}$ كمية قياسية وليس متجهًا .

فمثلا :

$$\langle \vec{B}, \vec{P} \rangle = \langle (2, -3, 1), (-1, 4, 5) \rangle = (-2) + (-12) + 5 = -9$$

وكذلك

$$= (-2) + (-12) + 5 = -9$$

(١٤-١٦) خصائص الضرب الداخلي

إذا كان $\vec{P}, \vec{B}, \vec{C}$ جد ثلاثة متجهات ، و عدد قياسي فان

الخصائص التالية تتحقق :

$$\vec{P} \cdot \vec{P} = |\vec{P}|^2 \quad (١)$$

$$\vec{P} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{P} \quad (٢)$$

$$\begin{aligned} \overleftarrow{ج} \cdot \overleftarrow{پ} \cdot \overleftarrow{ع} \cdot \overleftarrow{پ} &= (\overleftarrow{ج} + \overleftarrow{ع}) \cdot \overleftarrow{پ} \quad (3) \\ \cdot (\overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{س}) \cdot \overleftarrow{پ} &= (\overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{پ}) \cdot \overleftarrow{س} = \overleftarrow{ب} \cdot (\overleftarrow{پ} \cdot \overleftarrow{س}) \quad (4) \\ &= \overleftarrow{پ} \cdot \overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{س} \quad (5) \end{aligned}$$

وبرهان (١٤ - ١٦) ينتج مباشرة من (١٤ - ١٥) ومن خصائص الاعداد الحقيقية. وهكذا اذا كان

$$\begin{aligned} & \langle \overset{\leftarrow}{b}_1, \overset{\leftarrow}{b}_2, \overset{\leftarrow}{b}_3 \rangle = \overset{\leftarrow}{b}, \quad \langle \overset{\leftarrow}{p}_1, \overset{\leftarrow}{p}_2, \overset{\leftarrow}{p}_3 \rangle = \overset{\leftarrow}{p} \\ & \text{فإن } \langle \overset{\leftarrow}{j}_1, \overset{\leftarrow}{j}_2, \overset{\leftarrow}{j}_3 \rangle = \overset{\leftarrow}{j} \\ & \langle \overset{\leftarrow}{p}_1, \overset{\leftarrow}{p}_2, \overset{\leftarrow}{p}_3 \rangle = (\overset{\leftarrow}{b} + \overset{\leftarrow}{j}) \cdot \langle \overset{\leftarrow}{b}_1, \overset{\leftarrow}{b}_2, \overset{\leftarrow}{b}_3 \rangle + \langle \overset{\leftarrow}{j}_1, \overset{\leftarrow}{j}_2, \overset{\leftarrow}{j}_3 \rangle \\ & \quad (\overset{\leftarrow}{j}_1, \overset{\leftarrow}{j}_2, \overset{\leftarrow}{j}_3) \\ & = \langle \overset{\leftarrow}{b}_1, \overset{\leftarrow}{b}_2, \overset{\leftarrow}{b}_3 \rangle \cdot (\overset{\leftarrow}{b} + \overset{\leftarrow}{j}) + \langle \overset{\leftarrow}{j}_1, \overset{\leftarrow}{j}_2, \overset{\leftarrow}{j}_3 \rangle + (\overset{\leftarrow}{b}_1 \overset{\leftarrow}{p}_2 + \overset{\leftarrow}{b}_2 \overset{\leftarrow}{p}_3 + \overset{\leftarrow}{b}_3 \overset{\leftarrow}{p}_1) \\ & \quad \overset{\leftarrow}{j} \cdot \overset{\leftarrow}{p} + \overset{\leftarrow}{b} \cdot \overset{\leftarrow}{p} = \end{aligned}$$

وبراهن باقي الخصائص يترك كتمارين .
وهناك صلة وثيقة بين الضرب الداخلي والزوايا المحصورة بين المتجهين كما يتبين مما يلي :

(١٤-١٧) تعريف الزاوية بين متجهين .

خذ $\vec{p}$ و $\vec{b}$ متجهين غير الصفر. فإذا لم تكن $\vec{b}$ حاصل ضرب $\vec{p}$ في عدد قياسي وكان $\vec{m} \leftarrow \vec{m}$ و $\vec{m} \leftarrow \vec{m}$ متجهي موضع يناظران $\vec{p}$ و $\vec{b}$ على الترتيب فالزاوية θ بين $\vec{p}$ و $\vec{b}$ (أو بين $\vec{m} \leftarrow \vec{m}$ و $\vec{m} \leftarrow \vec{m}$ تعرف بزاوية $\vec{m} \leftarrow \vec{m}$ للمثلث المعين بالنقط $\vec{m} \leftarrow \vec{m}$ ، $\vec{m} \leftarrow \vec{m}$ ، $\vec{m} \leftarrow \vec{m}$) (انظر الشكل ١٤ - ١٩). وإذا كان $\vec{b} = \vec{p}$ حيث $\vec{p}$ عدد قياسي فإن $\theta = 0$ ، أو $\theta = \pi$ حسب كون $\vec{p} < 0$ أو $\vec{p} > 0$.

(١٤-١٨) نظرية : اذا كانت θ زاوية محصورة بين متجهين غير الصفر ، μ و ν

فان $\vec{p} \cdot \vec{p} = |\vec{p}| |\vec{p}| = p^2$ جتا θ

الزهران : اذا كان $\bar{b} \neq \bar{a}$ فنحصل على حالة مشابهة لتلك الموضحة في الشكل ١٤-١٩.

وبتطبيق قاعدة جيب تمام على المثلث عمى نجد أن

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{c}| \quad \text{جنا } \theta$$
وننتيجة لهذا فان

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2$$

التي تتحول الى

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2$$

وبقسمة طرفي المعادلة الاخيرة على 2 يحصل الاستنتاج المطلوب .
واذا كان $\vec{a} = \vec{b}$ فاستخدام (٤) و (١) من (١٤-١٦) نحصل على
 $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$

وابضا فان

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$$

فاذا كانت $\vec{a} < \vec{b}$ فان $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ، $\vec{a} = \vec{b}$ ،

وتتحول $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ جنا θ الى $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

ومن ثم فان

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$$

واذا كانت $\vec{a} > \vec{b}$ فان $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ، $\vec{a} = \vec{b}$ ،

ومرة اخرى تتحول $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ جنا θ الى $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.
وهذا يكمل برهان النظرية .

مثال ٢ : أوجد جيب تمام الزاوية بين $\vec{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 2, 2, 1 \rangle$.

الحل : بتطبيق (١٤-١٨) ينتج ان

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \cos \theta$$

$$\frac{(2-)(1) + (2)(3-) + (1)(4)}{\sqrt{4+4+1} \sqrt{1+9+16}} =$$

$$\frac{\sqrt{26} - 4}{78} = \frac{4 - \sqrt{26}}{78} =$$

(١٤-١٩) تعريف: المتجهات المتوازية والمتجهات المتعامدة

افترض أن θ هي زاوية بين متجهين غير الصفر $\vec{P}$ و $\vec{B}$

(١) $\vec{P}$ و $\vec{B}$ متوازيان اذا كانت $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$

(٢) $\vec{P}$ و $\vec{B}$ متعامدان اذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$

ومن المناسب ان نفترض ان المتجه الصفري $\vec{0}$ يكون موازيا وعموديا على كل متجه $\vec{P}$. والنظرية التالية هي نتيجة من (١٤-١٨).

(١٤-٢٠) نظرية: يكون المتجهان $\vec{P}$ و $\vec{B}$ متعامدين اذا وفقط اذا كان $\vec{P} \cdot \vec{B} = 0$.

مثال ٣: برهن على ان ازواج المتجهات التالية متعامدة

(١) $\vec{P}$ و $\vec{B}$ (ب) $\vec{P}$ و $\vec{B}$ (ج) $\vec{P}$ و $\vec{B}$

الحل: يتبع البرهان من (١٤-٢٠)

(١) $\vec{P} \cdot \vec{B} = 0$ و $\vec{P} \cdot \vec{B} = 0$ و $\vec{P} \cdot \vec{B} = 0$

$0 = (0)(0) + (1)(0) + (0)(1) =$

$0 = 2 - 28 - 30 = (10 + 4 - 2) \cdot (3 - 7 + 2) =$

اذا كان $\vec{P}$ و $\vec{B}$ متجهين غير الصفر فانه باستخدام (١٣-١٨) يكون

$\vec{P} \cdot \vec{B} = |\vec{P}| |\vec{B}| \cos \theta$ جتا θ

حيث θ هي الزاوية المحصورة بين $\vec{P}$ و $\vec{B}$.

وبما أن $|\vec{P}| |\vec{B}| \cos \theta \geq 0$ فينتج ان

$$(١٤-٢١) \quad |\vec{P}| \geq |\vec{B}| \quad |\vec{P}| \geq |\vec{B}|$$

وتسمى الصيغة (١٤-٢١) بمتباينة كوشي و شوارتز

Cauchy - Schwarz inequality

ونسنتعملها لبرهان النتيجة التالية

(١٤-٢٢) المتباينة المثلثية

إذا كان $\vec{P}$ و $\vec{B}$ متجهين فإن

$$|\vec{B}| + |\vec{P}| \geq |\vec{B} + \vec{P}|$$

البرهان : باستخدام خصائص الضرب الداخلي يمكن كتابة

$$\begin{aligned} |\vec{B} + \vec{P}|^2 &= (\vec{B} + \vec{P}) \cdot (\vec{B} + \vec{P}) \\ &= \vec{B} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{P} + \vec{P} \cdot \vec{B} + \vec{P} \cdot \vec{P} \\ &= |\vec{B}|^2 + 2\vec{B} \cdot \vec{P} + |\vec{P}|^2 \end{aligned}$$

وبما أن $\vec{B} \cdot \vec{P} \geq |\vec{B}| |\vec{P}| \cos \theta$ فإن

$$\begin{aligned} |\vec{B} + \vec{P}|^2 &\geq |\vec{B}|^2 + 2|\vec{B}| |\vec{P}| \cos \theta + |\vec{P}|^2 \\ &= (|\vec{B}| + |\vec{P}| \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

وبأخذ الجذور التربيعية نحصل على

$$|\vec{B} + \vec{P}| \geq |\vec{B}| + |\vec{P}| \cos \theta$$

ويتضح سبب تسمية المتباينة بالمثلثية إذا مثلنا المتجهين $\vec{P}$ و $\vec{B}$ هندسيا كما في

الشكل ١٤ - ٢٠ . ففي هذه الحالة يقتضي (١٤ - ٢٢) أن أي ضلع المثلث

لا يزيد عن مجموع الضلعين الآخرين .

وتعرف الزاوية المحصورة بين متجهين هندسيين $\vec{P}$ و $\vec{B}$ بالزاوية المحصورة بين

متجهي $\vec{M}$ و $\vec{N}$ اللذين لهما نفس مقدار $\vec{P}$ و $\vec{B}$ و $\vec{M}$ و $\vec{N}$ متجهان على الترتيب

(انظر الشكل ١٤ - ٢١) .

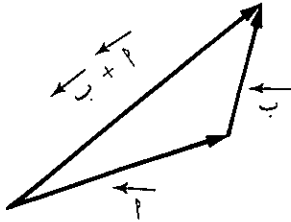
وإذا كان $\vec{M}$ و $\vec{N}$ يقابلان $\vec{P}$ و $\vec{B}$ على الترتيب فيعرف الضرب الداخلي $\vec{P} \cdot \vec{B}$

ت $\vec{P} \cdot \vec{B}$ كالآتي :

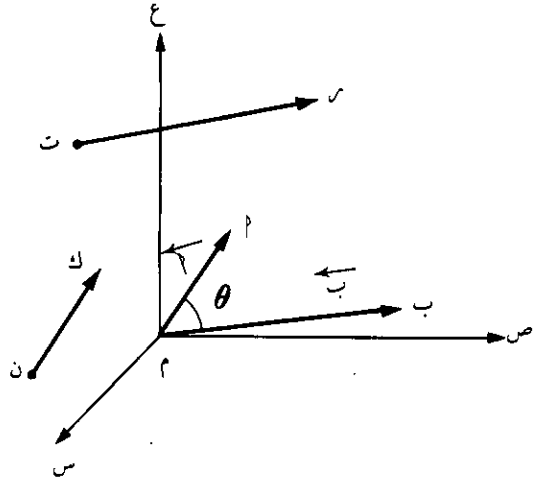
$$\vec{P} \cdot \vec{B} = |\vec{P}| |\vec{B}| \cos \theta$$

وبما أن $\vec{P} \cdot \vec{B} = |\vec{P}| |\vec{B}| \cos \theta$ و $\vec{P} \cdot \vec{B} = |\vec{P}| |\vec{B}| \cos \theta$ فيمكن كتابة

$$(١٤-٢٣) \quad \vec{P} \cdot \vec{B} = |\vec{P}| |\vec{B}| \cos \theta$$



الشكل ١٤ - ٢٠



الشكل ١٤ - ٢١

وإذا كان $\vec{p}$ و $\vec{r}$ متجهين هندسيين لهما نفس نقطة البداية وكانت $\vec{s}$ هي مسقط $\vec{p}$ على الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $\vec{p}$ و $\vec{r}$ (انظر الشكل ١٤ - ٢٢) فيسمى المقدار $|\vec{p}| \cos \theta$ بمركبة $\vec{p}$ باتجاه $\vec{r}$.

لاحظ أن $|\vec{p}| \cos \theta$ يكون موجبا أو سالبا حسب كون $\theta \geq \frac{\pi}{2}$.

أو $\frac{\pi}{2} > \theta \geq \pi$ على الترتيب.

وإذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ فتكون المركبة صفرا.

ويتبع من (١٤ - ٣٢) بأخذ $\vec{p} = \vec{t}$ أن

$$(١٤ - ٢٤) \quad |\vec{p}| \cos \theta = \frac{1}{|\vec{r}|} \vec{p} \cdot \vec{r}$$

وهذا يبين أنه لايجاد مركبة $\vec{p}$ باتجاه $\vec{r}$ فيمكن اخذ الضرب الداخلي ل $\vec{p}$ و $\vec{r}$ مع متجه وحدة له نفس اتجاه $\vec{r}$.

ويمكن تطبيق هذا المفهوم على المتجهات في مج $\mathbb{R}^3$ وذلك بمجرد تمثيل $\vec{a}$ و $\vec{b}$

بمتجهين هندسيين $\vec{P}$ ك و $\vec{P}$ ر على الترتيب كما في الشكل ١٤ - ٢٢ .
ومركبة $\vec{P}$ باتجاه $\vec{B}$ ويرمز لها بالرمز $\vec{P}$ تعرف كما في (١٤ - ٢٤)
أي أن

$$(١٤ - ٢٥) \quad \vec{P} = |\vec{P}| \cos \theta \quad \vec{B} = \frac{1}{|\vec{B}|} \vec{B}$$

وفي الحالة الخاصة حيث $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \vec{P}_4 + \vec{P}_5 + \vec{P}_6$
يكون حسب (١٤ - ٢٥) :

$$\vec{P}_1 = \vec{P} \cos \theta_1$$

$$\vec{P}_2 = \vec{P} \cos \theta_2$$

$$\vec{P}_3 = \vec{P} \cos \theta_3$$

مثال ٤ : أوجد مركبة $\vec{P}$ = ٤ هـ - ٥ و + ٥ ز باتجاه

$$\vec{B} = ٦ هـ + ٣ و - ٢ ز .$$

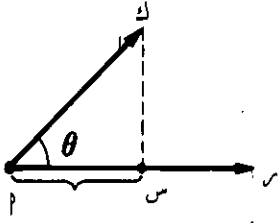
الحل : باستخدام (١٤ - ٢٥) :

$$\vec{P} = (٤ هـ - ٥ و + ٥ ز) \cdot \frac{1}{\sqrt{١٠}} \cdot (٦ هـ + ٣ و - ٢ ز)$$

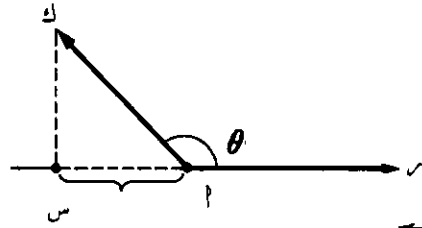
$$= \frac{1}{\sqrt{١٠}} (٢٤ - ٣ - ١٠) = \frac{11}{\sqrt{١٠}}$$

وسنهي هذا البند بتفسير فيزيائي للضرب الداخلي : نكرر انه من (٦ - ٢٣)
يكون الشغل الناتج عن تأثير قوة ثابتة ق لمسافة ف هو ش = ق ف . وهذه
الصيغة مفيدة جدا لانه يمكن استعمالها فقط اذا كانت القوة مؤثرة في خط
الحركة .

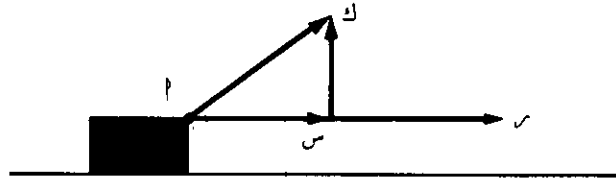
وبشكل عام افترض ان المتجه $\vec{P}$ ك يمثل قوة وان نقطة تأثيرها تتحرك على
المتجه $\vec{P}$ ر . وهذا موضح في الشكل ١٤ - ٢٣ حيث استعملت قوة $\vec{P}$ ك
لسحب جسم على مسار مستو من $\vec{P}$ الى ر . ويكون المتجه $\vec{P}$ ك هو حاصل جمع
المتجهين $\vec{P}$ س و س ك .



$$\frac{|P|}{\cos \theta} < \dots$$



$$\frac{|P|}{\cos \theta} > \dots$$



الشكل ١٤ — ٢٣

وبما أن $\vec{P}$ لا يؤثر على الحركة الأفقية فيمكن افتراض الحركة من P إلى R مسببة عن $\vec{P}$ لوحده.

وبتطبيق (٢٣-٦) فيمكن إيجاد الشغل W بضرب مركبة P في اتجاه $\vec{P}$ R بالمسافة $|R|$ أي أن

$$W = |\vec{P}| \cos \theta \cdot |R| = |\vec{P}| \cdot |R| \cdot \cos \theta$$

وهذا يقودنا إلى التعريف التالي :

(٢٦-١٤) تعريف الشغل :

إن الشغل الذي تبذله قوة ثابتة P مؤثرة باتجاه $\vec{P}$ يعطى بالمقدار $P \cdot R$. وفي البند القادم سنأخذ بعض الأمثلة العددية لـ (٢٦-١٤) بعد أن يكون القارئ قد حصل على التدريب الكافي في الضرب الداخلي والمتجهات الهندسية.

تمارين :

- ١) أكمل برهان (١٤-١٦).
 - ٢) برهن (٢-١٤) و (٨-١٤) في مج ٣.
- في التمارين ٣-٨ أوجد $\vec{P} + \vec{B}$ ، $\vec{P} - \vec{B}$ ، $|\vec{P}|$ ، $|\vec{B}|$ ، $|\vec{P} - \vec{B}|$.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \langle 1, 3, - \rangle = \vec{b}, \langle 1, 6, 2, - \rangle = \vec{p} \\
 (4) \quad & \langle 1, 0, 4, - \rangle = \vec{b}, \langle 3, - \rangle = \vec{p} \\
 (5) \quad & \langle 3, - \rangle = \vec{p}, \langle 4, - \rangle = \vec{b}, \langle 2, - \rangle = \vec{b}, \langle 5, - \rangle = \vec{b} \\
 (6) \quad & \langle 2, - \rangle = \vec{p}, \langle 4, - \rangle = \vec{b}, \langle 5, - \rangle = \vec{b} \\
 (7) \quad & \langle 2, - \rangle = \vec{p}, \langle 4, - \rangle = \vec{b}, \langle 5, - \rangle = \vec{b} \\
 (8) \quad & \langle 2, - \rangle = \vec{p}, \langle 4, - \rangle = \vec{b}, \langle 5, - \rangle = \vec{b}
 \end{aligned}$$

في التمرينين ٩ و ١٠ ارسم المتجهات الهندسية التي تقابل $\vec{p}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{p} - \vec{b}$ ، $\vec{p} + \vec{b}$

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \langle 2, 2, 1 \rangle = \vec{b}, \langle 4, 3, 2 \rangle = \vec{p} \\
 (10) \quad & \langle 2, - \rangle = \vec{b}, \langle 3, - \rangle = \vec{b}, \langle 4, - \rangle = \vec{b}, \langle 5, - \rangle = \vec{b} \\
 \text{إذا كان } \vec{p} = \langle 1, 3, 2, - \rangle, \vec{b} = \langle 5, 4, 7 \rangle, \\
 \text{جـ } \langle 2, 5, - \rangle = \vec{b} \text{ حل كلاً من التمارين ١١ - ٢٠.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & \vec{p} \\
 (12) \quad & \vec{b} \\
 (13) \quad & (\vec{b} + \vec{p}) \\
 (14) \quad & (\vec{b} - \vec{p}) \\
 (15) \quad & (\vec{b} + \vec{p}) \\
 (16) \quad & (\vec{b} - \vec{p}) \\
 (17) \quad & \vec{p} \\
 (18) \quad & \vec{b} \\
 (19) \quad & (\vec{p} + \vec{b}) \\
 (20) \quad & \vec{p}
 \end{aligned}$$

في التمارين ٢١ - ٢٤ أوجد جيب تمام الزاوية المحصورة بين $\vec{p}$ و $\vec{b}$.

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \langle 2, - \rangle = \vec{b}, \langle 4, - \rangle = \vec{p}, \langle 5, - \rangle = \vec{b} \\
 (22) \quad & \langle 2, - \rangle = \vec{b}, \langle 4, - \rangle = \vec{p}, \langle 5, - \rangle = \vec{b} \\
 (23) \quad & \langle 2, - \rangle = \vec{b}, \langle 4, - \rangle = \vec{p}, \langle 5, - \rangle = \vec{b} \\
 (24) \quad & \langle 2, - \rangle = \vec{b}, \langle 4, - \rangle = \vec{p}, \langle 5, - \rangle = \vec{b}
 \end{aligned}$$

- (٢٥) أوجد جـ التي تجعل المتجهين ٣ هـ - و - جـ ز ،
 ٢ جـ هـ - ٣ و - ٤ ز متعامدين .
 أوجد جميع قيم جـ التي تجعل المتجهين
 (٢٦) ٣ جـ ، ١ ، - ٤ جـ و جـ ، ٤ ، ٢ < متعامدين
 (٢٧) أوجد متجه وحدة عموديا على كل من
 $\langle ٧ ، - ١٠ ، ١ \rangle$ و $\langle - ٢ ، ٢ ، ٣ \rangle$
 (٢٨) أوجد متجهي وحدة في مجـ عموديين على $\vec{P} = \langle - ٢ ، - ١ \rangle$.
 (٢٩) تحت أي شروط يكون الاتي صحيحا ؟

$$(\vec{P}) \quad |\vec{P}| \cdot |\vec{B}| = |\vec{B}| \quad |\vec{P}| = |\vec{B}|$$

$$(\text{ب}) \quad |\vec{P} - \vec{B}| = |\vec{P}| + |\vec{B}|$$

 (٣٠) برهن ان $|\vec{P} - \vec{B}| \leq |\vec{P}| + |\vec{B}|$ لكل $\vec{P}$ ، $\vec{B}$ (ملاحظة : ضع
 $\vec{P} = \vec{B} + (\vec{P} - \vec{B})$ واستعمل المتباينة المثلثية .
 (٣١) اثبت أن $\vec{P} + \vec{B} = |\vec{P} - \vec{B}|$. $\vec{P} - \vec{B} = \vec{B}$ لجميع $\vec{P}$ ، $\vec{B}$ مجـ .
 (٣٢) عمم (١٤-٢٢) ليشمل حاصل جمع عدد محدود من المتجهات .

٤ — الدراسة الهندسية للمتجهات :

سنقدم في هذا البند مفاهيم للمتجهات الهندسية مفيدة لدراسة الخطوط المستقيمة والمستويات في الفضاء .

(١٤-٢٧) تعريف زوايا الاتجاهات وجيوب تمام الاتجاهات

ان زوايا الاتجاهات للمتجه $\vec{P} = \langle P_1 , P_2 , P_3 \rangle$ هي الزوايا α ، β ،
 المحصورة بين المتجهات هـ ، و ، ز على الترتيب والمتجه $\vec{P}$. فجيوب تمام
 اتجاهات $\vec{P}$ هي جتا α ، جتا β ، جتا γ . ونذكر دائما زوايا اتجاهات
 المتجه بالترتيب الثابت α ، β ، γ .
 فاذا كان $\vec{P}$ هو متجه موضع يقابل $\vec{P}$ فيكون من الملائم اعتبار هذه الزوايا
 مقيسة من كل محور احداثي الى $\vec{P}$ كما يشير السهم في الشكل ١٤-٢٤ .
 لاحظ ان كل زاوية اتجاه تقع في الفترة $[0 , \pi]$.
 وبالطبع فان تعريف زوايا الاتجاهات وجيوب تمامها لاي متجه هندسي $\vec{P}$ كـ
 تطابق تلك التي هي للمتجه $\vec{P}$ الذي يقابل $\vec{P}$.

(١٤-٢٨) نظرية :

إذا كانت α ، β ، γ هي زوايا اتجاهات لمتجه غير الصفر $\vec{P} = \langle \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 \rangle$ فان الخصائص التالية تتحقق :

$$(١) \quad \text{جتا } \alpha = \frac{\vec{P}_1}{|\vec{P}|} , \text{ جتا } \beta = \frac{\vec{P}_2}{|\vec{P}|} , \text{ جتا } \gamma = \frac{\vec{P}_3}{|\vec{P}|}$$

$$(٢) \quad \text{جتا}^2 \alpha + \text{جتا}^2 \beta + \text{جتا}^2 \gamma = ١$$

(٣) زوايا اتجاهات $-\vec{P}$ هي $\pi - \alpha$ ، $\pi - \beta$ ، $\pi - \gamma$

البرهان : إذا كانت ع هي النقطة ذات الاحداثيات $(\vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3)$ فان م $\vec{P}$ هو متجه الموضع الذي يقابل $\vec{P}$. افرض ان ع $(\vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3)$ هي مسقط ع على محور السينات . فاذا كانت $\alpha < \frac{\pi}{2}$. فكما هو موضح في (١) من الشكل (١٤-٢٥) تكون α حادة عند م للمثلث القائم م ع ع ولهذا فان جتا α

$$= \frac{\vec{P}_1}{|\vec{P}|} . \text{ واذا كانت } \alpha > \frac{\pi}{2} . \text{ فكما هو موضح في (٢) من الشكل}$$

١٤-٢٥ فان الزاوية عند م للمثلث م ع ع هي $\pi - \alpha$ وجتا $(\pi - \alpha)$

$$= - \text{جتا } \alpha = \frac{\vec{P}_1}{|\vec{P}|} . \text{ وبما ان جتا } (\pi - \alpha) = - \text{جتا } \alpha \text{ فهذا يعطينا أن}$$

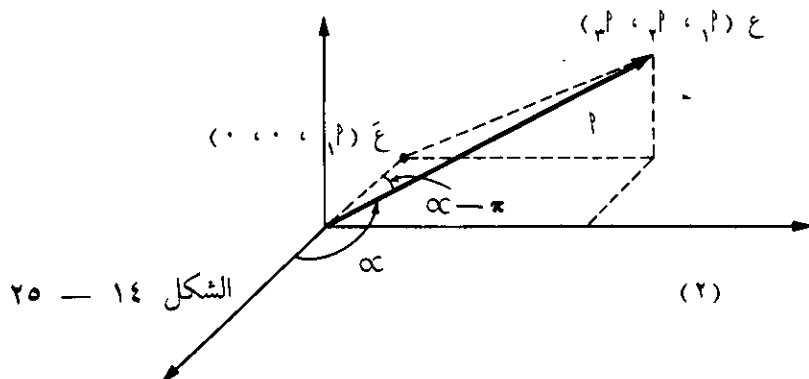
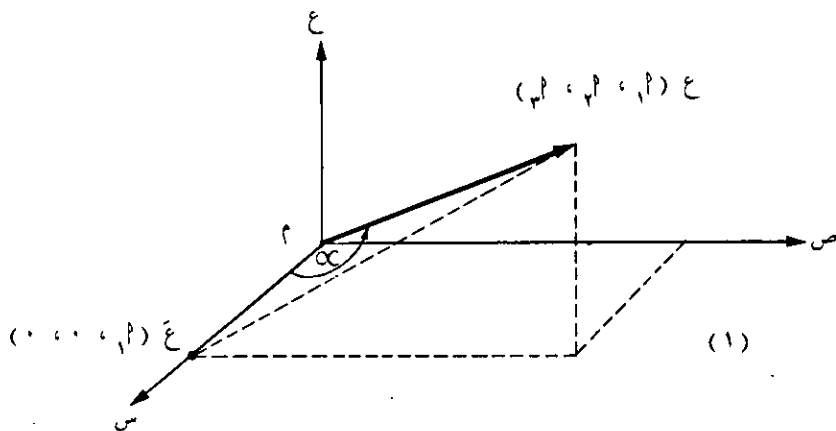
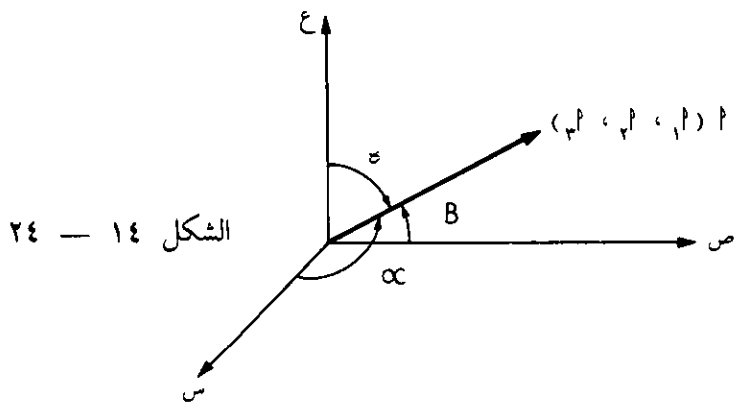
$$\text{جتا } \alpha = \frac{\vec{P}_1}{|\vec{P}|} . \text{ واخيرا اذا كانت } \alpha = 0 \text{ فان } \frac{\pi}{2} = \alpha \text{ ويكون جتا}$$

$$\alpha = 0 \text{ ومرة اخرى جتا } \alpha = \frac{\vec{P}_1}{|\vec{P}|}$$

ويمكن ايجاد صيغ جتا β وجتا γ بنفس الطريقة .

ولبرهان الجزء (٢) نربع صيغ جيوب تمام الاتجاهات التي حصلنا عليها في (١) ونجمع لنحصل على :

$$1 = \frac{\sqrt{|\vec{P}|}}{\sqrt{|\vec{P}|}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}}$$



وينتج الجزء (٣) من أن متجهات الموضع للمتجهين $\vec{P}$ ، $-\vec{P}$ تقع على نفس الخط المستقيم .

نرى من (١٤-٢٨) ، (١) انه يمكن التعبير عن اي متجه

$$\vec{P} = \langle \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 \rangle \text{ بالصيغة}$$

$$\vec{P} = \langle |\vec{P}| \cos \alpha , |\vec{P}| \cos \beta , |\vec{P}| \cos \gamma \rangle \text{ أو ما يكافئها .}$$

$$|\vec{P}| = \vec{P} \quad (١٤-٢٩) \quad \langle \cos \alpha , \cos \beta , \cos \gamma \rangle$$

مثال ١ : أوجد جيوب تمام الاتجاهات للمتجه $\vec{P} = \langle ٤ , -٣ , ٢ \rangle$

الحل : بما أن $|\vec{P}| = \sqrt{١٦+٩+٤} = \sqrt{٢٩}$ فنحصل من (١٤-٢٨) ، (١) أن

$$\cos \alpha = \frac{٤}{\sqrt{٢٩}} , \cos \beta = \frac{-٣}{\sqrt{٢٩}} , \cos \gamma = \frac{٢}{\sqrt{٢٩}}$$

يقال للمتجهين المخالفين للصفر $\vec{P}$ و $-\vec{P}$ (أو متجهي موضعيهما $\vec{M}$ و $-\vec{M}$) أن لهما نفس الاتجاه اذا كانت زوايا اتجاهاتها متساوية ، وانها متعاكسان اذا كانت زوايا اتجاهاتها مكملة كل منها لنظيرتها .

والنظرية التالية هي تعميم (١٤-٥) .

(١٤-٣٠) نظرية :

اذا كان $\vec{P}$ متجها غير الصفر و ج عدد قياسي غير الصفر فان ج $\vec{P}$ و ج $-\vec{P}$

(١) لهما نفس الاتجاه اذا كانت ج > .

(٢) لهما اتجاهان متعاكسان اذا كانت ج < .

الحل : اذا كان $\vec{P} = \langle \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 \rangle$ فان ج $\vec{P} = \langle ج \vec{P}_1 , ج \vec{P}_2 , ج \vec{P}_3 \rangle$

وباستخدام (١٤-٢٨) تكون جيوب تمام اتجاهات ج $\vec{P}$ هي

$$\frac{ج \vec{P}_1}{|ج \vec{P}|} , \frac{ج \vec{P}_2}{|ج \vec{P}|} , \frac{ج \vec{P}_3}{|ج \vec{P}|}$$

وهذه يمكن كتابتها :

$$\frac{\overrightarrow{P}}{\overleftarrow{P}} \quad \text{ج} \quad \frac{\overrightarrow{P}}{\overleftarrow{P}} \quad \text{ج} \quad \frac{\overrightarrow{P}}{\overleftarrow{P}} \quad \text{ج}$$

$$| \overleftarrow{P} | \quad | \text{ج} | \quad | \overleftarrow{P} | \quad | \text{ج} | \quad | \overleftarrow{P} | \quad | \text{ج} |$$

واذا كانت ج < . فان $\frac{\overrightarrow{P}}{\overleftarrow{P}} = 1$ وتكون جيوب تمام اتجاهات ج $\overrightarrow{P}$ هي

نفسها جيوب تمام اتجاهات $\overrightarrow{P}$ وهذا يبرهن (١) . واذا كانت ج > . فان $\frac{\overrightarrow{P}}{\overleftarrow{P}}$

= - ١ وتكون جيوب تمام اتجاهات ج $\overrightarrow{P}$ سالب جيوب تمام اتجاهات $\overrightarrow{P}$.
وتكون جيوب تمام اتجاهات ج $\overrightarrow{P}$ مكملية لجيوب تمام اتجاهات $\overrightarrow{P}$. وهذا يبرهن
(٢) .

وكتوضيح للنظرية (١٤ - ٣٠) خذ المتجهين $\overrightarrow{P} = \langle ١٥ ، - ٦ ، ٢٤ \rangle$ و $\overrightarrow{B} = \langle ٥ ، ٢ - ، ٨ \rangle$ فلها نفس الاتجاه لان $\overrightarrow{B} = 3 \overrightarrow{P}$ أو ما يكافئه وهو $\overrightarrow{B} = \frac{1}{3} \overrightarrow{P}$. ويمكن اثبات أن عكس (١٤ - ٣٠) صحيح أيضا أي انه اذا كان $\overrightarrow{P}$ و $\overrightarrow{B}$ متجهين لها نفس الاتجاه (أو متعاكسين) فان $\overrightarrow{B} = \text{ج} \overrightarrow{P}$ حيث ج < . (أو ج > ٠) .

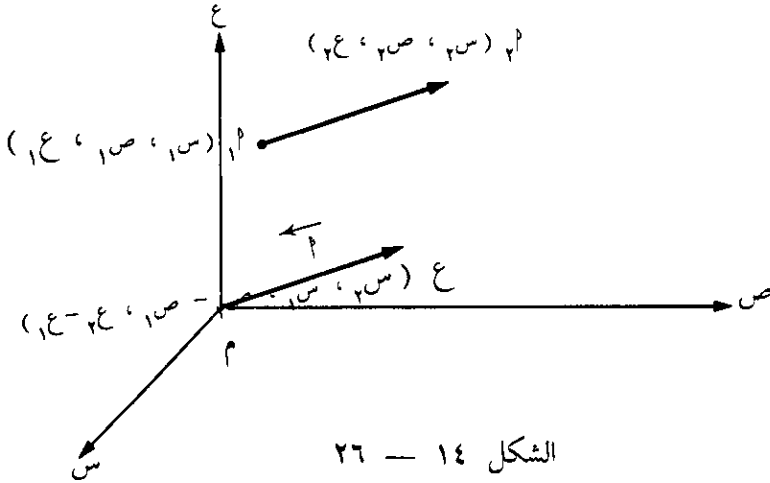
وبرهان النتيجة التالية على المتجهات الهندسية مشابه لحل المثال ٢ في البند الاول .

(١٤ - ٣١) نظرية اذا كانت $\overrightarrow{P}$ (س١ ، ص١ ، ع١) و $\overrightarrow{P}$ (س٢ ، ص٢ ، ع٢) نقطتين فان

$\overrightarrow{P} = \langle \text{س}٢ - \text{س}١ ، \text{ص}٢ - \text{ص}١ ، \text{ع}٢ - \text{ع}١ \rangle$ متجه في مج $\overrightarrow{P}$ له تمثيل هندسي $\overrightarrow{P}$.

وفي الشكل ١٤ - ٢٦ توضيح للنظرية حيث م $\overrightarrow{C}$ هو متجه الموضع الذي يقابل $\overrightarrow{P}$. وسنشير أيضا الى م $\overrightarrow{C}$ باسم متجه الموضع الذي يقابل $\overrightarrow{P}$. يقال ان المتجهين الهندسيين لها نفس الاتجاه (أو اتجاهان متعاكسان) اذا كان متجهها الموضع المقابلان لها نفس الاتجاه (أو اتجاهان متعاكسان) .

فاذا عرفنا مقدار $|\vec{P}|$ بأنه المسافة من P الى K فعني $\vec{P} = \vec{r}_s$ ان المتجهين المشار اليهما نفس الاتجاه والمقدار. واذا كان $\vec{P}$ متجها في مع $\vec{r}_s$ يقابل $\vec{P}$ وكان جـ عددا قياسيا فيرمز للتمثيل الهندسي للمتجه جـ $\vec{P}$ بالرمز جـ $\vec{P}$. وهذا الضرب القياسي له نفس المعنى الهندسي الذي لنظيره في بعدين.



مثال ٢ : اذا كانت $P_1 (٥، ٦، ٢-)$ ، $P_2 (٣-، ٨، ٧)$ نقطتين فاجب على

ما يلي :

(أ) أوجد متجه الموضع الذي يقابل $\vec{P}_1$ ، $\vec{P}_2$

(ب) أوجد جيوب تمام اتجاهات $\vec{P}_1$ ، $\vec{P}_2$

(ج) اذا كانت رهي النقطة $(٢، ٣-، ٤)$ أوجد النقطة س التي تحقق

$$\vec{P}_1 = \vec{r}_s$$

الحل :

(أ) باستخدام $(٣١-١٤)$ يكون للمتجه .

$$\vec{P} = \langle ٢- + ٧، ٦- ٨، ٥- ٣- \rangle = \langle ٩، ٢، ٨- \rangle$$

تمثيل هندسي $\vec{P}_1$ ، $\vec{P}_2$. وهكذا فان ع $(٩، ٢، ٨-)$ هي نقطة نهاية لمتجه

الموضع م ع الذي يقابل $\vec{P}_1$ ، $\vec{P}_2$

(ب) بما أن

$$|\vec{P}| = |\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = \sqrt{١٤٩} = \sqrt{٨١ + ٤ + ٦٤}$$

فباستخدام (١٤-٢٨) نحصل على أن :

$$\frac{9}{\sqrt{49}} = \gamma \text{ جتا } \frac{2}{\sqrt{149}} = \beta \text{ جتا } \frac{8}{\sqrt{149}} = \alpha$$

(ج) اذا كانت (س ، ص ، ع) هي احداثيات النقطة P وكانت (٢ ، -٤ ، ٣) هي احداثيات النقطة R فباستخدام (١٤-٣١) يكون <س - ٢ ، ص + ٣ ، ع - ٤> هو التمثيل الهندسي في مج P للمتجه RP . ومن ثم فان $\vec{RP} = \vec{P} - \vec{R}$ اذا فقط اذا كان

<س - ٢ ، ص + ٣ ، ع - ٤> = <٩ ، ٢ ، ٨ -> أو ما يكافئه :

$$\text{س} - ٢ = ٨ - \text{ص} + ٣ = \text{ع} - ٩ = ٩$$

ولهذا فان س = ٦ ، ص = ١ ، ع = ١٣ وتكون احداثيات P هي (٦ ، ١ ، ١٣) .

مثال ٣ : قوة يمثلها مقدارا واتجاها المتجه $\vec{P} = ٥\vec{u} + ٢\vec{v} + ٦\vec{z}$.
أوجد الشغل المبذول اذا تحركت نقطة تأثير القوة من P (١ ، ١ - ، ٢) الى R (٤ ، ٣ ، ١) .

الحل : باستعمال (١٤-٣١) يكون المتجه المنتمي الى مج P والذي يقابل $\vec{P}$ رهوب $\vec{P} = <٣ ، ٤ ، ٣ ->$. فاذا كان P ك هو التمثيل الهندسي للمتجه P فانه باستخدام (١٤-٢٦) يكون الشغل المبذول كما يلي :

$$\vec{P} \cdot \vec{R} = \vec{P} \cdot \vec{P} = ١٥ + ٨ - ١٨ = ٥$$

فمثلا اذا كانت وحدة الطول هي القدم ووحدة القوة هي الباوند فيكون الشغل المبذول ٥ باوند قدم .

والنتيجة التالية هي تعميم (١٤-٥) الى مج P .

(١٤-٣٢) نظرية : يكون المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ غير الصفر متوازيين اذا فقط اذا كان

$$\vec{B} = \lambda \vec{A} \text{ حيث } \lambda \text{ عدد قياسي .}$$

البرهان : افترض أن θ ترمز الى الزاوية المحصورة بين $\vec{P}$ و $\vec{B}$. فاذا كان $\vec{B} = \vec{B}$

فبالتعويض في (١٤-١٨) نحصل على أن

$$\vec{P} \cdot \vec{B} = |\vec{P}| |\vec{B}| \cos \theta$$

التي يمكن كتابتها

$$\vec{B} \cdot \vec{P} = |\vec{P}| |\vec{B}| \cos \theta$$

ولأن $\vec{P} \cdot \vec{P} = |\vec{P}|^2$ ينتج أن جتا $\theta = \frac{\vec{B} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|^2}$ ومن ثم فان

$$\cos \theta = 1 \text{ أو } \cos \theta = -1$$

ولهذا تكون $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$ أي ان المتجهين متوازيان

وبالعكس اذا كان $\vec{B}$ و $\vec{P}$ متوازيين فان $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$

ويتبع أن زوايا الانحافات α ، β ، γ للمتجه $\vec{B}$ مساوية أو مكملة لزوايا

الانحافات α ، β ، γ للمتجه $\vec{P}$

فاذا تساوت ينتج من (١٤-٢٩) أن

$$|\vec{B}| \cos \alpha = |\vec{P}| \cos \alpha$$

$$|\vec{B}| \cos \alpha = |\vec{P}| \cos \alpha$$

$$\frac{|\vec{B}| \cos \alpha}{|\vec{P}|} = \cos \alpha$$

واذا كانت α ، β ، γ مكملات للزوايا α ، β ، γ فان

$$|\vec{B}| \cos \alpha = |\vec{P}| \cos \alpha$$

والزاوية المحصورة بين المتجهين الهندسيين $\vec{P}$ و $\vec{B}$ هي نفس الزاوية المحصورة

بين متجهي الموضع $\vec{M}$ و $\vec{M}$. واذا كان الاخيران ايضا متجهي موضع

للمتجهين $\vec{B}$ و $\vec{P}$ فيكون $\vec{P}$ و $\vec{B}$ متوازيين (متعامدين) اذا كان

$\vec{P}$ ، $\vec{B}$ متوازيين (متعامدين) . وهذا مطابق للاسس الهندسية لهذه المفاهيم .

والنظرية التالية هي نتيجة لما سبق (انظر ١٤ - ٢٣) ، (١٤ - ٢٠) ،
(٣٢ - ١٤) .

(٣٣ - ١٤) نظرية : يكون المتجهان $\vec{P}$ و $\vec{R}$
 (١) متعامدين اذا فقط اذا كان $\vec{P} \cdot \vec{R} = 0$.
 (٢) متوازيين اذا فقط اذا كان $\vec{P} = \vec{R}$ حيث ج عدد قياسي .

مثال ٤ : برهن ان النقط $P (٢ ، ٣ ، ٤)$ ، $B (- ١ ، ٧ ، ٢)$ ،
ج (٦ ، ١٠ ، ١٢) هي رؤوس مثلث قائم .

الحل : باستخدام (٣١ - ١٤) يكون $\vec{P}$ و $\vec{B}$
 $\vec{P} = \langle ٢ ، ٣ ، ٤ \rangle$ و $\vec{B} = \langle - ١ ، ٧ ، ٢ \rangle$ على الترتيب .

$$\vec{P} \cdot \vec{B} = ٢ \cdot (-١) + ٣ \cdot ٧ + ٤ \cdot ٢ = ١٦ - ٢٨ + ١٢ = ٠$$

وبما أن $\vec{P} \cdot \vec{B} = ٠$
 يتبع من (٣٣ - ١٤) ان المتجهين متعامدان .
وتكون الزاوية عند الرأس تساوي ٩٠ .

تمارين :

في كل من التمارين ١ - ٤ أوجد جيوب تمام الاتجاهات P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4

$$(١) \vec{P}_1 = \langle ٥ ، ١ ، ٢ \rangle$$

$$(٢) \vec{P}_2 = \langle ٢ ، - ١ ، ٢ \rangle$$

$$(٣) \vec{P}_3 = \langle ٤ ، ٣ ، ٢ \rangle$$

$$(٤) \vec{P}_4 = \langle ٥ ، ٥ ، ٢ \rangle$$

(٥) أوجد الزوايا وجيوب تمام الاتجاهات في $\vec{P}_1$ ، $\vec{P}_2$ ، $\vec{P}_3$ ، $\vec{P}_4$

(٦) أوجد متجهي وحدة تكون جيوب تمام اتجاهاتها مساوية كل لنظيرتها .

في التمارين ٧ - ١٠ أوجد جيوب تمام الاتجاهات P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 ، P_6 ، P_7 ، P_8 ، P_9 ، P_{10}

$$(٧) \vec{P}_1 = \langle ٧ ، ٢ ، ٤ \rangle$$

$$(٨) \vec{P}_2 = \langle ١ ، ٥ ، ٠ \rangle$$

$$(٩) \vec{P}_3 = \langle ٣ ، ١ ، ٥ \rangle$$

$$(١٠) \vec{P}_4 = \langle ٤ ، ٣ ، ٢ \rangle$$

(١١) إذا كان $\vec{P} = 14\vec{h} - 15\vec{w} + 6\vec{z}$ فأوجد الآتي :

(أ) متجهها له نفس الاتجاه وضعف المقدار

(ب) متجهها له عكس الاتجاه و $\frac{1}{3}$ المقدار.

(١٢) حل التمرين ١١ إذا كان $\vec{P} = \langle -6, 3, 6 \rangle$.

في التمارين ١٣-١٦ أوجد الزاوية المحصورة بين $\vec{P}$ و $\vec{B}$.

(١٣) $\vec{P} = \vec{h} + \vec{w} - \vec{z}$ ، $\vec{B} = -4\vec{h} - \vec{w} + 5\vec{z}$

(١٤) $\vec{P} = \vec{h} + 6\vec{w} + 4\vec{z}$ ، $\vec{B} = \vec{h} - \vec{w} + \vec{z}$.

(١٥) $\vec{P} = \vec{w} - \vec{z}$ ، $\vec{B} = \vec{h} + 2\vec{z}$.

(١٦) $\vec{P} = 3\vec{h}$ ، $\vec{B} = 4\vec{w} - 3\vec{z}$.

خذ النقط $\vec{P}(3, -2, -1)$ ، $\vec{K}(1, 5, 4)$ ، $\vec{R}(2, 0, -6)$

ي $(-4, 1, 5)$ أوجد الكميات المعطاة في التمارين ١٧-٢٢.

(١٧) $\vec{P} \cdot \vec{K}$ ، $\vec{R} \cdot \vec{K}$

(١٨) $\vec{K} \cdot \vec{R}$ ، $\vec{P} \cdot \vec{R}$

(١٩) الزاوية المحصورة بين $\vec{P}$ و $\vec{K}$

(٢٠) الزاوية المحصورة بين $\vec{K}$ و $\vec{R}$.

(٢١) مركبة $\vec{P}$ على باتجاه $\vec{K}$.

(٢٢) مركبة $\vec{K}$ على باتجاه $\vec{P}$.

(٢٣) إذا اخذنا $\vec{P}(8, -3, 5)$ ، $\vec{K}(6, 1, 7)$ ، $\vec{R}(س, ص, ع)$

اذكر معادلة في $س, ص, ع$ يتحقق بها أن $\vec{P}$ عمودي على $\vec{K}$. اعط

وصفا هندسيا للنقط $ر(س, ص, ع)$.

(٢٤) اثبت باستخدام المتجهات ان $\vec{P}(2, -3, 1)$ ، $\vec{B}(-5, 1, 7)$ ر

(٦, ١, ٣) هي رؤوس مثلث قائم وأوجد مساحته.

في التمرينين ٢٥، ٢٦ اعطيت المتجه $\vec{P}$ يمثل قوة ما مقدارا واتجاها أوجد الشغل

المبدول اذا تحركت القوة من $ن$ الى $ك$.

(٢٥) $\vec{P} = -\vec{h} + 5\vec{w} - 3\vec{z}$ ، $ن(4, 0, -27)$ ، $ك(2, 4, 0)$.

(٢٦) $\vec{P} = \langle 8, -4, 0 \rangle$ ، $ن(-1, 2, 5)$ ، $ك(4, 1, 0)$.

(٢٧) قوة ثابتة مقدارها ٤ باتجاه $\vec{P} = \vec{h} + \vec{w} + \vec{z}$. أوجد الشغل المبذول اذا تحركت

نقطة التأثير على محور $ص$ من $(0, 2, 0)$ الى $(0, 1, 0)$.

(٢٨) قوة ثابتة مقدارها ٥ باتجاه محور العينات الموجب . أوجد الشغل المبذول اذا تحركت نقطة التأثير على خط مستقيم من نقطة الاصل الى النقطة $P(1, 2)$ ،
(٣)

(٢٩) تسمى الاعداد الثلاثة L, M, N غير الصفر باعداد الاتجاهات للمتجه غير الصفر $\vec{P}$ (أو $\vec{L}$) اذا تناسبت مع جيوب تمام اتجاهاته أي انه اذا امكن ايجاد عدد موجب t بحيث ان

$$L = t \cos \alpha, M = t \cos \beta, N = t \cos \gamma$$

(P) اذا كانت L, M, N هي اعداد اتجاهات $\vec{P}$ وكان $F = (L^2 + M^2 + N^2)^{1/2}$ فاثبت أن

$$\cos \alpha = \frac{L}{F}, \cos \beta = \frac{M}{F}, \cos \gamma = \frac{N}{F}$$

(ب) اذا اخذنا النقطتين $P_1(1, 1, 1)$ و $P_2(2, 1, 1)$ فاثبت أن $\vec{P}_1 - \vec{P}_2$ هي اعداد اتجاهات $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$

(٣٠) عد الى التمرين ٢٩ . اذا كانت L_1, M_1, N_1 و L_2, M_2, N_2 هي اعداد اتجاهات $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ على الترتيب .

اثبت ما يلي :

(P) يكون $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ متعامدين اذا وفقط اذا كان

$$L_1 L_2 + M_1 M_2 + N_1 N_2 = 0$$

(ب) يكون $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ متوازيين اذا وفقط اذا امكن ايجاد عدد t بحيث أن $L_1 = t L_2$ ،

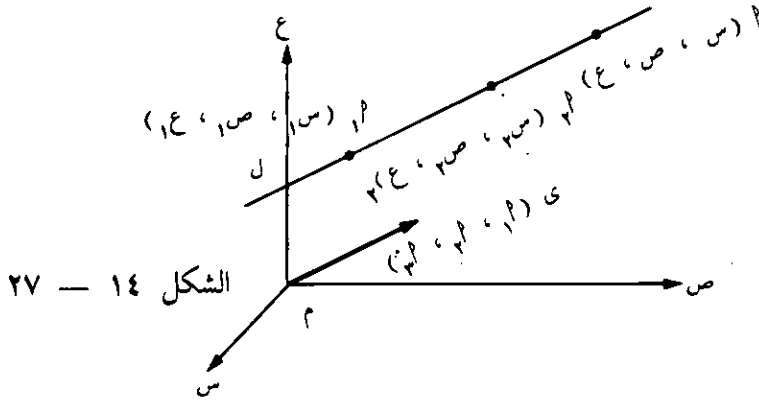
$$M_1 = t M_2, N_1 = t N_2$$

٥ — الخطوط المستقيمة في الفضاء :

اذا كانت $P_1(1, 1, 1)$ و $P_2(2, 1, 1)$ نقطتين مختلفتين فباستخدام (١٤ - ٣١) يكون المتجه $\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$ الذي يمثله هندسياً $\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$ هو $\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$ ، $\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$ ، ولايجاد معادلات الخط L

الواصل بين P_1 و P_2 نلاحظ ان النقطة $P(1, 1, 1)$ تقع على L اذا وفقط اذا

كان $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ موازيا $\vec{p}_1, \vec{p}_2$. وهذا موضع في الشكل (١٤ - ٢٧) حيث يظهر ايضا متجه الموضع $\vec{m}$ الذي يقابل $\vec{p}$.



الشكل ١٤ - ٢٧

ومن (١٤ - ٣٣) فالعبارة المكافئة هي

(١٤ - ٣٤) $\vec{p}_1, \vec{p}_2 = \vec{p}_1, \vec{p}_2$ حيث جـ عدد ما قياسي ، ويمكن ان نعبر جبريا عن الشرط (١٤ - ٣٤) كالآتي :

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \rangle = \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \rangle \\ & \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \rangle = \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \rangle \\ & \text{ومساواة المعادلات وإيجاد س ، ص ، ع نحصل على :} \end{aligned}$$

(١٤ - ٣٥) $\text{س} = \text{س} + \text{س}_1, \text{ج} = \text{ج} + \text{ج}_1, \text{ص} = \text{ص} + \text{ص}_1, \text{ع} = \text{ع} + \text{ع}_1$ حيث جـ عدد حقيقي .

وتسمى المعادلات (١٤ - ٣٥) بالمعادلات الوسيطة للمستقيم ل ويسمى المتغير جـ بالوسيط . ويمكن إيجاد النقط $\vec{p}(\text{س}, \text{ص}, \text{ع})$ الواقعة على ل بأن نجعل جـ تأخذ جميع القيم الحقيقية . وفي الواقع يتبع من (١٤ - ٣٤) أن $\vec{p}_1$ تقابل جـ = ٠ ومتنصف $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ تقابل جـ = $\frac{1}{2}$ ، $\vec{p}_1$ تقابل جـ = ١ وهكذا

مثال ١ : أوجد المعادلات الوسيطة للمستقيم ل الذي يمر بالنقطتين

$$\vec{p}_1(٣, ١, ٢), \vec{p}_2(٢, ٢, ٧)$$

في أي نقطة يقطع ل المستوى س ص ؟

الحل : $\overrightarrow{P}$ في $\overrightarrow{M}$ الذي يقابل $\overrightarrow{P}$ هو

$$\overrightarrow{P} = \langle -2 - 3, 1 - 7, 3 - 2 \rangle = \langle -5, -6, 1 \rangle$$

وبتطبيق (١٤ - ٣٥) تكون المعادلات الوسيطة للمستقيم ل هي $s = -3$ -
 5 ج، $s = 1 + 6$ ج، $e = -2 - 2$ ج. ويقطع المستقيم s ص عند
 النقطة ر (س، ص، ع) حيث $e = -2 - 2$ ج = 0 أي ج = -1 .
 وتكون احداثيات النقطة ر هي (٨، -٥، ٠).

اذا كان $\overrightarrow{P} = \langle \overrightarrow{P}_1, \overrightarrow{P}_2, \overrightarrow{P}_3 \rangle$ متجهها غير الصفري في $\overrightarrow{M}$ وكانت $\overrightarrow{P}_1$ (س،
 ص، ع) أي نقطة فيوجد خط مستقيم ل وحيد يمر خلال $\overrightarrow{P}$ موازيا لمتجه
 الموضع $\overrightarrow{M}$ الذي يقابل $\overrightarrow{P}$. والحقيقة اذا كانت $\overrightarrow{P}$ هي النقطة $\overrightarrow{P}_1$ (س، ص +
 $\overrightarrow{P}_2$ ، $\overrightarrow{P}_3$ + ع، $\overrightarrow{P}_1$ + ص، $\overrightarrow{P}_2$ + ع، $\overrightarrow{P}_3$ + ص)

فيكون ل هو بالضبط الخط المستقيم الذي يتحدد بالمتجه $\overrightarrow{P}$ كما هو موضح
 في الشكل ١٤ - ٢٧. وسنشير هنا الى ل بعبارة الخط المستقيم المار بالنقطة $\overrightarrow{P}$
 ويحدده $\overrightarrow{P}$. ويتبع أن (١٤ - ٣٥) هي معادلات وسيطة للخط ل. فان كان
 $\overrightarrow{B}$ أي متجه غير الصفري وموازيا ل فيمكن ايجاد نفس الخط لانه في هذه الحالة
 يكون

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{P} = \langle \overrightarrow{P}_1, \overrightarrow{P}_2, \overrightarrow{P}_3 \rangle$$

والمعادلات الوسيطة للخط الذي يمر بالنقطة $\overrightarrow{P}$ ويحدده ب هي
 (١٤ - ٣٦) $s = s_1 + (s_2 \overrightarrow{P}_1 + s_3 \overrightarrow{P}_2 + s_4 \overrightarrow{P}_3)$ ، $s = s_1 + (s_2 \overrightarrow{P}_1 + s_3 \overrightarrow{P}_2 + s_4 \overrightarrow{P}_3)$ ، $e = e_1 + (e_2 \overrightarrow{P}_1 + e_3 \overrightarrow{P}_2 + e_4 \overrightarrow{P}_3)$
 . (و $\overrightarrow{P}_1$) ن حيث يأخذ الوسيط ن جميع القيم العددية الصحيحة. وتحدد هذه
 المعادلات نفس الخط كما في (١٤ - ٣٥) لان النقطة المعطاة بواسطة ج في
 (١٤ - ٣٥) يمكن الحصول عليها بوضع

$$n = \frac{j}{5} \text{ في (١٤ - ٣٦)}$$

مثال ٢ : أوجد المعادلات الوسيطة للخط ل الذي يمر بالنقطة $\overrightarrow{P}$ (٥، -٦، ٢)
 ويتحدد بالمتجه $\overrightarrow{P} = \langle \frac{1}{3}, 2, \frac{4}{3} \rangle$.

الحل : لكي نتحاشى الكسور سنستعمل المتجه $\overrightarrow{B} = 6 \overrightarrow{P}$

$$= \langle 3, 12, 8 \rangle \text{ بدلا من } \overleftarrow{P}.$$

ويتطبيق (١٤-٣٥) تكون المعادلات الوسيطة للخط ل هي

$$\text{س} = 5 + 3 \text{ ج، ص} = 6 + 12 \text{ ج، ع} = 2 - 8 \text{ ج}$$

إذا كان ل_١ ول_٢ خطين محددتين بالمتجهين $\overleftarrow{P} = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$ و $\overleftarrow{B} = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ على الترتيب فتعرف الزاوية المحصورة بين ل_١ ول_٢ بالزاوية θ المحصورة بين $\overleftarrow{P}$ و $\overleftarrow{B}$ سواء تقاطع الخطان أم لم يتقاطعا. ويكون الخطان متعامدين إذا كان

$$\overleftarrow{P} \cdot \overleftarrow{B} = 0 \text{ أو ما يكافئه وهو:}$$

$$P_1 B_1 + P_2 B_2 + P_3 B_3 = 0$$

ويكون الخطان متوازيين إذا كان $\overleftarrow{B} = \overleftarrow{P}$ حيث ج عدد ما قياسي أي ان

$$B_1 = ج P_1, B_2 = ج P_2, B_3 = ج P_3.$$

تمارين :

في التمارين ١-٤ أوجد المعادلات الوسيطة للخط المستقيم المار في النقطتين P_1, P_2 أوجد (ان امكن) النقط التي يقطع فيها الخط مستويات الاحداثيات.

$$(١) P_1 (5, 2, 4), P_2 (3, 0, 6) \quad (٢) P_1 (8, 11, 7), P_2 (1, 1, 3)$$

$$(٣) P_1 (2, 0, 5), P_2 (3, 0, 6) \quad (٤) P_1 (2, 2, 4), P_2 (2, 2, 3)$$

$$(٥) P_1 (4, 2, 4), P_2 (3, 2, 3)$$

في التمارين ٥-٨ أوجد المعادلات الوسيطة للخط الذي يمر بالنقطة P ويحدده $\overleftarrow{P}$.

$$(٥) P (4, 2, 3), \overleftarrow{P} = \langle \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{4} \rangle$$

$$(٦) P (5, 0, 2), \overleftarrow{P} = \langle 1, 4, 1 \rangle$$

$$(٧) P (0, 0, 0), \overleftarrow{P} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$(٨) P (1, 2, 3), \overleftarrow{P} = \langle 3, 2, 1 \rangle$$

(٩) إذا كانت المعادلات الوسيطة للمستقيم ل هي

$$\text{س} = 5 - 3 \text{ ج، ص} = 2 + \text{ج، ع} = 1 + 9 \text{ ج}$$

أوجد معادلات وسيطة لخط مستقيم يمر بالنقطة $P(-6, 4, 3)$ ويوازي L .

(١٠) إذا مر المستقيم L_1 في النقطتين $P(5, -2, 4)$ و $K(2, 6, 1)$ وكان L_2 هو الخط المستقيم المار بالنقطتين $R(-3, 1, 1)$ ، $S(7, 11, -8)$ فأوجد الزاوية بين L_1 و L_2 .

(١١) أوجد الزاوية المحصورة بين خطين معادلاتها الوسيطة هي

س $7 - 2 =$ ج، ص $4 + 3 =$ ج، ع $5 =$ ج و
 س $1 - =$ ج، ص $3 + 4 =$ ج، ع $1 =$ ج على الترتيب.
 (١٢) أوجد المعادلات الوسيطة للخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $P(4, -1, 0)$ ويوازي الخط المستقيم المار بالنقطتين $P_1(-3, 9, 2)$ ، $P_2(5, 7, -3)$.

في التمارين ١٣ - ١٦ بين هل يتقاطع الخطان وفي هذه الحالة أوجد نقط التقاطع.

(١٣) س $1 + 2 =$ ج، ص $1 - 4 =$ ج، ع $5 - =$ ج،

س $4 - =$ ج، ص $1 - 6 + =$ ج، ع $4 + =$ ج

(١٤) س $1 + 6 =$ ج، ص $3 + 2 =$ ج، ع $1 - 2 =$ ج و

س $2 + 2 =$ ج، ص $6 + =$ ج، ع $2 + =$ ج.

(١٥) س $3 + =$ ج، ص $2 - 4 =$ ج، ع $=$ ج،

س $4 - =$ ج، ص $3 + =$ ج، ع $3 + 2 - =$ ج.

(١٦) س $2 - 5 =$ ج، ص $6 + 2 =$ ج، ع $3 - 2 =$ ج،

س $4 - 3 =$ ج، ص $7 + 5 =$ ج، ع $1 + 4 =$ ج.

في كل من التمرينين ١٧ و ١٨ اثبت ان الخطين متعامدان.

(١٧) س $2 + 3 =$ ج، ص $4 - 2 =$ ج، ع $1 + 4 =$ ج

س $6 + 4 =$ ج، ص $2 - + =$ ج، ع $3 - 2 =$ ج.

(١٨) س $4 - =$ ج، ص $1 - =$ ج، ع $3 + 4 =$ ج،

س $3 + 2 =$ ج، ص $- + =$ ج، ع $=$ ج.

(١٩) استعمل الضرب الداخلي لإيجاد المسافة من النقطة $P(2, -6, 1)$ الى

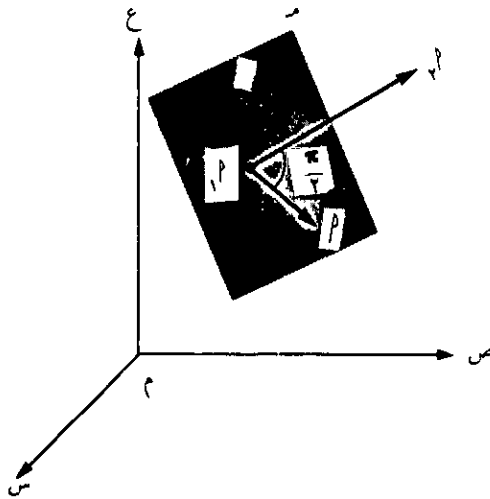
الخط المستقيم المار بالنقطتين $B(3, 4, -2)$ ، $C(7, -1, 5)$.

(ملاحظة : اذا كانت $\vec{s}$ هي المسقط على l فان $|\vec{s}| = f$)

(٢٠) حل المسألة ١٩ للنقط $P(١, ٥, ٠)$ ، ب $(-٢, ١, -٤)$ ، ج $(٠, ٠, ٠)$ ،
 $(٢, ٣, -)$

٦ — المستويات :

اذا كانت P_1 و P_2 نقطتين مختلفتين فجميع النقط P التي تحقق أن $\vec{P_1P_2}$ عمودي على $\vec{P_1P}$ تقع في المستوى π الذي يمر بالنقطة P_1 كما هو موضح في الشكل ١٤ - ٢٨ .
 ونسمي $\vec{P_1P_2}$ والمتجه $\vec{P_1P}$ ، $\vec{P_1P}$ ، $\vec{P_1P}$ الذي يمثله هندسيا $\vec{P_1P}$ بالمتجه العمودي على π . وباستخدام (١٤ - ٣٣) تكون P واقعة على π اذا وفقط اذا كان $\vec{P_1P} \cdot \vec{P_1P_2} = ٠$ أو ما يكافئه ، اي :



الشكل ١٤ - ٢٨

$\vec{P_1P_2} \cdot \vec{P_1P} = ٠$. $\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ، $\vec{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ حيث $P(x, y, z)$ و $P_1(x_1, y_1, z_1)$ وبتطبيق تعريف الضرب القياسي تحصل على النتيجة التالية

(١٤ - ٣٧) نظرية : المستوى المار بالنقطة $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ومتجهه

$$\vec{P_1P_2} = \vec{P_1P} \cdot \vec{P_1P_2} = ٠$$

العمودي

معادلته هي :

$$0 = (س - س_1) + (ص - ص_1) + (ع - ع_1)$$

مثال ١ : أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (٥ ، ٢ - ، ٤) علما بان المتجه $\vec{P} = \langle ١ ، ٢ ، ٣ \rangle$ عمودي عليه .

الحل : بتطبيق (١٤-٣٧) نحصل على أن

$$0 = (س - س_1) + (ص - ص_1) + (ع - ع_1)$$

وهذه تتحول الى

$$0 = س + ٢ص + ٣ع - ١٣$$

ويمكن كتابة معادلة المستوى في (١٤-٣٧) بالصيغة التالية :

$$(١٤-٣٨) \quad 0 = س + ب + ج + ز$$

حيث $س = س_1$ ، $ب = ب_1$ ، $ج = ج_1$ وكذلك

$$0 = س_1 - س_2 + ص_1 - ص_2 + ع_1 - ع_2$$

وبالعكس فلو اخذنا المعادلة (١٤-٣٨) حيث $س$ ، $ب$ ، $ج$ ، $ز$ جليست كلها

اصفارا فيمكن اختيار الاعداد $س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$ بحيث أن

$$0 = س_1 + ب_1 + ج_1 + ز_1$$

ومنها تكون $ز = - (س_1 + ب_1 + ج_1)$ وبالتعويض في

(١٤-٣٨) نحصل على أن

$$0 = س + ب + ج + ز = س + ب + ج - (س + ب + ج)$$

أو ما يكافئه :

$$0 = (س - س_1) + (ب - ب_1) + (ج - ج_1)$$

وحسب (١٤-٣٧) فخطط المعادلة الاخيرة هو مستوى يمر بالنقطة

$س_1$ ، $ب_1$ ، $ج_1$ ويكون المتجه $\vec{P} = \langle ١ ، ٢ ، ٣ \rangle$ عموديا عليه .

وتسمى المعادلة (١٤-٣٨) حيث $س$ ، $ب$ ، $ج$ ، $ز$ جليست كلها اصفارا بالمعادلة

الخطية في ثلاثة متغيرات $س$ ، $ص$ ، $ع$ وبهذا نكون قد برهننا النظرية التالية :

$$(١٤-٣٩) \quad \text{نظرية : كل معادلة خطية } 0 = س + ب + ج + ز$$

بيانها مستوى والمتجه $\vec{P} = \langle ١ ، ٢ ، ٣ \rangle$ عمودي عليه

ولتسهيل الامر نستعمل احيانا عبارة المستوى $س + ب + ج + ز = 0$

بدلاً من المستوى الذي معادلته P س + ب ص + ج ع + $s = 0$ ولرسم بيان
المعادلة الخطية نجد أحيانا مقاطع البيان بالمستويات الاحداثية أي الخطوط
المستقيمة التي يقطع فيها البيان مستويات الاحداثيات . فلابحاج المقطع في
المستوى س ص نعوض بالصفـر بدلاً من ع في (١٤ - ٣٨) حيث يعطينا هذا
جميع نقط البيان الواقعة في مستوى س ص .
وبالمثل لايحاج مقطع المستوى ص ع أو مقطع المستوى س ع نأخذ س = ٠ ،
ص = ٠ على الترتيب في (١٤ - ٣٨) .

مثال ٢ : ارسم بيان المعادلة

$$2س + 3ص + 4ع = 12$$

الحل : هناك ثلاث نقط في المستويات يمكن ايجادها بسهولة وهي نقط تقاطع المستوى
مع محاور الاحداثيات . فبتعويض الصفـر لكل من ص و ع في المعادلة نحصل
على أن $2س = 12$ ، أو $س = 6$. وهكذا فالنقطة (٦ ، ٠ ، ٠) تقع على
البيان . وكما هو الحال في النظام ذي البعدين تسمى ٦ بالمقطع السيني للبيان .
وبالمثل بتعويض ٠ بدلاً من س و ع نحصل على المقطع الصادي ٤ وتكون
النقطة (٠ ، ٤ ، ٠) واقعة على البيان . والنقطة (٠ ، ٠ ، ٣) يمكن
ايجادها بطريقة مماثلة أي أن المقطع العيني ٣ .
ويمكن ايجاد المقطع في المستوى س ص بتعويض ٠ بدلاً من ع في المعادلة
المعطاة .

ويقودنا هذا الى $2س + 3ص = 12$ وبيانها في المستوى س ص خط مستقيم
مقطعه السيني ٦ ومقطعه الصادي ٤ . وهذا المقطع مع مقطعي البيان بالمستويين
س ع و ص ع موضحة في الشكل ١٤ - ٢٩ .

(١٤ - ٤٠) تعريف المستويات المتوازية والعمودية

- يكون المستويان ذوا المتجهين العموديين $\vec{P}$ و $\vec{B}$
(١) متوازيين اذا كان $\vec{P}$ و $\vec{B}$ متوازيين
(٢) متعامدين اذا كان $\vec{P}$ و $\vec{B}$ متعامدين .

مثال ٣ : برهن ان البيانين للمستويين التاليين متوازيان :

ومن ثم فعادلة $م = ٣س + ص - ٦ع + ١١ = ٠$
 ان المتجه $هـ = < ١ ، ٠ ، ٠ >$ هو متجه عمودي على المستوى $ص ع$.
 والمستوى الذي معادلته بالصيغة $س - س_١ = ٠$ (أو $س = س_١$) متجهه
 العمودي هو ايضا $هـ$ ومن ثم فهو مواز للمستوى $ص ع$ (وعمودي على كلا
 المستويين $س ص$ و $س ع$) وفي الشكل ١٤ - ٣٠ يظهر جزء من بيان المعادلة
 $س = ١$. وبالمثل فبيان $ص = ب$ هو مستوى مواز للمستوى $س ع$ ومقطعه
 الصادي $ب$ بينا $ع = ج$ هو مستوى مواز للمستوى $س ص$ ومقطعه السيني $ج$
 (انظر (٢) ، (٣) في الشكل ١٤ - ٣٠). وللمستوى الذي معادلته

$$ب ص + ج ع + ز = ٠ \text{ متجه عمودي هو } \overrightarrow{P} = < ٠ ، ب ، ج > \text{ وهو عمودي على المستوى } ص ع \text{ لان}$$

$$\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{هـ} = ٠. \text{ وبالمثل فان بياني}$$

$١س + ب ص + ز = ٠$ ، $١س + ج ع + ز = ٠$
 هما مستويان عموديان على مستوى $س ص$ و $س ع$ على الترتيب.

مثال ٥ : ارسم بيان المعادلة $٣س + ٥ع = ١٠$

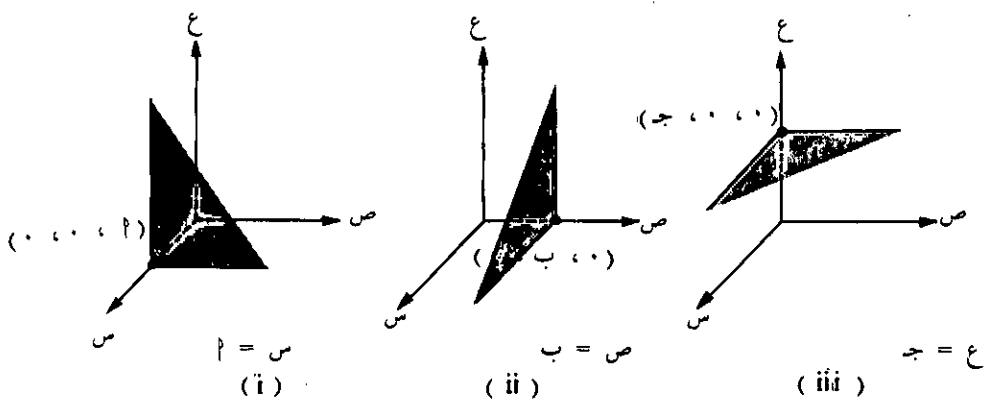
الحل : البيان هو مستوى عمودي على $س ع$ ومقطعه السيني $\frac{١}{٣}$ ومقطعه العيني ٢.

لاحظ أن معادلة المقطع في مستوى $ص ع$ هي $٥ع = ١٠$ ومن ثم فهو
 خط مستقيم مواز لمحور الصادات ومقطعه العيني ٢. وبالمثل فعادلة المقطع في
 مستوى $س ص$ هي $٣س = ١٠$ وهذا خط مستقيم مواز لمحور الصادات ومقطعه
 السيني $\frac{١}{٣}$. وفي الشكل (١٤ - ٣١) جزء من البيان تظهر فيه المقاطع من
 مستويات الاحداثيات الثلاثة .

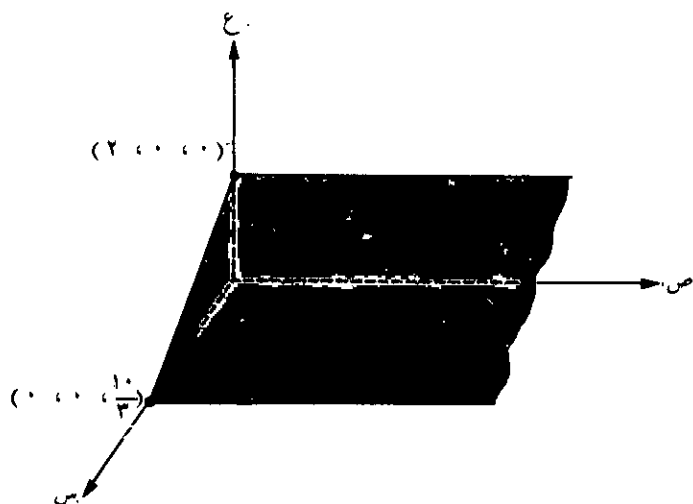
ويمكن ان توصف الخطوط المستقيمة بانها تقاطع مستويات . فاذا
 اعطينا خط ل بمعادلات وسيطية حسب (١٤ - ٣٥) وكانت $\overrightarrow{P_١}$ ، $\overrightarrow{P_٢}$ ، $\overrightarrow{P_٣}$
 غير الصفر فيمكن ايجاد قيمة الوسيط $ج$ في كل معادلة لنحصل على ما يلي :

$$ج = \frac{س - س_١}{\overrightarrow{P_١}} = ج = \frac{ص - ص_١}{\overrightarrow{P_٢}} = ج = \frac{ع - ع_١}{\overrightarrow{P_٣}}$$

فيتبع ان النقطة ١ (س ، ص ، ع) تقع على ل اذا وفقط اذا كان



الشكل ١٤ - ٣٠



الشكل ١٤ - ٣١

$$١٠ = ص٣ + ص٥$$

$$\frac{١ع - ع}{\overline{٣P}} = \frac{ص١ - ص}{\overline{٢P}} = \frac{س - س١}{\overline{١P}} \quad (٤١ - ١٤)$$

وتسمى المعادلات (٤١ - ١٤) بالصيغة التماثلية للخط المستقيم.
وباخذ التعبيرات المشار إليها مثنى مثنى ، مثلاً

$$\frac{ص١ - ص}{\overline{٣P}} = \frac{س - س١}{\overline{١P}} , \frac{ص١ - ص}{\overline{٢P}} = \frac{س - س١}{\overline{١P}}$$

نحصل على تحديد للخط ل كتقاطع مستويين اولهما يعامد مستوى س ص والثاني يعامد مستوى س ع .

واذا كان احد الاعداد $\bar{P}_1$ ، $\bar{P}_2$ ، $\bar{P}_3$ صفرا فلا نستطيع حل كل معادلة في (١٤ - ٣٥) في ج .

فمثلا اذا اخذنا $\bar{P}_1 = 0$ و $\bar{P}_2 = 0$. تتحول المعادلة الثالثة في (١٤ - ٣٥) الى $E = E_1$ ويمكن كتابة صيغة التماثل كالآتي

$$E = E_1 \cdot \frac{S - S_1}{\bar{P}_1} = \frac{V - V_1}{\bar{P}_3} \cdot E_1$$

التي تعبر مرة اخرى عن ل كتقاطع مستويين .
ويمكن ايجاد حالة مشابهة اذا كان $\bar{P}_1 = 0$ او $\bar{P}_2 = 0$.

مثال ٦ : أوجد صيغة تماثل للخط الذي يمر بالنقطتين $P_1(3, 1, 2)$ و $P_2(2, 7, -4)$.

الحل : كما في المثال ١ من البند السابق نجد أن المتجه $\vec{P}$ الذي يقابل P_1, P_2 هو

$$\vec{P} = \langle 2 - 3, 7 - 1, -4 - 2 \rangle = \langle -1, 6, -6 \rangle$$

$$= \langle -1, 6, -6 \rangle$$

وباستخدام (١٤ - ٣٥) يكون

$$S = 3 - 5J, V = 1 + 6J, E = -2 - 2J \quad \text{ج}$$

تمثيلاً وسيطياً للخط .

وبحل كل معادلة في ج ومساواة النتائج نحصل على صيغة

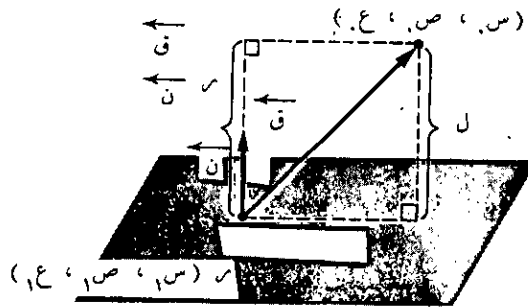
$$S - 3 = \frac{V - 1}{-1} = \frac{E + 2}{-2}$$

وصيغة التماثل ليست وحيدة لانه يمكن استعمال أي ثلاثة اعداد

P_1, P_2, P_3 ، $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ في (١٤ - ٤١) على أن تتناسب طردياً مع $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ أو أي نقطة تقع على ل أو أي نقطة اخرى غير (S_1, V_1, E_1) .

مثال ٧ : اشتق صيغة للمسافة ل من نقطة م (س. ، ص. ، ع.) الى المستوى م
 + ب ص + ج ع + د = ٠

الحل : نفرض أن ر (س_١ ، ص_١ ، ع_١) هي نقطة واقعة على المستوى وان ن متجه عمودي على المستوى . باستخدام (١٤ - ٣١) يكون للمتجه
 $\vec{Q} = \langle \text{س.} - \text{س}_1 , \text{ص.} - \text{ص}_1 , \text{ع.} - \text{ع}_1 \rangle$ تمثيل هندسي ر م . وكما هو موضح في الشكل ١٤ - ٣٢ تكون المسافة ل كالآتي :



الشكل ١٤ - ٣٢

$$L = \left| \frac{\vec{Q} \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|} \right|$$

(انظر (١٤ - ٢٥)). وبما أن $\langle \text{س.} , \text{ص.} , \text{ع.} \rangle$ متجه عمودي على المستوى يمكن استعمال

$$L = \frac{|\langle \text{س.} - \text{س}_1 , \text{ص.} - \text{ص}_1 , \text{ع.} - \text{ع}_1 \rangle \cdot \langle \text{س.} , \text{ص.} , \text{ع.} \rangle|}{\sqrt{\text{س.}^2 + \text{ص.}^2 + \text{ع.}^2}}$$

ومن ثم فان

$$L = \frac{|\langle \text{س.} - \text{س}_1 , \text{ص.} - \text{ص}_1 , \text{ع.} - \text{ع}_1 \rangle \cdot \langle \text{س.} , \text{ص.} , \text{ع.} \rangle|}{\sqrt{\text{س.}^2 + \text{ص.}^2 + \text{ع.}^2}}$$

$$= \frac{|\text{س.}(\text{س.} - \text{س}_1) + \text{ص.}(\text{ص.} - \text{ص}_1) + \text{ع.}(\text{ع.} - \text{ع}_1)|}{\sqrt{\text{س.}^2 + \text{ص.}^2 + \text{ع.}^2}}$$

وبما أن ر نقطة على المنحنى فإن
 $P = S_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 0$
 ومن ثم فيمكن كتابة الصيغة السابقة كالآتي

$$\frac{|P_1 S_1 + B_1 C_1 + D_1|}{\sqrt{P_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2}} = L$$

مثال ٨ : أوجد المسافة بين النقطة $P(-6, 2, 3)$ والمستوى
 $4S - 5C + 8D - 7 = 0$

الحل : باستخدام الصيغة التي حصلنا عليها في المثال ٧ فإن

$$\frac{17}{\sqrt{105}} = \frac{|7 - (-6) \cdot 4 + (2) \cdot 5 - (3) \cdot 8|}{\sqrt{64 + 25 + 16}} = L$$

تمارين :

ارسم بيانات المعادلات في التمارين ١-٨

- (١) $P = S = 3$ (ب) $C = 2$ (ج) $D = 5$
- (٢) $P = S = 4$ (ب) $C = 0$ (ج) $D = 23$
- (٣) $2S + C - 6 = 0$
- (٤) $3S - 2C - 24 = 0$
- (٥) $4C - 2D - 15 = 0$
- (٦) $5S + C - 4D + 20 = 0$
- (٧) $2S - C + 5D + 10 = 0$
- (٨) $S - C + 4 = 0$

في التمارين ٩-١٨ أوجد معادلة المستوى الذي يحقق الشروط المذكورة

- (٩) يمر بالنقطة $P(6, -7, 4)$ موازيا ما يلي :

(١) مستوى S و C

(ب) مستوى C و D

(ج) مستوى س ع .

(١٠) يمر بالنقطة $P(-2, 5, 8)$ ومتجهه العمودي

($\vec{P}$) $\vec{h}$ (ب) و ($\vec{z}$).

(١١) يمر بالنقطة $P(-11, 4, 2)$ ومتجهه العمودي $\vec{P} = \langle 6, -5, 1 \rangle$

(١٢) يمر بالنقطة $P(4, 2, 9)$ ومتجهه العمودي $\vec{M}$.

(١٣) يمر بالنقطة $P(2, 5, 6)$ موازيا للمستوى $3x - y + 2z = 10$

(١٤) يمر بنقطة الاصل ويوازي المستوى $6x - 4y + 7z = 0$

(١٥) يمر بنقطة الاصل والنقطتين $P(0, 2, 5)$ و $K(1, 4, 0)$

(١٦) يمر بالنقط $P(3, 2, 1)$ ، $B(-1, 1, 2)$ ، $J(-3, 4, 1)$

(١٧) يمر بالنقطة $P(5, 2, 3)$ عموديا على المستويين

$2x - y + 7z = 8$ و $4x - 2y + 3z = 8$.

(١٨) يمر بالنقطة $P(-4, 1, 6)$ وله نفس الراسم في المستوى S ع كالمستوى S

$4x - 5y + 8z = 0$

في التمارين ١٩ - ٢٢ أوجد صيغة تماثل للخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين

P_1 ، P_2 .

(١٩) $P_1(5, -2, 4)$ ، $P_2(2, 6, 1)$

(٢٠) $P_1(-3, 1, 1)$ ، $P_2(7, 11, 8)$

(٢١) $P_1(4, 2, 3)$ ، $P_2(-3, 2, 5)$

(٢٢) $P_1(5, -7, 4)$ ، $P_2(-2, 1, 4)$.

في كل من التمارين ٢٣ - ٢٦ بين هل الخطان المعطيان

($\vec{P}$) متوازيان (ب) متعامدان (ج) متقاطعان .

$$(23) \quad \frac{5 - x}{3} = \frac{y + 7}{2} = \frac{z + 1}{4}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 3}{3}$$

$$(24) \quad \frac{1+4}{2} = \frac{4-ص}{1-} = \frac{3-س}{6}$$

$$\frac{9-ع}{4} = \frac{1-ص}{2} = \frac{3+س}{6-}$$

$$(25) \quad \frac{5+ع}{2} = \frac{3-ص}{1-} = \frac{1+س}{3}$$

$$\frac{9-ع}{4} = \frac{4-ص}{2} = \frac{س}{4-}$$

$$(26) \quad 2-ع = \frac{6+ص}{6-} = \frac{3-س}{5}$$

$$\frac{ع-1}{5} = \frac{4-ص}{3} = \frac{س}{7}$$

في كل من التمارين ٢٧ - ٣٠ أوجد البعد بين النقطة P والمستوى المعطى :

$$(27) \quad 3س - 7ص + ع - 5 = 0, P(1, 1, 2)$$

$$(28) \quad 2س + 4ص - 5ع + 1 = 0, P(3, 1, 1)$$

$$(29) \quad 4س - 3ع = 2, P(5, 8, 1)$$

$$(30) \quad 6ص - ع = 10, P(4, 1, 3)$$

٧ - الضرب المتجه (Vector product or cross product)

سنقدم في هذا البحث الضرب المتجه أو الضرب التصالي $\vec{P} \times \vec{B}$ للمتجهين $\vec{P}$ و $\vec{B}$. وخلافا للضرب الداخلي الذي حاصله قياسي ينتج هذا الضرب متجها آخر. وقد

ابتكر الضرب المتجه لحل بعض المسائل الفيزيائية الخاصة بعزوم القوى . ومن الممكن تعريف $\vec{P} \times \vec{B}$ هندسيا ثم إيجاد الصيغة الجبرية استنادا الى نظام احداثيات متعامدة . ولكننا بعكس ذلك نبدأ بتعريف جبري . وهذا الاسلوب يخفي طبيعة $\vec{P} \times \vec{B}$ الهندسية ولكنه على اي حال يقود الى تسهيل البراهين . وعندما نتعامل مع الضرب المتجه من الملائم استخدام المحددات Determinants وتعرف المحددة من الدرجة الثانية كما يلي :

$$(\vec{P} \times \vec{B})_1 = P_2 B_3 - P_3 B_2 = \begin{vmatrix} P_2 & P_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (14-42)$$

حيث تمثل الحروف اعدادا حقيقية .
مثلا :

$$(\vec{P} \times \vec{B})_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (3)(4) - (2)(5) = 2$$

والمحددة من الدرجة الثالثة تعرف كالآتي :

$$(\vec{P} \times \vec{B})_1 = \begin{vmatrix} P_2 & P_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_2 & P_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (15-43)$$

$$\begin{vmatrix} P_2 & P_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_2 & P_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_2 & P_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P_2 & P_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

وتسمى هذه الصيغة احيانا بمفكوك المحددة بواسطة الصف الاول ويمكن إيجاد

القيمة العددية بتطبيق (١٤-٤٢) لمحددات الدرجة الثانية التي على يسار

المعادلة .

مثال ١ :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{أوجد قيمة}$$

باستخدام (١٤-٤٣) و (١٤-٤٢) نجد أن

$$(2) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (1-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (2-2) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(3) (5-4) + (1-3) (1-8) - (2) (2-2) =$$

$$. 64 - = 27 - 7 + 44 - =$$

ويمكن إيجاد حاصل الضرب المتجه (أو التصالي) $\vec{P} \times \vec{B}$ للمتجهين

$$\vec{P} = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle \text{ و } \vec{B} = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$$

باعتبار أن $\vec{P}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ هي التي في الطرف الايسر من (١٤-٤٣)

متجهات وحدة $\vec{e}$ ، $\vec{u}$ ، $\vec{z}$. ولهذا فن التعريف يكون

$$+ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix} - \vec{e} \begin{vmatrix} P_3 & P_2 \\ B_3 & B_2 \end{vmatrix} = \vec{P} \times \vec{B} \quad (14-44)$$

$$\underline{ز} \left| \begin{array}{cc} \overset{٢}{\text{ب}} & \overset{١}{\text{ب}} \\ \overset{٢}{\text{ب}} & \overset{١}{\text{ب}} \end{array} \right|$$

واليك طريقة مناسبة لاستذكار هذه الصيغة :

$$\left| \begin{array}{cc} \underline{ز} & \underline{و} & \underline{هـ} \\ \overset{٣}{\text{ب}} & \overset{٢}{\text{ب}} & \overset{١}{\text{ب}} \\ \overset{٣}{\text{ب}} & \overset{٢}{\text{ب}} & \overset{١}{\text{ب}} \end{array} \right| = \overset{\leftarrow}{\text{ب}} \times \overset{\leftarrow}{\text{ب}} \quad (٤٥ - ١٤)$$

ومن المهم ان نتذكر ان الرمز الذي على يسار المعادلة ليس محددة لان الصف الاول يحتوي على متجهات لاعداد قياسية . ومن ثم فخصائص المحددات ربما لا تنطبق على (٤٥ - ١٤) . وقد استعملنا رمز المحددة لتكون مجرد وسيلة سهلة لاستذكار الصيغة الطويلة (٤٤ - ١٤) .
فاذا ذكرنا ذلك امكن ان نستعمل (٤٥ - ١٤) لايحاد ضرب المتجهات كما في المثال التالي :

$$\text{مثال ٢ : أوجد } \overset{\leftarrow}{\text{ب}} \times \overset{\leftarrow}{\text{ب}} \text{ اذا كانت } \overset{\leftarrow}{\text{ب}} = \langle ٢ , -١ , ٦ \rangle \text{ و } \overset{\leftarrow}{\text{ب}} = \langle ٣ , ٥ , ١ \rangle .$$

الحل :

$$\left| \begin{array}{cc} \underline{ز} & \underline{و} & \underline{هـ} \\ ٦ & -١ & ٢ \\ ١ & ٥ & -٣ \end{array} \right| = \text{بكتابة } \overset{\leftarrow}{\text{ب}} \times \overset{\leftarrow}{\text{ب}}$$

نحصل على أن :

$$+ \underline{و} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \underline{هـ} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{پ}$$

$$\underline{ز} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{ز} (3 - 10) + \underline{و} (18 + 2) - \underline{هـ} (30 - 1) =$$

$$= -21 - 20 + 29 = -12$$

وبتطبيق تعريف الضرب الداخلي على الصيغة (١٤-٤٤) ،

$$\overleftarrow{پ} = \langle \overleftarrow{پ}_1, \overleftarrow{پ}_2, \overleftarrow{پ}_3 \rangle \text{ نحصل على أن}$$

$$\overleftarrow{پ}_2 \begin{vmatrix} \overleftarrow{پ}_3 & \overleftarrow{پ}_1 \\ \overleftarrow{ب}_3 & \overleftarrow{ب}_1 \end{vmatrix} - \overleftarrow{پ}_1 \begin{vmatrix} \overleftarrow{پ}_3 & \overleftarrow{پ}_2 \\ \overleftarrow{ب}_3 & \overleftarrow{ب}_2 \end{vmatrix} = \overleftarrow{پ} \cdot (\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{پ})$$

$$\begin{vmatrix} \overleftarrow{پ}_3 & \overleftarrow{پ}_2 & \overleftarrow{پ}_1 \\ \overleftarrow{پ}_3 & \overleftarrow{پ}_2 & \overleftarrow{پ}_1 \\ \overleftarrow{ب}_3 & \overleftarrow{ب}_2 & \overleftarrow{ب}_1 \end{vmatrix} = \overleftarrow{پ}_3 \begin{vmatrix} \overleftarrow{پ}_2 & \overleftarrow{پ}_1 \\ \overleftarrow{ب}_2 & \overleftarrow{ب}_1 \end{vmatrix} +$$

وهذا يساوي صفرا لوجود صفين متساويين . وهذا يثبت ان المتجه $\overleftarrow{پ} \times \overleftarrow{ب}$

عمودي على $\overleftarrow{پ}$.

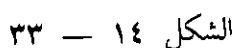
$$\text{وبالمثل } \overleftarrow{ب} \cdot (\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{پ}) = 0$$

ومن ثم يكون $\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{پ}$ عموديا ايضا على $\overleftarrow{ب}$. وهذا يعني بالمفهوم الهندسي انه

اذا مثلنا متجهين مخالفين للصف $\overleftarrow{پ}$ وبالتجهين $\overleftarrow{ب}$ و $\overleftarrow{ب}$ والذين لهما نفس

البداية ن فانه يمكن تمثيل $\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{پ}$ بمتجه $\overleftarrow{ن}$ عمودي على المستوى المعين

بالنقط $\overleftarrow{ن}$ ، $\overleftarrow{ك}$ ، $\overleftarrow{ر}$ كما هو موضح في الشكل ١٤-٣٣ .



الحل : بتطبيق (١٤ - ٣١) نجد أن المتجهين $\vec{P}$ و $\vec{B}$ اللذين يقابلان $\vec{K}$ ، $\vec{N}$ رهما $\vec{P} = \langle ٢ ، ١ - ، ٦ \rangle$ ، $\vec{B} = \langle -٣ ، ٥ ، ١ \rangle$ وحسب ما تقدم يكون المتجه $\vec{P}$ عموديا على المستوى المعين بالنقط $\vec{N}$ ، $\vec{K}$ ، ر. ومن أمثال $\vec{P}$ فإن $\vec{P} \times \vec{B} = -٣١ \vec{H} - ٢٠ \vec{O} + ٧ \vec{Z}$ وباستخدام (١٤ - ٣٧) واخذ $\vec{P} = \vec{N}$. نحصل على المعادلة $-٣١ (س - ٤) - ٢٠ (ص + ٣) + ٧ (ع - ١) = ٠$ التي تتحول الى $-٣١ س - ٢٠ ص + ٧ ع + ٥٧ = ٠$

$$\begin{array}{ccccccc} \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & & \\ \cdot p \times \cdot & = & \cdot & = & \cdot & \times p & \end{array}$$

ان الضرب المتجه لمتجهات الوحدة $\underline{e}$ ، $\underline{u}$ ، $\underline{z}$ طريف .
 فمثلا باستعمال (١٤-٤٤) واخذ $\overleftarrow{P} = \underline{e} = < 0, 0, 1 >$
 و $\overleftarrow{B} = < 0, 1, 0 >$ ينتج ان

$$\underline{ز} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \underline{و} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \underline{هـ} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{و} \times \underline{هـ}$$

= ز.

وبصورة عامة :

$$\left. \begin{aligned} \underline{و} \times \underline{هـ} &= \underline{ز} \\ \underline{ز} &= \underline{و} \times \underline{هـ} \\ \underline{هـ} &= \underline{ز} \times \underline{و} \\ \underline{ز} &= \underline{هـ} \times \underline{و} \\ \underline{و} - \underline{و} &= \underline{ز} \times \underline{هـ} \\ \underline{هـ} - \underline{هـ} &= \underline{و} \times \underline{ز} \\ \underline{و} \times \underline{و} &= \underline{هـ} \times \underline{هـ} \\ \underline{ز} \times \underline{ز} &= 0 \end{aligned} \right\} (14-46)$$

ويترك البرهان كتمرين .

والحقيقة أن $\underline{و} \times \underline{هـ} \neq \underline{هـ} \times \underline{و}$ تعني ان الضرب المتجه ليس تبديليا . ولا ينطبق قانون التوزيع عليه لانه اذا اخذنا المثال التالي

$$\underline{هـ} \times (\underline{و} \times \underline{و}) = (\underline{و} \times \underline{و}) \times \underline{هـ} = 0$$

ولكن

$$(\underline{هـ} \times \underline{و}) \times \underline{و} = \underline{و} \times \underline{ز} = \underline{و} - \underline{هـ}$$

والنظرية التالية تعطي بعض الخصائص الهامة للضرب المتجه .

(14-47) نظرية اذا كان $\vec{P}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{A}$ متجهات وم عدد قياسي فالخصائص

التالية تتحقق :

$$(1) \vec{P} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{P}$$

$$(2) (\vec{P} \times \vec{B}) \times \vec{A} = \vec{B} (\vec{P} \cdot \vec{A}) - \vec{P} (\vec{B} \cdot \vec{A})$$

$$(3) (\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{P} = \vec{A} \times \vec{P} + \vec{B} \times \vec{P}$$

$$(4) \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{P}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{P}$$

$$(5) \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{P}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{P}) - \vec{P} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$(6) \vec{P} \times (\vec{B} \times \vec{A}) = \vec{B} (\vec{P} \cdot \vec{A}) - \vec{A} (\vec{P} \cdot \vec{B})$$

$$(7) |\vec{A} \times \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$$

وجميع الخصائص في (14-47) يمكن ايجادها بتطبيق مباشر للتعريف

(14-44) ولكن هذا التطبيق يكون احيانا طويلا .

مثلا : اذا كان $P = \langle P_1, P_2, P_3 \rangle$ ،
 $B = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ فان

$$\frac{و}{-} \begin{vmatrix} B_3 & B_1 \\ P_3 & P_1 \end{vmatrix} - \frac{هـ}{-} \begin{vmatrix} B_3 & B_2 \\ P_3 & P_2 \end{vmatrix} = \overleftarrow{P} \times \overleftarrow{B}$$

$$\frac{ز}{+} \begin{vmatrix} B_1 \\ P_2 & P_1 \end{vmatrix} +$$

وبما أن تبديل صفين في محدة يغير اشارتها فيكون

$$\frac{و}{+} \begin{vmatrix} P_3 & P_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix} + \frac{هـ}{-} \begin{vmatrix} P_3 & P_2 \\ B_3 & B_2 \end{vmatrix} = \overleftarrow{P} \times \overleftarrow{B}$$

$$\overleftarrow{P} \times \overleftarrow{B} = \frac{ز}{-} \begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ B_2 & B_1 \end{vmatrix} -$$

وهذا يثبت الخاصية (١) .

اذا كان $\overleftarrow{J} = \langle J_1, J_2, J_3 \rangle$ ، فركبة $\frac{هـ}{-}$ للمتجه
 $\overleftarrow{P} \times (\overleftarrow{B} + \overleftarrow{J})$ هي

$$\begin{aligned} \overleftarrow{P} \times (\overleftarrow{B} + \overleftarrow{J}) &= \begin{vmatrix} P_3 & P_1 \\ J_3 + B_3 & J_1 + B_1 \end{vmatrix} \\ &- \begin{vmatrix} P_3 & P_2 \\ J_3 + B_3 & J_2 + B_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= ({}_2P_3 - {}_3P_2) + ({}_3P_2 - {}_2P_3) =$$

$$\begin{vmatrix} {}_3P & {}_2P \\ \text{جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} {}_3P & {}_2P \\ \text{بـ} & \text{بـ} \end{vmatrix} =$$

← ← ← ←

وهي تساوي مركبة هـ للمنتج $\vec{P} \times \vec{B} + \vec{P} \times \vec{J}$. ويمكن اجراء حسابات اخرى لاثبات ان مركبتى و، ز للمنتج $\vec{P} \times (\vec{B} + \vec{J})$ تساويان مركبتى و، ز للمنتج $\vec{P} \times \vec{B} + \vec{P} \times \vec{J}$. وهذا يثبت الخاصية (٣) في (١٤-٤٧).
ويترك براهين ما تبقى للقاريء.

وباستخدام (١٤-١٨) للتعويض عن $\vec{P}$ بـ في (١٤-٤٧)، (٧) والتبسيط نحصل على أن

$$\begin{aligned} \vec{P} \times \vec{B} &= \frac{1}{2} (|\vec{P}| |\vec{B}| \sin \theta) - \frac{1}{2} (|\vec{P}| |\vec{B}| \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} (|\vec{P}| |\vec{B}| \sin \theta - |\vec{P}| |\vec{B}| \cos \theta) \end{aligned}$$

حيث θ هي الزاوية المحصورة بين $\vec{P}$ و $\vec{B}$. وبأخذ الجذور التربيعية نحصل على أن :

$$|\vec{P} \times \vec{B}| = |\vec{P}| |\vec{B}| \sin \theta \quad (١٤-٤٨)$$

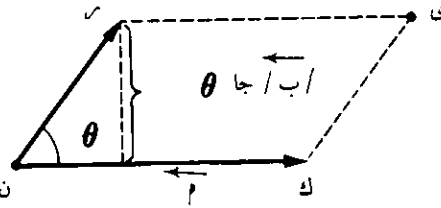
وبما أن $\vec{P}$ و $\vec{B}$ يكونان متوازيين عندما تكون $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$ تقودنا الصيغة (١٤-٤٨) الى النتيجة التالية :

(١٤-٤٩) **نظرية :** يكون المتجهان $\vec{P}$ ، $\vec{B}$ متوازيين اذا وفقط اذا كان

$$\vec{P} \times \vec{B} = 0$$

واخيرا لنفسر $\vec{P} \times \vec{B}$ هندسيا بتمثيل $\vec{P}$ و $\vec{B}$ بالمتجهين الهندسيين $\vec{ON}$ و $\vec{OR}$ اللذين لهما نفس نقطة البداية O . ولنفرض ان N هي النقطة التي يكون عندها $\vec{ON}$ ، $\vec{OR}$ متجاورين في متوازي اضلاع رؤوسه N ، K ، R ، O كما هو موضح في الشكل ١٤-٣٤. وارتفاع متوازي الاضلاع هو $|\vec{B}| \sin \theta$ وهذا تكون مساحته هي $\frac{1}{2} |\vec{P}| |\vec{B}| \sin \theta$. ومقارنة هذا مع (١٤-٤٨) نرى أن مقياس ضرب المتجه $\vec{P} \times \vec{B}$ يساوي مساحة متوازي

الاضلاع المعين بالمتجهين $\vec{p}$ و $\vec{b}$. وسنطعي في نهاية الفصل تفسيراً فيزيائياً للضرب المتجه.



الشكل ١٤ - ٣٤

مثال ٤: أوجد مساحة المثلث المعين بالنقط ن (٤، -٣، ١)، ك (٦، -٤، ٧) و ر (١، ٢، ٢).

الحل: كما في حل المثال ٣ فالمتجهات التي تقابل ن ك ون ر هي $\vec{p} = \langle 2, -1, 1 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 3, -5, 1 \rangle$ على الترتيب ويكون $\vec{p} \times \vec{b} = \langle 31, -20, 7 \rangle$ ومن ثم فمساحة متوازي الاضلاع ذي الضلعين المتجاورين ن ر ون ك هي $|\vec{p} \times \vec{b}| = \sqrt{961 + 400 + 49} = \sqrt{1410}$ ويتبع ان مساحة المثلث هي $\frac{1}{2} \sqrt{1410}$

تمارين:

في التمارين ١-٤ أوجد $\vec{p} \times \vec{b}$

- (١) $\vec{p} = \langle 1, -2, 3 \rangle$, $\vec{b} = \langle 2, 1, -4 \rangle$
- (٢) $\vec{p} = \langle 5, -1, 1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 3, 6, 2 \rangle$
- (٣) $\vec{p} = \langle 5, -6, 1 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 3, 2, 1 \rangle$
- (٤) $\vec{p} = \langle 2, 5, 1 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 5, 2, 1 \rangle$
- (٥) اذا كان $\vec{p} = \langle 2, 0, -1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 3, 1, 0 \rangle$ و $\vec{c} = \langle 1, -2, 4 \rangle$
- (٦) اذا كان $\vec{p}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ كما في السؤال ٥ فأوجد

(۷) برهنه ان $(\overleftarrow{P} \times \overleftarrow{B})$. $\overleftarrow{B} = 0$ لای متجهين P , $\overleftarrow{B}$.

(۸) برهن (۱۴ - ۴۶)

(۹) اکمل برهان (۱۴ - ۴۷)

(۱۰) برهنه آن $\vec{p} \times \vec{p} = (\vec{p} - \vec{p}) \times (\vec{p} + \vec{p})$ ، لای $\vec{p}$ ، $\vec{p}$

(۱۱) إذا كان $\overleftarrow{p} \times \overleftarrow{p} = \overleftarrow{p} \times \overleftarrow{p}$ ، جـ ، $\overleftarrow{p} \neq$. فهل يتبع ذلك أن $\overleftarrow{a} = \overleftarrow{b}$ ؟ وضح .

(١٢) أثبت أنه لا يمتزج $\vec{p}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$

$$\bullet = (\overleftarrow{c} \times \overleftarrow{p}) \times \overleftarrow{g} + (\overleftarrow{p} \times \overleftarrow{g}) \times \overleftarrow{c} + (\overleftarrow{g} \times \overleftarrow{c}) \times \overleftarrow{p}$$

(ملاحظة استعمال (١٤-٤٧ ، (٤) .)

في كل من التمارين ١٣ - ١٦ أوجد (١) متجهها عموديا على المستوى المعين

بالنقط ن ، ك ، ر (ب) مساحة المثلث المعين بالنقط ن ، ك ، ر .

(١٣) ن (١، ١ - ، ٢) ، ك (١ - ، ٣ ، ٠) ، ج (١ ، ٤ - ، ٣)

(١ - ، ١ ، ٤) ، (٣ - ، ١ - ، ٢) ، (٥ ، ٠ ، ٣ -) (١٤)

(١٥) ن (٠ ، ٠ ، ٤) ، ك (٠ ، ٥ ، ٠) ، ر (٢ ، ٠ ، ٠)

(١٦) ن $(-1, 2, 0)$ ، ك $(0, 2, -3)$ ، ج $(0, 0, 1)$.

(۱۷) إذا كان $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle = \overleftarrow{p}$ ، $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \overleftarrow{b}$

$$ج_1 = \langle ج_1, ج_2, ج_3 \rangle \text{ أثبت أن}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{p} & \vec{p} \\ \vec{c} & \vec{c} & \vec{c} \\ \vec{c} & \vec{c} & \vec{c} \end{vmatrix} = \vec{c} \cdot (\vec{c} \times \vec{p}) = (\vec{c} \times \vec{c}) \cdot \vec{p} = 0$$

(يسمى هذا العدد بحاصل الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$)

(١٨) إذا مثلنا P ، B ، J بمتجهات هندسية تبدأ من نقطة واحدة فاثبت أن $P \parallel J$.

($\vec{b} \times \vec{c}$) | هو حجم متوازي سطوح متجهاته الهندسية هي اضلاع

متجاورة .

(١٩) إذا اعطينا $n(1, -1, 2)$ ، $k(0, 3, -1)$ ،

ر (٣، -٤، ١). فاستعمل الثمرين ١٨ لايجاد حجم متوازي السطوح

الذي فيه من ، مك ، مر اضلاع متجاوزة .

٢٠. إذا اعطينا $p(1, 1, 2)$ ، $b(2, 0, 3)$ ، $j(4, 2, 1)$ ،

و (٥ - ٣ ، ٠) . استعمل التمرين ١٨ لإيجاد حجم متوازي السطوح الذي
أضلاعه المتجاورة $\overleftarrow{P}$ ب ، $\overleftarrow{P}$ ج ، $\overleftarrow{P}$ د .

٨ — الاسطوانات والسطوح الدورانية :

سندرس في هذا البند والذي يليه معادلات في س ، ص ، ع تكون بياناتها
سطوحا أساسية في دراسة الهندسة التحليلية . وقد عرفنا سابقا مفهوم المقطع في المستوى
الاحداثي . فبوجه عام أن مقطع اي سطح في مستوى هو تقاطع السطح والمستوى .
ولتبيان شكل السطح من معادلته سنعمد كثيرا على تبيان مقاطعه بمستويات توازي
المستويات الاحداثية .

مثال ١ : أوجد المقاطع بالمستويات المختلفة للسطح الذي معادلته هي
 $ع = س^2 + ص^2$ وارسم بيان المعادلة .

الحل : بتعويض س = ٠ في المعادلة نحصل على أن

$$ع = ص^2$$

ومن ثم فقطع المسطح في المستوى ص ع هو قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل
ومفتوح للأعلى كما هو مبين في الشكل ١٤ - ٣٥ . وبالمثل بتعويض ص بدلا
من ص نحصل على أن $ع = س^2$ ومن ثم فقطعه في المستوى س ع هو ايضا
قطع مكافئ . ومن المفيد إيجاد مقاطع في مستويات موازية للمستوى س ص
أي مستويات معادلاتها بالصيغة $ع = ج$. وذلك بتعويض ج بدلا من ع في
المعادلة المعطاة فينتج ان

$$س^2 + ص^2 = ج$$

وهكذا اذا كانت $ج < ٠$ ، فالمقطع في المستوى $ع = ج$ هو دائرة نصف قطرها
 $\sqrt{ج}$. وفي الشكل ١٤ - ٣٥ ثلاث دوائر من هذا النوع . واذا كان $ج > ٠$ ، فان
 $س^2 + ص^2 = ج$ ليس لها بيان ومن ثم لا توجد على السطح اي نقطة اسفل
المستوى س ص وللمقطع في المستوى س ص المعادلة $س^2 + ص^2 = ٠$
ومن ثم فهي نقطة واحدة هي نقطة الاصل .

ومع انه يمكن تعيين المقاطع في مستويات توازي المستويين س ع ، ص ع فتلك
التي حصلنا عليها كافية لوصف البيان وصفا دقيقا . وسيتبع من المناقشة في نهاية

هذا البند انه يمكن اعتبار السطح في هذا المثال ناشئا عن دوران منحنى القطع المكافئ ع = ص² في المستوى ص ع حول محور العينات . ويدعى هذا السطح بالجسم المكافئ الدائري ، أو الجسم المكافئ الدوراني .

(١٤ - ٥٠) تعريف الاسطوانة

إذا كان مـ منحني في مستوى ما وكان ل خطا مستقيما لا يقع في المستوى فمجموعة النقط الواقعة على جميع الخطوط التي تقطع مـ وتوازي ل تسمى اسطوانة .

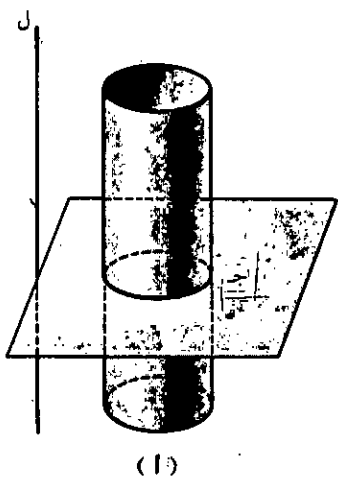
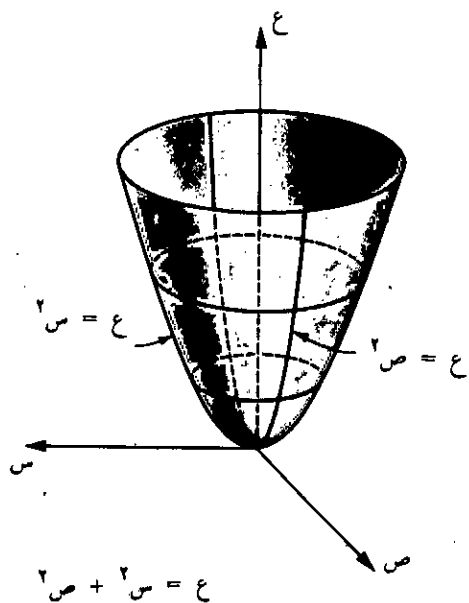
فالمنحني مـ في (١٤ - ٥٠) يسمى دليل الاسطوانة directrix وكل خط يمر من مـ ويوازي ل هو راسم ruling للاسطوانة . وأشهر نوع من الاسطوانات هي الاسطوانة الدائرية القائمة التي نحصل عليها بأخذ مـ دائرة في مستوى ما ، ل خطا عموديا على المستوى كما هو موضح في الشكل (١٤ - ٣٦) ، (١) .

ومع اننا قطعنا الاسطوانة في الشكل الا انه من المفهوم ان الرواسم تمتد الى النهاية . وليس من الضروري ان يكون الدليل مـ في (١٤ - ٥٠) منحنيا مغلقا . وهذا موضح في الشكل ١٤ - ٣٦ ، (٢) حيث مـ قطع مكافئ وفي الصفحات التالية سنكتفي بالحالة التي يكون فيها الدليل مـ على مستوى احداثي ويكون الخط موازيا لمحور الاحداثيات الذي لا يقع في ذلك المستوى فلنفرض ان مـ يقع على المستوى س ص ومعادلته ص = ق (س) حيث ق اقتران ما ولتكن الرواسم موازية لمحور العينات . فكما هو موضح في الشكل ١٤ - ٣٧ تقع النقطة ن (س ، ص ، ع) على الاسطوانة اذا وفقط اذا كان ك (س ، ص ، ٠) تقع على مـ أي اذا وفقط اذا حقق الاحداثيان الاول والثاني س وص للنقطة ن المعادلة ص = ق (س) . يتبع أن معادلة الاسطوانة هي ص = ق (س) ومن ثم فهي نفس معادلة الدليل في المستوى س ص .

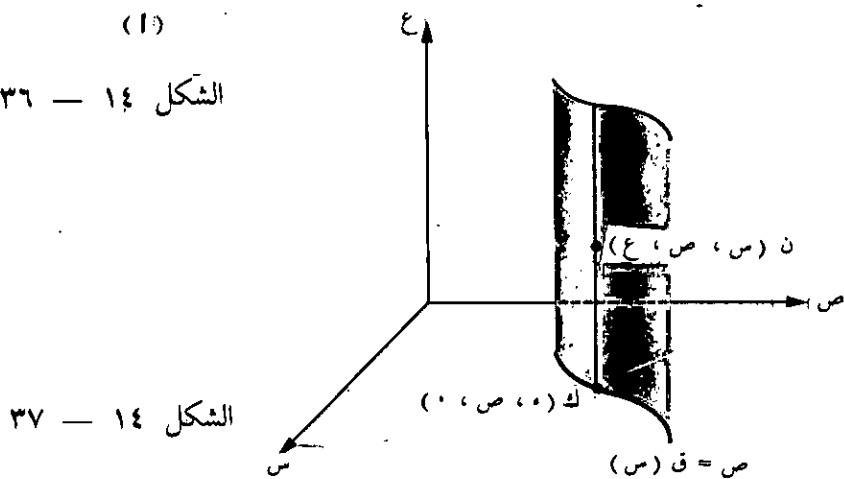
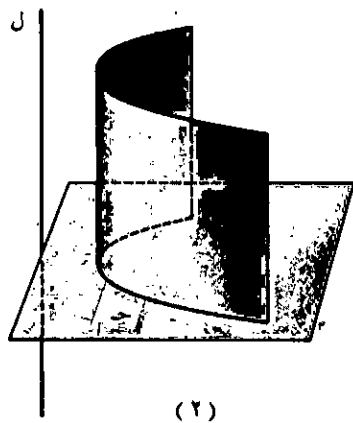
$$\text{مثال ٢ : أرسم بيان المعادلة } ١ = \frac{ص^2}{٩} + \frac{س^2}{٤}$$

الحل : من ملاحظتنا السابقة ينتج أن البيان هو اسطوانة رواسمها موازية لمحور

الشكل ١٤ — ٣٥



الشكل ١٤ — ٣٦



الشكل ١٤ — ٣٧

العينات . فنبداً برسم بيان $\frac{ص}{٩} + \frac{س}{٤} = ١$ في المستوى س ص .

فهذا القطع الناقص هو دليل الاسطوانة . وجميع المقاطع في المستويات الموازية للمستوى س ص هي قطاعات ناقصة مكافئة . ويمكن اثبات ان بيان المعادلة التي تحتوي على المتغيرين ص و ع هي اسطوانة رواسمها موازية لمحور السينات ومقطعها (الدليل) في المستوى ص ع هو البيان للمعادلة المعطاة . وبالمثل فبيان معادلة لا تحتوي على المتغير ص هي اسطوانة رواسمها موازية لمحور الصادات ودليلها هو البيان للمعادلة في المستوى س ع .

مثال ٣ : ارسم البيانات للمعادلات التالية

$$(١) \text{ ص}^٢ = ٩ - ع \quad (ب) \text{ ع} = جا س$$

(١) البيان هو اسطوانة رواسمها موازية لمحور السينات .

والبيان للمعادلة $\text{ص}^٢ = ٩ - ع$ هو دليل في المستوى ص ع . وقد رسم جزء من البيان في الشكل ١٤ - ٣٩ ، (١) . ويدعى هذا السطح بالاسطوانة المكافئة .

(ب) البيان هو اسطوانة رواسمها موازية لمحور الصادات ودليلها في المستوى س ص هو البيان للمعادلة $\text{ع} = جا س$ وقد رسم جزء من البيان في الشكل ١٤ - ٣٩ ، (٢) .

لقد عرفنا السطح الدوراني في الفصل الثالث عشر بانه السطح الناشئ عن دوران مستوى منحنى مـ حول مستقيم في المستوى يسمى محور الدوران . وفي الدراسة الاتية سنأخذ مـ دائماً في مستوى احداثي ونجعل محور الدوران احد محاور الاحداثيات . ومن الملائم استخدام الرمز ق (س ، ص) لتعني تعبيرا جبريا أو غير جبري في المتغيرين س ، ص . وفي هذه الحالة فسترمز ق (١ ، ب) للتعبير الناتج عن تعويض ١ بدلا من س وب بدلا من ص . وفي الفصل السادس عشر سنبحث هذه الاصطلاحات بتعمق .

وبيان المعادلة ق (س ، ص) = ٠ في المستوى س ص هو منحنى . (يهنا هنا فقط البيان في المستوى س ص وليس البيان في ثلاثة ابعاد وهو اسطوانة .) ولنفرض للسهولة ان س ، ص غير سالبين لجميع (س ، ص)

الواقعة على مـ ولتكن ي ترمز الى السطح الناتج من دوران مـ حول محور العينات . وكما هو موضح في الشكل ١٤ - ٤٠ فالنقطة ن (س ، ص ، ع) تقع على ي اذا وفقط اذا كانت ك (س_١ ، ص ، ٠) تقع على مـ حيث $\sqrt{s^2 + e^2} = s_1$. ومن ثم فان ن (س ، ص ، ع) تقع على ي اذا وفقط اذا كان

$$0 = (s^2 + e^2 - s_1^2) \quad \text{ق}$$

ولهذا فلايجاد معادلة ي تستبدل المتغير س في معادلة مـ بالرمز $\sqrt{s^2 + e^2}$ وبالمثل اذا دار بيان المعادلة ق (س ، ص) = ٠ حول محور السينات فيمكن ايجاد معادلة السطح الناتج بأخذ $\sqrt{s^2 + e^2}$ بدلا من ص . ولبعض المنحنيات التي تحتوي نقطا (س ، ص) حيث س أو ص سالبة يمكن توسيع المناقشة السالفة بالتعويض $\pm \sqrt{s^2 + e^2}$ بدلا من س أو $\pm \sqrt{s^2 + e^2}$ بدلا من ص . واذا كانت س أو ص تظهر بقوى زوجية فقط كما في المثال التالي فلا حاجة لهذا التمييز لان الجذور ستختفي عند الاختصار .

مثال ٤ : اذا دار المنحنى $9s^2 + 4e^2 = 36$ حول محور الصادات فما معادلة المجسم الناتج .

الحل : يمكن ايجاد المعادلة المطلوبة بتعويض $\sqrt{s^2 + e^2}$ بدلا من س وهذا يعطينا

$$9(s^2 + e^2) + 4e^2 = 36 \quad \text{٩}$$

ويسمى هذا المسطح المجسم الناقصي الدوراني

ellipsoid of revolution ويمكن عقد مناقشة كالسابقة حول

المنحنيات التي تقع في المستوى ص ع أو المستوى س ع . فمثلا اذا دار منحنى ما

مـ في المستوى س ع حول محور العينات فيمكن ايجاد معادلة السطح الناتج

بوضع $\sqrt{s^2 + e^2}$ بدلا من س . واذا دار مـ حول محور السينات فنستبدل ع

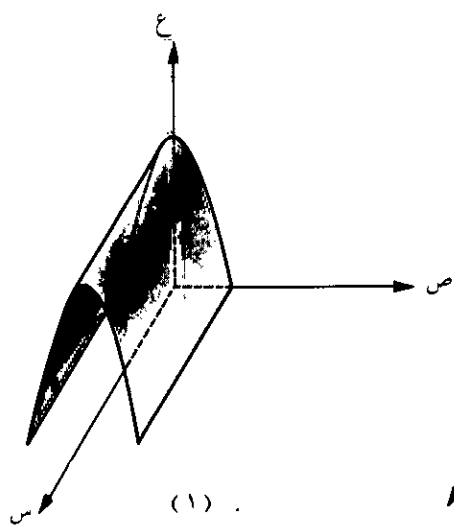
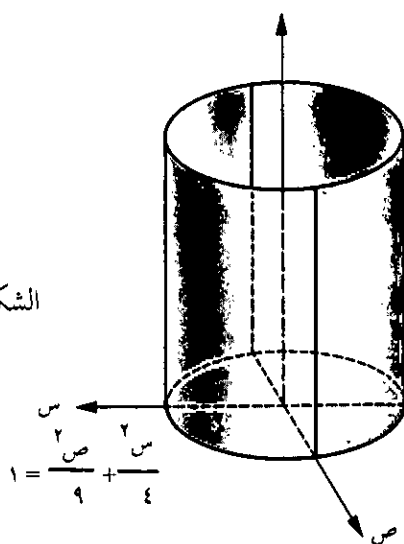
$$\text{بالرمز } \sqrt{s^2 + e^2} \quad \text{ب}$$

واخيرا لاحظ أن معادلات السطوح الدورانية تنشأ استنادا الى اثنين من

المتغيرات تظهر في تجميعات مثل $s^2 + e^2$ أو $s^2 + e^2 + 2se$.

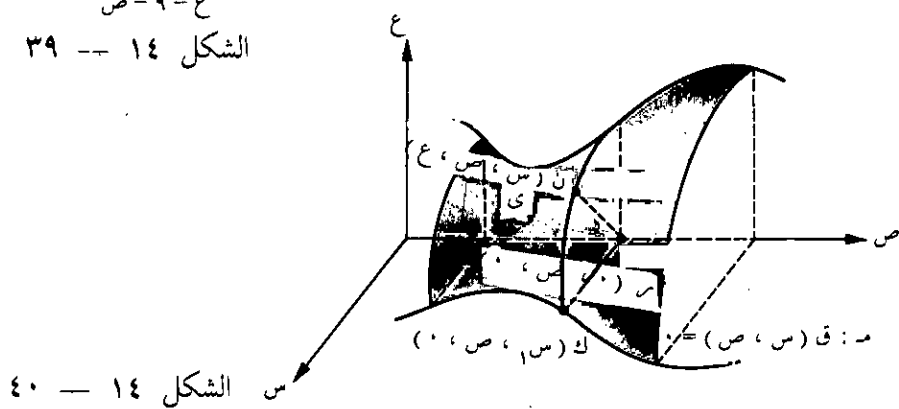
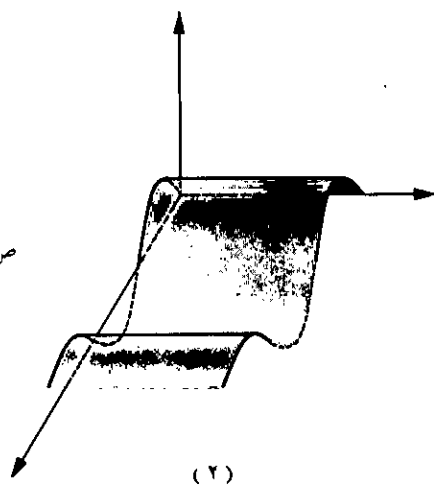
مثال ٥ : صف بيان المعادلة $4s^2 - 2e^2 + 2e = 16$ باعتبارها سطحاً دورانياً .

الشكل ١٤ - ٣٨



$$ع = ٩ - ص^2$$

الشكل ١٤ - ٣٩



الشكل ١٤ - ٤٠

الحل : يمكن إيجاد المعادلة المعطاة من المعادلة $ص^2 - ٤س^2 = ١٦$. وذلك بتعويض

$\sqrt{ص^2 + ٤ع^2}$ بدلا من $ص$. ولهذا يكون البيان السطح الناشيء عن قطع زائد في مستوى $س$ ص معادلته $ص^2 - ٤س^2 = ١٦$ في دورانه حول محور السينات. ويمكن وصف السطح بأنه السطح الناشيء عن قطع زائد في المستوى $س$ ع معادلته $٤س^2 - ٤ع^2 = ١٦$ في دورانه حول محور السينات.

تمارين :

في التمارين ١-١٠ ارسم مخططات المعادلات :

$$(١) \quad ٩ = ص^2 + ٢س^2$$

$$(٢) \quad ١٦ = ٢ع + ٢س^2$$

$$(٣) \quad ٣٦ = ٢ع٩ + ٢ص٤$$

$$(٤) \quad ٢٥ = ٢ع٥ + ٢س$$

$$(٥) \quad ٩ = ٢س ع$$

$$(٦) \quad ٠ = ع٤ - ٢س$$

$$(٧) \quad ١٦ = ٢س - ٢ع$$

$$(٨) \quad ١ = س ع$$

$$(٩) \quad ع = ٤ص$$

$$(١٠) \quad ع = ل ط س$$

في التمارين ١١-١٦ أوجد معادلة السطح الناتج عن دوران بيان المعادلة المعطاة حول المحور المشار اليه. ارسم بيان السطح.

$$(١١) \quad ١٦ = ٢ع٤ + ٢س^2, \text{ محور الصادات}$$

$$(١٢) \quad ٤س = ٢ص^2, \text{ محور السينات}$$

$$(١٣) \quad ٤ - ٢ع = ص^2, \text{ محور العينات}$$

$$(١٤) \quad ع = ٢ع - ٢, \text{ محور الصادات}$$

$$(١٥) \quad ١ = ٢س - ٢ع, \text{ محور العينات}$$

$$(١٦) \quad ١ = س ع, \text{ محور العينات}$$

في التمارين ١٧-٢٠ ارسم بيان المعادلة المعطاة.

$$(١٧) \quad ١٦ = ٢ص + ٢ع٤ + ٢س$$

$$(١٨) \quad س^2 - ٤ع^2 + ص^2 = ١٦$$

$$(١٩) \quad ص - ٤ع^2 = س^2$$

$$(٢٠) \quad س^2 - ص^2 + ٤ع^2 = ١$$

٩ — السطوح التربيعية : Quadric Surfaces

بيننا في الفصل السابع أن البيان في بعدين لمعادلة من الدرجة الثانية في س و ص هو قطع مخروطي Conic Section وفي الهندسة التحليلية في ثلاثة ابعاد يشار الى بيان معادلة من الدرجة الثانية في س ، ص ، ع بالسطح التربيعي وسندرس في هذا البند معادلات معيارية لمثل هذه السطوح .
يسمى بيان المعادلة

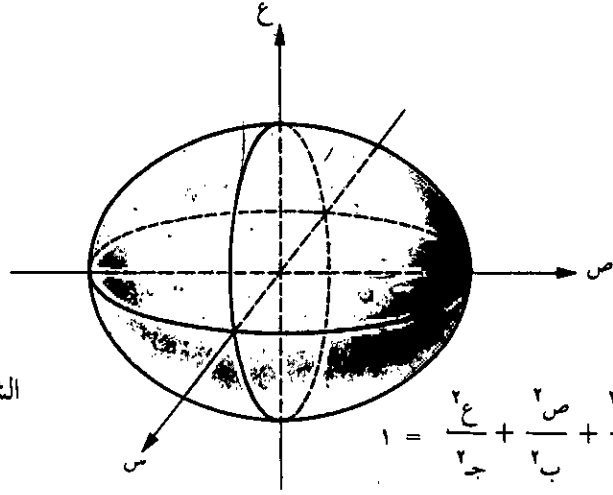
$$(١٤ - ٥١) \quad ١ = \frac{س^2}{٢٢} + \frac{ص^2}{٢ب} + \frac{ع^2}{٢ج}$$

حيث ٢ ، ب ، ج اعداد حقيقية موجبة بمجسم ناقصي ellipsoid ومقاطع هذا السطح بالمستويات الموازية لمستويات الاحداثيات هي قطاعات ناقصة . مثلاً فالمقطع في المستوى س ص هو قطع ناقص معادلته

$$١ = \frac{ص^2}{٢ب} + \frac{ع^2}{٢ج}$$

وبالمثل فالمقطعان في المستويين ص ع ، س ع هما قطعان ناقصان كما يظهر في الشكل ١٤ - ٤١ . ولنجد القطع في مستوى اختياري مواز للمستوى س ص اي في مستوى معادلته بالصيغة ع = ك ، نعوض ك بدلا من ع في (١٤ - ٥١) فنحصل على المعادلة

$$\frac{ك^2}{٢ج} - ١ = \frac{ص^2}{٢ب} + \frac{س^2}{٢٢}$$



الشكل ١٤ - ٤١

فاذا كانت $|ك| < ج$ فان $١ - \frac{ك^2}{ج^2} > ٠$ ، ولا يوجد بيان . ولهذا فيبان

(١٤ - ٥١) ينحصر بين المستويين $ع = -ج$ و $ع = ج$. واذا كانت $|ك| >$

ج فان $١ - \frac{ك^2}{ج^2} < ٠$. ومن ثم فالراسم في المستوى $ع = ك$ قطع ناقص .

وبالمثل تكون القطوع في مستويات موازية للمستويين الأحداثيين الآخرين هي قطع ناقصة بشرط ألا تقطع محور السينات خارج الفترة المفتوحة $(-پ ، پ)$ أو محور الصادات خارج $(-ب ، ب)$.

لاحظ انه اذا كانت $پ = ب = ج$ يكون بيان (١٤ - ٥١) كرة نصف قطرها $پ$ ومركزها نقطة الاصل .

ويسمى بيان المعادلة

$$١ = \frac{ع^2}{ج^2} = \frac{ص^2}{ب^2} + \frac{س^2}{پ^2} \quad (١٤ - ٥٢)$$

بمجسم الزائدي ذي صفحة واحدة . ومقطعاها بالمستويين $س ص$ و $ص ع$ قطعان مخروطيان زائدان معادلتهما

$$١ = \frac{٢ع}{٢ج} - \frac{٢ص}{٢ب} \quad \text{و} \quad ١ = \frac{٢ع}{٢ج} + \frac{٢س}{٢پ}$$

على الترتيب .

وقطوعه بمستويات موازية للمستوى س ص لها معادلات صيغها من النوع

$$\frac{٢ك}{٢ج} + ١ = \frac{٢ص}{٢ب} + \frac{٢س}{٢پ}$$

حيث ك عدد حقيقي ولهذا فهي قطع مخروطية ناقصة .

ويظهر بيان (١٤ - ٥٢) في الشكل ١٤ - ٤٢ .

ويسمى محور العينات بمحور المجسم الزائدي .

وبيان المعادلة

$$١ = \frac{٢ع}{٢ج} + \frac{٢ص}{٢ب} - \frac{٢س}{٢پ} \quad (١٤ - ٥٣)$$

هو ايضا مجسم زائدي ذو صفحة واحدة ، ولكن في هذه الحالة يكون محور

المجسم هو محور الصادات . واذا كانت الحدود التي تشمل س سالبة وبقية

الحدود موجبة ينطبق محور المجسم الزائدي مع محور السينات .

ويسمى بيان المعادلة

$$١ = \frac{٢ع}{٢ج} - \frac{٢ص}{٢ب} - \frac{٢س}{٢پ} \quad (١٤ - ٥٤)$$

بالمجسم الزائدي ذي الصفحتين

وقطعاه بالمستويين س ص و س ع هما قطعان زائدان ولكن قطعوه بمستويات

معادلاتها بالصيغة س = ك حيث $|ك| < پ$ هي قطع ناقصة . وسنترك

للقارئ اثبات ان بيان (١٤ - ٥٣) مظهره كما في الشكل ١٤ - ٤٣ .

ويسمى محور السينات بمحور المجسم الزائدي . وبوضع الاشارة السالبة على

حدود مختلفة يمكن ان نحصل على المجسم الزائدي الذي محوره محور الصادات أو العينات .

$$0 = \frac{^2ع}{^2ج} - \frac{^2ص}{^2ب} + \frac{^2س}{^2پ}$$

هو مخروط محوره محور العينات ومعادلة مقطعه في المستوى ص ع هي

$$0 = \frac{^2ع}{^2ج} - \frac{^2ص}{^2ب}$$

وبالحل في ص نحصل على $ص = \pm \left(\frac{ب}{ج} \right) ع$ التي تعطينا معادلتين مستقيمتين يمران بنقطة الاصل . وبالمثل فقطعه بالمستوى س ص هو زوج من المستقيمتين تقطع نقطة الاصل . ومقاطعته بمستويات موازية لمستوى س ص هي قطوع ناقصة (لماذا ؟) . وقد رسم البيان في الشكل ١٤ - ٤٤ .

وبتغيير اشارة الحدود في (١٤ - ٥٤) نحصل على مخروط محوره محور السينات أو محور الصادات .

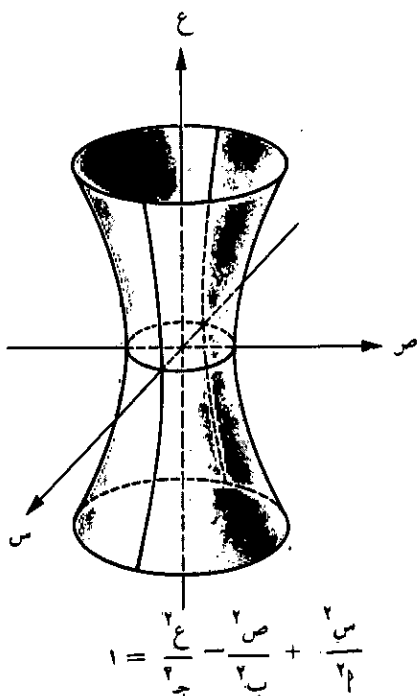
ويسمى بيان المعادلة التي تأخذ الصيغة

$$(١٤ - ٥٥) \quad \frac{^2ص}{^2ب} + \frac{^2س}{^2پ} = ج ع$$

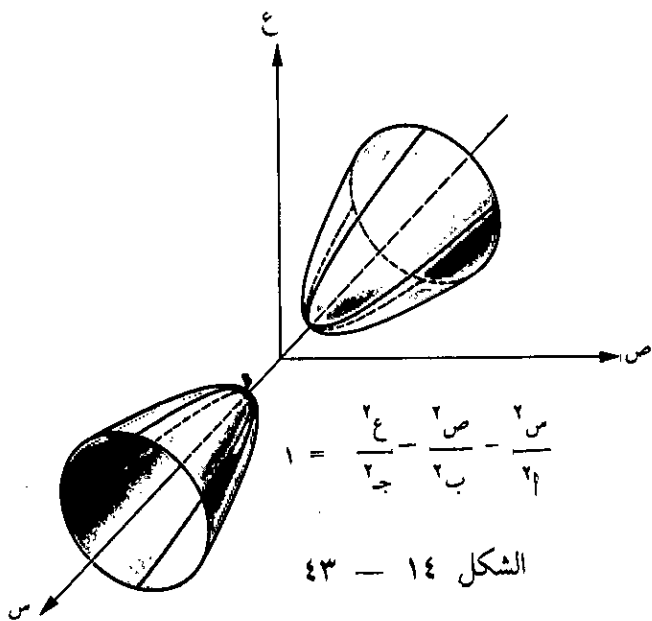
المجسم المكافيء . والمثال ١ في البند السابق هو حالة خاصة من (١٤ - ٥٥) فيها $پ = ب = ج = ١$. واذا كانت $ج < ٠$ يكون بيان (١٤ - ٥٥) مشابها للمبين بالشكل ١٤ - ٣٥ عدا حالة $پ \neq ب$ فتكون المقاطع بالمستويات الموازية للمستوى س ص هي قطوع ناقصة أو دوائر . واذا كانت $ج > ٠$ فيكون المجسم المكافيء مفتوحا للأسفل . ويسمى محور العينات بمحور المجسم المكافيء .

وبيانا المعادلتين

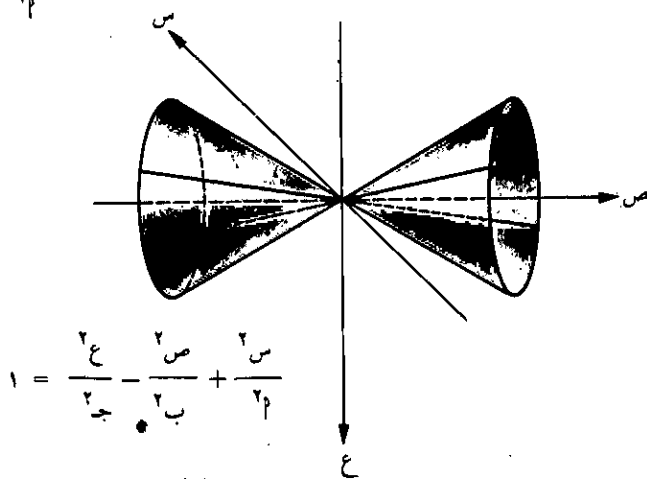
$$\frac{^2ع}{^2ب} + \frac{^2ص}{^2پ} = ج ص , \quad \frac{^2ع}{^2ب} + \frac{^2س}{^2پ} = ج س$$



الشكل ١٤ - ٤٢



الشكل ١٤ - ٤٣



الشكل ١٤ - ٤٤

هما مجسمان مكافئان محوراهما محور الصادات ومحور السينات على الترتيب .
واخيرا يسمى بيان المعادلة

$$(١٤-٥٦) \quad \frac{ص^2}{٢٢} - \frac{س^2}{٢ب} = ج ع$$

المجسم المكافئ الزائدي . hyperbolic paraboloid
ويبين الشكل ١٤ - ٤٥ رسماً لمسطح كسرج الحصان وذلك للحالة التي تكون فيها ج < ٠ .

ويمكن الحصول على اشكال متنوعة بتغيير س ، ص ، ع في المعادلة (١٤-٥٦) . ومن الممكن ايجاد صيغ لانتقال المحاور في ثلاثة ابعاد أو دورانها كتلك التي في بعدين . ويمكن استعمال هذه الصيغ لاثبات ان بيان معادلة من الدرجة الثانية في س ، ص ، ع هو أحد السطوح التي ناقشناها في هذا الفصل ما عدا الحالات الشاذة .

مثال ١ : أرسم بيانا للمعادلة

$$١٤٤ = ١٦س^2 - ٩ص^2 + ٣٦ع^2$$

واذكر اسم المسطح .

الحل : بقسمة طرفي المعادلة على ١٤٤ نحصل على

$$١ = \frac{ص^2}{٩} - \frac{س^2}{١٦} + \frac{ع^2}{٤}$$

والمقطع في مستوى س ص قطع زائد $١ = \frac{ص^2}{٩} - \frac{س^2}{١٦}$ رأساه عند $(٠, \pm ٣)$ ،

$(٠, ٠)$. والمقطع في المستوى ص ع هو قطع زائد آخر $١ = \frac{ص^2}{٩} - \frac{ع^2}{٤}$

رأساه عند $(٠, ٠, \pm ٢)$. والمقطع في المستوى س ع هو القطع الناقص

$١ = \frac{ع^2}{٤} + \frac{س^2}{٩}$ وتظهر هذه المقاطع في الشكل ١٤ - ٤٦ . ولايجاد

المقاطع على مستويات موازية للمستوى س ع نعوض ص = ك في المعادلة المعطاة ونحصل على

$$\frac{ك^2}{١٦} + ١ = \frac{ع^2}{٤} + \frac{س^2}{٩}$$

وهذا يثبت أن أي مقطع في مستوى مواز للمستوى س ع هو قطع ناقص . فمثلا

$$\text{إذا اخذنا } ك = \pm ٨ \text{ نحصل على } \frac{ع^2}{٤} + \frac{س^2}{٩} = ٥ \text{ أو ما يكافئه}$$

$$\frac{ع^2}{٢٠} + \frac{س^2}{٤٥} = ١ . \text{ وتظهر هذه المقاطع في الشكل ١٤ - ٤٦ .}$$

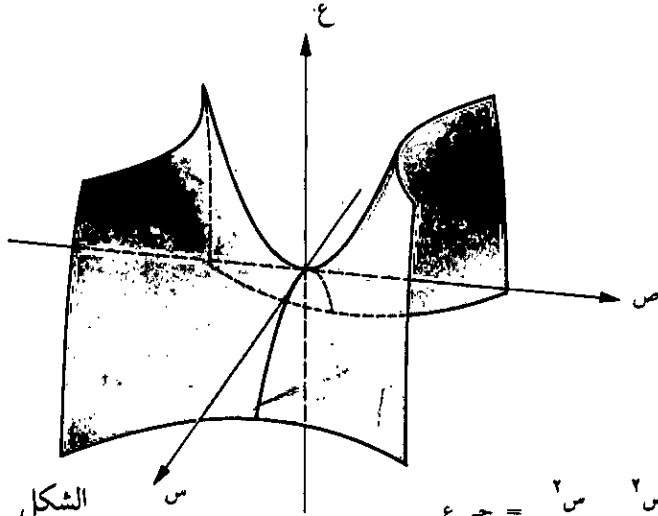
ويمكن إيجاد مستويات موازية للمستوى س ص أو المستوى ص ع بتعويض ع = ك أو س = ك على الترتيب في المعادلة المعطاة . وسنترك للقارئ تحقيق انه في كلا الحالتين يكون المقطع قطعاً زائداً . ويكون المسطح مجسماً زائداً بصفحة واحدة محوره هو محور الصادات .

مثال ٢ : ارسم بيانا للمعادلة

$$ص^2 + ع^2 = س \text{ واذكر اسم المسطح .}$$

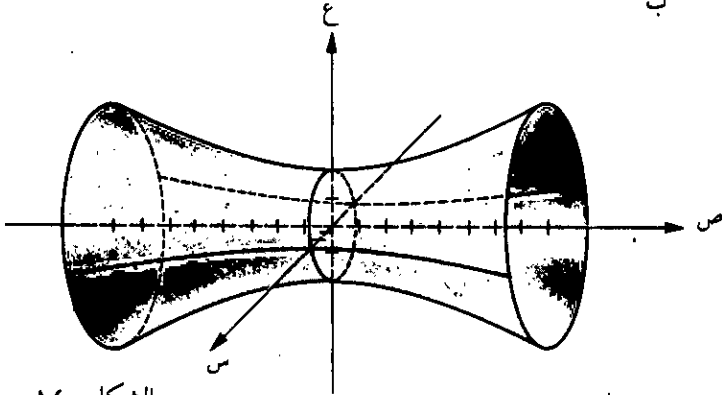
الحل : ان المقطع في المستوى س ص هو القطع المكافئ $ص^2 = س$. والمقطع في المستوى س ع هو القطع المكافئ $ع^2 = س$. وهذان المقطعان موضحان في الشكل ١٤ - ٤٧ . والمقطع في المستوى ص ع هو بيان للمعادلة $ص^2 + ع^2 = ٠$ ومن ثم فهو يتكون من نقطة واحدة وهي نقطة الاصل . ولايجاد المقاطع في مستويات موازية للمستوى ص ع ضع $س = ك$ في المعادلة المعطاة لنحصل على

$$ص^2 + ع^2 = ك$$



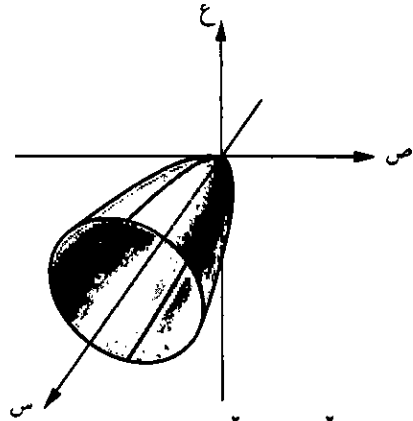
الشكل ١٤ — ٤٥

$$ج ع = \frac{ص^2}{ب^2} - \frac{ص^2}{ا^2}$$



الشكل ١٤ — ٤٦

$$١٤٤ = ١٦ س - ٩ ص + ٣٦ ع^2$$



الشكل ١٤ — ٤٧

$$ج = ص + ٤ ع^2$$

واذا كانت ك > ٠ فلا يوجد بيان (لماذا ؟) . واذا كانت ك < ٠ يكون المقطع قطعاً ناقصاً . مثلاً ضع ك = ٩ تحصل على

$$١ = \frac{٢ع}{\left(\frac{٩}{٤}\right)} + \frac{٢ص}{٩}$$

وهو قطع ناقص نصفاً محوريه ٣ و $\frac{٣}{٢}$ كما هو موضح في الشكل ١٤ - ٤٧ وعلى القاريء أن يتحقق من ان المقاطع في مستويات موازية لاي من المستويين س ع أوس ص هي قطوع مكافئة . فالمسطح مجسم مكافئ محوره هو محور السينات .

تمارين :

ارسم البيان لكل من المعادلات في التمارين ١ - ٢٠ واذكر اسم المسطح .

- (١) $٤س + ٩ص + ٣٦ع$
- (٢) $٨س + ٤ص + ١٦ع$
- (٣) $١٦س + ١٠٠ص - ٢٥ع = ٤٠٠$
- (٤) $٢٥س - ٢٢٥ص + ٩ع = ٢٢٥$
- (٥) $٣س - ٤ص - ١٢ع$
- (٦) $٤س + ٩ص = ٩ع$
- (٧) $٤س - ١٦ص = ٤ع$
- (٨) $٤ص - ٢٥ع = ١٠٠س$
- (٩) $٩س + ٤ص + ٣٦ع$
- (١٠) $١٦س + ٢٥ص + ١٠٠ع = ٢٠٠$
- (١١) $١٦س - ٤ص - ١٢ع + ١ = ٠$
- (١٢) $٣٦س + ٩ص + ٩ع$
- (١٣) $٩ص - ٩س - ٩ع = ٠$
- (١٤) $٩ع - ٩س - ٩ص = ١$
- (١٥) $٤ص + ٢٥ع + ١٠٠س = ٠$
- (١٦) $١٦ص + ٩س = ٤ع$
- (١٧) $٣٦س + ١٦ص + ٩ع = ٠$

$$(18) \quad 4ص^2 = 9ع^2 + 9س^2$$

$$(19) \quad 4ص = 9س - 9ع$$

$$(20) \quad 4س = 16س + 9ع$$

١٠ — المنحنيات في الفضاء :

التعريف التالي انما هو على غرار التعريف الذي اعطي في (١٣ - ١) للمنحنيات في المستوى الواحد

(١٤-٥٧) تعريف المنحنى في الفضاء

المنحنى في الفضاء (أو المنحنى في ثلاثة ابعاد) هو مجموعة مـ من الثلاثيات المرتبة تأخذ الصيغة التالية :

$$م = \{ (ح(ن), خ(ن), ج(ن)) : ن \in فم \}$$

حيث ح ، خ ، ج هي اقترانات متصلة على الفترة فم. وبيان مـ هو المجموعة التي تحتوي على جميع النقاط

$پ(ن) = (ح(ن), خ(ن), ج(ن))$ في نظام احداثي متعامد يقابل الثلاثي المرتب في مـ.

وستستعمل كلمتي المنحنى و بيان المنحنى بمعنى واحد وكما هو الحال في ذات بعدين من الملائم احيانا ان نتخيل أن النقطة $پ(ن)$ ترسم المنحنى وذلك بتغير قيم ن في الفترة فم. وإذا كانت ف الفترة المغلقة $[و, ز]$ فتسمى $پ(و)$ و $پ(ز)$ احيانا بطرفي مـ. ويكون المنحنى مغلقا اذا كان $پ(و) = پ(ز)$.

ولقد وضح مفهوم المنحنى المغلق البسيط في الفصل الثالث عشر. وتسمى المعادلات

$$(14-58) \quad س = ح(ن), ص = خ(ن), ع = ج(ن)$$

حيث ن $\in$ فم بالمعادلات الوسيطة للمنحنى مـ المعروف في (١٤-٥٧).
فتثلا اذا كان

$$م = \{ (س_١ + پ, ن, ص_١ + پ, ن, ع_١ + پ, ن) : ن \in فم \}$$

فباستخدام (١٤-٣٥) يكون مـ خطا مستقيما يمر بالنقطة $پ(س_١, ص_١, ع_١)$

ص_١ ، ع_١) ويعين بالمتجه $\langle p_1 , p_2 , p_3 \rangle$.

مثال ١ : ارسم بيانا للمنحنى

م = { (p جتا ن ، p جتا ن ، p جتا ن) : ن ∈ ج }
حيث يكون p ، ب موجبين .

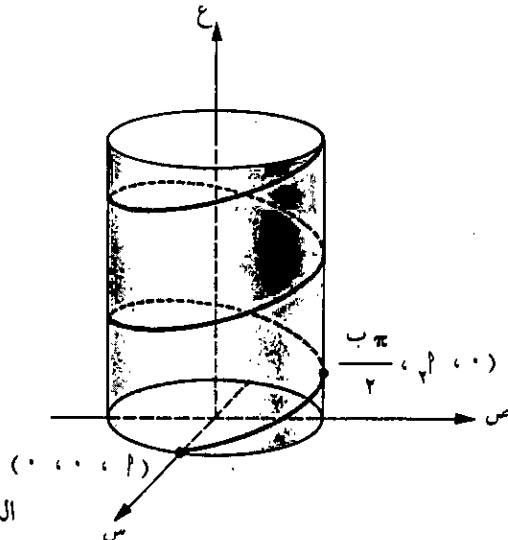
الحل : معادلات م الوسيطة هي

س = p جتا ن ، ص = p جتا ن ، ع = p جتا ن .

واذا وقعت النقطة ك (س ، ص ، ع) على المنحنى فتقع ك على اسطوانة دائرية معادلتها $s^2 + v^2 = p^2$ (لماذا ؟) .

فاذا تغيرت ن من ٠ الى 2π فالنقطة ك تبدأ عند (٠ ، ٠ ، p) وتلف حول هذه الاسطوانة مرة واحدة . وفي كل فترة اخرى طولها 2π ترسم ك عروة جديدة (انظر الشكل ١٤ - ٤٨) . ويسمى هذا المنحنى باللولب الدائري Circular helix . ويعتبر المنحنى م المعروف في (١٤ - ٥٧) ممهدا

Smooorn اذا كانت المشتقات ج ، خ ، ج متصلات على ف . ويعرف طول م بطريقة مماثلة لتلك الطريقة التي وصفناها للمنحنيات المستوية في الفصل الثالث عشر . واذا كانت ف = [ر ، و] وكان م لا يقطع نفسه (ربما باستثناء (و) = (ر)) فيمكن اثبات ان الطول ل للمنحنى م من (و) الى (ر) يعرف كما يلي :



الشكل ١٤ - ٤٨

$$(١٤-٥٩) \quad \left[\sqrt[3]{\frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} (ن) \right] + \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} (ن) \right] + \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} (ن) \right]} \right] = ل$$

وعلى القاريء ان يقارن هذا مع (١٣-٢٣) .
واذا كان مـ معطى بالمعاملات الوسيطة (١٤-٥٨) فيمكن كتابة الصيغة السابقة كما يلي :

$$(١٤-٦٠) \quad \left[\sqrt[3]{\frac{2}{3} \left(\frac{س}{ن} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{ص}{ن} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{س}{ن} \right)} \right] = ل$$

مثال ٢ : أوجد طول المنحنى في المثال ١ من مـ (٠) الى مـ (٢ π)
الحل : بتطبيق (١٤-٥٩) نحصل على ما يلي

$$\begin{aligned} ل &= \left[\sqrt[3]{\frac{2}{3} \pi + \frac{2}{3} \pi + \frac{2}{3} \pi} \right] \\ &= \left[\sqrt[3]{\frac{2}{3} \pi} \right] = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \pi} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2}{3} \pi} \end{aligned}$$

وفي الفصل القادم ستناقش خطوط التماس في الفضاء للمنحنى باستعمال المتجهات .

تمارين :

ارسم بيانات المنحنيات في التمارين ١-١٠ .

$$(١) \quad م = \{ (ن، ٤ جتا ن، ٩ جا ن) : ن \leq ٠ \}$$

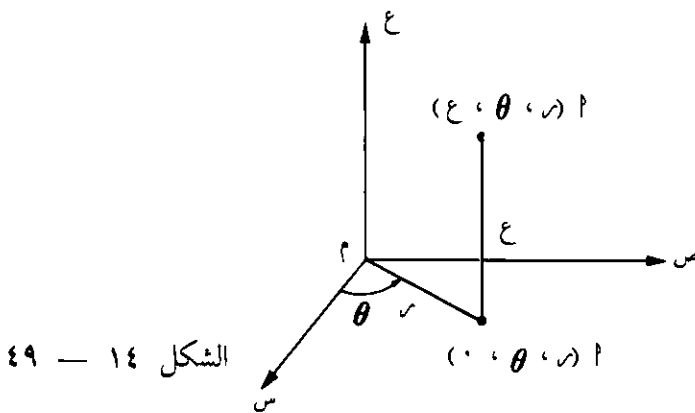
$$(٢) \quad م = \{ (ظا ن، قان، ٢) : ن \geq ٠ \}$$

- (٣) $\{ (ن، ن^٢، ن^٣) : ن \in \{ح\} \}$ م =
- (٤) $\{ (ن، ن^٢، ن^٣) : ن \in [٠، ٤] \}$ م =
- (٥) $س = ن^٢ + ١، ص = ن، ع = ٣، ن \in \{ح\}$
- (٦) $س = ٦ جان، ص = ٤، ع = ٢٥ جتان، ن \in [٢-، ٢ \pi]$
- (٧) $س = ن، ص = ن، ع = جان، ن \in \{ح\}$
- (٨) $س = ن، ص = ٢ ن، ع = ن، ن \in \{ح\}$
- (٩) $س = جتان، ص = ن جان، ع = ن جان، ن \in [٠، ٢ \pi]$
- (١٠) $س = ن، ص = ٣ ن، ع = ١٠ ن^٢، ن \leq$
- في كل من القارين ١١-١٦ جد طول المنحنى المعطى .
- (١١) $\{ (ن، ن^٢، ن^٣) : ن \in [٠، ٢] \}$ م =
- (١٢) $\{ (ن، ن جان، ن جتان) : ن \in [٠، ١] \}$ م =
- (١٣) $س = ن جتان، ص = ن، ع = ٤ جتان، ن \in [٠، ٢ \pi]$
- (١٤) $س = ٢ ن، ص = ٤ جا ٣ ن، ع = جتا ٣ ن، ن \in [٠، ٢ \pi]$
- (١٥) $س = ٣ ن^٢، ص = ن^٣، ع = ٦ ن، ١ \geq ن \geq ٠$
- (١٦) $س = ١ - ٢ ن^٢، ص = ٤ ن، ع = ٣ + ٢ ن^٢، ٢ \geq ن \geq ٠$

١١ — انظمة الاحداثيات الاسطوانية والكروية :

ان نظام الاحداثيات القطبية يمكن توسيعه الى ثلاثة ابعاد بعدة طرق . واسهل طريقة هي بتمثيل نقطة P بثلاثي مرتب $(ر، \theta، ع)$ حيث $ع$ هو الاحداثي المعتاد (الثالث) في الاحداثيات المتعامدة للنقطة P و $(ر، \theta)$ هي احداثيات المسقط P للنقطة P على المستوى $س$ من (انظر الشكل ١٤-٤٩) . واذا كانت الاحداثيات المتعامدة للنقطة P هي $(س، ص، ع)$ فيمكن استعمال الصيغ $س = ر جتا \theta، ص = ر جا \theta، \theta = \arcsin \frac{ص}{ر}$ ، $ر = \sqrt{س^2 + ص^2}$. وللتغيير من احد نظم الاحداثيات الى الآخر (انظر (١٣-٦) ، (١٣-٧) . اذا كانت $ك < ٠$. فيكون البيان للمعادلة $ر = ك$ أو ما يكافئه :

$س^2 + ص^2 = ك^2$ هو اسطوانة دائرية نصف قطرها $ك$ ومحورها على محور العينات . ولهذا السبب سمي نظام الاحداثيات الذي وصفناه بنظام الاحداثيات الاسطوانية . لاحظ أن



الشكل ١٤ - ٤٩

بيان المعادلة $\theta =$ ك هو مستوى يحتوي على محور العينات بينما بيان $\phi =$ ك هو مستوى عمودي على محور العينات .

مثال ١ : أوجد معادلة بالاحداثيات المتعامدة ثم صف البيان لكل من المعادلات التالية :

$$(١) \quad ع = ر \quad (ب) \quad ر = ع \quad \text{جا } \theta$$

الحل : (١) باستخدام (١٣-٧) تكون المعادلة بالاحداثيات المتعامدة لبيان

$$\text{المعادلة } ع = ر \text{ هي } ع = ر \text{ ص} + ر \text{ س}.$$

والبيان هو المجسم المكافئ المرسوم في الشكل ١٤-٣٥ .

(ب) كما في المثال ٤ من البند ٣ في الفصل الثالث عشر فالمعادلة بالاحداثيات

$$\text{المتعامدة لبيان } ر = ع \quad \text{جا } \theta \text{ هي } ع = ر \text{ ص} + ر \text{ س}.$$

والبيان اسطوانة رواسمها موازية لمحور العينات . ودليل الاسطوانة هو دائرة

نصف قطرها ٢ تقع في المستوى س ص ومركزها بالاحداثيات المتعامدة هو

$$(٠, ٢, ٠).$$

مثال ٢ : أوجد المعادلة بالاحداثيات الاسطوانية ثم صف البيان لكل من المعادلات التالية :

$$(١) \quad {}^2ع = {}^2ص - {}^2س \quad (ب) \quad {}^2ع = {}^2س + {}^2ص .$$

الحل : (١) بتطبيق (١٣-٦) نحصل على :

$${}^2ع = {}^2ر (جنا \theta - جا \theta) \quad \text{أو} \quad {}^2ر = {}^2ع / (جنا \theta - جا \theta) .$$

والبيان هو مخروط دائري محوره يقع على محور السينات .

$$(ب) \quad \text{باستخدام (١٣-٧) فإن } {}^2ع = {}^2ر \quad \text{أو} \quad {}^2ع = |ر| .$$

والبيان مخروط دائري يقع محوره على محور العينات .

ويمكن انشاء نظام ذي ثلاثة ابعاد يسمى بالاحداثيات الكروية .

وفي هذا النظام تمثل كل نقطة P غير نقطة الاصل بالثلاثي المرتب

$$(م، \theta، \phi) \quad \text{حيث } م = | \overrightarrow{PM} | . \quad \theta \quad \text{هي الزاوية القطبية المرافقة}$$

مع المسقط M للنقطة P على المستوى $س ص ر$. ϕ هي الزاوية بين محور العينات

الموجب و M (انظر الشكل ١٤-٥٠ ، (١) . وتمثل نقطة الاصل بأي

ثلاثي مرتب يأخذ الصيغة $(\phi، \theta، ٠)$. وقد نتجت تسمية النظام

بالكروي عن المعادلة $م = ك$. هي كرة مركزها $م$. وكما في الاحداثيات

الاسطوانية فبيان المعادلة $\theta = ك$ هو مخروط يحتوي على محور العينات .

وبيان المعادلة $\phi = ك$ هو نصف مخروط رأسه عند $م$.

والعلاقة بين الاحداثيات الكروية $(م، \theta، \phi)$ والاحداثيات

المتعامدة $(س، ص، ع)$ لنقطة P يمكن ايجاده بالاستناد الى الشكل

١٤-٥٠ ، (٢) . باستعمال العلاقات

$$س = | \overrightarrow{PM} | \quad \text{جنا } \theta \quad \text{و} \quad ص = | \overrightarrow{PM} | \quad \text{جا } \theta$$

بالاضافة الى أن

$$| \overrightarrow{PM} | = | \overrightarrow{PM} | = م \quad \text{جا } \phi \quad \text{و} \quad | \overrightarrow{PM} | = م \quad \text{جنا } \phi$$

نحصل على

$$(١٤-٦١) \quad س = م \quad \text{جا } \phi \quad \text{جنا } \theta، \quad ص = م \quad \text{جا } \phi \quad \text{جا } \theta، \quad ع = م \quad \text{جنا } \theta$$

و ينتج باستخدام صيغة المسافة ان

$$(١٤-٦٢) \quad م^2 = س^2 + ص^2 + ع^2 .$$

مثال ٣ : حول الى الاحداثيات المتعامدة المعادلة
 $m = 2 \text{ جا } \phi \text{ جتا } \theta$. ثم صف بيانها

الحل : بضرب m في طرفي المعادلة ينتج أن

$$m = 2 \text{ جا } \phi \text{ جتا } \theta$$

وبتطبيق (١٤-٦٢) و (١٤-٦١) نحصل على أن

$$m^2 = 2^2 \cos^2 \theta + 2^2 \sin^2 \theta = 4$$

$$(m^2 - 4) = 0 \text{ جتا } \theta + 4 \sin^2 \theta = 0$$

وباستخدام (١٤-١٤) فالبيان هو كرة نصف قطرها ١ ومركزها في

الاحداثيات المتعامدة هو (١، ٠، ٠).

مثال ٤ :

إذا كانت الاحداثيات الكروية لنقطة P هي $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, 4)$

أوجد الاحداثيات المتعامدة والاسطوانية للنقطة P .

الحل : باستخدام (١٤-٦١) واخذ $m = 4$ ، $\frac{\pi}{3} = \theta$ ، $\frac{\pi}{6} = \phi$ ،
 نحصل على الاحداثيات المتعامدة .

$$m = 4 \text{ جا } \phi \text{ جتا } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ جتا } \frac{\pi}{6} = 4 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

$$m \sin \theta = 4 \text{ جا } \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ جا } \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

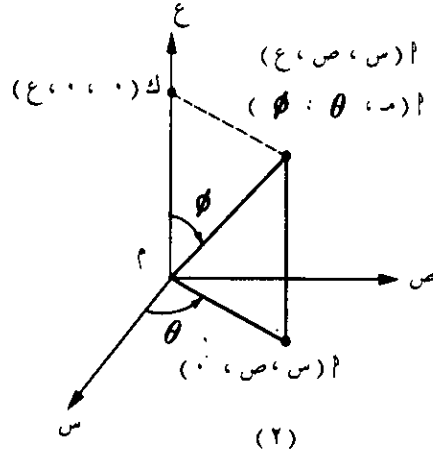
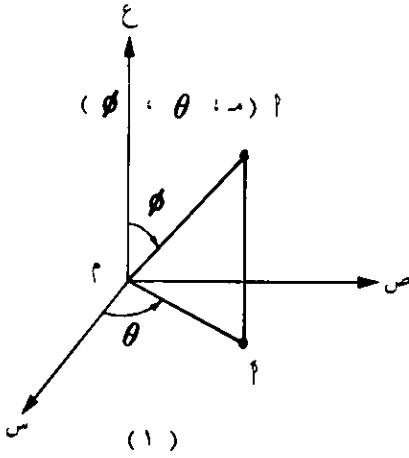
$$m \cos \theta = 4 \text{ جتا } \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ جتا } \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

وليجاد الاحداثيات الاسطوانية نلاحظ ان

$$r^2 = m^2 = 4 = 3 + 1 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$

ولهذا تكون الاحداثيات الاسطوانية (r ، θ ، ϕ) أو

$$\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right)$$



الشكل ١٤ — ٥٠

تمارين :

(١) حول ما يأتي من الاحداثيات الاسطوانية الى الاحداثيات المتعامدة

$$(P) (5, \frac{\pi}{2}, 3) \quad (B) (6, \frac{\pi}{3}, 5)$$

(٢) حول ما يأتي من الاحداثيات الكروية الى الاحداثيات المتعامدة

$$(P) (4, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad (B) (1, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$$

(٣) حول ما يأتي من الاحداثيات المتعامدة الى الاحداثيات الكروية

$$(P) (1, 1, \sqrt{2}) \quad (B) (1, \sqrt{3}, 0)$$

(٤) حول الآتي من الاحداثيات المتعامدة الى الاحداثيات الاسطوانية

$$(P) (2, \sqrt{3}, 2) \quad (B) (2, \sqrt{2}, 1)$$

(٥) حول الآتي من الاحداثيات الكروية الى الاحداثيات الاسطوانية

$$(P) (4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \quad (B) (2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$$

(٦) حول الآتي من الاحداثيات الاسطوانية الى الاحداثيات الكروية

$$(ب) \left(1, \frac{\pi}{3}, 3 \right) \quad (پ) \left(1, \frac{\pi}{2}, \sqrt{2} \right)$$

أوجد المعادلة بالاحداثيات المتعامدة ثم صف البيان لكل من المعادلات التالية

$$١٤ - ٧$$

$$(٧) \quad ٤ = ر$$

$$(٨) \quad \frac{\pi}{٤} = \theta$$

$$(٩) \quad \frac{\pi}{٦} = \phi$$

$$(١٠) \quad ٣ = م$$

$$(١١) \quad ر = ٤ \text{ جتا } \theta$$

$$(١٢) \quad ر = ٢ \text{ جا } \theta$$

$$(١٣) \quad م = ٤ \text{ جتا } \theta$$

$$(١٤) \quad م = \phi \text{ قا}$$

أوجد المعادلات بالاحداثيات الاسطوانية وبالاحداثيات الكروية للبيان في كل

من المعادلات ١٥ - ٢٠ :

$$(١٥) \quad ٤ = ٢ع + ٢ص + ٢س$$

$$(١٦) \quad ٤ = ٢ص + ٢ع$$

$$(١٧) \quad ١٢ = ٣س + ص - ٤ع$$

$$(١٨) \quad ١ = ٢س - ٢ص - ٢ع$$

$$(١٩) \quad ٩ = ٢ع + ٢ص$$

$$(٢٠) \quad ٩ = ٢ع + ٢س$$

١٢ — تمارين مراجعة :

شفهي

عرف أو ابحث كلا مما يأتي :

- (١) العدد القياسي
- (٢) المتجهات في مج_٢ و مج_٣
- (٣) مركبة المتجه
- (٤) حاصل جمع المتجهات
- (٥) الضرب بعدد قياسي
- (٦) المتجه الصفري
- (٧) متجه الموضع
- (٨) مقدار المتجه
- (٩) متجه الوحدة
- (١٠) زوايا وجيوب تمام الاتجاهات
- (١١) الضرب الداخلي وخصائصه
- (١٢) الضرب المتجهي وخصائصه
- (١٣) الزاوية المحصورة بين متجهين
- (١٤) متجهات متوازية
- (١٥) متجهات متعامدة
- (١٦) متباينة كوشي
- (١٧) المتباينة المثلثية
- (١٨) الشغل الذي تبذله قوة
- (١٩) معادلات خط مستقيم
- (٢٠) معادلات المستوى
- (٢١) الاحداثيات الاسطوانية
- (٢٢) السطوح التربيعية
- (٢٣) المنحنيات الفضائية
- (٢٤) الاحداثيات الاسطوانية

كتابي

أوجد المتجهات والاعداد القياسية المشار اليها في التمارين ١ - ١٠ اذا كان

$$\vec{p} = 2\vec{h} + 5\vec{u}, \quad \vec{b} = 4\vec{h} - \vec{u}$$

$$(1) \quad 4\vec{p} + \vec{b}$$

$$(2) \quad 2\vec{p} - 3\vec{b}$$

$$(3) \quad (\vec{p} + \vec{b}) \cdot (\vec{p} - \vec{b})$$

$$(4) \quad 3\vec{p} \cdot (5\vec{b} + \vec{h})$$

$$(5) \quad |\vec{p}| - |\vec{b}|$$

$$(6) \quad |\vec{p} - \vec{b}|$$

$$(7) \quad \text{اتجاه } \vec{p}$$

$$(8) \quad \text{متجه وحدة له نفس اتجاه } \vec{b}$$

$$(9) \quad \text{متجه وحدة عمودي على } \vec{p}$$

$$(10) \quad \text{جيب تمام الزاوية المحصورة بين } \vec{p} \text{ و } \vec{b}$$

$$(11) \quad \text{اعطيت النقطتين } \vec{p} (5, -3, 2) \text{ و } \vec{b} (-1, 4, 3) \text{ فأوجد ما يلي :}$$

$$(\vec{p}) \text{ ل } (\vec{p}, \vec{b})$$

$$(ب) \text{ احداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة } \vec{p} \text{ ب .}$$

$$(ج) \text{ معادلة كرة مركزها ب وتمس المستوى س ع .}$$

$$(د) \text{ معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة ب ويوازي المستوى س ع .}$$

$$(هـ) \text{ المعادلات الوسيطة للخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين } \vec{p} \text{ و } \vec{b} .$$

$$(و) \text{ معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة } \vec{p} \text{ ويعامد المتجه } \vec{p} .$$

$$(12) \quad \text{أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطتين } \vec{p} (0, 4, 9) \text{ و}$$

$$\vec{b} (0, -3, 7) \text{ ويعامد المستوى س ع .}$$

$$(13) \quad \text{أوجد معادلة مستوى مقطعه السيني 5 ومقطعه الصادي -2 ومقطعه العيني 6 .}$$

$$(14) \quad \text{أوجد معادلة الاسطوانة العمودية على المستوى س ص ودليها الدائري في المستوى}$$

$$\text{س ص ومركزها ج (4, -3, 0) ونصف قطرها 5 .}$$

(١٥) أوجد معادلة مجسم ناقصي مركزه م ومقطعه السيني ٨ ومقطعه الصادي ٣ ومقطعه العيني ١ .

(١٦) أوجد معادلة السطح الناتج عن دوران بيان المعادلة $E = S$ حول محور العينات .
في كل من التمارين ١٧ - ٢٧ ارسم بيان المعادلة المعطاة .

$$(١٧) \quad S^2 + V^2 - 14S + 6V - 8E + 10 = 0$$

$$(١٨) \quad 4V - 3E - 15 = 0$$

$$(١٩) \quad 3S - 5V + 2E = 10$$

$$(٢٠) \quad V = E + 1$$

$$(٢١) \quad 36 = 9S^2 + 4E^2$$

$$(٢٢) \quad 0 = S^2 + 4V + 9E^2$$

$$(٢٣) \quad E^2 - 9 = 4S^2 - 4V^2$$

$$(٢٤) \quad 0 = 2S^2 + 4E - V^2$$

$$(٢٥) \quad 4 = E - 4S^2 - V^2$$

$$(٢٦) \quad 16 = S^2 + 2V + 4E^2$$

$$(٢٧) \quad S^2 - 4V^2 = 4E$$

إذا كان $\vec{P} = 3\vec{H} - \vec{O} - 4\vec{Z}$ ، $\vec{B} = 2\vec{H} + 5\vec{O} - 2\vec{Z}$ ، $\vec{J} = -\vec{H} + 6\vec{Z}$
أوجد المتجهات أو الأعداد القياسية في التمارين ٢٨ - ٣٨ .

$$(٢٨) \quad 3\vec{P} - 2\vec{B}$$

$$(٢٩) \quad \vec{P} \cdot (\vec{B} - \vec{J})$$

$$(٣٠) \quad |\vec{B} + \vec{J}|$$

$$(٣١) \quad \text{متجه وحدة له نفس اتجاه } \vec{P}$$

$$(٣٢) \quad |\vec{B}| + |\vec{J}|$$

$$(٣٣) \quad \text{اتجاهات جيوب تمام } \vec{P}$$

$$(٣٤) \quad \text{جيب تمام الزاوية المحصورة بين } \vec{P} \text{ و } \vec{B}$$

$$(٣٥) \quad \vec{P} \times \vec{B}$$

$$(٣٦) \quad \vec{P} \cdot (\vec{B} \times \vec{J})$$

$$(٣٧) \quad \text{مرب } \vec{P}$$

$$(٣٨) \quad \text{مرب } \vec{B} \times \vec{J}$$

(٣٩) أعطيت النقط $P(٢، -١، ١)$ ، $K(-٣، ٢، ٠)$ ، $R(٤، -٥، ٥)$

(٣) أوجد الآتي

(١) جيوب تمام اتجاهات $\overrightarrow{PK}$ و $\overrightarrow{PR}$

(ب) متجه وحدة عموديا على المستوى المعين بالنقط P ، K ، R .

(ج) معادلة المستوى المعين بالنقط P ، K ، R .

(د) معادلات وسيطة للخط الذي يمر بالنقطة P موازيا للخط المار بالنقطتين K ، R .

(هـ) $\overrightarrow{PK}$ و $\overrightarrow{KR}$.

(و) الزاوية المحصورة بين $\overrightarrow{PK}$ و $\overrightarrow{KR}$

(ي) مساحة مثلث رؤوسه P ، K ، R .

(٤٠) أوجد الزاوية المحصورة بين المستقيمين $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ص + ١}{٤} = \frac{ع - ٥}{٨}$

$$و \quad \frac{٧ + ع}{٤} = \frac{ص - ٦}{٢} = \frac{س + ١}{٧}$$

(٤١) أوجد المعادلات الوسيطة لكل من الخطوط في السؤال ٤٠.

(٤١) عين هل الخطان متقاطعان وإذا كانا كذلك أوجد نقطة التقاطع.

$$س = ٢ + ن، ص = ١ + ن، ع = ٤ + ٧ن$$

$$س = ٤ - ٥ن، ص = ٢ - ٢ن، ع = ١ - ٤ن$$

(٤٤) موضع جزئي في اللحظة $ن$ هو $(ن، ن جان، ن جتا ن)$.

أوجد المسافة التي يقطعها الجزئي خلال الفترة الزمنية $[٠، ٥]$

(٤٥) إذا كانت الاحداثيات المتعامدة لنقطة P هي $(٢، -٢، ١)$.

أوجد الاحداثيات الاسطوانية والكروية للنقطة P .

(٤٦) إذا كانت الاحداثيات الكروية للنقطة P هي $(١٢، \frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٦})$ أوجد

الاحداثيات الاسطوانية والمتعامدة للنقطة P .

أوجد المعادلة بالاحداثيات المتعامدة ثم صف البيان في كل من التمارين
٥٠ - ٤٧

$$\frac{\pi^3}{4} = \phi \quad (٤٧)$$

$$r = \text{جتا } ٢ \theta \quad (٤٨)$$

$$١ = \text{م جا } \phi \text{ جتا } \theta \quad (٤٩)$$

$$٠ = ٢ - ٣ + \text{م} \quad (٥٠)$$

أوجد المعادلات بالاحداثيات الاسطوانية والاحداثيات الكروية في كل من
البيانات في التمارين ٥١ - ٥٣ .

$$١ = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ \quad (٥١)$$

$$\text{ع} = \text{س}^٢ - \text{ص}^٢ \quad (٥٢)$$

$$٠ = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ \quad (٥٣)$$

الفصل الخامس عشر

اقترانات القيم المتجهة

Vector - Valued Functions

في هذا الفصل سنعمم نظرية النهايات والمشتقات والتفاضلات كي تشمل الاقترانات التي مجالاتها متجهة لا اعداد حقيقية . وسيكون التطبيق الرئيسي لهذه المفاهيم عند دراسة الحركة في بعدين أو ثلاثة ابعاد . وفي الفصول اللاحقة سنعطي تطبيقات اخرى لحسابات المتجهات .

١ — تعريف :

لقد عرفنا الاقتران في (١ - ١٨) بأنه تناظر يربط كل عضو في مجموعة S بعنصر وحيد في المجموعة V . فاذا كانت $S \ni C$ وكانت $V \ni M$ عندها يدعى الاقتران باقتران قيمة متجهة ويرمز له بالرمز $\vec{r}$ أو $\vec{r}$. وهكذا اذا كان $\vec{r}$ اقترانا متجه القيمة فلكل عدد n ينتمي الى المجال S للاقتران $\vec{r}$ هنالك متجه وحيد $\vec{r}(n)$ = $\langle s, v \rangle$ ، ع . ويربط المركبة s مع n نحصل على اقتران q من S الى C حيث $s = q(n)$. وبالمثل توجد اقترانات l و k من S الى C بحيث ان $v = l(n)$ ، $e = k(n)$ على الترتيب وهكذا ينتج ان :

$$(1-15) \vec{r}(n) = \langle q(n), l(n), k(n) \rangle$$

لجميع قيم n في S .

وبالعكس اذا كانت q, l, k اقترانات من S الى C فيمكن تعريف اقتران متجه القيمة بواسطة (١ - ١٥) . ونتيجة لذلك فان $\vec{r}$ اقتران متجه

القيمة اذا فقط اذا امكن التعبير عن $\vec{r}$ (ن) بالصيغة (١٥-١). واذا لم يذكر مجال $\vec{r}$ بصراحة فيفترض ان يكون مجال $\vec{r}$ هو تقاطع مجالات ق ، ل ، ك .

وهناك تفسير هندسي مفيد للصيغة (١٥-١). فكما هو موضح في الشكل ١٥-١ اذا كان $\vec{r}$ متجه الموضع للمتجه $\vec{r}$ (ن) فكلمة تغيرت ن بأخذ قيم في $\vec{r}$ ترسم النقطة $\vec{r}$ (ق (ن) ، ل (ن) ، ك (ن) المنحنى ذا المعادلات الوسيطة

$$\vec{r} = \text{ق (ن) ، ص = ل (ن) ، ع = ك (ن) .}$$

فمثلا اذا كانت

$\vec{r} = \text{ن (ن) = جتا ن هـ + م جتا ن و + ب ن ز}$
فترسم اخر نقطة من نقط متجه الموضع بالنسبة الى ن الشكل الحلزوني الدائري كما هو موضح في الشكل ١٤-٤٨ .

وكما في الفصل السابق يمكن اعتبار أن $\vec{r}$ مجموعة جزئية من $\vec{r}$ مكونة من جميع المتجهات التي تكون المركبة الثالثة فيها صفرا .
وفي هذه الحالة تأخذ (١٥-١) الصيغة :

(١٥-٢) $\vec{r} = \text{ق (ن) هـ + ل (ن) و}$
وكلمة تغيرت ن فالمنحنى الذي ترسمه نقطه نهاية متجه الموضع $\vec{r}$ يقع في المستوى س ص . وفي البند القادم سندرس الحالة التي تكون فيها ن تمثل الزمن ، $\vec{r}$ هي موضع النقطة المتحركة .

(١٥-٣) تعريف النهاية .

اذا كانت $\vec{r} = \text{ق (ن) ، ل (ن) ، ك (ن) <}$ فان

$$\begin{aligned} \vec{r} = \text{ق (ن) هـ + ل (ن) و} &= \text{ق (ن) هـ + ل (ن) و} \\ \vec{r} = \text{ق (ن) هـ + ل (ن) و} &= \text{ق (ن) هـ + ل (ن) و} \\ \vec{r} = \text{ق (ن) هـ + ل (ن) و} &= \text{ق (ن) هـ + ل (ن) و} \end{aligned}$$

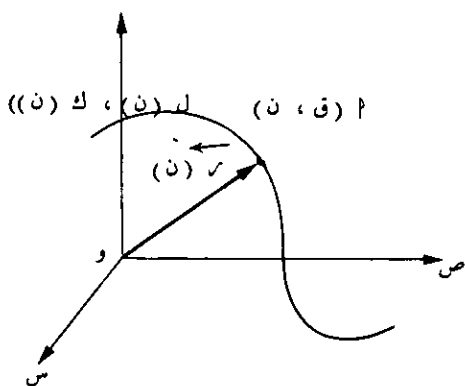
بشرط ان تكون لكل من ق ، ل ، ك نهاية عندما تقترب ن من P .
وكما سبق في الفصل الثاني يمكن تعميم هذا التعريف للنهايات من جانب واحد . وفي (١٥ - ٣) اذا اعتبرنا

$$\begin{array}{ccc} \text{نهاية } (ن) = P_1 , & \text{نهاية } (ن) = P_2 - , & \text{نهاية } (ن) = P_3 \\ \text{ن} \leftarrow P & \text{ن} \leftarrow P & \text{ن} \leftarrow P \end{array}$$

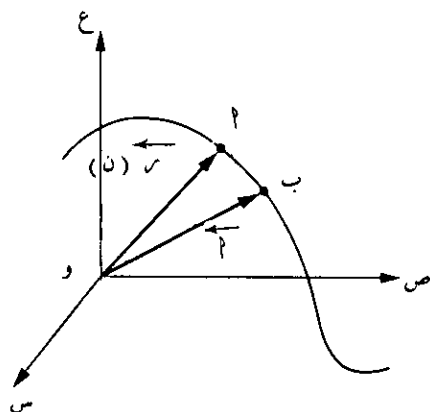
فان

$$\overrightarrow{P} = (ن) = \langle P_1 , P_2 , P_3 \rangle$$

وبديها هناك حالة من النوع الموضح في الشكل ١٥ - ٢ حيث انه اذا كان كل من $\overrightarrow{A}$ ، $\overrightarrow{B}$ متجهي الموضع لكل من $\overrightarrow{R}(ن)$ و $\overrightarrow{A}$ على الترتيب فكلما اقتربت ن من P يقترب $\overrightarrow{A}$ من $\overrightarrow{B}$ ، اي ان ب تقترب وتقترب من P .
ويمكن الحصول على صيغ لنهايات الاقترانات ذات القيم المتجهة مشابهة لتلك الصيغ التي اثبتناها في الفصل الثاني (٢ - ٦) عن طريق ϵ ، δ .
ولكننا سنتركها كتمارين (انظر التمرين ١٩) .



الشكل ١٥ - ١



الشكل ١٥ - ٢

(١٥ - ٤) تعريف الاتصال :

يكون اقتران القيمة المتجهة $\overrightarrow{R}$ متصلا عند P اذا كانت

$$\overrightarrow{r}(n) = \overrightarrow{r}(p) \quad n \leftarrow p$$

ويتبع ان $\overrightarrow{r}$ كما في (١٥-١) تكون متصلة عند p اذا فقط اذا كان q, l ،
 ك متصلات عند p .
 والمعتاد نعرف الاتصال على فترة .
 وبالمقارنة مع (٣-٥) نحصل على التعريف التالي :

(١٥-٥) تعريف المشتقة :

اذا كان $\overrightarrow{r}$ اقترانا متجه القيمة فتعرف مشتقة $\overrightarrow{r}$ بانها الاقتران المتجه القيمة $\overrightarrow{r}$ الذي يحقق :

$$\overrightarrow{r}(n) = \overrightarrow{r}(m) + \frac{\overrightarrow{r}(m+n) - \overrightarrow{r}(m)}{n} \quad n \leftarrow m$$

لجميع n بشرط ان تكون النهاية موجودة .
 والنتيجة التالية تعطينا طريقة لحساب $\overrightarrow{r}(n)$.

(٥-٦) نظرية : اذا كانت $\overrightarrow{r}(n) = \langle q(n), l(n), k(n) \rangle$ حيث
 q, l, k قابلات للاشتقاق فان
 $\overrightarrow{r}(n) = \langle q'(n), l'(n), k'(n) \rangle$.

البرهان : من تعريف (١٥-٥) ينتج ان

$$\overrightarrow{r}(n) = \overrightarrow{r}(m) + \frac{\overrightarrow{r}(m+n) - \overrightarrow{r}(m)}{n} \quad n \leftarrow m$$

$$\langle q(m+n), l(m+n), k(m+n) \rangle - \langle q(m), l(m), k(m) \rangle = \langle q(n), l(n), k(n) \rangle$$

$$\overrightarrow{r}(n) = \overrightarrow{r}(m) + \frac{\langle q(n), l(n), k(n) \rangle}{n} \quad n \leftarrow m$$

$$، \frac{-ك(ن)}{٢} <$$

وبأخذ نهاية كل مركبة نحصل على النتيجة المطلوبة .
 وإذا كانت $\overrightarrow{ر(ن)}$ موجودة فنقول ان الاقتران ر قابل للاشتقاق عند ن .
 ويمكن ايضا استخدام $\overrightarrow{ر(ن)}$ و $\frac{د ر(ن)}{د ن}$ لتعني $\overrightarrow{ر(ن)}$.

وبدلالة هـ ، و ، ز إذا كانت
 $\overrightarrow{ر(ن)} = ق(ن) هـ + ل(ن) و + ك(ن) ز$ فان
 $(٧-١٥) \overrightarrow{ر(ن)} = ق(ن) هـ + ل(ن) و + ك(ن) ز$
 ويمكن ايجاد المشتقات الاعلى بنفس الطريقة .
 وكمثال فان
 $\overrightarrow{ر(ن)} = ق(ن) هـ + ل(ن) و + ك(ن) ز$
 وهكذا

مثال ١ : اذا كانت $\overrightarrow{ر(ن)} = (ل ط ن) هـ + e^{-٣ ن} و + ز فاجب عما يلي :$
 (٢) جد مجال ر وعين اين تكون $\overrightarrow{ر}$ متصلة
 (ب) أوجد $\overrightarrow{ر(ن)}$ و $\overrightarrow{ر(ن)}$.

الحل :

(٢) ان مجال $\overrightarrow{ر}$ هو مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة وتكون $\overrightarrow{ر}$ متصلة عند جميع
 نقط مجالها (لماذا؟) .

(ب) بتطبيق (٧-١٥) فان

$$\overrightarrow{ر(ن)} = \left(\frac{١}{ن}\right) هـ - ٣ e^{-٣ ن} و + ٢ ن ز$$

$$\overrightarrow{ر(ن)} = \left(\frac{١-}{٢ ن}\right) هـ + ٩ e^{-٣ ن} و + ٢ ز$$

ويمكن تفسير النهاية في (٥-١٥) هندسيا كما يلي :
 اذا اخذنا $\overrightarrow{ر(ن)} = < ق(ن) ، ل(ن) ، ك(ن) >$ حيث ق ، ل ، ك

هي اقترانات قابلة للاشتقاق ولنفرض ان $\vec{m}$ يمثل المنحنى ذا المعادلات الوسيطة $s = \vec{q}(n)$ ، $v = \vec{l}(n)$ ، $e = \vec{k}(n)$. فكما في الشكل ١٥-٣ اذا كان كل من $\vec{p}$ و $\vec{d}$ متجهي الموضع لكل من $\vec{r}(n)$ و $\vec{r}(n) + \vec{m}$ على الترتيب فان

$$\vec{p} = \vec{d} - \vec{m}$$

هو متجه هندسي يمثل $\vec{r}(n + m) - \vec{r}(n)$. ويتبع ان $(\frac{1}{m}) \vec{d}$ هو متجه يمثل $\frac{1}{m} [\vec{r}(n + m) - \vec{r}(n)]$. واذا كانت m .

فان $(\frac{1}{m}) \vec{p}$ هو المتجه $\vec{p}$ الذي له نفس اتجاه $\vec{d}$ وزيادة على ذلك فاذا كانت $m > 1$ فان $1 < |\vec{p}|$ وان $|\vec{p}| < |\vec{d}|$ كما هو موضح في الشكل ١٥-٣ . واذا جعلنا m تقترب من الصفر فتقترب $\vec{d}$ من $\vec{p}$ ويظهر أن المتجه $\vec{d}$ يقترب من متجه يقع على خط المماس للمنحنى $\vec{m}$ عند $\vec{p}$. ويمكن عقد مناقشة مماثلة في حالة $m < 1$. ولهذا السبب نشير الى $\vec{r}(n)$ أو اي تمثيل هندسي له بمتجه المماس للمنحنى $\vec{m}$ عند $\vec{p}$. ومن تعريف المماس للمنحنى $\vec{m}$ عند $\vec{p}$ يكون هو الخط المعين بالمتجه $\vec{r}(n)$ وفي حالة البعدين (١٥-٢) نحصل على أن $\vec{r}(n) = \vec{q}(n) + \vec{h}(n) + \vec{l}(n)$ و:

واذا كان اتجاه $\vec{r}(n)$ هو θ انظر (١٤-٤) وكانت $\vec{q}(n) \neq$

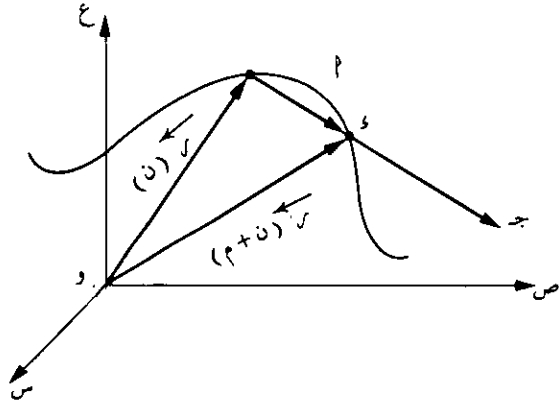
فيكون ميل الخط المعين بالمتجه $\vec{r}(n)$ هو $\theta = \frac{\vec{l}(n)}{\vec{q}(n)}$ وهذا

يوافق الصيغة (١٣-٤) التي حصلنا عليها للمماسات المنحنيات . وهذه الملاحظات يوضحها المثال القادم .

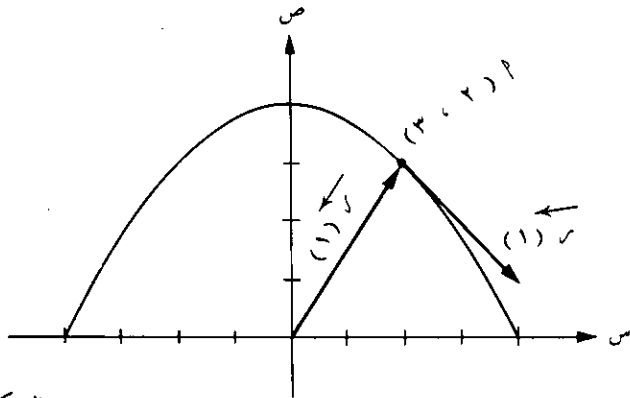
مثال ٢ : اذا كان $\vec{r}(n) = 2\vec{n} + \vec{h}(n) + \vec{e}(n)$ وحيث $\vec{n} \in [-2, 2]$ فأوجد $\vec{r}(n)$. وارسم المنحنى $\vec{m}$ الذي معادلاته الوسيطة $s = 2\vec{n}$ ، $v = 4 - 2\vec{n}$ حيث $\vec{n} \in [-2, 2]$. بين متجه الموضع الذي يقابل $\vec{r}(1)$ والمتجه هندسي الذي يقابل $\vec{r}(1)$.

الحل : بما اننا نعالج مع $\vec{p}$ فيكوني أن نستعمل المستوى s ص لتمثيل المتجهات . والمنحنى $\vec{m}$ الذي يقع على ذلك الجزء من القطع المكافئ موضح في الشكل

١٥ - ٤ . وبما ان $\vec{r} = (1)$ و $\vec{h} = 2$ و $\vec{v} = 3$ فيكون متجه الموضع الذي يقابل $\vec{r}$
 (١) هو $\vec{m}$ حيث $\vec{m}$ هي النقطة الواقعة على $\vec{m}$ واحداتها (٢ ، ٣) .
 وبأخذ المشتقة نحصل على ان
 $\vec{r} = (n) \quad \vec{h} = 2 - 2n \quad \text{و} \quad \vec{v} = 3$



الشكل ١٥ - ٣



الشكل ١٥ - ٤

والمتجه المماس للمنحنى $\vec{m}$ ونقطة بدايته هي $\vec{m}$ هو متجه هندسي يقابل $\vec{r} = (1)$
 $\vec{h} = 2 - 2n \quad \text{و} \quad \vec{v} = 3$

مثال ٣ : أوجد المعادلات الوسيطة لخط المماس للمنحنى
 $\vec{m} = \{(n^2 - 5, n^3, 1 + n^3) : n \in \mathbb{R}\}$

عند النقطة التي تقابل $n = 2$.

الحل : النقطة التي تقابل $n = 2$ هي $P(1, 8, 7)$. فإذا كان $\overrightarrow{R}(n) = \langle n^2 \rangle$

$$- 5, n^3, n + 1 < \text{فان}$$

$$\overrightarrow{R}(n) = \langle n^2, n^3, 3 \rangle. \text{ ومن ثم فمتجه المماس عند } P \text{ هو } \overrightarrow{R}(2) =$$

$$\langle 4, 12, 3 \rangle. \text{ وبتطبيق (14-35) تكون المعادلات الوسيطة للخط}$$

هي

$$s = 4 - n, \quad v = 12 + n, \quad e = 3 + n$$

مثال 4 : برهن انه اذا كان $|\overrightarrow{R}(n)|$ ثابتا كان $\overrightarrow{R}(n)$ عموديا على $\overrightarrow{R}(n)$ لجميع n .

الحل : بالفرض ان

$$\overrightarrow{R}(n) \cdot \overrightarrow{R}(n) = |\overrightarrow{R}(n)|^2 = \text{ج}$$

حيث ج قياسي . ويكتابة $\overrightarrow{R}(n) = \langle \text{ق}(n), \text{خ}(n), \text{ج}(n) \rangle$

يمكن كتابة المعادلة الاخيرة كما يلي :

$$[\text{ق}(n)]^2 + [\text{خ}(n)]^2 + [\text{ج}(n)]^2 = \text{ج}^2$$

وبأخذ المشتقة ضمينا نحصل على أن

$$2\text{ق}(n)\text{ق}'(n) + 2\text{خ}(n)\text{خ}'(n) + 2\text{ج}(n)\text{ج}'(n) = 0$$

اي ان

$$2\overrightarrow{R}(n) \cdot \overrightarrow{R}'(n) = 0$$

وينتج الاستنتاج المطلوب من (14-20).

والنتيجة المذكورة في المثال 4 يمكن توضيحها هندسيا لانه اذا كان $|\overrightarrow{R}(n)|$

ثابتا فعندما تتغير n تتحرك نهاية طرف متجه الموضع الذي يقابل $\overrightarrow{R}(n)$ على

منحنى M الذي يقع على سطح كرة مركزها M . والمتجه المماس $\overrightarrow{R}(n)$

للمنحنى M يكون دائما عموديا على الكرة ومن ثم يكون عموديا على $\overrightarrow{R}(n)$.

تمارين :

في التمارين 1-4 أوجد P مجال $\overrightarrow{R}$ وعين متى يكون $\overrightarrow{R}$ متصلا

(ب) $\overrightarrow{R}(n)$ و $\overrightarrow{R}'(n)$.

$$(1) \quad \overrightarrow{r(n)} = \sqrt{1-n} \underline{هـ} + \sqrt{2-n} \underline{و} \quad (1)$$

$$(2) \quad \overrightarrow{r(n)} = \frac{1}{n} \underline{هـ} + \underline{جا} \, n^3 \underline{و} \quad (2)$$

$$(3) \quad \overrightarrow{r(n)} = \langle \text{ظا } n^4, n^2 + n^8 \rangle \quad (3)$$

$$(4) \quad \overrightarrow{r(n)} = \langle n^2, \text{جا } -n^1 \rangle \quad (4)$$

في التمارين ٥-٨ (٢) ارسم المنحنى في المستوى س ص المعين بمركبات $\overrightarrow{r}$

(ن) (ب) أوجد $\overrightarrow{r}(n)$ وارسم المتجهات الهندسية التي تقابل $\overrightarrow{r}(n)$ و $\overrightarrow{و}$

(ن) عند قيم ن المشار إليها .

$$(5) \quad \overrightarrow{r(n)} = \langle \frac{n^4}{4}, n^2 \rangle, \quad n = 2 \quad (5)$$

$$(6) \quad \overrightarrow{r(n)} = \langle e^{n^2}, e^{-n^4} \rangle, \quad n = 0 \quad (6)$$

$$(7) \quad \overrightarrow{r(n)} = 4 \text{ جتا } n \underline{هـ} + 2 \text{ جان } n \underline{و}, \quad n = \frac{\pi}{4} \quad (7)$$

$$(8) \quad \overrightarrow{r(n)} = 2 \text{ قان } n \underline{هـ} + 3 \text{ ظان } n \underline{و}, \quad n = \frac{\pi}{4} \quad (8)$$

في التمرينين ٩ ، ١٠ (٢) أوجد مجال $\overrightarrow{r}$ وعين متى يكون $\overrightarrow{r}$ متصلا

(ب) أوجد $\overrightarrow{r}(n)$ ، $\overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{ز}$.

$$(9) \quad \overrightarrow{r(n)} = \sqrt{n} \underline{هـ} + e^{n^2} \underline{و} + n \underline{ز} \quad (9)$$

$$(10) \quad \overrightarrow{r(n)} = \text{لط } (n-1) \underline{هـ} + \text{جان } n \underline{و} + n^2 \underline{ز} \quad (10)$$

في التمرينين ١١ و ١٢ أوجد المعادلات الوسيطة لخط المماس للمنحنى مـ عند

٢ .

$$(11) \quad \text{مـ} = \{ (e^n, n, e^n + 4) : n \in \mathbb{R} \}, \quad \mathcal{P} = (1, 0, 4) \quad (11)$$

$$(12) \quad \text{مـ} = \{ (n \text{ جان}, n \text{ جتا}, n) : n \in \mathbb{R} \}, \quad \mathcal{P} = (\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}) \quad (12)$$

في التمرينين ١٣ و ١٤ أوجد متجهي وحدة مماسين للمنحنى المعطى عند النقطة ٢ المشار

إليها .

(١٣) $s = p^2$ ، $v = \bar{p}^2$ ، $e = n^2 + 4$ ، $p = (1, 1, 4)$

(١٤) $s = 2 + j$ ، $v = j$ ، $e = n$ ، $p = (2, 1, 2)$

(١٥) إذا كان للمنحنى M متجه مماس $\vec{M}$ عند p فيكون المستوى العمودي على j هو المستوى الذي يمر بالنقطة p وبتجهه العمودي $\vec{M}$.

أوجد معادلة المستوى العمودي على المنحنى في التمرين ١١ عند النقطة $p(1, 0, 0)$.

(١٦) أوجد معادلة المستوى العمودي على المنحنى في التمرين ١٢ عند النقطة p

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ (انظر التمرين ١٥).}$$

(١٧) إذا كان $\vec{r}$ و $\vec{t}$ اقترانين متجهي القيمة ولهما نهايتان عند $n \leftarrow p$ أثبت ما يلي :

$$(p) \quad \vec{n} = [\vec{r}(n) + \vec{t}(n)] \quad n \leftarrow p$$

$$+ \vec{n} +$$

$$(ب) \quad \vec{n} = \vec{r}(n) \cdot \vec{t}(n) = \vec{n} \quad n \leftarrow p$$

$$(ج) \quad \vec{n} = \vec{r}(n) = \vec{n} \quad n \leftarrow p$$

(١٨) إذا كان $\vec{r}$ و $\vec{t}$ اقترانا وكان $\vec{r}$ اقترانا متجه القيمة ولهما نهايتان عند $n \leftarrow p$ فاثبت

ان

$$\vec{n} = \vec{r}(n) = \vec{n} \quad n \leftarrow p$$

(١٩) أثبت ان $\vec{n} = \vec{r}(n) = \vec{t}(n)$ اذا فقط اذا كان لكل $\epsilon > 0$.

يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $|\vec{r}(n) - \vec{t}(n)| < \delta$ عندما تكون $|n - p| < \delta$.

$\delta > 0$ اعط تفسيراً هندسياً لهذه الحقيقة.

(۲۰) اذا كان $\vec{r}$ و $\vec{r}'$ افتراضين متجهي القيمة ولهما نهايات عندما $n \rightarrow \infty$ اثبت ان

$$\overleftarrow{n}_r \times \overleftarrow{n}_i = \overleftarrow{n}_i \times \overleftarrow{n}_r$$

٢ — الحركة في الفضاء :

سنقدم في هذا البند مفاهيم تحتاج إليها لدراسة الحركة . فإذا افترضنا ان كتلة الجسم مركزة عند مركز ثقله فنستطيع ان نقلص دراستنا حتى تقتصر على حركة نقطة (أو جزئي) . ويمكن استخدام الطريقة التي بحثناها في البند ٧ من الفصل الرابع للحركة في خط مستقيم ولكن معظم الاجسام تتحرك بمسارات غير مستقيمة . وزيادة على ذلك فيمكن لجسم يتحرك ان يزداد أو يبطيء من سرعته في اوقات مختلفة كما هو موضح في طيران كبسولة سفينة الفضاء من لحظة قذفها حتى عودتها . ويمكن ان تحدث الحركة في مستوى واحد فمثلا ان الكرة الارضية تتحرك في الفضاء الا ان مدارها يقع في مستوى واحد . ولهذا نبدأ بدراسة حركة جزئي في المستوى الاحداثي . ولتحليل التغير في سلوك الجزئي فمن الاساسي معرفة موضعه (س ، ص) عند كل لحظة . وبما انه في اللحظة ن يكون للجزئي موضع وحيد فيتبع ان الاحداثيين س و ص اقترانان في ن . ولهذا فسنفترض انه عند زمن ن يكون الجزئي عند النقطة P (س ، ص) حيث $s = c$ (ن) ، $v = x$ (ن) . واذا وضعنا

ر (ن) = < ق (ن) ، خ (ن) = ق (ن) هـ + خ (ن) و
 فكلما تغيرت ن رسمت نهاية متجه الموضع م $\vec{M}$ الذي يقابل $\vec{R}$ (ن) مسار الجزيء. وحسب
 المناقشة في البند السابق يقع المتجه الهندسي الذي يقابل $\vec{R}$ (ن) على المماس للمنحنى م
 عند $\vec{M}$ (انظر الشكل ١٥-٥). ومقياس المتجه هو

$$\sqrt{{}^2[(\dot{n})\dot{x}] + {}^2[(\dot{n})\dot{q}]} = |(\dot{n})\dot{j}| \quad (9-10)$$

وإذا كانت P هي النقطة الواقعة على m وتقابل $N = n$ وكان Q و X اقترانين قابلين للاشتقاق لرتب عالية فباستخدام (١٤ - ٢٠) يكون طول القوس $L(N)$ للمنحنى m من P إلى Q كما يلي

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n!} \right| = e$$

وبتطبيق (٥-٣٣) نحصل على ان
 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \vec{v}$ اي أن $\vec{L} = m (\vec{r} \times \vec{v})$ | هو معدل تغير طول القوس بالنسبة
 للزمن . ولهذا السبب نشير الى $\vec{L}$ | بسرعة الجزيء . ومتجه المماس $\vec{r}$
 (ن) الذي هو مقياس السرعة يعرف بالسرعة المتجهة للجزيء عند زمن ن .
 وبالمقارنة مع (٣-٢٨) نسمي المتجه $\vec{L}$ (ن) بتسارع الجزيء عند زمن ن
 ونمثله بمتجه هندسي نقطة بدايته $\vec{L}$. ويمكن اثبات انه في معظم الحالات تكون
 $\vec{L}$ (ن) متجهة باتجاه تقعر جوانب م كما هو موضح في الشكل ١٥-٥ .

مثال ١ : أعطي موضع نقطة تتحرك في مستوى واحد بالصيغة

$$\vec{r} = (x \hat{i} + y \hat{j}) = (x \cos \omega t + y \sin \omega t) \hat{i} + (y \cos \omega t - x \sin \omega t) \hat{j}$$

حيث ن = [٠ ، ٢] . أوجد السرعة المتجهة والتسارع عند اللحظة ن .
 ارسم مسار الجزيء ومتجهين هندسيين يقابلان $\vec{r}$ (١) و $\vec{r}$ (١) .

الحل : السرعة المتجهة والتسارع هما

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-y \omega \sin \omega t + x \omega \cos \omega t) \hat{i} + (x \omega \sin \omega t + y \omega \cos \omega t) \hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-x \omega^2 \cos \omega t - y \omega^2 \sin \omega t) \hat{i} + (-y \omega^2 \cos \omega t + x \omega^2 \sin \omega t) \hat{j}$$

وبشكل خاص عند ن = ١ يكون
 $\vec{v} = (-y \omega \sin \omega + x \omega \cos \omega) \hat{i} + (x \omega \sin \omega + y \omega \cos \omega) \hat{j}$ و $\vec{a} = (-x \omega^2 \cos \omega - y \omega^2 \sin \omega) \hat{i} + (-y \omega^2 \cos \omega + x \omega^2 \sin \omega) \hat{j}$
 وقد رسمنا المتجهين ومسار الجزيء في الشكل ١٥-٦

مثال ٢ : اثبت انه اذا تحركت نقطة $\vec{P}$ حول محيط دائرة بسرعة ثابتة فيمكن تمثيل
 تسارعها بمتجه مقياسه ثابت ويتجه من النقطة $\vec{P}$ باتجاه مركز الدائرة (يسمى
 هذا المتجه بمتجه القوة المركزية (Centripetal Force Vector)

الحل : لا ينقص التعميم افتراض أن مركز الدائرة هو نقطة الاصل م في نظام
 الاحداثيات المتعامدة . ولنفترض ان نصف قطر الدائرة هو r ونقطة البداية $\vec{P}$
 هي $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ و θ هي الزاوية الناشئة عن $\vec{P}$ عند نهاية الزمن ن (انظر
 الشكل ١٥-٧) . وقلنا أن $\vec{P}$ تتحرك حول الدائرة بسرعة ثابتة يكافي القول
 أن معدل تغير θ بوحدة الزمن (ويسمى السرعة الزاوية
 (Angular Velocity) ثابت وليكن ω . ويمكن التعبير عن هذه الحقيقة

باستعمال المعادلة التفاضلية $\frac{\theta}{\omega} = \omega$ أو ما يكافئه :

$\theta = \omega$ ن + ج حيث ج عددا . وبما أن $\theta = 0$ عند $n = 0$ يكون
ج = 0 أي أن $\theta = \omega$ ن . ويتبع أن احداثي θ هما
س = ت جتا ω ن ، ص = ت جا ω ن
وحركة θ تعطى بالمعادلة

$$r(n) = ت جتا \omega \cdot ن هـ + ت جا \omega \cdot ن و$$

ومن ثم فإن

$$\begin{aligned} \dot{r}(n) &= -\omega ت جا \omega \cdot ن هـ + \omega ت جتا \omega \cdot ن و \\ \ddot{r}(n) &= -\omega^2 ت جتا \omega \cdot ن هـ - \omega^2 ت جا \omega \cdot ن و \end{aligned}$$

وبهذا فإن

$\ddot{r}(n) = -\omega^2 \vec{r}(n)$.
وإذا كان $\vec{r}$ متجه الموضع الذي يقابل $\vec{r}(n)$ فيكون $-\omega^2 \vec{r}$ يقابل $\ddot{\vec{r}}$
(ن) . وهذا يثبت أن متجه التسارع يتجه من $\vec{r}$ باتجاه م .
وبما أن

$$|\ddot{\vec{r}}(n)| = \omega^2 |\vec{r}(n)| = \omega^2 (ت جتا \omega \cdot ن هـ + ت جا \omega \cdot ن و)$$

فيكون مقياس $\ddot{\vec{r}}(n)$ دائما $\omega^2 ت$.

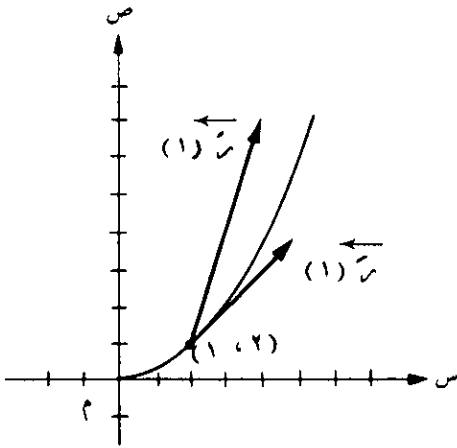
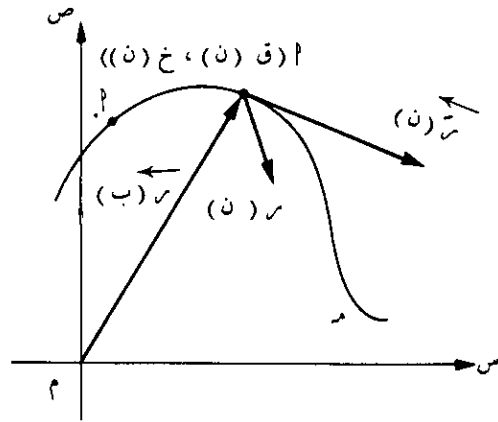
والمناقشة السالفة يمكن تعميمها بسهولة لتشمل جزئيا يتحرك في نظام
احداثيات ذي ثلاثة ابعاد . فلنفرض أن موضع الجزيء عند زمن ن معطى بما
يلي :

$$\vec{r}(n) = (ق(n), خ(n), ج(n))$$

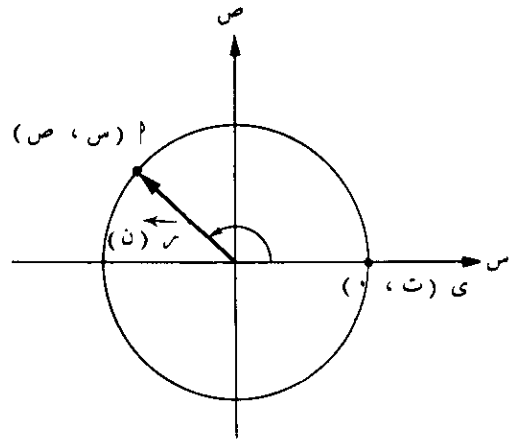
حيث ق ، خ ، ج هي اقترانات معرفة على فترة ف .
وإذا وضعنا

$\vec{r}(n) = ق(n) هـ + خ(n) و + ج(n) ز$
فعندما تتغير ن ترسم نقطة نهاية متجه الموضع $\vec{r}$ مسار الجزيء . وكما سبق
تسمى المشتقة $\dot{\vec{r}}(n)$ ، أن وجدت ، بسرعة الجزيء المتجهة عند الزمن ن
وهي متجه مماس للمنحنى م عند $\vec{r}(n)$. ويسمى المتجه $\dot{\vec{r}}(n)$ بتسارع
الجزيء عند زمن ن . وسرعة الجزيء هي المقياس $|\dot{\vec{r}}(n)|$ للسرعة المتجهة
وكما في بعدين فهي تساوي معدل التغير في طول القوس بالنسبة للزمن .

الشكل ١٥ - ٥



الشكل ١٥ - ٦



الشكل ١٥ - ٧

مثال ٣: $\vec{r}(n) = 2\text{هـ} + 3\text{و} + 4\text{ز}$ حيث $n \in [0, 2]$. أوجد السرعة المتجهة والتسارع عند الزمن n . ارسم مسار الجزيء بالإضافة الى المتجهين الهندسيين اللذين يقابلان $\vec{r}(1)$ و $\vec{r}'(1)$.

الحل: السرعة المتجهة والتسارع هما

$$\vec{r}(n) = 2\text{هـ} + 3\text{و} + 4\text{ز}$$

$$\vec{r}'(n) = 6\text{و} + 4\text{ز}$$

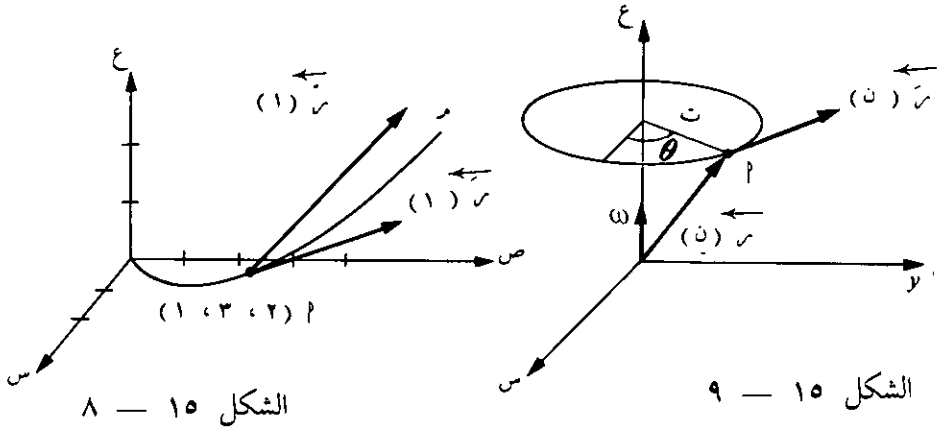
وبشكل خاص عند $n = 1$ يكون الجزيء عند النقطة $م(1, 3, 2)$

ويكون

$$\vec{r}(1) = 2\text{هـ} + 6\text{و} + 4\text{ز}$$

$$\vec{r}(\dot{N}) = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{z}.$$

وقد رسمنا هذين المتجهين ومسار الجزيء في الشكل ١٥ - ٨ .
افترض ان الجزيء P يدور حول محور العينات في دائرة نصف قطرها N تقع في مستوى مواز للمستوى S ص كما هو موضح في الشكل ١٥ - ٩ . وبالإضافة الى ذلك افترض ان السرعة الزاوية $\frac{\dot{\theta}}{N}$ هي مقدار ثابت ω . فالمتجه $\omega =$ ω يقع على محور العينات ، ومقياس ω يسمى متجه سرعة الزاوية P . وكما في المثال ٢ فحركة P معطاة كما يلي :



الشكل ١٥ - ٨

الشكل ١٥ - ٩

$$\vec{r}(\dot{N}) = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{z} + \vec{f}$$

حيث f هي البعد بين المستوى S ص والجزيء وتبين الحسابات المباشرة أن

$$\vec{r}(\dot{N}) \times \vec{\omega} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{z} + \vec{f} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{z} = \vec{r}(\dot{N}).$$

وهكذا فان متجه السرعة هو حاصل الضرب المتجه (التصالي) للسرعة الزاوية المتجهة ومتجه موضع P . ويمكن تعميم هذه الحقيقة حتى تشمل دوران الجزيء P حول اي خط .

تمارين :

في التمارين ١ - ٨ $\vec{r}(\dot{N})$ هو موضع جزيء يتحرك في مستوى واحد . أوجد سرعته المتجهة وتسارعه ومقدار سرعته عند الزمن N .

ارسم مسار الجزيء مع المتجهين الهندسيين اللذين يقابلان السرعة المتجهة والتسارع عند الزمن المشار اليه .

$$(1) \quad \vec{r}(n) = \underline{h} 2n + \underline{e} (4n^2 + 1) \text{ و } \underline{u}, n = 1$$

$$(2) \quad \vec{r}(n) = \underline{h} (9n^2 - 4) + \underline{u} 3 \text{ و } \underline{u}, n = 1$$

$$(3) \quad \vec{r}(n) = \underline{h} \frac{2}{n} + \underline{u} \frac{3}{1+n} \text{ و } \underline{u}, n = 1$$

$$(4) \quad \vec{r}(n) = \underline{h} \sqrt{n} + \underline{u} (\sqrt{n} + 1) \text{ و } \underline{u}, n = 4$$

$$(5) \quad \vec{r}(n) = \underline{h} 4 \text{ جتا } 2n \text{ و } \underline{u}, n = \frac{\pi}{6}$$

$$(6) \quad \vec{r}(n) = \underline{h} 2 \text{ جتا } 2n + \underline{u} 2 \text{ جان } n \text{ و } \underline{u}, n = \frac{\pi 3}{4}$$

$$(7) \quad \vec{r}(n) = \underline{h} e^{2n} + \underline{u} e^{-n} \text{ و } \underline{u}, n = 0$$

$$(8) \quad \vec{r}(n) = \underline{h} e^{2n} + \underline{u} e^{-2n} \text{ و } \underline{u}, n = 1$$

في التمارين ٩-١٦ $\vec{r}(n)$ هو متجه الموضع لجزيء يتحرك في الفضاء . أوجد

السرعة المتجهة والتسارع ومقدار السرعة عند الزمن n .

ارسم مسار الجزيء بالإضافة الى المتجهين الهندسيين اللذين يقابلان $\vec{r}(n)$

و $\vec{r}(n)$ لقيم n المشار اليها .

$$(9) \quad \vec{r}(n) = \underline{h} 4 \text{ جتا } n + \underline{u} 3 \text{ جان } n + \underline{u} 2 \text{ و } \underline{u}, n = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$$

$$(10) \quad \vec{r}(n) = \underline{h} 2n^2 + \underline{u} 3n + \underline{u} 2 \text{ و } \underline{u}, n = 0, 1, 2$$

$$(11) \quad \vec{r}(n) = \underline{h} 2n^2 + \underline{u} 2\sqrt{n} + \underline{u} 4\sqrt{3n} \text{ و } \underline{u}, n = 1, 4, 9$$

$$(12) \quad \vec{r}(n) = \underline{h} 4 \text{ جان } n + \underline{u} 2n + \underline{u} 9 \text{ جتا } n \text{ و } \underline{u}, n = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi 3}{4}$$

$$(13) \quad \vec{r}(n) = \underline{h} (4 \text{ جتا } n + \underline{u} 3 \text{ جان } n + \underline{u} 2) \text{ و } \underline{u}, n = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$$

$$(14) \quad \overrightarrow{r}(n) = (n \text{ جتا } n \text{ هـ} + n \text{ جان } n \text{ و} + n \text{ ز}) , n = 0 , \frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{2}$$

$$(15) \quad \overrightarrow{r}(n) = (n + 1) \text{ هـ} + 2n \text{ و} + (n^2 + 2) \text{ ز} , n = 0 , 1 , 2$$

$$(16) \quad \overrightarrow{r}(n) = 2n \text{ هـ} + n \text{ و} + 9n^2 \text{ ز} , n = 0 , 1 , 2$$

اثبت انه اذا تحرك جزيء بسرعة ثابتة فتكون السرعة المتجهة والتسارع متعامدين .

(18) اثبت انه اذا كان تسارع جزيء متحرك يساوي صفرا دائما فتكون الحركة في خط مستقيم .

٣ — تفاضل الاقترانات المتجهة القيم وتكاملها :

بما ان تعريف $\overrightarrow{r}(n)$ في (١٥ - ٥) له نفس صيغة ق (س) المعطاة في الفصل الثالث فمن المعقول ان نتوقع ان صيغ المشتقات للاقترانات المتجهة القيمة تماثل نظيراتها في الاقترانات الحقيقية القيم . والنظرية التالية تعبر عن هذه الحقيقة .

(١٥ - ٩) نظرية :

اذا كان $\overrightarrow{r}$ و $\overrightarrow{y}$ اقترانين متجهي القيمة وقابلين للاشتقاق وكان ج عددا قياسيا نتجت العلاقات التالية

$$(1) \quad d[\overrightarrow{r}(n) + \overrightarrow{y}(n)] = d\overrightarrow{r}(n) + d\overrightarrow{y}(n)$$

$$(2) \quad d[\text{ج} \overrightarrow{r}(n)] = \text{ج} d\overrightarrow{r}(n)$$

$$(3) \quad d\overrightarrow{r}(n) \cdot \overrightarrow{y}(n) = \overrightarrow{r}(n) \cdot d\overrightarrow{y}(n) + \overrightarrow{r}(n) \times \overrightarrow{y}(n)$$

$$(4) \quad d\overrightarrow{r}(n) \times \overrightarrow{y}(n) = \overrightarrow{r}(n) \times d\overrightarrow{y}(n) + \overrightarrow{r}(n) \cdot \overrightarrow{y}(n)$$

البرهان :

سنبرهن (٣) ونترك بقية الاجزاء كتارين . فاذا كتبنا

$$\overrightarrow{r}_1(n) = (n \text{ هـ} + n \text{ ق} + n \text{ و} + n \text{ ق} + n \text{ ز}) , \\ \overrightarrow{y}_1(n) = (n \text{ هـ} + n \text{ خ} + n \text{ و} + n \text{ خ} + n \text{ ز}) ,$$

حيث $ق_3$ خ_3 اقترانان قابلان للاشتقاق في ن فان

$$\overrightarrow{ق_3} (ن) . \overrightarrow{ق_3} (ن) = \sum_{d=1}^3 \overrightarrow{ق_3} (ن) \text{ خ}_3 (ن)$$

ومن ثم فان

$$د_3 [\overrightarrow{ق_3} (ن) . \overrightarrow{ق_3} (ن)] = \sum_{d=1}^3 د_3 [\overrightarrow{ق_3} (ن) \text{ خ}_3 (ن)]$$

$$= \sum_{d=1}^3 [\overrightarrow{ق_3} (ن) \text{ خ}_3 (ن) + \overrightarrow{ق_3} (ن) \text{ خ}_3 (ن)]$$

$$= \sum_{d=1}^3 \overrightarrow{ق_3} (ن) \text{ خ}_3 (ن) + \sum_{d=1}^3 \overrightarrow{ق_3} (ن) \text{ خ}_3 (ن)$$

$$= \overrightarrow{ق_3} (ن) . \overrightarrow{ق_3} (ن) + \overrightarrow{ق_3} (ن) . \overrightarrow{ق_3} (ن)$$

ويمكن ايضا دراسة التكاملات المحدودة للاقترانات المتجهة القيم . وبالتحديد فانه اذا كان

$\overrightarrow{ق_3} (ن) = ق_3 (ن) ه_3 + خ_3 (ن) و_3 + ج_3 (ن) ز_3$
حيث ق ، خ ، ج قابلات للتكامل في الفترة [ب ، ب] فبالتعريف يكون

$$(١٥ - ١٠) \left[\overrightarrow{ق_3} (ن) و_3 + \overrightarrow{ق_3} (ن) ه_3 + \overrightarrow{ق_3} (ن) ز_3 \right] = \left[\overrightarrow{ق_3} (ن) و_3 + \overrightarrow{ق_3} (ن) ه_3 + \overrightarrow{ق_3} (ن) ز_3 \right]$$

$$+ \left[\overrightarrow{ق_3} (ن) و_3 + \overrightarrow{ق_3} (ن) ه_3 + \overrightarrow{ق_3} (ن) ز_3 \right]$$

وفي هذه الحالة يمكن القول ان $\overrightarrow{ق_3}$ قابلة للتكامل في الفترة [ب ، ب] . واذا كان $\overrightarrow{ق_3} (ن)$ هو عكس مشتقة $\overrightarrow{ق_3} (ن)$ بمعنى ان $\overrightarrow{ق_3} (ن) = \overrightarrow{ق_3} (ن)$ لجميع قيم ن في [ب ، ب] فانه كما في (١٥ - ٣١)

$$(١١-١٥) \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{r} (ن) = ن \text{ و } \overrightarrow{ل} (ن) = \overrightarrow{ل} (ن) - \overrightarrow{ل} (ن) \end{array} \right]$$

وينترك البرهان كتمرين .

مثال

$$\text{أوجد } \left[\overrightarrow{r} (ن) = ن \text{ و } \overrightarrow{ل} (ن) = \overrightarrow{ل} (ن) - \overrightarrow{ل} (ن) \right]$$

$$+ (ن + ١) - ١$$

الحل : بإيجاد المشتقة العكسية لكل مركبة من مركبات $\overrightarrow{r} (ن)$ نحصل على ان

$$\overrightarrow{ل} (ن) = ٣ن + ٢و + ١ل$$

وبما أن $\overrightarrow{ل} (ن) = \overrightarrow{ر} (ن)$ فيتبع من (١١-١٥) ان

$$\left[\overrightarrow{ر} (ن) = ن \text{ و } \overrightarrow{ل} (ن) = \overrightarrow{ل} (ن) - \overrightarrow{ل} (ن) \right]$$

$$= (٤٨هـ + ٢و + ٣ل) - (٠هـ + ٢و + ٠ل)$$

$$= ٤٨هـ + ٢و + ٣ل$$

وتسري على التكاملات غير المحدودة للاقتانات المتجهة القيم مباديء مشابهة

لتلك التي تسري على الاقتانات الحقيقية القيم . وبراهين النظريات تحتاج الى

تعديل بسيط في تلك التي سبق دراستها وسنحذف هذه البراهين . واذا كان $\overrightarrow{ل}$

(ن) هو المشتقة العكسية للمتجه $\overrightarrow{ر} (ن)$ فجميع صيغ المشتقات العكسية هي

$\overrightarrow{ل} (ن) + \overrightarrow{ج} \text{ حيث } \overrightarrow{ج} \text{ هو متجه ثابت ونكتب}$

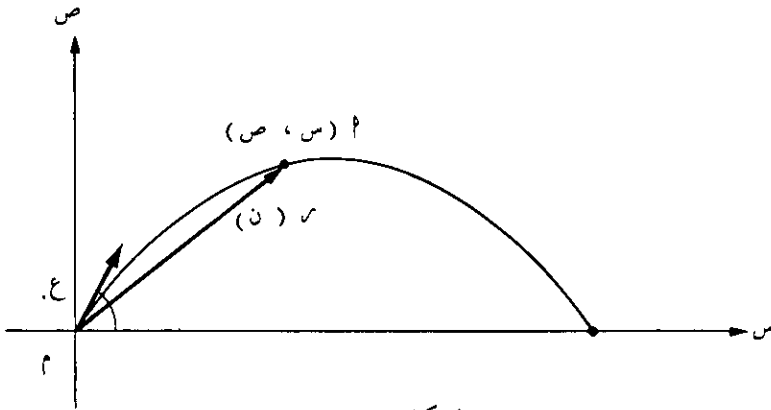
$$\left[\overrightarrow{ر} (ن) = ن \text{ و } \overrightarrow{ل} (ن) = \overrightarrow{ل} (ن) + \overrightarrow{ج} \right]$$

واذا كانت القيم المتطرفة معروفة فيمكن تعيين $\overrightarrow{ج}$ (انظر التمرينين ١٣ و ١٤) .

وسنطبق في التالي هذه المفاهيم لمسألة ايجاد قانون حركة قذيفة .

افترض ان قذيفة اطلقت من مدفع بزاوية انحراف α . فاذا كانت السرعة الابتدائية هي ع. فيمكن وضع مستوى احداثي كما في الشكل ١٥ - ١٠ حيث تكون ماسورة المدفع موضوعة في نقطة الاصل م والسرعة الابتدائية المتجهة ع. في اتجاه α ومقياسها ع. لنفرض أن P (س ، ص) ترمز الى موضع القذيفة بعد زمن t وان $\vec{r}(t)$ (ن) يقابل $\vec{r}$ ، وهدفنا إيجاد صيغة واضحة للمتجه $\vec{r}(t)$ (ن) . وسنفترض ان مقاومة الهواء يمكن اهمالها والقوة الوحيدة العاملة على القذيفة هي القوة ج لتسارع الجاذبية . وبما أن ج تعمل الى اسفل فيمكن كتابة

$$\vec{a} = -\vec{g} \quad \text{حيث} \quad |\vec{g}| = g \approx 32 \text{ قدم / ث}^2$$



الشكل ١٥ - ١٠

وحسب قانون نيوتن الثاني للحركة فالقوة ق التي تعمل على جسم كتلته ك يربطها بتسارعها $\vec{a}$ الصيغة $\vec{Q} = K \vec{a}$ فهنا تكون $K \vec{a} = K \vec{g}$ وهذه تقودنا الى المعادلة التفاضلية المتجهة $\vec{r}''(t) = \vec{g}$

وبأخذ تكامل الطرفين نحصل على أن

$$\vec{r}'(t) = \vec{g} t + \vec{b}$$

حيث $\vec{b}$ متجه . وبما ان $\vec{r}'(t)$ (ن) هو السرعة المتجهة عند الزمن t فنحصل على أن

$$\vec{r}'(0) = \vec{E} = \vec{b}$$

ومن ثم فإن

$$(12-15) \quad \overleftarrow{ر} (ن) = ن \overleftarrow{ج} + \overleftarrow{ع}$$

وبتكامل طرفي المعادلة نحصل على ان

$$\overleftarrow{ر} (ن) = \frac{1}{4} ن^2 \overleftarrow{ج} + ن \overleftarrow{ع} + \overleftarrow{ت}$$

حيث ن متجه ما وبما ان $\overleftarrow{ر} (0) = 0$ يتبع ان $\overleftarrow{ت} = 0$ ولهذا فان

$$\overleftarrow{ر} (ن) = \frac{1}{4} ن^2 \overleftarrow{ج} + ن \overleftarrow{ع}$$

ويمكن كتابتها ايضا بالصيغة

$$س \overleftarrow{هـ} + ص \overleftarrow{و} = -\frac{1}{4} ن^2 \overleftarrow{ج} + ن (ع \overleftarrow{ج} + جتا \alpha \overleftarrow{هـ} + ع \overleftarrow{جا} \alpha \overleftarrow{و})$$

وبمساواة المركبات نرى ان

$$(13-15) \quad س = (ع \overleftarrow{ج} + جتا \alpha) ن, \quad ص = -\frac{1}{4} ن^2 \overleftarrow{ج} + (ع \overleftarrow{ج} + جتا \alpha) ن$$

وهي المعادلات الوسيطة لمسار القذيفة . وبحذف الوسيط نحصل على معادلة

بالاحداثيات المتعامدة وهي

$$(14-15) \quad ص = \frac{-\overleftarrow{ج}}{ع \overleftarrow{ج} + جتا^2 \alpha} س + (ظا \alpha) س$$

وهذا يبين أن مسار القذيفة هو قطع مكافئ . ولايجاد المدى اي المسافة ف

(م، پ) من م الى پ في الشكل ١٥-١٠ نأخذ ص = ٠ في (١٥-١٣)

فنحصل على أن

$$0 = \left(-\frac{1}{4} ج + ن + ع \overleftarrow{ج} + جتا \alpha \right)$$

$$\frac{\overleftarrow{ج}}{ع \overleftarrow{ج} + جتا^2 \alpha} = ن \text{ في زمن } پ \text{ فصل القذيفة النقطة } پ$$

وباستعمال المعادلة الاولى في (١٥-١٣) نحصل على ان

$$ف (م، پ) = (ع \overleftarrow{ج} + جتا \alpha) \frac{ع \overleftarrow{ج} + جتا^2 \alpha}{ج}$$

فتكون أكبر قيم المدى هي $\frac{ع^2}{ج}$ وذلك عندما تكون جا ٢ = α أي

$$= ٤٥. ويحدث أعلى ارتفاع ط عند ن = \frac{ع. جا \alpha}{ج} \text{ (لماذا؟)}$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية من معادلات (١٥-١٣) نحصل على أن

$$\frac{ع. جا^2 \alpha}{ج} = ط$$

تمارين :

(١) أكبر برهان (١٩-٩) .

(٢) اثبت (١١-٥) .

(٣) اثبت انه اذا كان ق ، $\overleftarrow{ر}$ اقترانين قابلين للاشتقاق فان

$$د \quad [ق (ن) \overleftarrow{ر} (ن)] = ق (ن) \overleftarrow{ر} (ن) + ق (ن) \overleftarrow{ر} (ن)$$

(٤) اثبت قاعدة السلسلة للاقترانات المتجهة القيم

$$د \quad (\overleftarrow{ر} (ق (ن))) = ق (ن) \overleftarrow{ر} (ق (ن)) \text{ عندما تكون } \overleftarrow{ر} ، ق \text{ قابلتين}$$

للاشتقاق ومحالهما محددين تحديداً ملائماً .

(٥) اثبت انه اذا كانت $\overleftarrow{ر} ، \overleftarrow{ح} ، \overleftarrow{ج}$ ثلاثة اقترانات متجهة القيم فان

$$د \quad \overleftarrow{ر} (ن) . \overleftarrow{ح} (ن) \times \overleftarrow{ج} (ن) = [\overleftarrow{ر} (ن) . \overleftarrow{ح} (ن) \times \overleftarrow{ج} (ن) +$$

$$\overleftarrow{ر} (ن) . \overleftarrow{ج} (ن) \times \overleftarrow{ح} (ن) + \overleftarrow{ح} (ن) \times \overleftarrow{ج} (ن)] \overleftarrow{ر} (ن) .$$

(٦) اثبت انه اذا كانت $\overleftarrow{ر} (ن)$ و $\overleftarrow{ر} (ن)$ موجودتين فان

$$د \quad [\overleftarrow{ر} (ن) \times \overleftarrow{ر} (ن)] = \overleftarrow{ر} (ن) \times \overleftarrow{ر} (ن)$$

(٧) اذا كانت $\overleftarrow{ر} و \overleftarrow{و} \text{ قابلتين للتكامل على الفترة } [\beta ، \alpha]$ وكان ج عدد قياسيا وكان

$\overleftarrow{ج} \ni$ مع $\overleftarrow{ج}$ فاثبت ما يلي :

$$(١) \left[\vec{r}(\dot{n}) + \vec{h}(\dot{n}) \right] \vec{u}_p \left[\vec{r}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) \right] \vec{u}_p \left[\vec{h}(\dot{n}) + \vec{x}(\dot{n}) \right] \vec{u}_p$$

$$(ب) \left[\vec{r}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) \right] \vec{u}_p = \left[\vec{r}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) \right] \vec{u}_p$$

$$(ج) \left[\vec{r}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) \right] \vec{u}_p = \left[\vec{r}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) \right] \vec{u}_p$$

٨ (إذا كانت $\vec{r}$ قابلة للتكامل على $[١, ب]$ أثبت ان

$$\left| \left[\vec{r}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) \right] \vec{u}_p \right| \geq \left| \left[\vec{r}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) \right] \vec{u}_p \right|$$

في التمرينين ٩ ، ١٠ أوجد

$$\vec{u}(\dot{n}) \cdot \vec{h}(\dot{n}) \text{ و } \vec{u}(\dot{n}) \times \vec{h}(\dot{n})$$

$$(٩) \vec{r}(\dot{n}) = \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n})$$

$$\vec{h}(\dot{n}) = \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n})$$

$$(١٠) \vec{r}(\dot{n}) = \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n})$$

$$\vec{h}(\dot{n}) = \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n})$$

$$(١١) \text{ أوجد } \left[\vec{r}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) - \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) \right] \vec{u}_p$$

$$(١٢) \text{ أوجد } \left[\vec{r}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) \right] \vec{u}_p$$

$$(١٣) \text{ إذا كانت } \vec{r}(\dot{n}) = \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n})$$

$$\vec{h}(\dot{n}) = \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n})$$

$$(١٤) \text{ إذا كانت } \vec{r}(\dot{n}) = \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n})$$

$$\vec{h}(\dot{n}) = \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n}) + \vec{u}(\dot{n})$$

$$(١٥) \text{ قذيفة أطلقت بسرعة ابتدائية قدرها ١٥٠٠ قدم / ث وزاوية ارتفاع مقدارها}$$

٣٠. أوجد كلا مما يلي :

(٢) السرعة عند الزمن ن

(ب) اقصى ارتفاع

(ج) المدى

(د) السرعة التي تصدم القذيفة بها الارض .

(١٦) حل التمرين ١٥ اذا كانت زاوية الارتفاع ٦٠

(١٧) رمى لاعب كرة بزاوية قدرها ٤٥° مع الارض فسقطت على مسافة ٢٥٠ قدما كم كانت السرعة الابتدائية للكرة ؟

(١٨) اطلقت قذيفة افقيا بسرعة قدرها ١٨٠٠ قدم / ث من ارتفاع ١٠٠٠ قدم فوق سطح الارض . متى واين ترتطم بالارض ؟

٤ — الانحناء Curvature

هنالك عدة طرق لتمثيل المنحنى في المستوى الواحد بالمعادلات الوسيطة ومن هذه الطرق استعمال طول القوس وسيطا . فلنفترض ان المنحنى م في المستوى س ص معطى بالصيغة

$$م = \{ (ق (ل) , ج (ل)) : ل \in T \}$$

حيث ق ، ج اقترانات ممهدان على الفترة ت والوسيط ل هو طول القوس مقيسا على م ابتداء من نقطة ثابتة س .

فأمامنا اذن وضع يماثل هندسيا ما يبينه الشكل ١٥ - ١١ حيث انه لكل ل في ت توجد نقطة وحيدة $ل$ = (ق (ل) ، ج (ل)) تبعد ل من الوحدات عن س (مقيسة على طول م) . والاتجاه الموجب على م هو اتجاه ترايد ل . واذا كان

$$ر (ل) = \langle ق (ل) , ج (ل) \rangle$$

فيكون المتجه المماس $\vec{ر (ل)}$ دائما متجه وحدة . ولتوضيح هذه الحقيقة نلاحظ انه

باستخدام (١٣ - ٢٠) فان

$$ل = \sqrt{[ق'(ل)]^2 + [ج'(ل)]^2} \quad و \quad ل$$

ويتفاضل المعادلة الأخيرة ضمينا بالنسبة الى $\bar{L}$ نحصل على :

$$1 = \sqrt{[C(\bar{L})]^2 + [Q(\bar{L})]^2} / R(\bar{L})$$

وسنرمز لمتجه الوحدة المماس $\bar{r}(\bar{L})$ بالرمز $\bar{r}(\bar{L})$ وندرس تغيره عندما تتحرك $\bar{M}(\bar{L})$ على $\bar{M}$. فكل $\bar{L}$ يقابله اتجاه وحيد θ للمتجه $\bar{r}(\bar{L})$ (انظر الشكل ١٥ - ١١). ومن ثم فان θ هي اقتران في $\bar{L}$. والانحناء κ للمنحنى $\bar{M}$ عند $\bar{M}(\bar{L})$ يعرف كالآتي :

$$(15-15) \quad \kappa = \left| \frac{d\theta}{d\bar{L}} \right|$$

بشرط ان تكون $\frac{d\theta}{d\bar{L}}$ موجودة. وبالكلمات : κ هي القيمة المطلقة لمعدل تغير θ بالنسبة الى $\bar{L}$. وبصورة خاصة اذا كان $\bar{M}$ خطا مستقيما تكون θ مقدارا ثابتا ويكون الانحناء يساوي صفرا. والانحناء عند نقط مثل $\bar{r}$ ، ع في الشكل ١٥ - ١٢ يكون صغيرا لان تغير θ يكون بطيئا عندما تتحرك $\bar{M}(\bar{L})$ على $\bar{M}$. ويكون الانحناء أكبر عند نقط مثل $\bar{r}$ ، ج. وهكذا، فنقول على وجه التقريب ان κ تزودنا بمعلومات عن حدة انحناء المنحنى عند نقط مختلفة عليه.

افترض ان $\bar{M}$ يمكن وصفها ايضا ببيان معادلة عادية $\bar{v} = \bar{h}(\bar{s})$ بالنسبة الى احداثيات متعامدة حيث $\bar{h}$ اقتران مهمد في احدى الفترات. فاذا كانت θ ترمز الى اتجاه $\bar{r}(\bar{L})$ عند النقطة $\bar{M}(\bar{s}, \bar{v})$ فان

$$(15-16) \quad \text{ظا } \theta = \bar{v}' \text{ أو } \theta = \text{ظا } -\bar{v}'$$

حيث $\bar{v}' = \frac{d\bar{v}}{d\bar{s}}$. وكما في البند ٧ من الفصل السادس يمكن تعريف

اقتران طول القوس $\bar{L}$ بالصيغة

$$(15-17) \quad \bar{L}(\bar{s}) = \int_{\bar{M}}^{\bar{s}} \sqrt{1 + \bar{v}'^2} d\bar{s}$$

حيث $\bar{M}$ هي الاحداثي السيني للنقطة الثابتة $\bar{y}$ على $\bar{M}$. واذا كانت $\bar{v}$ موجودة فباستخدام قاعدة السلسلة فان

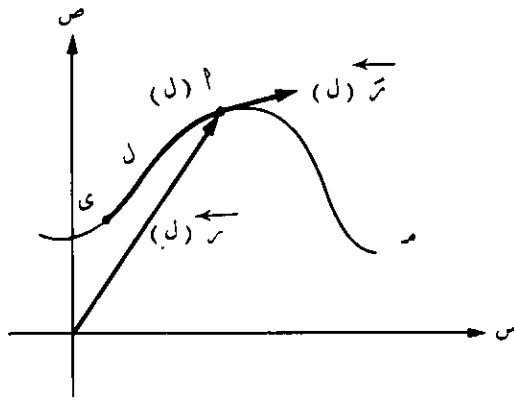
$$\frac{d\theta}{d\bar{s}} = \frac{\theta' \bar{v}'}{\sqrt{1 + \bar{v}'^2}} \text{ أو } \frac{d\theta}{d\bar{L}} = \theta'(\bar{s}) \frac{d\bar{s}}{d\bar{L}}$$

ويستج عن ذلك ان

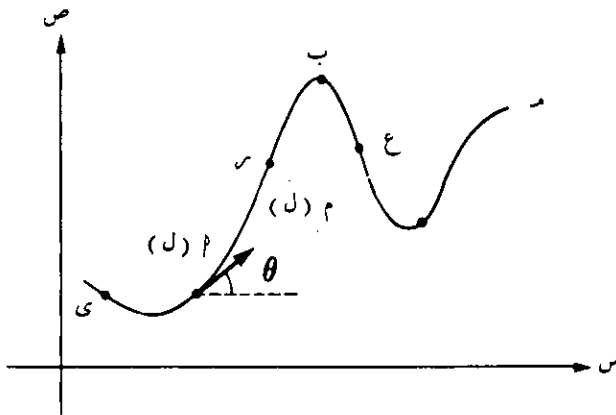
$$\frac{\left| \begin{smallmatrix} \theta \\ \text{د س} \end{smallmatrix} \right|}{\left| \begin{smallmatrix} \text{ل} \\ \text{د س} \end{smallmatrix} \right|} = \left| \begin{smallmatrix} \theta \\ \text{د ل} \end{smallmatrix} \right| = \text{ك} \quad (١٨-١٥)$$

واستنادا الى (١٦-١٥) و (١٧-١٥) فإن

$$\sqrt{\text{ص}^2 + ١} = \text{ل} \text{ د س} , \quad \frac{\text{ص}}{\sqrt{\text{ص}^2 + ١}} = \theta \text{ د س}$$



الشكل ١٥ - ١١



الشكل ١٥ - ١٢

وبالتعويض في (١٥-١٨) نحصل على ان

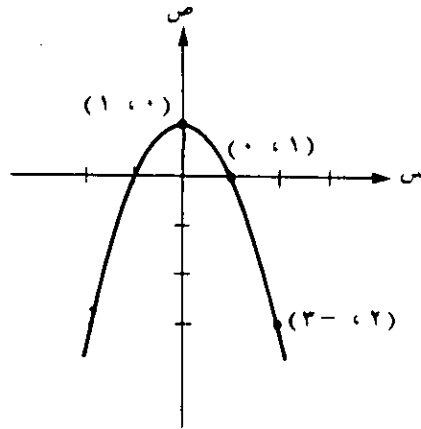
$$(١٥-١٩) \quad \frac{|ص|}{\frac{3}{2} [٢(ص) + ١]} = ك$$

ويمكن استعمال الصيغة السابقة لايجاد ك بشرط ان نصف م بمعادلة بالاحداثيات المتعامدة .

مثال ١ : ارسم منحنى $ص = ١ - س^٢$ وأوجد الانحناء عند النقط التالية (س ، ص) ، (١ ، ٠) ، (٠ ، ١) ، (٢ ، -٣) .

الحل : البيان قطع مكافئ مرسوم بالشكل ١٥-١٣ . وبما ان $ص = ١ - س^٢$ و $ص = ٢ -$ ينتج من ١٥-١٩ ان

$$ك = \frac{٢}{\frac{3}{2} (٢س٤ + ١)}$$



الشكل ١٥ - ١٣

$$ص = ١ - س^٢$$

ونلاحظ بشكل خاص أن $ك = ٢$ عند $(١ ، ٠)$ أي ان اتجاه متجه المماس يتغير بمعدل وحدتين دائريتين لكل وحدة تغير في طول القوس . وعند النقطة $(٠ ، ١)$ تكون $ك = \frac{٢}{\frac{3}{2}} \approx ١,٨$ وهذا يرينا ان الانحناء هنا اقل حدة

منه عند النقطة (٠ ، ١) . ويمكن مشاهدة هذا ايضا من البيان . واخيرا عند

$$(٢ ، ٣) \text{ تكون ك } = \frac{٢}{\frac{٣}{٢}(١٧)} \approx ٠.٣٠٠ . \text{ لاحظ انه اذا زادت س}$$

دون حصر يقترب الانحناء من الصفر .

مثال ٢ : برهن ان الانحناء لدائرة نصف قطرها ρ هو $\frac{1}{\rho}$ عند اي نقطة عليها .

الحل : لا ينقص من التعميم ان نفرض ان مركز الدائرة عند نقطة الاصل وان معادلتها $س^٢ + ص^٢ = \rho^٢$. فبالتفاضل الضمني نجد ان :

$$٢س + ٢صص' = ٠ \text{ أو } صص' = -\frac{س}{ص}$$

ونتيجة لذلك فان

$$\frac{\frac{٢س}{ص} + ص}{٢ص} = \frac{ص - سص'}{٢ص} = ص'$$

$$\frac{\rho^٢}{٣ص} = \frac{ص^٢ + س^٢}{٣ص} =$$

وبالتعويض في (١٥ - ١٩) ينتج ان :

$$\frac{\left| \frac{\rho^٢}{٣ص} \right|}{\frac{٣}{٢} \left[\frac{س}{ص} + ١ \right]} = ك$$

وبالاختصار واستعمال $٢س + ٢صص' = ٢صص'$ نحصل على أن $\frac{1}{\rho} = ك$.

نشق الآن صيغة لايجاد ك عندما يوصف المنحنى $سم$ بواسطة أي وسيط ن .
افترض ان $سم$ معطاة وسيطيا بالمعادلتين :

س = ق (ن) ، ص = ج (ن)
وان ق وج موجودتان لجميع قيم ن قيد الاعتبار. فكما في برهان (١٥ - ١٨)
فان

$$(١٥ - ٢٠) \quad \frac{\begin{vmatrix} \theta & د \\ \theta & ل \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} د & ن \\ ل & ن \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} \theta & د \\ \theta & ل \end{vmatrix} = ك$$

$$\text{وبما أن } \theta = \text{ظا}^{-١} \frac{\text{ج} (ن)}{\text{ق} (ن)}$$

بشرط ان ق (ن) $\neq ٠$ فنحصل على أن

$$\times \frac{١}{١ + \left[\frac{\text{ج} (ن)}{\text{ق} (ن)} \right]^2} = \theta$$

$$\frac{\text{ق} (ن) \text{ج} (ن) - \text{ج} (ن) \text{ق} (ن)}{[\text{ق} (ن)]^2} = \frac{\text{ق} (ن) \text{ج} (ن) - \text{ج} (ن) \text{ق} (ن)}{[\text{ق} (ن)]^2 + [\text{ج} (ن)]^2}$$

وفوق ذلك فان

$$\sqrt{[\text{ق} (ن)]^2 + [\text{ج} (ن)]^2} = \begin{vmatrix} د & ل \\ د & ن \end{vmatrix}$$

ومن التعويض في (١٥ - ٢٠) والاختصار نحصل على ان

$$(٢١ - ١٥) \text{ ك} = \frac{ق (ن) ج (ن) - ج (ن) ق (ن)}{\frac{٣}{٢} ([ق (ن)] + [ج (ن)])}$$

وإذا كان الانحناء $س$ عند $پ$ ليس صفراً فالدائرة التي نصف قطرها $م = \frac{١}{٢س}$ ويقع مركزها على ناحية فتحة تقوس $س$ ولها نفس المماس عند $پ$ مثل $س$ تسمى دائرة انحناء $س$ عند $پ$ Circle of Curvature . ونسمى نصف قطرها ومركزها بنصف قطر الانحناء ومركزه عند $پ$. وحسب المثال ٢ يكون انحناء دائرة الانحناء هو $\frac{١}{٢س}$ أو $ك$ ومن ثم فهو نفس انحناء المنحنى $س$. ولهذا السبب تعتبر دائرة الانحناء بانها افضل دائرة تطابق المنحنى عند $پ$.

مثال ٢ : إذا كان $س$ منحنى معادلته الوسيطيتان $س = ن^٢$ ، $ص = ن^٣$ أوجد الانحناء عند النقطة $پ$ التي تقابل $ن = \frac{١}{٢}$. ارسم منحنى $س$ ودائرة الانحناء عند $پ$.

الحل : نضع $ق (ن) = ن^٢$ ، $هـ (ن) = ن^٣$ فنحصل على :
 $ق (ن) = ن^٢$ ، $هـ (ن) = ن^٣$ ، $ق (ن) = ن^٢$ ، $هـ (ن) = ن^٣$ ، $ق (ن) = ن^٢$ ، $هـ (ن) = ن^٣$.
وبالتعويض في (٢١ - ١٥) نحصل على

$$\frac{ن^٦}{\frac{٣}{٢} (ن^٩ + ن^٣)} = \frac{(٢) (ن^٣) - (ن^٦) (٢)}{\frac{٣}{٢} (ن^٣ + ن^٢)} = \text{ك}$$

وإذا كانت $ن = \frac{١}{٢}$ تكون

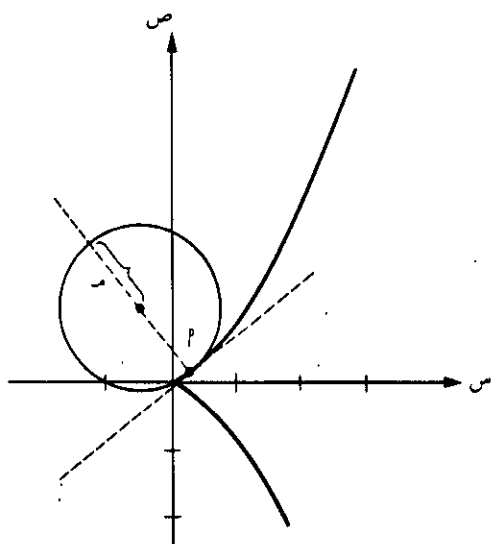
$$\text{ك} = \frac{٩٦}{١٢٥} = \frac{٣}{٢} \left(\frac{٢٥}{١٦} \right) / \left(\frac{٦}{٤} \right) = ٠,٧٧$$

والنقطة التي تقابل $ن = \frac{١}{٢}$ احداثياتها $(\frac{١}{٨}, \frac{١}{٤})$ ونصف قطر انحنائها $م$ عند

تلك النقطة هو $\frac{١}{٢س} \approx \frac{١٢٥}{٩٦}$ أو ٣ و ١ . والبيان مرسوم في الشكل ١٥ - ١٤ .

وفي الفضاء ذي البعدين يكون اتجاه المتجه زاوية وحيدة ولكن في الفضاء ذي ثلاثة ابعاد نجد ثلاث زوايا (اتجاهات) . ونتيجة لذلك فتعريفنا للانحناء ك

بالصيغة θ ليس لها ما يقابلها في الفراغ ولذا نلجأ الى معالجة هذا المفهوم
باسلوب آخر سنثبت بعد اقراره انه يفضي الى نتائج تتفق عند تخصيص البحث
في المستوى الواحد مع نتائج الاسلوب القديم .



الشكل ١٥ — ١٤

واليك خطوات هذا الاسلوب . نفرض ان المنحنى سم في الفضاء معطى
كالآتي :

$$(١٥-٢٢) \text{ سم} = \{ (ق_١ (ل) , ق_٢ (ل) , ق_٣ (ل)) : ل \in T \}$$

حيث $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ متصلات على الفترة T ، $ل$ طول القوس مقبسا على
سم ابتداء من نقطة ثابتة الى النقطة :

$$P (ل) = (ق_١ (ل) , ق_٢ (ل) , ق_٣ (ل)) .$$

وكما سبق ، اذا كانت :

$$\overrightarrow{P (ل)} = \langle ق_١ (ل) , ق_٢ (ل) , ق_٣ (ل) \rangle$$

فيكون $\overrightarrow{P (ل)}$ متجه وحدة مماسا للمنحنى سم عند $P (ل)$. ولنرمز له بالرمز $\overrightarrow{م}$

$(ل)$. وبما ان $||\overrightarrow{م (ل)}||$ مقدار ثابت فيتبع ان $\overrightarrow{م (ل)}$ عمودي على $\overrightarrow{م}$

$(ل)$ (انظر المثال ٤ من البند ١) . واذا كان $\overrightarrow{م (ل)} \neq \overrightarrow{0}$ افترض ان

$$(23-15) \quad \overleftarrow{ع} (ل) = \frac{1}{|\overleftarrow{م} (ل)|} \overleftarrow{م} (ل)$$

فيكون المتجه $\overleftarrow{ع} (ل)$ متجه وحدة عموديا على $\overleftarrow{م} (ل)$ ويشار اليه بمتجه الوحدة العمودي الرئيسي على $سم$ عند النقطة $م (ل)$. ومن (23-15) فان $\overleftarrow{م} (ل) = |\overleftarrow{م} (ل)| \overleftarrow{ع} (ل)$ ويسمى العدد $م (ل)$ بالانحناء $سم$ عند $م (ل)$ ويرمز له بالرمز $ك$. ولهذا فان

$$(24-15) \quad \overleftarrow{م} (ل) = ك (ن) \overleftarrow{ع} (ل) \quad \text{حيث } ك = \overleftarrow{م} (ل)$$

ولاثبات ان هذا التعريف لـ $ك$ يتحول الى (15-15) عندما تقع جميع المتجهات في مستوى واحد نلاحظ اولاً انه في حالة البعدين يكون $\overleftarrow{م} (ل) = جتا \theta \underline{هـ} + جتا \theta \underline{و}$ حيث θ هي اتجاه $\overleftarrow{م} (ل)$. واذا اعتبرنا θ اقترانا في $ل$ نحصل بالتفاضل على:

$$\overleftarrow{م} (ل) = - د جا \theta \underline{و} + د جا \theta \underline{هـ} \quad \text{و}$$

$$د = \theta (جا \theta \underline{هـ} + جتا \theta \underline{و})$$

ولهذا فان

$$|\overleftarrow{م} (ل)| = |د جا \theta \underline{و} - د جا \theta \underline{هـ}| = د$$

وهي نفس صيغة (15-15).

ويمكن الحصول على صيغة للانحناء $ك$ اذا وصفنا $سم$ باستخدام الوسيط $ن$. افترض ان

$سم = \{ ق_1 (ن), ق_2 (ن), ق_3 (ن) : ن \in T \}$ حيث $ق_1, ق_2, ق_3$ قابلات للاشتقاق على T . ضع $م (ن)$ لرمز للنقطة $(ق_1 (ن), ق_2 (ن), ق_3 (ن))$ ولرمز لطول القوس من نقطة ثابتة $س$ الى $م (ن)$. وسنفترض ان $ل$ تزداد بزيادة $ن$. فاذا كان $\overleftarrow{م} (ن) = < ق_1 (ن), ق_2 (ن), ق_3 (ن) >$

فيمكن التعبير عن متجه الوحدة المماس م (ل) كما يلي :

$$(٢٥-١٥) \quad \overleftarrow{م} (ل) = \frac{1}{|\overleftarrow{ر} (ن)|} \overleftarrow{ر} (ن)$$

وبما ان المتغير ل هو اقتران في ن فيمكن اعتبار المشتقة $\frac{d}{dn} \overleftarrow{م} (ل)$. وسنعتبر ان قاعدة السلسلة هنا صحيحة ولكننا سوف لانبرهن عليها .

$$\frac{d}{dn} \overleftarrow{م} (ل) = \frac{d}{dn} \overleftarrow{م} (ل) = \frac{d}{dn} \overleftarrow{م} (ل) = \frac{d}{dn} \overleftarrow{م} (ل)$$

(انظر المثال ٤ في البند ٣) . ونتيجة لذلك فان الانحناء عند م (ن) يعطي بالصيغة :

$$\frac{|\overleftarrow{م} (ل)|}{|\overleftarrow{ر} (ن)|} = \frac{1}{|\overleftarrow{ر} (ن)|} = ك$$

وباستخدام (٢٥-١٥) يمكن كتابة المعادلة الاخيرة كما يلي :

$$(٢٦-١٥) \quad ك = \frac{1}{|\overleftarrow{ر} (ن)|} \frac{d}{dn} \overleftarrow{م} (ل)$$

وسنعطي في البند القادم صيغة بديلة (واسهل بكثير) للانحناء ك (انظر (٣٢-١٥) .

مثال ٤ : أوجد ك للحلزون س = م جتا ن ، ص = م جتا ن ، ع = ب ن .

الحل : لدينا ما يلي :

$$\begin{aligned} \overleftarrow{ر} (ن) &= \overleftarrow{م} جتا ن هـ + \overleftarrow{م} جتا ن و + \overleftarrow{ب} ن ز \\ \overleftarrow{ر} (ن) &= \overleftarrow{م} جتا ن هـ + \overleftarrow{م} جتا ن و + \overleftarrow{ب} ن ز \\ \overleftarrow{ر} (ن) &= \overleftarrow{م} جتا ن هـ + \overleftarrow{م} جتا ن و + \overleftarrow{ب} ن ز \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + p^2}} = \frac{\vec{r}(n)}{|\vec{r}(n)|} \quad (p - \text{جنا } n \text{ هـ } p - \text{جان } n \text{ و})$$

$$\frac{|p|}{\sqrt{p^2 + p^2}} = \left| \frac{\vec{r}(n)}{|\vec{r}(n)|} \right|$$

وبالتعويض في (١٥-٢٦) ينتج :

$$\frac{|p|}{\sqrt{p^2 + p^2}} = \frac{|p|}{\sqrt{p^2 + p^2}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + p^2}} = k$$

وهذا يثبت ان انحناء الحلزوني ثابت عند جميع النقاط .

تمارين :

في التمارين ١-١٠ أوجد انحناء كل منحنى مستو معطى عند النقطة P . ارسم بيان المعادلة ودائرة الانحناء عند P .

(١) ص = ٢ - س^٣ ، $P(1, 1)$

(٢) ص = س^٤ ، $P(1, 1)$

(٣) ص = س^٥ ، $P(1, 0)$

(٤) ص = لط (س-١) ، $P(0, 2)$

(٥) ص = حا س ، $P(1, \frac{\pi}{2})$

(٦) ص = قا س ، $P(2, \frac{\pi}{2})$

(٧) س = - ن^٢ ، ص = ١ - ن^٣ ، $P(0, 1)$

(٨) س = ن - جان ، ص = ١ - جتا ن ، $P(\frac{\pi}{2}, 1, 1)$

$$(9) \quad \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, 1 \right) \quad \text{س} = 2 \text{ جا ن} , \text{ص} = 3 \text{ جتا ن} . \text{پ}$$

$$(10) \quad \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{4}, \frac{\sqrt[3]{2}}{4} \right) \quad \text{س} = \text{جتا}^3 \text{ ن} , \text{ص} = \text{جا}^3 \text{ ن} , \text{پ}$$

في كل من المنحنيات المستوية المعطاة في التمارين ١١ - ١٤ أوجد النقط التي يكون عندها الانحناء أكبر ما يمكن

$$(11) \quad \text{ص} = e^{-\text{س}}$$

$$(12) \quad \text{ص} = \text{جتا س}$$

$$(13) \quad 36 = 2\text{ص} + 9\text{س}$$

$$(14) \quad 36 = 2\text{ص} - 9\text{س}$$

(15) أوجد انحناء $\text{س} = \{(\text{ن}, \text{ن}^2, \text{ن}^3)\}$: : ن و ح عند النقط التالية :

(أ) النقطه التي تقابل ن

$$(ب) (0, 0, 0)$$

$$(ج) (1, 1, 1)$$

(16) أوجد الانحناء عند (س، ص، ع) لمنحنى معادلته الوسيطية $\text{س} = \text{جتا ن}$

ن، ص = ب جا ن، ع = ج ن حيث پ ، ب، ج هي اعداد موجية ون

و ح

٥ — مركبتا التسارع المماسية والعمودية :

يمكن تطبيق النتائج السابقة على حركة الجزيء . وكالمعتاد لنفرض أن $\vec{r}(ن)$ هو متجه الموضع و $ل$ ترمز لطول القوس مقيسا على المنحنى الذي يرسمه الجزيء . وبما ان

مقدار السرعة $\vec{v}(ن)$ هو $\frac{د ل}{د ن}$ واتجاه $\vec{v}(ن)$ هو نفس اتجاه متجه الوحدة المماس $\vec{m}$

(ل) المعروف في (١٥-٢٥) فيمكن كتابة

$$(15-27) \quad \vec{v}(ن) = \frac{د ل}{د ن} \vec{m} \quad (ل)$$

وبأخذ المشتقة بالنسبة الى ن واستعمال التمرينين ٣ و ٤ في البند ٣ نحصل على :

$$\overleftarrow{r}(n) = \overleftarrow{m}(l) \frac{u}{u} \frac{s}{u} + \overleftarrow{m}(l) \frac{u^2}{u^2 n} =$$

$$= \overleftarrow{m}(l) \frac{u}{u} \frac{l}{u} + \overleftarrow{m}(l) \frac{u^2}{u^2 n} =$$

وحسب (١٥ - ٢٤) يمكن كتابة هذا بالصيغة

$$(١٥ - ٢٨) \quad \overleftarrow{r}(n) = \overleftarrow{m}(l) \frac{u^2}{u^2 n} + \overleftarrow{m}(l) \left(\frac{u}{u} \right) k \overleftarrow{e}(l).$$

حيث ك هو الانحناء $\overleftarrow{m}(l)$ متجه وحدة عمودي كما في (١٥ - ٢٣) وإذا رمزنا للسرعة $\frac{u}{u}$ بالرمز $\frac{u}{u}$ وكتبنا ك $\frac{1}{r}$ حيث r هي نصف قطر الانحناء س تأخذ (١٥ - ٢٨) الصيغة

$$(١٥ - ٢٩) \quad \overleftarrow{r}(n) = \overleftarrow{m}(l) \frac{u}{u} \frac{u}{u} + \overleftarrow{m}(l) \frac{u^2}{u^2 n} \frac{u}{u}.$$

وهذه الصيغة تعبر عن التسارع بحدود مكونة من مركبة مماسة $\frac{u}{u}$ (معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن) ومركبة عمودية $\frac{u}{u}$. والرسم في الشكل ١٥ - ١٥

يوضح أحد الاحتمالات التي يمكن ان تحدث. لاحظ ان المركبة العمودية تعتمد فقط على السرعة والانحناء (أو نصف قطر الانحناء) للمنحنى s . وإذا كانت السرعة أو الانحناء مقداراً كبيراً (أو كان نصف قطر الانحناء صغيراً) تكون المركبة العمودية للتسارع كبيرة. وهذه النتيجة التي حصلنا عليها نظرياً تثبت الحقيقة المشهورة وهي ان على سائق السيارة أن يقلل من سرعتها عندما يحاول اجتياز دوران حاد.

لنجد الان صيغاً للمركبتين المماسية والعمودية للتسارع اللتين تعتمدان فقط على $\overleftarrow{r}(n)$. أولاً نرى من (١٥ - ٢٥) أن

وبما أن $\overrightarrow{م} (ل) \overleftarrow{و} (ل)$ هما متجهتا وحدة فإن $\overrightarrow{م} (ل) \times \overleftarrow{ع} (ل) = 1$
ومن ثم

$$\frac{ع^3}{م} = | \overrightarrow{ر} (ن) \times \overleftarrow{ر} (ن) |$$

ونتيجة لذلك تكون المركبة العمودية للتسارع هي

$$(١٥-٣١) \quad \frac{ع^3}{م} = \frac{| \overrightarrow{ر} (ن) \times \overleftarrow{ر} (ن) |}{| \overrightarrow{ر} (ن) |}$$

مثال ١ : متجه الموضع الجزئي عند الزمن $ن$ هو $(ن, ن^2, ن^3)$.
أوجد المركبتين العمودية والمماسية للتسارع عند $ن$.

الحل : لدينا الآتي :

$$\overrightarrow{ر} (ن) = \underline{ن}^3 + \underline{و}^2 + \underline{هـ} ن$$

$$\overleftarrow{ر} (ن) = \underline{هـ} + \underline{و} ن^2 + \underline{ز} ن^3$$

$$\overleftarrow{ر} (ن) = \underline{و} 2 + \underline{ز} 6 + \underline{ن} 6$$

$$\frac{1}{2} (ن^9 + ن^4 + 1) = | \overrightarrow{ر} (ن) |$$

وباستخدام (١٥-٣٠) تكون المركبة المماسية للتسارع هي

$$\underline{و} غ = \frac{ن^4 + ن^9}{\frac{1}{2} (ن^9 + ن^4 + 1)} = \frac{ن غ}{ن}$$

ولإيجاد المركبة العمودية نعين أولاً

$$\begin{vmatrix} \underline{ز} & \underline{و} & \underline{هـ} \\ ن^3 & ن^2 & 1 \\ ن^6 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \overrightarrow{ر} (ن) \times \overleftarrow{ر} (ن)$$

$$= \underline{ز} 2 + \underline{و} 6 - \underline{هـ} 2 =$$

وبتطبيق (١٥-٣١) ينتج :

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1 + 2n^9 + 4n^9}{1 + 2n^4 + 4n^2} \right) = \frac{\frac{1}{3}(4 + 2n^{36} + 4n^{36})}{\frac{1}{3}(4n^9 + 2n^4 + 1)} = \frac{20}{3}$$

مثال ٢ : اذا تحركت نقطة P حول دائرة نصف قطرها و بسرعة ثابتة غ أوجد المركبتين العمودية والمماس للتسارع .

الحل : بما أن $\frac{u}{n} = \frac{L}{n}$ مقدار ثابت ، تكون المركبة المماسية $\frac{u}{n} = \frac{u}{n}$. ومن المثال

٢ في البند السابق فان انحناء الدائرة هو $\frac{1}{5}$. ولهذا تكون المركبة العمودية للـ تسارع (انظر (١٥-٣١)) هي $\frac{20}{5}$. وهذا يبين ان التسارع هو متجه مقداره

ثابت ويتجه من P باتجاه مركز الدائرة (انظر المثال ٢ في البند ٢)

ويمكننا استعمال (١٥-٣١) للحصول على صيغة بديلة للانحناء . وبالتحديد اذا أعطي منحنى بما يلي :

سم = $\{ (q_1, n), (q_2, n), (q_3, n) \}$: ن تأخذ
 $\vec{r}(n) = q_1(n) \vec{e}_1 + q_2(n) \vec{e}_2 + q_3(n) \vec{e}_3$
 وهنا يمكن اعتبار سم انه المنحنى الذي ترسمه نقطة النهاية $\vec{r}(n)$ عندما تتغير

n . وبما أن $\vec{r}(n) = \vec{r}(n)$ ، و $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ نحصل من (١٥-٣١) على أن

$$\frac{|\vec{r}(n) \times \vec{r}(n)|}{|\vec{r}(n)|^3} = \frac{1}{n} \quad (١٥-٣٢)$$

ويمكن استعمال هذه الصيغة للمنحنيات في المستوى الواحد

مثال ٣ : أوجد انحناء التكعبي الملولي Twisted Cubic س = n ،

ص = n² ، ع = n³ عند النقطة (س ، ص ، ع)

الحل : لنأخذ

$$\overrightarrow{r}(n) = n \underline{هـ} + n^2 \underline{و} + n^3 \underline{ز}$$

فيكون المنحنى مماثلاً لذلك الذي درسناه في المثال ١ .

وبالتعويض في التعبيرين اللذين حصلنا عليهما لكل من $\overrightarrow{r}(n)$ ، و

$$\overrightarrow{r}(n) \times \overrightarrow{r}(n) \text{ في } (n) \text{ نحصل على أن}$$

$$K = \frac{\frac{1}{2} (1 + 2n^2 + 4n^4)}{\frac{3}{2} (1 + 2n^2 + 4n^4)}$$

تمارين :

في كل من التمارين ١ - ٨ $\overrightarrow{r}(n)$ هي متجه الموضع الجزئي عند اللحظة n .

أوجد المركبتين العمودية والمماسية للتسارع عند اللحظة n .

$$(1) \quad \overrightarrow{r}(n) = n \underline{هـ} + (n^2 + 2) \underline{و}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{r}(n) = (n^2 - 1) \underline{هـ} + n^5 \underline{و}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{r}(n) = n^3 \underline{هـ} + n^3 \underline{و} + n^3 \underline{ز}$$

$$(4) \quad \overrightarrow{r}(n) = 4n \underline{هـ} + n^2 \underline{و} + n^2 \underline{ز}$$

$$(5) \quad \overrightarrow{r}(n) = n \text{ (جتا } n \underline{هـ} + \text{جا } n \underline{و})$$

$$(6) \quad \overrightarrow{r}(n) = \text{جتا } n \underline{هـ} + \text{جا } n \underline{و}$$

$$(7) \quad \overrightarrow{r}(n) = 4 \text{ جتا } n \underline{هـ} + 9 \text{ جا } n \underline{و} + n \underline{ز}$$

$$(8) \quad \overrightarrow{r}(n) = n^6 \text{ (جا } n \underline{هـ} + \underline{و} + \underline{ز})$$

٩ - ١٦ في كل من التمارين ١ - ٨ استعمل (٣٢ - ١٥) لإيجاد الانحناء عند النقطة

التي تقابل n في المنحنى الذي ترسمه نقطة النهاية في $\overrightarrow{r}(n)$.

(١٧) تتحرك نقطة على القطع المكافئ $ص = س^2$ بحيث تكون المركبة الأفقية للسرعة

دائماً ٣ . أوجد المركبتين العمودية والمماسية للتسارع عند النقطة $P(1, 1)$.

ارسم المسار وافصل التسارع الى حاصل جمع متجهتين كما في (١٥ - ٢٩) .

(١٨) حل السؤال ١٧ اذا تحرك الجزئي على بيان $ص = ٢س^٣ - س$

(١٩) اثبت انه اذا تحرك جزئي على منحنى $سم$ بسرعة ثابتة يكون التسارع دائماً عمودياً

على $سم$.

٢٠ (اثبت انه اذا تحرك جزيء على بيان ص = ق (س) حيث $\rho \geq s \geq b$ تكون المركبة العمودية للتسارع صفرا عند نقطة انعطاف . أوضح هذه الحقيقة باستعمال $\vec{r} (n) = n \vec{h} + n^2 \vec{u}$.

٦ — تمارين مراجعة :

شفهي :

عرف أو ابحث كلا مما يلي :

- (١) اقتران متجه القيمة
- (٢) نهاية اقتران متجه القيمة
- (٣) اتصال الاقتران المتجه القيمة
- (٤) مشتقة الاقتران المتجه القيمة
- (٥) متجه مماس لمنحنى
- (٦) السرعة والتسارع
- (٧) قواعد الاشتقاق
- (٨) التكاملات
- (٩) انحناء منحنى في مستوى
- (١٠) انحناء منحنى في فراغ
- (١١) دائرة الانحناء
- (١٢) نصف قطر الانحناء
- (١٣) المركبة المماسية للتسارع
- (١٤) المركبة العمودية للتسارع .

كتابي :

- (١) استعمل $\vec{r} (n) = n \vec{h} + (n^2 - n^4) \vec{u}$ ولعمل ما يلي :
 (أ) ارسم المنحنى المعين بمركبات $\vec{r} (n)$
 (ب) أوجد $\vec{r} (n)$ و $\vec{r} (n)$
 (ج) ارسم متجهين هندسيين يقابلان $\vec{r} (n)$ و $\vec{r} (n)$ اذا كانت $n = 0$ ، $n = 1$ ، $n = 2$.

(٢) موضع جزئي يتحرك في مستوى كما يلي :
 $\vec{r}(n) = (n - \text{جان}) \underline{هـ} + (١ - \text{جتا } n) \underline{و}$. أوجد مسار الجزئي بالاضافة الى
 المتجهين الهندسيين اللذين يقابلان السرعة والتسارع لكل من قيم n التالية :

$$(١) \quad n = ٠ \quad (ب) \quad n = \frac{\pi}{٤} \quad (ج) \quad n = \frac{\pi}{٢}$$

$$(د) \quad n = \frac{\pi}{٤} \quad (هـ) \quad n = \pi \quad (و) \quad n = \frac{\pi}{٤}$$

$$(ز) \quad n = \frac{\pi}{٢} \quad (ح) \quad n = \frac{\pi}{٤} \quad (ط) \quad n = \pi$$

(٣) اذا كان $S = \{ (e, \text{جان}, \text{جتا } n) : n \in [٠, ١] \}$

أوجد كلاما مما يلي :

(١) متجه وحدة مماساً للمنحنى S عند النقطة P التي تقابل $n = ٠$
 (ب) طول S

(٤) موضع جزئي عند الزمن n هو
 $\vec{r}(n) = (n) \underline{هـ} + (٣) \underline{و} + (٤) \underline{ز}$

(١) أوجد السرعة المتجهة والتسارع عند الزمن n
 (ب) ارسم مسار الجزئي مع المتجهين الهندسيين اللذين يقابلان السرعة المتجهة
 والتسارع عند $n = ١$.

(ج) أوجد السرعة عند $n = ١$.

(٥) أوجد معادلة المماس المنحنى

$S = \{ (٣n^٢ + ١, n, e^{1-n}) : n \in [٠, ٤] \}$

عند النقطة $P(١, ٤, ٤)$.

(٦) اذا كان $\vec{r}(n) = (n) \underline{هـ} + (٦) \underline{و} + (٤) \underline{ز}$
 وكان $\vec{q}(n) = (n) \underline{هـ} - (٥) \underline{و} + (٤) \underline{ز}$ فأوجد كلاما مما يلي :
 (١) قيم n التي يكون عندها $\vec{r}(n)$ متعامدا على $\vec{q}(n)$.

$$(ب) د \quad [\vec{r}(ن) \times \vec{q}(ن)]$$

$$(ج) د \quad [\vec{r}(ن) \cdot \vec{q}(ن)]$$

$$(د) \quad \left\{ \vec{r}(ن) \cdot \vec{u} \right.$$

$$(هـ) \quad \left\{ \vec{q}(ن) \cdot \vec{u} \right.$$

$$(٧) \quad \text{أوجد } \vec{r}(ن) \text{ اذا كان } \vec{r}(ن) = \underline{e} - \underline{هـ} - ٤ \underline{جا} ٢ \underline{ن} + ٣ \underline{و} \underline{ن} \underline{ز} ,$$

$$\vec{r}(٠) = - \underline{هـ} + ٢ \underline{و} .$$

تحقق من المتطابقات في التمرينين ٨ و ٩ دون استخدام المركبات

$$(٨) \quad د \quad |\vec{r}(ن)|^2 = ٢ \vec{r}(ن) \cdot \vec{r}(ن) .$$

$$(٩) \quad د \quad (\vec{r}(ن) \cdot \vec{r}(ن)) \times (\vec{r}(ن) \times \vec{r}(ن)) = \vec{r}(ن) \cdot (\vec{r}(ن) \times \vec{r}(ن)) \times \vec{r}(ن) .$$

في التمارين ١٠-١٢ أوجد الانحناء للمنحنى المعطى عند النقطة P .

$$(١٠) \quad \text{ص} = \underline{e}^s , P(٠, ٠) .$$

$$(١١) \quad \text{ص} = \frac{1}{ن+1} , \text{ص} = \frac{1}{ن-1} , P\left(٢, \frac{٢}{٣}\right)$$

$$(١٢) \quad \text{ص} = ٢ن^٢ , \text{ص} = ن^٤ , \text{ع} = ٤ن , P(\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) .$$

في التمرينين ١٣ و ١٤ أوجد المركبتين العمودية والمماس للترسارح عند الزمن $ن$ اذا

كان متجه الموضع للجزيء كما يلي :

$$(١٣) \quad \vec{r}(ن) = \underline{جا} ٢ \underline{ن} \underline{هـ} + \underline{جتا} ن \underline{و}$$

$$(١٤) \quad \vec{r}(ن) = \underline{ن}^٣ \underline{هـ} + \underline{ن}^٢ \underline{و} + ن \underline{ز} .$$

الفصل السادس عشر

التفاضل الجزئي

Partial Differentiation

في هذا الفصل سنعمم مفاهيم النهايات والاتصال والمشتقات لتشمل الاقترانات ذات المجهولين وأكثر. والتطبيقات تحوى معدل التغير، والنهايات والتقريب باستعمال التفاضلات.

١ — الاقترانات ذات المتغيرات المتعددة :

لقد عرفنا الاقتران q بانه مقابلة تربط بكل عنصر من مجموعة ما S عنصرا واحدا فقط من مجموعة اخرى V .
فاذا كان كل من S و V مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ فان q يسمى اقترانا ذا متغير واحد والتعريف التالي سيعمم هذا المفهوم الى حالة المتغيرين.

(١٦-١) تعريف الاقتران ذي المتغيرين :

الاقتران الذي مجاله M مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ ومداه مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ يسمى باقتران ذي متغيرين حقيقيين.

واذا كان q اقترانا ذا متغيرين فان عناصر مجاله هي ازواج مرتبة (s, v) ،
من الاعداد الحقيقية . وسيرمز للعدد الحقيقي الذي يقابل (s, v) بالرمز $q(s, v)$ ، ولقد مثلنا هندسيا في الفصل الاول المجال والمدى لاقتران ذي متغير واحد بقطع خطية من الخط الاحداثي (انظر الشكل ١-٢٢). ويمكن تمثيل مجال اقتران M ذي متغيرين بمنطقة من المستوى

س ص بينا مداه قطع خطية من الخط الاحداثي ع مثلاً . وهذا موضح بالشكل ١٦ - ١ ، حيث رسمت عدة أسهم من الزوج المرتب في م الى العدد المناظر في المدى .

لتفسير هذه الحالة فيزيائيا تخيل جسما مستويا له نفس الشكل للمنطقة م ودرجة حرارة كل نقطة (س ، ص) من هذا الجسم تساوي ق (س ، ص) التي يمكن قراءتها على ميزان حرارة يرمز له بالخط الاحداثي ع . وكمثال توضيحي آخر يمكن اعتبار م سطح بحيرة وق (س ، ص) عمق ماء تحت النقطة (س ، ص) ، ويعرف الاقتران ذو المتغيرين عادة باستعمال مقدار يحتوي على س و ص ويرمز هذا المقدار الى النظير العشوائي ق (س ، ص) وفي هذه الحالة سنفرض أن المجال هو مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) التي يكون عندها المقدار ذا معنى ، وفي هذه الحالة نقول ان ق دالة في س و ص .

مثال ١ : اذا كان ق (س ، ص) = (س ص - ٥) \ ٢ \ ص - س^٢ أوجد م (مجال ق) ، ووضح م والاعداد ق (٢ ، ٥) ، ق (١ ، ٢) ، ق (- ١ ، ٢) بالطريقة المتبعة في الشكل (١٦ - ١) .

الحل : المجال م هو مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) بحيث ان المقدار الموجود تحت الجذر موجب أي ان ص < س^٢ . وكما هو مبين في الشكل (١٦ - ٢) فان بيان م هو ذلك الجزء من المستوى س ص الواقع فوق بيان ص = س^٢ وبالتعويض نحصل على

$$ق = \frac{٥ - (٥)(٢)}{٤ - ٥\sqrt{٢}} = (٥ ، ٢) ق$$

وبالمثل فان ق (١ ، ٢) = $\frac{٣}{٢}$ وق (- ١ ، ٢) = $\frac{٧}{٢}$ وهذه القيم موضحة في الشكل (١٦ - ٢) .

وتستعمل العلاقات في بعض الاحيان لتعريف الاقترانات ذات المتغيرين . فمثلا العلاقة ج = π ر^٢ ع تمثل حجم مخروط دائري قائم ج كدالة للارتفاع ع ولنصف قطر القاعدة ر . والرمزان ر و ع يرمزان الى المتغيرين المستقلين والرمز ج يرمز الى المتغير التابع . والاقتران ذو ثلاثة متغيرات يعرف كما

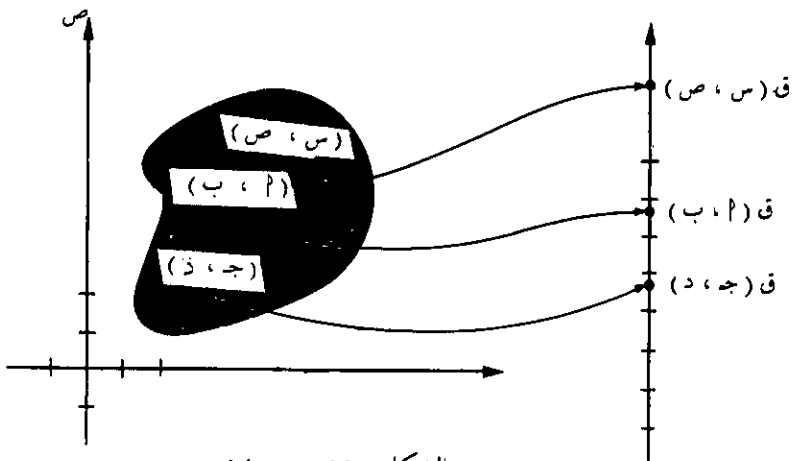
في (١٦ - ١) ولكن المجال م في هذه الحالة عبارة عن مجموعة جزئية من $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ وفي هذه الحالة نربط بكل ثلاثي مرتب (س ، ص ، ع) من م عددا حقيقيا واحدا ق (س ، ص ، ع) فقط . واذا مثلنا م بمنطقة في الاحداثيات المتعامدة ذات الاتجاهات الثلاثة كما هو موضح في الشكل (١٦ - ٣) فان كل نقطة (س ، ص ، ع) في م تقابل نقطة وحيدة على الخط الاحداثي ل واحداثيها هو ق (س ، ص ، ع) . ولاعطاء توضيح فيزيائي لذلك من الممكن اعتبار م كجسم صلب كما في السابق وق (س ، ص ، ع) هي درجة حرارة النقطة (س ، ص ، ع) وكما في المتغيرين فان الاقترانات ذات الثلاثة المتغيرات يمكن التعبير عنها بعبارة فثلا

$$Q(s, v, e) = \frac{s \sqrt{e^2 + 1}}{s \text{ ص ج ا ع}}$$

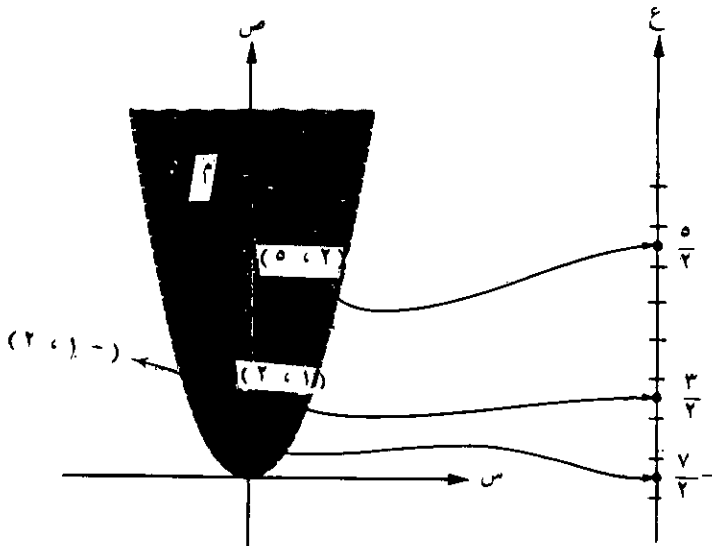
يعرف اقترانا في س ، ص ، ع . والصيغ مثل ج = ل س ع التي تعبر عن حجم متوازي مستطيلات ابعاده ل ، س ، ع توضح امكانية وجود الاقترانات ذات الثلاثة المتغيرات . كذلك يمكن تعريف الاقترانات ذات الاربعة والخمسة أو أي عدد من المتغيرات بنفس الطريقة . فثلا اذا كان جسم له شكل م كما في الشكل (١٦ - ٣) واذا كانت ق (س ، ص ، ع ، ن) ترمز لدرجة الحرارة عند النقطة (س ، ص ، ع) في اللحظة ن فهذه تعرف اقترانا ذا اربعة متغيرات مستقلة س ، ص ، ع ، ن . واليك مثالا اخيرا :

لقد وجد مصنع أن ثمن كلفة انتاج مادة ما يعتمد على تكاليف المادة المستعملة واجرة العمال ، والآلات والادارة ، والخدمات العامة . وهذا يعرف ج كاقتران ذي خمسة متغيرات .

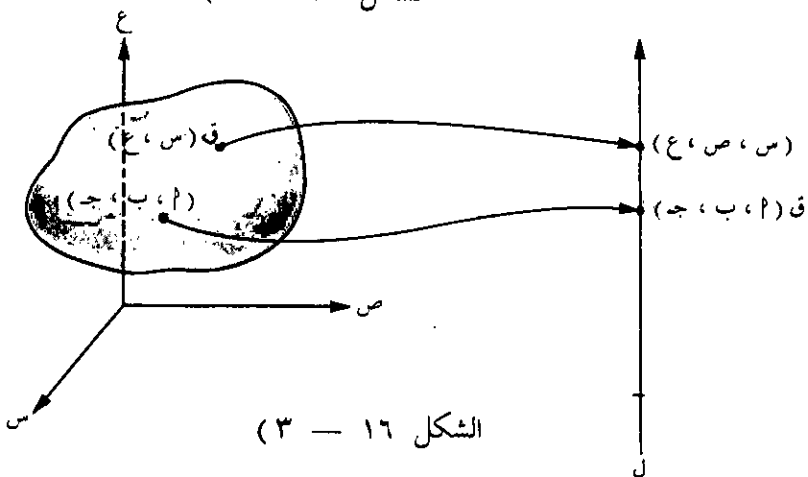
لنعد الآن الى الاقتران ق ذي المتغيرين س ، ص فان بيان الاقتران ق يعرف ببيان المعادلة $Q = Q(s, v)$ في الاحداثيات الثلاثية المتعامدة وبذلك اذا مثلنا م بمنطقة في المستوى س ص فان الزوج المرتب (س ، ص) في م يمثل بالمنطقة (س ، ص) وقيم الاقتران ق (س ، ص) هي عبارة عن مسافات متجهة من المستوى س ص الى السطح س كما هو موضح بالشكل (١٦ - ٤) .



الشكل ١٦ - ١



الشكل ١٦ - ٢



الشكل ١٦ - ٣

مثال ٢ : أرسم بيان الاقتران ق اذا كان ق (س ، ص) = ٩ - س^٢ - ص^٢ . حيث

$$م = \{ (س ، ص) : س^2 + ص^2 \geq ٩ \}$$

الحل : بيان الاقتران ق هو ذلك الجزء من بيان المعادلة ع = ٩ - س^٢ - ص^٢ المعطى
 في الشكل (١٦ - ٥) ولقد رسمنا المسارات الدائرية في المستويات ع = ك
 حيث ك = ٠ ، ٣ ، ٦ ، ٨ ، ٨,٧٥ للاستعمال مستقبلا .

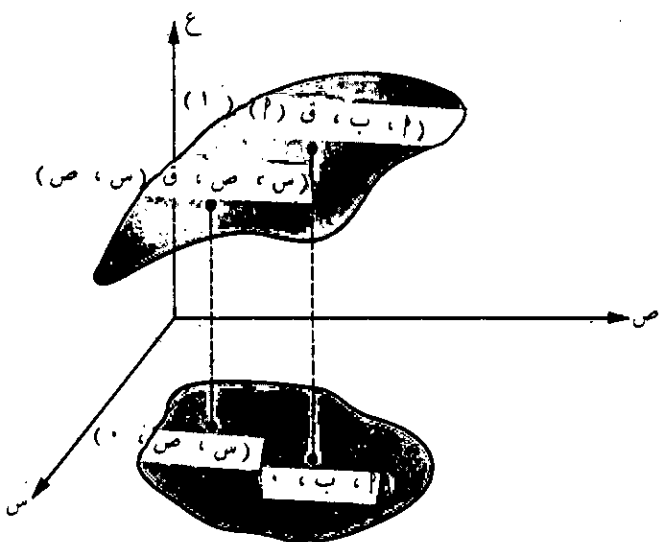
وهناك طريقة اخرى بيانية مفيدة لوصف خواص الاقتران ذي المتغيرين
 وهذه الطريقة عبارة عن رسم بيان المعادلة ق (س ، ص) = ك في اي
 مستوى س ص وللقيم المختلفة للمقدار ك ويسمى البيان المرسوم بهذه الطريقة
 بالمنحنيات السوية المرتبطة بالاقتران ق ومن المهم ملاحظة انه عندما تتحرك
 النقطة (س ، ص) على أي منحنى مستوفان قيمة الاقتران تبقى ثابتة وهذه
 الطريقة مفيدة في عمل الخرائط الطبوغرافية للارض فمثلا نفرض أن ق
 (س ، ص) ترمز للارتفاع بالاقدام للنقطة (س ، ص) التي تقع على خط
 عرض س وخط طول ص وعلى التل المرسوم في الشكل ١٦ - ٦ - (١) في
 الاتجاه الثلاثي ولقد رسمت المنحنيات المقابلة للمقادير ك = ٥٠ ، ١٠٠ ،
 ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، ٤٠٠ قدم حيث يبقى الشخص الذي يمشي على أي من هذه
 المنحنيات على نفس الارتفاع . وفي الشكل ١٦ - ٦ - (٢) (في المستوى)
 فان المنحنيات السوية تقابل نفس القيم للمقدار ك . وهذه تسمى بالمنحنيات
 الكنتورية أو المتساوية الارتفاع (Contour Curve) وتمثل منظر التل عندما
 ننظر اليه من طائرة ، ولا شك أن القاريء قد رأى هذه الرسوم على خرائط
 المناخ . وأخيرا فان ق (س ، ص) يمكن أن تمثل الضغط الجوي عند النقطة
 (س ، ص) وفي هذه الحالة تسمى المنحنيات السوية بالمنحنيات المتساوية
 الضغط (Isobars) .

مثال ٣ : ارسم بعض المنحنيات السوية المرتبطة بالاقتران ق المعطى في المثال ٢

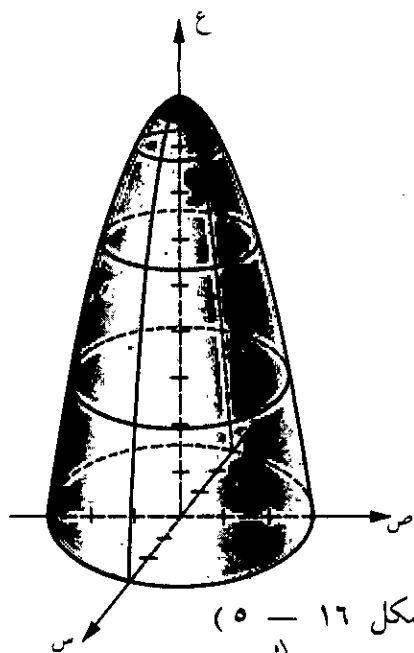
الحل : المنحنيات السوية هي بيان معادلات مثل ٩ - س^٢ - ص^٢ = ك أو ما يكافئها

$$س^2 + ص^2 = ٩ - ك$$

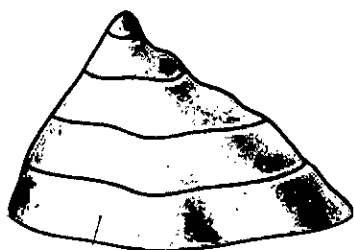
وهذه عبارة عن دوائر بشرط أن $ك \geq ٠$ ولقد رسمنا في الشكل (١٦ - ٧)
 المنحنيات السوية المقابلة للقيم ك = ٠ ، ٣ ، ٦ ، ٨ ، ٨,٧٥ . لاحظ ان



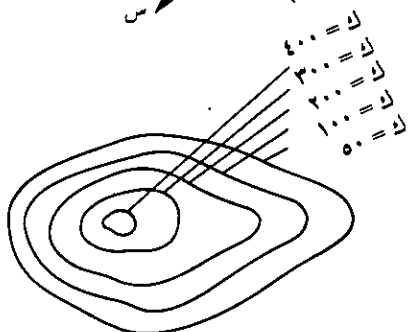
(الشكل ١٦ - ٤)



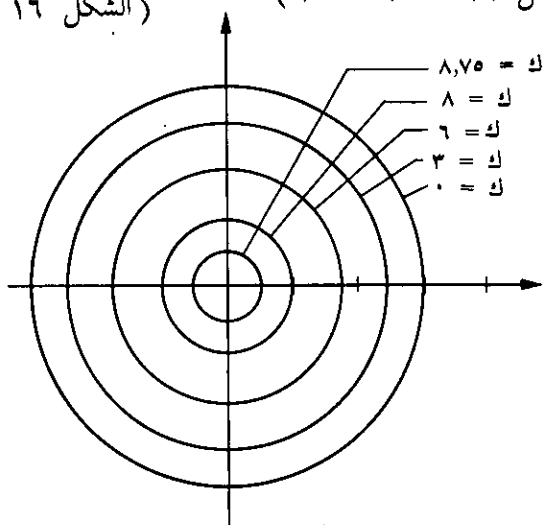
(الشكل ١٦ - ٥)



(الشكل ١٦ - ٦ - ١)



(الشكل ١٦ - ٦ - ٢)

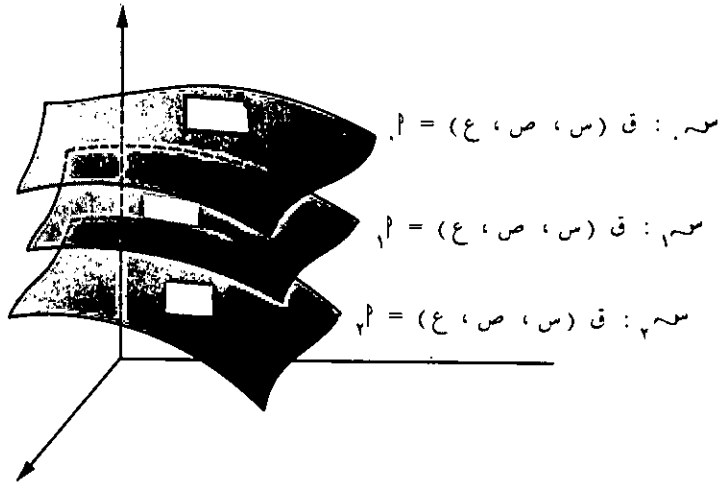


(الشكل ١٦ - ٧)

المنحنيات السوية تمثل مسار بيان ق في المستوى ع = ك الموضح في الشكل
(١٦ - ٥)

إذا كان ق ذا ثلاثة متغيرات س ، ص ، ع فان السطوح السوية المرتبطة
بالاقتزان ق هي بيان ق (س ، ص ، ع) = ك حيث نأخذ القيم الحقيقية

المناسبة . إذا فرضنا ان $K = P_1, P_2, P_3$ فانه يمكن الحصول على السطوح
س. س. س. على التوالي كما هو موضح في الشكل (١٦ - ٨) .
وللاستعمالات اللاحقة فلقد رسمنا النقطة الرمزية ب. ب. ب. على كل
سطح ، وعندما تتحرك النقطة (س ، ص ، ع) على إحدى هذه السطوح
فان ق (س ، ص ، ع) تبقى ثابتة ، وفي التطبيقات اذا كان ق (س ،
ص ، ع) تمثل درجة الحرارة عند النقطة (س ، ص ، ع) فان السطوح
السوية تسمى بالسطوح المتساوية الحرارة واذا كانت ق (س ، ص ، ع) تمثل
الجهد فان السطوح السوية تسمى بالسطوح المتساوية الجهد .



الشكل (١٦ - ٨)

التمارين :

في التمارين ١-٨ عين مجال ق وقيم ق عند النقط المعطاة -

- (١) ق (س، ص) = $2س - ص^2$ ، (٥، ٢-)، (٥، ٥)، (٢-، ٥)، (٢-، ٠)، (٢-، ٠)
 (٢) ق (س، ص) = (ص + ٢) \ س^٢، (١، ٣)، (٣، ١)، (٠، ٢)
 (٣) ق (ل، ع) = (ع \ ل) (٢- ل)، (٣، ٢)، (٤، ١-)، (١، ٠)
 (٤) ق (س، ر) = $\sqrt[١]{س - س^٢} e^{س/١}$ ، (١، ١)، (٤، ٠)، (٣، ٣-)
 (٥) ق (س، ص، ع) = $\sqrt[١]{٢٥س - ٢س - ٢ص - ع^٢}$ ، (٢، ٢-، ١)، (٢-، ٠)، (٢، ٠، ٣)

- (٦) ق (س، ص، ع) = ٢ + ظاس + ص جاع، $(\frac{\pi}{٦}, ٤, -\frac{\pi}{٤})$ ، (٠، ٠، ٠)

- (٧) ق (س، ز، ج، ص) = $س ز^٢ ظا ج + ج ل ط ص$ ، (٣، ١-، ١-، ١-)
 $(e, \frac{\pi}{٤})$

- (٨) ق (س، ص، ل، ك) = ك ل ط (س - ص) - س ع^{ل/ك} e، (٢، ١، ٣، ٤، ١-)
 (١-، ٤، ٣، ١، ٢)

في التمارين ٩-١٢. أوجد قيم :

$$\frac{\text{ق (س + هـ، ص) - ق (س، ص)}}{\text{هـ}}$$

$$\frac{\text{ق (س، ص + هـ) - ق (س، ص)}}{\text{هـ}} \text{، حيث هـ} \neq ٠$$

- (٩) ق (س، ص) = $٢س + ٢ص$
 (١٠) ق (س، ص) = $٢ص + ٣س$
 (١١) ق (س، ص) = $٢ص + ٣س$

(١٢) ق (س ، ص) = س ص^٣ + س^٤ ص^٢ - ٢
في كل من التمارين ١٣ - ١٨ ارسم بعض المنحنيات السوية المرتبطة بالاقتران ق .

(١٣) ق (س ، ص) = ص^٢ - س^٢

(١٤) ق (س ، ص) = ٣س - ٢ص

(١٥) ق (س ، ص) = س^٢ - ص .

(١٦) ق (س ، ص) = س ص

(١٧) ق (س ، ص) = ص - جا س

(١٨) ق (س ، ص) = ٤س^٢ + ص^٢

في كل من التمارين ١٩ - ٢٢ صف السطوح السوية المرتبطة بالاقتران ق .

(١٩) ق (س ، ص ، ع) = س^٢ + ص^٢ + ع^٢

(٢٠) ق (س ، ص ، ع) = ع - س^٢ - ص^٢

(٢١) ق (س ، ص ، ع) = س + ٢ص + ٣ع

(٢٢) ق (س ، ص ، ع) = س^٢ + ص^٢ - ع^٢

٢ — النهايات والاتصال :

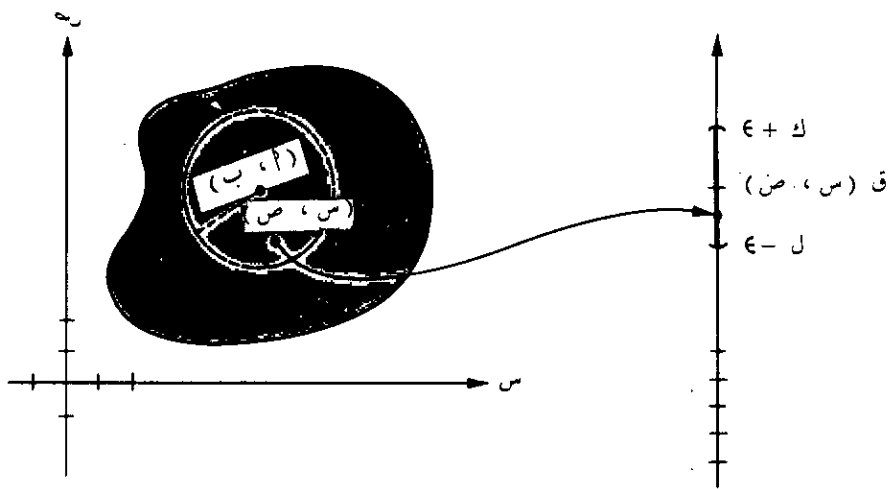
إذا كان ق اقترانا ذا متغيرين فإنه من المهم دراسة علاقة تغير ق (س ، ص) بتغير س ، ص خلال المجال م للاقتران ق . وكتوضيح فيزيائي لذلك لنفرض أن صفيحة معدنية لها شكل المنطقة م كما في الشكل (١٦ - ١) ويقابل كل نقطة (س ، ص) من هذه الصفيحة درجة حرارة ق (س ، ص) مسجلة على ميزان الحرارة الذي يرمز له بالمحرك . وعندما تتحرك النقطة على الصفيحة فمن الممكن أن تزداد درجة الحرارة أو تنقل أو تبقى ثابتة كذلك النقطة على المحرك المقابلة للمقدار ق (س ، ص) سوف تتحرك بالاتجاه الموجب أو السالب أو تبقى ثابتة على التوالي ، وفي الحالة التي تقترب فيها درجة الحرارة ق (س ، ص) من قيمة ثابتة ل عندما تقترب (س ، ص) من نقطة ثابتة (پ ، ب) فإننا نقول ان ق لها النهاية ل عندما تؤول (س ، ص) الى (پ ، ب) ونكتب هذا بالرموز كما يلي :

(١٦ - ٢) نها ق (س ، ص) = ل

(س ، ص) ← (پ ، ب)

ولكي نجعل هذه الملاحظة أكثر دقة سنستعمل الطريقة الهندسية التي استعملت في حالة الاقترانات ذات المتغير الواحد الواردة في الفصل الثاني .

لنعتبر لكل $\epsilon > 0$ الفترة المفتوحة $(\epsilon - \epsilon, \epsilon + \epsilon)$ على ϵ .
إذا كانت $(\epsilon - \epsilon, \epsilon + \epsilon)$ صحيحة فانه يوجد عدد صحيح $\delta > 0$ بحيث انه لكل نقطة (ϵ, ϵ) الواقعة داخل الدائرة التي مركزها (ϵ, ϵ) ونصف قطرها δ ، ربما باستثناء (ϵ, ϵ) ، يكون العدد المقابل $Q(\epsilon, \epsilon)$ في الفترة المفتوحة $(\epsilon - \epsilon, \epsilon + \epsilon)$ ، كما هو موضح بالشكل (١٦-٩) .



(الشكل ١٦ - ٩)

وهذا مكافئ للعبارة :

$$|Q(s, e) - L| < \epsilon \text{ عندما يكون } \sqrt{(s - b)^2 + (e - b)^2} < \delta$$

لاحظ أن هذه العبارة تعمم التعريف الذي اوردناه في حالة الاقتران ذي المتغير الواحد وذلك لانه في الحالة هذه فان المتباينتين الاخيرتين تختزلان الى المتباينتين الواردتين (٢-٦) ونلخص السابق بالتعريف التالي :

(١٦-٣) تعريف النهاية : اذا كان Q اقترانا ذا متغيرين معرفا لجميع النقطة الواقعة داخل دائرة مركزها (ϵ, ϵ) ، ربما باستثناء (ϵ, ϵ) نفسها ، فان نهاية $Q(\epsilon, \epsilon)$ تساوي L عندما (ϵ, ϵ) تتوّل الى (ϵ, ϵ) ، ونكتب

نهـا ق (س ، ص) = ل

(س ، ص) ← (٢ ، ب)

إذا كان يقابل كل $\epsilon < \delta$ عدد δ بحيث أن

$$|ق(س ، ص) - ل| < \epsilon \text{ عندما يكون } \sqrt{(س - ٢)^2 + (ص - ب)^2} < \delta$$

إذا اعتبرنا بيان ق كما هو موضح في الشكل ١٦ - ٤ فإن (١٦ - ٣) تعني انه عندما تؤول النقطة (س ، ص ، ٠) الى النقطة (٢ ، ب ، ٠) في المستوى س ص فإن النقطة المقابلة (س ، ص ، ق) (س ، ص) على سـه تؤول الى (٢ ، ب ، ل) (التي ربما لا تقع على س) . ومن الممكن اثبات انه اذا كانت النهاية موجودة فهي وحيدة ، ويمكن تعميم التعريف (١٦ - ٣) ليشمل النقط (٢ ، ب) الواقعة على حدود م وذلك بأخذ النقط (س ، ص) المشتركة بين الدائرة التي نصف قطرها δ والمجال م فقط .

مثال ١ :

$$\text{اثبت أن نهـا } \frac{س^2 - ص^2}{س^2 + ص^2} \text{ غير موجودة}$$

(س ، ص) ← (٠ ، ٠)

الحل :

$$\text{إذا كان ق (س ، ص) } = \frac{س^2 - ص^2}{س^2 + ص^2} \text{ فإن ق معرفة لجميع النقط}$$

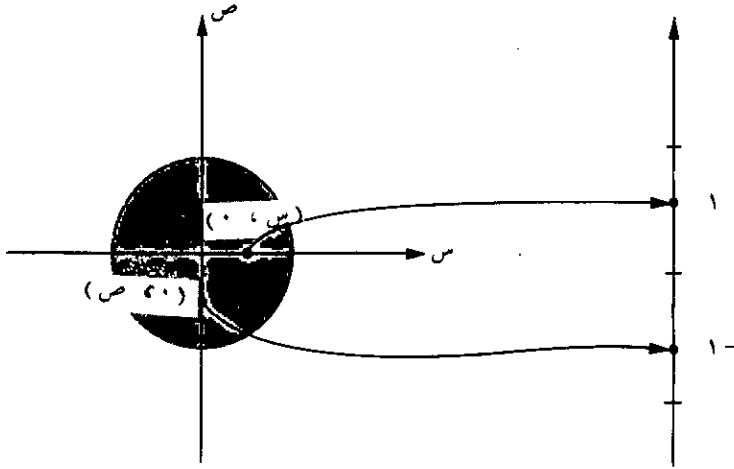
الا عند النقطة (٠ ، ٠) ، إذا اعتبرنا النقطة (س ، ص) الواقعة على محور س

$$\text{فان ق (س ، ص) } = \frac{س^2}{س^2} = ١ \text{ بشرط أن } س \neq ٠ \text{ . وللنقطة (٠ ، ص) (ص ، ص)}$$

$$\text{الواقعة على محور ص فان ق (ص ، ٠) } = \frac{-ص^2}{ص^2} = -١ \text{ بشرط أن ص}$$

٠ ≠

ونتيجة لذلك وكما هو موضح في الشكل (١٦ - ١٠) فإن كل دائرة مركزها $(0, 0)$ تحتوي نقاطا تكون عندها القيم العددية للاقتزان ق تساوي ١ ونقطا تكون عندها القيم العددية للاقتزان ق تساوي - ١ ومن هذا يتضح ان النهاية غير موجودة .



الشكل (١٦ - ١٠)

ويوجد طريقة اسهل تخيلا لاختيار النهاية المعطاة في المثال .
 اذا حددت $(س, ص)$ لتكون نقطة على محور س فانه عندما تؤول $(س, ص)$ الى $(0, 0)$ فإن ق $(س, ص)$ لها النهاية ١ ، واذا جعلنا $(س, ص)$ تؤول الى $(0, 0)$ على محور ص فان نهاية ق $(س, ص)$ هي - ١ في هذه الحالة . وهذا يقضي الى قاعدة عملية تقريبية لاختيار بعض النهايات وهذه تنص على ما يلي : اذا اعتمدنا مسارين للوصول الى النقطة $(پ, ب)$ فأفضى المساران الى نهايتين مختلفتين للاقتزان ق ، فان نهاية ق $(س, ص)$ عندما تؤول $(س, ص)$ الى $(پ, ب)$ غير موجودة .
 ونقول أن الاقتزان ذا المتغيرين متصل عند $(پ, ب)$ اذا كانت
 هنا ق $(س, ص) = ق (پ, ب)$.
 $(س, ص) \leftarrow (پ, ب)$

واذا كانت ن مجموعة جزئية من المجال م للاقتزان ق فان ق يكون متصلا في ن اذا كان متصلا عند كل نقطة $(پ, ب)$ في ن . واذا كان ق متصلا في ن فان

تغيرا صغيرا في (س ، ص) ينتج تغيرا صغيرا في ق (س ، ص) وبالرجوع الى البيان س للاقتران ق (انظر الشكل ١٦ - ٤) نلاحظ انه عندما تقترب (س ، ص) من (١ ، ١) فان النقطة (س ، ص) ق (س ، ص) في س تقترب من ق (١ ، ١) ، ق (١ ، ١) وهكذا لا يوجد أي فراغات أو رؤوس ناتئة في بيانات الاقترانات المتصلة .

ويمكن تعميم التعاريف والملاحظات السابقة الى الاقترانات ذات الثلاثة المتغيرات أو أكثر فمثلا اذا كان ق اقترانا ذا ثلاثة متغيرات فان

(١٦ - ٤) نهـ ق (س ، ص ، ع) = ل

(س ، ص ، ع) ← (١ ، ١ ، ١) (ج)

تعني أن لكل $\epsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ أن

إذا ق (س ، ص ، ع) - ل $\epsilon > 0$ عندما يكون .

$$\sqrt{(س-١)^2 + (ص-١)^2 + (ع-١)^2} > \delta$$

ومن الممكن اعطاء توضيح بياني للعلاقة (١٦ - ٤) مشابه لذلك الموضح في الشكل (١٦ - ٩) والفرق هو استبدال الدائرة في المستوى س ص بكرة نصف قطرها $\epsilon > 0$ ومركزها (١ ، ١ ، ١) في الاحداثيات الثلاثية (انظر التمارين ١٩) .

اذا كان ق ، ك اقترانين ذوي متغيرات متعددة فان ق + ك ، ق - ك ، ق / ك تعرف بالطريقة السابقة ويمكن تعميم النظرية (٢ - ١٢) أي نهاية المجموع تساوي مجموع النهايات وهكذا .

يقال عن الاقتران ق انه حدودي في س ، ص اذا امكن كتابة ق (س ، ص) كمجموع حدود من الشكل ج س ن ص ١ حيث ج عدد صحيح ، ن ، م اعداد صحيحة غير سالبة . والاقتران النسبي هو خارج قسمة اقترانين حدوديين .

ويمكن استعمال اصطلاحات مشابهة في الاقترانات ذات المتغيرات المتعددة التي تزيد عن اثنين .

والنظريات المتعلقة بالاتصال والمساوية لتلك النظريات المعطاة في حالة اقترانات ذات متغير واحد يمكن برهانها بسهولة . فمثلا الاقترانات الحدودية متصلة عند جميع النقط بينما الاقترانات النسبية متصلة الا عند النقط التي يكون عندها المقام مساويا للصفر .

وسنناقش في البند الخامس انواعا متعددة من الاقترانات المركبة ذات المتغيرات المتعددة.

وكمثال توضيحي بسيط : اذا كان ق اقترانا ذا متغيرين وف اقترانا ذا متغير واحد فان اقترانا ك ذا متغيرين يمكن تعريفه بالعلاقة

$$ك (س ، ص) = ف (ق (س ، ص))$$

بشرط ان مدى ق يكون في مجال ف فمثلا اذا كان

$$ق (س ، ص) = سر_e ص ، ف (ن) = ٣ ن^٢ + ن + ١$$

$$فان ك (س ، ص) = ف (ق (س ، ص)) = ف (سر_e ص) = ٣(سر_e ص)^٢ + (سر_e ص) + ١ .$$

ويمكن برهنة التعبير التالي للنظرية (٢ - ٣٤) للاقترانات التي من هذا النوع .

(١٦-٥) نظرية : اذا كان ق اقترانا ذا متغيرين متصلا عند (١ ، ب) وف اقترانا

ذا متغير واحد متصلاً عند ق (١ ، ب) فان الاقتران ك المعروف بالعلاقة ك

$$(س ، ص) = ف (ق (س ، ص)) يكون متصلا عند (١ ، ب) .$$

تمارين :

أوجد النهايات في التمارين ١ - ٤

$$(١) \quad \lim_{\substack{ص \rightarrow ٢ \\ س \rightarrow ٣}} \frac{ص + ٢س}{٣س^٢ - ٢ص} \quad \text{نها} \\ (س ، ص) \leftarrow (٢ ، ١)$$

$$(٢) \quad \lim_{\substack{ص \rightarrow ٢ \\ س \rightarrow ٣}} \frac{ص + ٣س}{٢ص - ٣س + ٦} \quad \text{نها} \\ (س ، ص) \leftarrow (٣ ، ٤)$$

$$(٣) \quad \lim_{\substack{ص \rightarrow ٣ \\ س \rightarrow ٢}} \frac{٢س - ٢}{٣ + س} \quad \text{نها} \\ (س ، ص) \leftarrow (٠ ، ٠)$$

$$(4) \quad \frac{\text{س}^3 - \text{س}^2\text{ص} - \text{س}\text{ص}^2 - \text{ص}^3}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} \quad \text{نها}$$

(س، ص) ← (٠، ٠)

في التمارين ٥-١٠ بين هل النهاية موجودة أم لا :

$$(5) \quad \frac{\text{س}^2\text{ص} + \text{ص}^2}{\text{س}^2 - \text{ص}^2} \quad \text{نها}$$

(س، ص) ← (٠، ٠)

$$(6) \quad \frac{\text{س}\text{ص}}{\text{س}^2 - \text{ص}^2} \quad \text{نها}$$

(س، ص) ← (٠، ٠)

$$(7) \quad \frac{\text{س}^2\text{ص} + \text{ص}^2}{\text{س}^4 - \text{ص}^4} \quad \text{نها}$$

(س، ص) ← (٠، ٠)

$$(8) \quad \frac{\text{س}^4 - \text{ص}^4}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} \quad \text{نها}$$

(س، ص) ← (٠، ٠)

$$(9) \quad \frac{\text{س}\text{ص}\text{ع}}{\text{س}^3 + \text{ص}^3 + \text{ع}^3} \quad \text{نها}$$

(س، ص، ع) ← (٠، ٠، ٠)

$$(10) \quad \frac{\text{س}\text{ص} + \text{ص}\text{ع} + \text{س}\text{ع}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2} \quad \text{نها}$$

(س، ص، ع) ← (٠، ٠، ٠)

في كل من التمارين ١١-١٤ ناقش اتصال الاقتران ق المعطى .

$$(11) \quad ق (س، ص) = لط (س + ص - ١)$$

$$(12) \quad ق (س، ص) = \frac{س ص}{س - ص}$$

$$(13) \quad ق (س، ص، ع) = \frac{١}{س + ص - ع}$$

$$(14) \quad ق (س، ص، ع) = \sqrt{س ص} \text{ ظاع}$$

$$(15) \quad \text{اذا كان ق (س، ص) = } س^٢ + ص^٢ \text{، ف (ن) = } (ن) \text{، ك (ن) = } (ن) - ٢$$

٣ ن

أوجد ق (س، ص)، ك (ق (س، ص))، ق (ف (ن))، ك ((ن)).

$$(16) \quad \text{اذا كان ق (س، ص، ع) = } س + ص + ع \text{، ف (ن) = } (ن) \text{ أوجد ق (ق (س، ص)).}$$

$$(17) \quad \text{اذا كان ق (ر، ع) = } ر - ع + ٣ \text{، ف (س، ص) = } س - ص + ٢$$

ك (س، ص) = ٢ س + ص أوجد ق (ف (س، ص))، ك (س، ص).

$$(18) \quad \text{اذا كان ق (س، ص) = } ٢ س + ص \text{ أوجد ق (ق (س، ص))، ق (س، ص)}$$

$$(19) \quad \text{اعط تفسيرا بيانيا للعلاقة (١٦-٤).}$$

$$(20) \quad \text{اثبت انه اذا كانت النهاية ل في (١٦-٤) موجودة فانها وحيدة}$$

$$(21) \quad (١) \text{ عرف الاقتران ذا الاربعة المتغيرات (الحقيقية)}$$

$$(ب) \text{ عمم التعريف (١٦-٣) الى الاقتران ذي الاربعة المتغيرات}$$

$$(22) \quad \text{اثبت انه اذا كان ق اقترانا متصلا ذا متغيرين وكان ق (١، ب) < .}$$

فانه يوجد دائرة د في المستوى س ص مركزها عند (١، ب) بحيث أن ق

(س، ص) < . لكل الازواج (س، ص) المشتركة بين مجال ق والدائرة

. د

٣ - المشتقات الجزئية :

في هذا البند سنبدأ دراسة تفاضل الاقترانات ذات المتغيرات المتعددة
(١٦-٦) تعريف المشتقات الجزئية : اذا كان ق اقترانا ذا متغيرين فان المشتقات
الجزئية الاولى للاقتران ق بالنسبة الى س و ص هي الاقترانات ق_س وق_ص
المعرفة كما يلي :

$$ق(س + هـ، ص) - ق(س، ص) = ق(س، ص) \cdot هـ$$

$$ق(س، ص + هـ) - ق(س، ص) = ق(س، ص) \cdot هـ$$

بشرط أن تكون هذه النهايات موجودة

نلاحظ ان ص اعتبرت ثابتة في تعريف ق_س (س، ص) ، ولهذا السبب
استعملنا رمز النهاية للاقترانات ذات المتغير الواحد بدلا من رموز النهايات
الواردة في البند السابق ، وبالفعل اذا حذف ص من تعريف ق_س (س، ص) ،
فانا نحصل على النهاية (٣-٨) ولهذا السبب لايجاد ق_س (س، ص)
يمكن ان نعتبر ص ثابتا وتفاضل ق (س، ص) بالنسبة الى س بالطريقة
العادية .

وبالمثل لايجاد ق_ص (س، ص) يمكن تثبيت المتغير س ومن ثم نفاضل ق
(س، ص) بالنسبة الى ص . ومن الرموز الشائعة للمشتقات الجزئية ما يلي :

$$ق(س، ص) = ق(س، ص) \cdot هـ \quad \text{و} \quad ق(س، ص) = ق(س، ص) \cdot هـ$$

اذا كانت ع = ق (س، ص) نكتب

$$ق(س، ص) = ق(س، ص) \cdot هـ = ق(س، ص) \cdot هـ = ع$$

$$\text{قص (س ، ص)} = \frac{\partial \text{ق (س ، ص)}}{\partial \text{ص}} = \frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{ص}}$$

مثال : أوجد قص (س ، ص) ، قص (س ، ص) اذا كان

$$\text{ق (س ، ص)} = \text{س}^3 - \text{ص}^2 - \text{س}^2 \text{ص} + \text{س}^3$$

الحل : من الملاحظات السابقة نلاحظ أن

$$\text{قص (س ، ص)} = \text{س}^3 - \text{ص}^2 - \text{س}^2 \text{ص} + \text{س}^3$$

$$\text{قص (س ، ص)} = \text{س}^2 - \text{ص} - \text{س}^2$$

ومن المفيد تفسير (١٦ - ٦) باستعمال التوضيح الوارد في البند السابق الذي فيه اعتبرنا ق (س ، ص) كدرجة حرارة لوح ساخن عند النقطة (س ، ص) ونلاحظ أن النقطة (س ، ص) و (س + هـ ، ص) تقع على خط افقي كما هو مبين في الشكل (١٦ - ١١) والفرق ق (س + هـ ، ص) - ق (س ، ص) عبارة عن التغير في درجة الحرارة عندما تتحرك النقطة من الموضع (س ، ص) الى الموضع (س + هـ ، ص). اما خارج القسمة

$$\text{ق (س + هـ ، ص)} - \text{ق (س ، ص)}$$

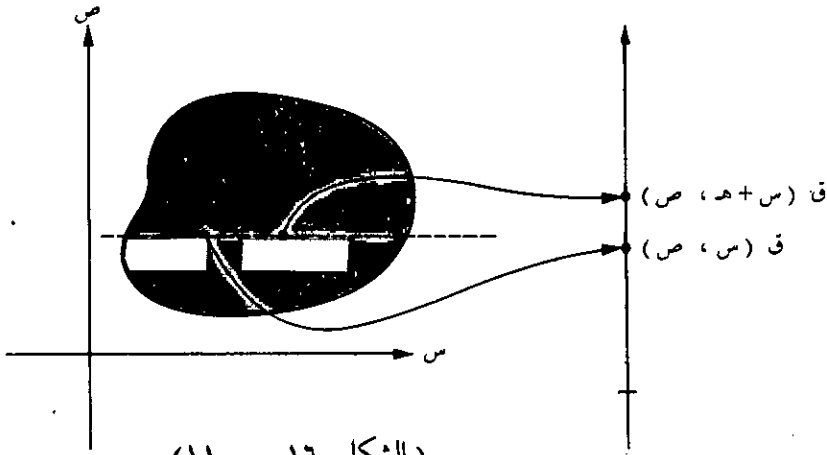
$$(١٦ - ٧) \frac{\text{ق (س + هـ ، ص)} - \text{ق (س ، ص)}}{\text{هـ}}$$

درجة الحرارة فثلا اذا كان التغير في درجة الحرارة ٢ وهـ = ٤ فان خارج القسمة هذا يساوي $\frac{1}{4}$ أي أن درجة الحرارة تتغير بمعدل $\frac{1}{4}$ درجة لكل وحدة مسافة . وبأخذ النهاية في (١٦ - ٧) عندما هـ $\rightarrow 0$ نحصل على معدل تغير درجة الحرارة بالنسبة الى المسافة عندما تتحرك النقطة (س ، ص) باتجاه افقي . وبالمثل فان قص (س ، ص) تقيس معدل التغير في ق (س ، ص) عندما تتحرك (س ، ص) في اتجاه رأسي . وكتوضيح آخر نفرض أن م يمثل سطح بحيرة وق (س ، ص) هو عمق الماء تحت النقطة (س ، ص) على السطح . وفي هذه الحالة فان قص (س ، ص) تمثل معدل التغير في عمق الماء عندما تتحرك النقطة بعيدا عن (س ، ص) باتجاه مواز لمحورس بينما قص (س ، ص) تمثل معدل التغير في عمق الماء في اتجاه محور ص .

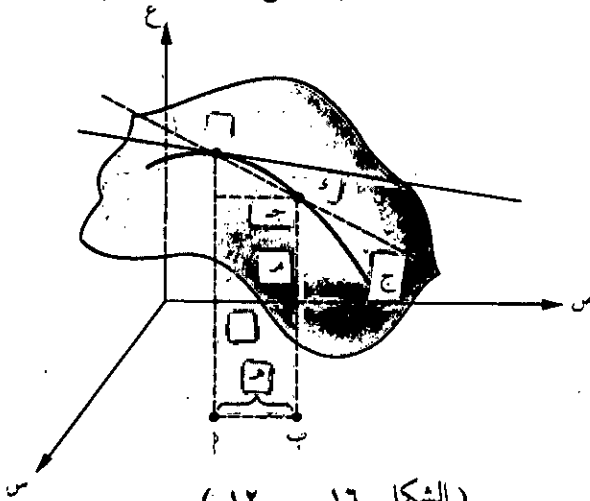
وهناك تفسير هندسي هام للعلاقة (١٦ - ٦) بدلالة بيان الاقتران

ق .

ومن أجل تفسير ق (س ، ص) هندسيا نعتبر النقطتين P (س ، ص) ،
 (٠ ، ب) (س ، ص + هـ ، ٠) والمستوى م الموازي للمستوى ص ع ماراً
 بالنقطتين P ، ب قاطعاً السطح م في المنحنى ح . فإذا اخذنا نظام إحداثيات
 على المستوى م وكانت جـ ، د نقطتين واقعيتين على ح ومسقطاهما على المستوى
 س ص هما النقطتان P ، ب على التوالي فكما هو موضح في الشكل .
 (١٦ - ١٢) فإن P جـ = ق (س ، ص) ، ب د = ق (س ، ص) +
 (هـ ، جـ د = هـ . ومن هذا ينتج ان خارج القسمة



(الشكل ١٦ - ١١)



(الشكل ١٦ - ١٢)

$$ق (س ، ص + هـ) - ق (س ، ص)$$

هـ

هو ميل الخط المار بالنقطتين جـ ، د في المستوى مـ ، ونهاية خارج القسمة هذه عندما تؤول هـ الى الصفر (أي قـ صـ) عبارة عن ميل المماس لـ للمنحنى حـ عند النقطة جـ .

وبالمثل اذا كان حـ عبارة عن مسار سـ على مستوى مواز للمحور سـ عـ مارا بالنقطة جـ فان قـ سـ (س ، ص) هي ميل المماس للمنحنى حـ عند النقطة جـ . وبنفس الطريقة تعرف المشتقات الجزئية الاولى للاقتارات ذوات الثلاثة المتغيرات وأكثر ، كما في الشكل (١٦ - ٦) . وبالتحديد فان كل المتغيرات الا واحدا منها تعتبر ثوابت اثناء عملية التفاضل بالنسبة للمتغير الباقي . وهكذا اذا اعطينا قـ (س ، ص ، ع) فانه يمكن ايجاد قـ سـ ، قـ صـ ، قـ عـ (أو

$$\frac{\partial ق}{\partial س} ، \frac{\partial ق}{\partial ص} ، \frac{\partial ق}{\partial ع}) \text{ فنثلاً}$$

$$ق (س ، ص ، ع) = \text{نهـ} \leftarrow \text{هـ}$$

$$ق (س ، ص ، ع + هـ) - ق (س ، ص ، ع)$$

هـ

وبنفس الطريقة التي اتبعت في نقاش ذي الاتجاهين فاذا كان قـ (س ، ص ، ع) يعبر عن درجة الحرارة عند النقطة مـ (س ، ص ، ع) فان قـ سـ (س ، ص ، ع) هي معدل تغير درجة الحرارة بالنسبة الى المسافة على خط مار بالنقطة مـ موازيا للمحور سـ ، والمشتقات الجزئية قـ صـ (س ، ص ، ع) ، قـ عـ (س ، ص ، ع) تعطى معدل التغير في درجة الحرارة باتجاه محور صـ ومحور عـ على التوالي

مثال ٢ :

إذا كان ك = س^٢ ص^٣ جاع + س^٤ ع أوجد $\frac{\partial ك}{\partial س}$ ، $\frac{\partial ك}{\partial ص}$ ، $\frac{\partial ك}{\partial ع}$

الحل :

$$\frac{\partial ك}{\partial س} = ٢ س ص^٣ جاع + ٤ س^٣ ع$$

$$\frac{\partial ك}{\partial ص} = ٣ س^٢ جاع$$

$$\frac{\partial ك}{\partial ع} = س^٤$$

إذا كان ق اقترانا ذا متغيرين س ، ص فان قس ، ق ص ايضا اقترانا ذا متغيرين ومن الممكن اعتبار مشتقاتها الجزئية الاولى ، وهذه الاخيرة تسمى بالمشتقات الجزئية الثانية للاقتران ق ونرمز لها بما يلي :

$$\frac{\partial^2 ق}{\partial س^٢} = \frac{\partial}{\partial س} \left(\frac{\partial ق}{\partial س} \right) = \frac{\partial ق}{\partial س س}$$

$$\frac{\partial^2 ق}{\partial ص س} = \frac{\partial}{\partial ص} \left(\frac{\partial ق}{\partial س} \right) = \frac{\partial ق}{\partial ص س}$$

$$\frac{\partial^2 ق}{\partial ص^٢} = \frac{\partial}{\partial ص} \left(\frac{\partial ق}{\partial ص} \right) = \frac{\partial ق}{\partial ص ص}$$

$$\frac{\partial^2 ق}{\partial س ص} = \frac{\partial}{\partial س} \left(\frac{\partial ق}{\partial ص} \right) = \frac{\partial ق}{\partial س ص}$$

إذا كان ع = ق (س ، ص) فاننا نكتب

$$\frac{\partial^2 ع}{\partial س^٢} = \frac{\partial^2 ق}{\partial س^٢} = \frac{\partial ق}{\partial س س} = ع س س$$

وبالمثل بالنسبة للمشتقات الاخرى .

يمكن اثبات انه اذا كانت المشتقات الجزئية الثانية للافتزان ق متصلة فان $Q = Q_{ss}$ ، وهذا صحيح في معظم الاقترانات الواردة في علم التفاضل والتكامل وتطبيقاته .

وبالمثل اذا كان $K = Q(s, v, c)$ وكان للافتزان ق مشتقات جزئية ثانية متصلة فيمكن اثبات ان الترتيب الذي تجري فيه عملية التفاضل ليس ذا أهمية أي أن .

$$\frac{\partial^2 K}{\partial s \partial v} = \frac{\partial^2 K}{\partial v \partial s} , \frac{\partial^2 K}{\partial s \partial c} = \frac{\partial^2 K}{\partial c \partial s} , \frac{\partial^2 K}{\partial v \partial c} = \frac{\partial^2 K}{\partial c \partial v}$$

ولن يعطي البرهان في هذا الكتاب .

مثال ٣ : أوجد المشتقات الجزئية الثانية للافتزان ق اذا كان $Q(s, v) = s^3 - 2sv^2 + 3v^3$

الحل : من المثال ١ أوجدنا أن

$$Q_{ss} = (s, s) = 6s , Q_{sv} = (s, v) = -4v , Q_{vv} = (v, v) = 6v$$

$$Q_{ss} = (s, s) = \frac{\partial}{\partial s} (3 + 4sv - 3s^2) = 4v - 6s$$

$$= 6sv - 4s^2$$

$$Q_{ss} = (s, s) = \frac{\partial}{\partial s} (3 + 4sv - 3s^2) = 4v - 6s$$

$$= 6sv - 4s^2$$

$$Q_{ss} = (s, s) = \frac{\partial}{\partial s} (3 + 4sv - 3s^2) = 4v - 6s$$

$$\text{ق ص ص} = (\text{ص ، ص}) \frac{\partial}{\partial \text{ص}} = (\text{ص}^2 \text{ ص}^3 \text{ ص}^2 - \text{ص}^2 \text{ ص}^2) \frac{\partial}{\partial \text{ص}} = \text{ص}^2 \text{ ص}^3$$

ويمكن تعريف المشتقات الجزئية ذات الرتبة الثالثة أو أكثر بنفس الطريقة فمثلا

$$\frac{\partial^3 \text{ق}}{\partial \text{ص}^3} = \left(\frac{\partial^2 \text{ق}}{\partial \text{ص}^2} \right) \frac{\partial}{\partial \text{ص}} = \text{ق ص ص ص} = \text{ق ص ص} \frac{\partial}{\partial \text{ص}}$$

$$\frac{\partial^3 \text{ق}}{\partial \text{ص}^2 \partial \text{ر}} = \left(\frac{\partial^2 \text{ق}}{\partial \text{ص}^2 \partial \text{ر}} \right) \frac{\partial}{\partial \text{ص}} = \text{ق ص ص ر} = \text{ق ص ر ص} \frac{\partial}{\partial \text{ص}}$$

وهكذا وإذا كانت المشتقات الجزئية ذات الرتبة الثالثة متصلة فيمكن اثبات

ان الترتيب اثناء عملية التفاضل ليس ذا اهمية أي أن

$$\text{ق ص ص ص} = \text{ق ص ر ص} = \text{ق ص ص ر} = \text{ق ر ص ص} = \text{ق ص ص ر} = \text{ق ر ص ص}$$

ويمكن استخدام رموز غير ص و ق فمثلا اذا كان ق اقترانا ذا متغيرين ر ، ن

فباستعمال الرموز ر ، ن نحصل على المشتقات الجزئية ق_ر (ر ، ن) ق_ن (ر ،

$$\text{ن}) ، \text{ق ر ن} ، \frac{\partial \text{ق}}{\partial \text{ر}} ، \frac{\partial^2 \text{ق}}{\partial \text{ر}^2} .$$

تمارين :

في التمارين ١-١٢ أوجد المشتقات الجزئية الاولى للاقتران ق

$$(١) \text{ق} (\text{ص ، ص}) = \text{ص}^2 \text{ص}^4 \text{ص}^3 - \text{ص}^3 \text{ص}^2 \text{ص}^3 + \text{ص}^3 + ١$$

$$(٢) \text{ق} (\text{ص ، ص}) = (\text{ص}^3 - \text{ص}^2) \text{ص}^2$$

$$(٣) \text{ق} (\text{ر ، ن}) = \sqrt[2]{\text{ر}^2 + \text{ن}^2}$$

$$(٤) \text{ق} (\text{ر ، ن}) = \frac{\text{ن}}{\text{ر}} - \frac{\text{ر}}{\text{ن}}$$

$$(٥) \text{ق} (\text{ص ، ص}) = \text{ص}^{\text{ص}} + \text{ص}^{\text{ص ج ا ص}}$$

$$(٦) \text{ق} (\text{ص ، ص}) = \text{ص}^{\text{ص ل ط ص ص}}$$

$$(٧) \text{ق} (\text{ن ، ع}) = \sqrt{\text{ن} + \text{ع}} / \text{ع} - \text{ن}$$

$$(٨) \text{ق} (\text{ع ، ل}) = \text{قو ظا} (\text{ع} / \text{ل})$$

$$(٩) \text{ق} (\text{ص ، ص ، ع}) = \text{ص}^{\text{ص ع}} + \text{ص}^{\text{ص}} - \text{ص}^{\text{ص ع}}$$

$$(10) \text{ ق (س، ف، ع، ل) = ر ظا ف + } \sqrt{\text{ع}^2 \text{ف}^2} - \text{ع}^2 \text{جنا}^2 \text{ ل.}$$

$$(11) \text{ ق (س، ص، ع) = جـ}^2 \sqrt{\text{س}^2 \text{ص}^2} + \text{جا ص ع.}$$

$$(12) \text{ ق (س، ص، ع) = س ص ع}^2 \text{س ص ع}$$

في التمارين ١٣-١٦ حقق العلاقة ع ص ص = ع ص ص

$$(13) \text{ ع = س ص}^2 \text{س}^2 - \text{س}^2 \text{ص}^2 \text{ص}^2 - \text{ع}^2 \text{ص}^2 \text{ص}^2$$

$$(14) \text{ ع = س}^2 \text{(س + ص)}$$

$$(15) \text{ ع = س}^2 \text{س}^2 \text{ص}^2 + \text{ص}^2 \text{جنا س}$$

$$(16) \text{ ع = ص}^2 \text{س}^2 \text{ص}^2 + 1 \text{س}^2 \text{ص}^2 \text{ص}^2$$

$$(17) \text{ اذا كان ك = جا س ص ع اوجد } \frac{\partial^3 \text{ك}}{\partial \text{ع} \partial \text{ص} \partial \text{س}}$$

$$(18) \text{ اذا كان ك = س}^2 \text{(ص}^2 \text{ع}^2 + \text{ص}^2 \text{ع}^2) \text{ اوجد } \frac{\partial^3 \text{ك}}{\partial \text{ع} \partial \text{ص}^2}$$

$$(19) \text{ اذا كان ك = ر}^4 \text{ف}^3 \text{ن} - \text{ر}^3 \text{ف}^2 \text{ع}^2 \text{ن حقق العلاقة ك}^2 \text{ر}^2 \text{ف}^2 \text{ر}^2 \text{ف}^2 \text{ك}^2 \text{ف}^2 \text{ر}^2$$

$$(20) \text{ اذا كان ف = ظا هـ و}^2 \text{و}^2 \text{لط (هـ + و) حقق العلاقة ف}^2 \text{هـ}^2 \text{و}^2 \text{ف}^2 \text{هـ}^2 \text{و}^2 \text{ف}^2 \text{هـ}^2 \text{و}^2$$

ف
يسمى الاقتران ق في س، ص توافقياً Harmonic اذا كان

$$\text{توافقياً} \quad \frac{\partial^2 \text{ق}}{\partial \text{س}^2} + \frac{\partial^2 \text{ق}}{\partial \text{ص}^2} = \text{صفرا، برهن أن الاقترانين في التمرينين ٢١، ٢٢}$$

$$(21) \text{ ق (س، ص) = لظ}^2 \sqrt{\text{س}^2 \text{ص}^2 + \text{ص}^2 \text{س}^2}$$

$$(22) \text{ ق (س، ص) = قو ظا (ص س)}$$

$$(23) \text{ اذا كان ع = جتا (س - ص) + لظ (س + ص) برهن أن } \frac{\partial^2 \text{ع}}{\partial \text{س}^2} -$$

$$= \frac{\partial^2 \text{ع}}{\partial \text{ص}^2}$$

(٢٤) اذا كان $E = (ص - ٢ س) \sqrt{٧ - ص - ٢ س}$ برهن ان $E - ٤ ع$ ص

(٢٥) أكتب قائمة بالمشتقات الجزئية الثانية للمقدار $K = ق (س ، ص ، ع) .$

(٢٦) اذا كان $K = ق (س ، ص ، ع ، ن ، ل)$ عرف L كنهاية .

(٢٧) وضع لوح معدني ساخن على مستوى $س$ ص بحيث ان درجة الحرارة $ح$ عند

النقطة $(س ، ص)$ تعطي بالمقدار $ح = ١٠ (س + ٢ ص + ٢ ع)$. أوجد معدل

تغير $ح$ عند النقطة $P (١ ، ٢)$ بالنسبة الى المسافة باتجاه (P) محور السينات

(ب) محور الصادات .

(٢٨) افرض ان الجهد الكهربائي $ج$ عند النقطة $(س ، ص ، ع)$ يعطي بالعلاقة $ج =$

$١٠٠ (س + ٢ ص + ٢ ع)$ ، أوجد معدل تغير $ج$ عند النقطة $P (٢ ، -$

$١٠ ، ١)$. بالنسبة الى المسافة باتجاه (P) محور $س$ (ب) محور $ص$ (ج)

محور $ع$.

(٢٩) اذا كان $ج$ هو مسار السطح $E = ٩ - س - ٢ ص + ٢ في المستوى س = ١$ أوجد

معادلة المماس $ل$ للمنحنى $ج$ عند النقطة $P (١ ، ٢ ، ٤)$. ارسم السطح

المكافيء ، $ج$ ، $ل$.

(٣٠) اذا كان $ج$ هو مسار بيان $E = \sqrt{٣٦ - ٩ س - ٤ س + ٢ في المستوى ص = ٢ ،$

أوجد معادلة المماس $ل$ للمنحنى $ج$ عند النقطة $P (١ ، ٢ ، ١١)$ ارسم

السطح ، $ج$ ، $ل$.

٤ — الزيادات والتفاضلات :

اذا كان $ق$ اقترانا ذا متغيرين في $س ، ص$ فان الرموز $\Delta س ، \Delta ص$ ترمز الى

الزيادات في $س ، ص$ مع ملاحظة أن $\Delta ص$ هي زيادة في المتغير المستقل في الوضع

الحالي وليست كما عرفناها سابقا في (٣ - ٣١) حيث $ص$ كانت المتغير التابع ، وبدلالة

رموز الزيادة يمكن كتابة (١٦ - ٥)

$$ق(س + \Delta س) = ق(س) + \Delta ق$$

$$\Delta ق = ق(س + \Delta س) - ق(س)$$

$$\Delta ق$$

$$\text{قصر (س ، ص) = نها} \\ \Delta \text{ ص} \leftarrow$$

$$\text{ق (س ، ص + \Delta \text{ ص}) - ق (س ، ص)}$$

$$\Delta \text{ ص}$$

واذا كانت $\text{ع} = \text{ق (س ، ص)}$ وحصل زيادتان في س ، ص مقدارهما $\Delta \text{ ص}$ ، $\Delta \text{ ص}$ على التوالي فان $\Delta \text{ ع}$ ترمز الى الزيادة المقابلة في المتغير التابع ع أي أن

$$(١٦-٨) \Delta \text{ ع} = \text{ق (س + \Delta \text{ س ، ص + \Delta \text{ ص})} - \text{ق (س ، ص)} . \\ \text{وهكذا فان } \Delta \text{ ع} \text{ تمثل التغير في ق اذا تغيرت (س ، ص) الى (س + \Delta \text{ س ، ص + \Delta \text{ ص})} \\ \text{ص + \Delta \text{ ص}}$$

مثال ١ : اذا كان $\text{ع} = \text{ق (س ، ص)}$ ، $\text{س}^3 - \text{س ص}$ أوجد $\Delta \text{ ع}$.
ما هو التغير في ق (س ، ص) اذا تغيرت (س ، ص) من $(١ ، ٢)$ الى $(١,٠١ ، ١,٩٨)$ ؟

الحل : من (١٦-٨) نجد أن

$$\Delta \text{ ع} = [٣(\text{س + \Delta \text{ س}}) - ٢(\text{س + \Delta \text{ ص}}) - (\text{س + \Delta \text{ ص}})] - [٣\text{س}^٢ - \text{س ص}]$$

$$\text{ع} = ٣\text{س}^٢ + ٦\text{س \Delta \text{ س}} + ٣(\Delta \text{ س})^٢ - ٢(\text{س \Delta \text{ ص}} + \Delta \text{ ص} + \Delta \text{ ص} + \Delta \text{ ص}^٢) - (\text{س \Delta \text{ ص}} + \Delta \text{ ص} - \text{س \Delta \text{ ص}} - \Delta \text{ ص}^٢)$$

$$= ٦\text{س \Delta \text{ س}} + ٣(\Delta \text{ س})^٢ - ٢\text{س \Delta \text{ ص}} - \Delta \text{ ص} - \Delta \text{ ص}^٢ - \Delta \text{ ص}^٢$$

ولايجاد قيمة التغير المطلوب في ق (س ، ص) نعوض $\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = ١$ ،

$$\Delta \text{ س} = ٠,٠١$$

$$\Delta \text{ ص} = -٠,٠٢ \text{ ونسقط لنحصل على } \Delta \text{ ع} = ٠,٠٦٥ \text{ وطبعاً}$$

$$\text{يمكن ايجادها هذا المقدار بحساب قيمة ق (١,٠١ ، ١,٩٨) - ق (١ ، ١)}$$

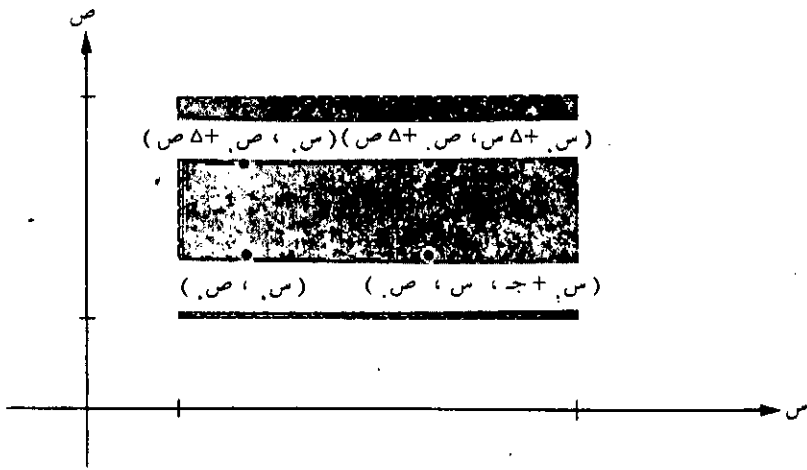
(٢)

ستستعمل النظرية التالية لكتابة $\Delta \text{ ع}$ بدلالة المشتقات الجزئية الاولى للاقتران ق

وستستخدم م ، م ، م حيث م اقترانان في س ، ص بدلا من استعمال

الرموز م ، $(\Delta \text{ ص ، } \Delta \text{ ص})$ ، م ، $(\Delta \text{ س ، } \Delta \text{ ص})$.

(١٦-٩) نظرية : اذا كان $ع = ق (س ، ص)$ حيث $ق$ اقتران معرف على المستطيل $ط = \{(س ، ص) : \begin{matrix} \text{ب} > \text{س} > \text{ج} \\ \text{ص} > \text{د} \end{matrix}\}$ وكانت $قس ، قس$ موجودتين في $ط$ ومتصلتين عند النقطة $(س ، ص)$ في $ط$ واذا كانت $(س ، ص) \in \Delta + (س ، ص)$ نقطة في $ط$ و $\Delta ع = ق (س ، ص) + \Delta (س ، ص) - ق (س ، ص) - \Delta (س ، ص)$ فان $\Delta ع = قس (س ، ص)$ ، $\Delta (س ، ص) + قس (س ، ص) - \Delta (س ، ص) + \Delta (س ، ص) + \Delta (س ، ص)$ حيث $\Delta (س ، ص) + قس (س ، ص) - \Delta (س ، ص) + \Delta (س ، ص) + \Delta (س ، ص)$ اقترانان في $\Delta (س ، ص)$ ولها النهاية صفر عندما تتوَلَد $(س ، ص) \Delta (س ، ص)$ الى $(٠ ، ٠)$



(شكل ١٦ - ١٣)

البرهان : بيان $ط$ والنقط المفروضة موضحة في الشكل (١٦-١٣) وفي البداية نلاحظ ان الزيادة $\Delta ع$ في (١٦-٨) يمكن كتابتها بالصيغة التالية

$$(١٦-١) \Delta ع = ق (س ، ص) + \Delta (س ، ص) - ق (س ، ص) - \Delta (س ، ص)$$

واذا عرفنا الاقتران $ف$ ذا المتغير الواحد بالعلاقة $ف (س) = ق (س ، ص)$ ، $\Delta (س ، ص) + ق (س ، ص) - ق (س ، ص) - \Delta (س ، ص)$ لجميع قيم $س$.
وبتطبيق نظرية القيمة الوسطى (٤-١٥) على الاقتران $ف$ نحصل على

$$ف (س) + \Delta (س) - ف (س) = ف (س) - ف (س) = \Delta (س)$$

حيث $س$ تقع بين $س$ ، $س + \Delta (س)$ وبدلالة $ق$ نحصل على $ق (س) + \Delta (س) - ق (س) - \Delta (س) = ق (س) - ق (س) = ق (س)$

($\mathcal{P}$ ، ص Δ + ص Δ) س وبالمثل اذا فرضنا ان ك (ص) = ق (س) ،
 (ص) وطبقنا نظرية القيمة الوسطى على الاقتران ك نحصل على ك
 (ص. ص Δ + ص) - ك (ص. ك) (ب) ص حيث ب تقع بين ص. ،
 ص Δ + ص أي أن ق (س) ، ص. + ص) - ق (س. ، ص) ،
 قص (س. ، ب) Δ ص ، وبالتعويض في (١٦ - ١٠) ينتج أن
 (١٦ - ١١) Δ ع = قس ($\mathcal{P}$ ، ص. + ص) + قس (س. ، ب) Δ ص.
 والآن نعرف $\mathcal{P}$ ، $\mathcal{P}$ بالعلاقة
 (١٦ - ١٢) $\mathcal{P}$ = قس ($\mathcal{P}$ ، ص. + ص) - قس (س. ، ص).
 $\mathcal{P}$ = قس (س. ، ب) - قس (س. ، ص).
 وبما ان قس وقص متصلتان و $\mathcal{P}$ ← س. ، ب ← ص. عندما Δ س
 ← Δ ، ص ← ٠ على التوالي فان $\mathcal{P}$ ، $\mathcal{P}$ لها النهاية صفر عندما (Δ
 س ، Δ ص) ← (٠ ، ٠). وبحل المعادلتين (١٦ - ١٢) للمقدارين
 قس ($\mathcal{P}$ ، ص. + ص Δ) و قس (س. ، ب) وبالتعويض في
 (١٦ - ١١) نحصل على
 Δ ع = [قس (س. ، ص. + $\mathcal{P}$) Δ س + [قس (س. ، ص) +
 $\mathcal{P}$ Δ ص].
 وهذا هو المطلوب اثباته في النظرية .

مثال ٢ : اذا كانت ع = $3\mathcal{S}^2 - \mathcal{S}$ ص أوجد قيم كل من $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}$ التي تحقق نتيجة
 النظرية (٩ - ١٦) .

الحل : من الحل في مثال (١) نجد أن

$$\Delta \text{ ع} = 6\mathcal{S}(\Delta \text{ س}) + 3(\Delta \text{ س})^2 - \mathcal{S}\Delta \text{ ص} - \mathcal{S}\Delta \text{ ص} - \mathcal{S}\Delta \text{ ص}$$

وهذه يمكن كتابتها على الصورة

$$\Delta \text{ ع} = 6\mathcal{S}(\mathcal{S} - \mathcal{S}\Delta \text{ ص}) + \mathcal{S}(\mathcal{S} - \mathcal{S}) + \mathcal{S}(\Delta \text{ س}) + \mathcal{S}(\Delta \text{ س})^2 + (\mathcal{S} - \mathcal{S}\Delta \text{ ص})$$

($\mathcal{S} - \mathcal{S}\Delta \text{ ص}$) Δ ص واذا عرفنا $\mathcal{P} = \Delta \text{ س} = \mathcal{P}$ و $\mathcal{P} = (\mathcal{S} - \mathcal{S}\Delta \text{ ص})$ نحصل على
 الصيغة المذكورة في (٩ - ١٦) لاحظ أن $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}$ غير وحيدتين لانه يمكن
 كتابة

$$\Delta \text{ ع} = 6\mathcal{S}(\mathcal{S} - \mathcal{S}\Delta \text{ ص}) + \mathcal{S}(\mathcal{S} - \mathcal{S}) + \mathcal{S}(\Delta \text{ س}) + \mathcal{S}(\Delta \text{ س})^2 + \mathcal{S}(\mathcal{S} - \mathcal{S}\Delta \text{ ص})$$

Δ ص وفي هذه الحالة فان $\mathcal{P} = 3\Delta \text{ س} - \Delta \text{ ص}$ و $\mathcal{P} = ٠$

(١٦-١٣) تعريف التفاضلات : اذا كانت $ع = ق (س ، ص)$ فالتفاضلة $دع$ للمتغير التابع $ع$ تعرف كالآتي

$$دع = قس (س ، ص) دس + قص (س ، ص) دص = \frac{\partial ع}{\partial س} دس + \frac{\partial ع}{\partial ص} دص$$

وباستعمال نتيجة (١٦-٩) مع استبدال الزوج (س. ، ص.) بالزوج (س ، ص) نرى أن $دع - دص = ع = \Delta س + \Delta ص$ حيث $\Delta س$ ، $\Delta ص$ الى الصفر عندما $(\Delta س ، \Delta ص) \rightarrow (٠ ، ٠)$ ومن هذا نجد أنه اذا كانت $\Delta س$ ، $\Delta ص$ صغيرتين فإن $دع - دص \approx ٠$ أي أن $دع = دص$ ويمكن استعمال هذه الحقيقة لايجاد قيمة تقريبية للمتغير في $ع$ المقابل للمتغير الصغير في س ، ص .

مثال ٣ : اذا كانت $ع = ٣س^٢ - س ص .$ ، أوجد $دع$ واستعملها لايجاد قيمة تقريبية للمتغير في $ع$ اذا تغيرت (س ، ص) من (١ ، ٢) الى (١،٩٨ (١،٠١) . قارن بين هذه القيمة والقيمة الحقيقية للمتغير في $ع$ ؟

الحل : بتطبيق (١٦-١٣) نجد أن

$$دع = (٦س - ص) دس + (-س) دص$$

وبالتعويض $س = ١$ ، $ص = ٢$ ، $دس = \Delta س = ٠ ، ١$ ، $دص = \Delta ص = ٠ ، ٠٢$

$$= ٠ ، ٠٢ - ٠ ، ٠٢ = ٠$$

نحصل على

$$دع = (٢ - ٦) (٠ ، ٠١) + (-١) (٠ ، ٠٢) = ٠ ، ٠٦$$

ولقد اثبتنا في المثال (١) ان $ع = ٠ ، ٠٦٠٥$ وهكذا فان الخطأ في استعمال $دع$ يساوي $٠ ، ٠٠٠٥$

مثال ٤ : اسطوانة دائرية نصف قطرها وارتفاعها ٣ انش و ٨ انش على التوالي مع خطأ في القياس يساوي $\pm ٠ ، ٠٥$ انش ، استعمل التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية لأكبر خطأ في حساب حجم الاسطوانة .

الحل : اذا كان ر نصف قطر الاسطوانة و ع ارتفاعها فان حجمها

$$ج = \pi ر^2 ع$$

وهكذا فان

$$ج = \pi ر \frac{\partial ج}{\partial ر} + \pi ر^2 \frac{\partial ج}{\partial ع}$$

$$= \pi ر^2 ع + \pi ر^2$$

وبالتعويض ر = ٣ ، ع = ٨ ، ر = ٨ ، ع = ١٠ ، نجد أن

$$ج = \pi ر^2 ع + \pi ر^2 = \pi (٩ + ٨٠) = ٨٩ \pi$$

واذا كانت ع = ق (س ، ص) فاننا نقول أن ق تفاضلي عند النقطة (س ، ص) اذا كان من الممكن كتابة ع على الشكل الوارد في (١٦ - ٩) أي ان

$$(١٦ - ١٤) \Delta ع = ق(س ، ص) \Delta س + ق(س ، ص) \Delta ص + \Delta ص$$

حيث نهاية $\Delta س$ ، $\Delta ص$ تؤول الى الصفر عندما $(\Delta س ، \Delta ص) \rightarrow (٠ ، ٠)$.

واذا كتبنا (١٦ - ١٤) على الشكل

$$\Delta ع = ق(س ، ص) \Delta س + ق(س ، ص) \Delta ص + \Delta ص$$

ومن ثم فرضنا ان $\Delta س = \Delta ص = \Delta ص$ فان

$$\Delta ع = ق(س ، ص) - ق(س ، ص) = ٠$$

وهذا يعطي :

$$ق(س ، ص) = ق(س ، ص)$$

أي أن

$$ق(س ، ص) = ق(س ، ص)$$

$$ق(س ، ص) \leftarrow ق(س ، ص)$$

وهذا يعطي النتيجة التالية :

الحل : اذا رمزنا الى ابعاد متوازي المستطيلات بالحروف س ، ص ، ع فان الحجم ج = س ص ع ومن (١٦-١٦) نجد ان

$$\begin{aligned} \text{د ج} &= \text{ص ع د س} + \text{س ع د ص} + \text{س ص د ع} \\ \text{والتعويض س} &= ٩ ، \text{ص} = ٦ ، \text{ع} = ٤ ، \text{د س} = ٠,٢ ، \text{د ص} = - \\ &= ٠,٠٣ ، \text{د ع} = ٠,٠١ \text{ يعطي} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \text{ ج} &= ٢٤ (٠,٢) + ٣٦ (-٠,٣) + ٥٤ (٠,٠١) \\ &= ٠,٠٤٨ - ٠,١٠٨ + ٠,٠٥٤ = -٠,٠٠٦ \\ \text{وهكذا فان الحجم ينقص } ٠,٠٦ \text{ انش مكعب تقريبا. والتغير الحقيقي في} \\ \text{الحجم يساوي} \end{aligned}$$

$$\Delta \text{ ج} = (٠,٢ \times ٩ \times ٥,٩٧) - (٤,٠١) (٤) (٩) = -٠,٠٦٣٩٠٦$$

تمارين :

في التمارين ١-٤ أوجد قبا لكل من μ ، μ' التي تحقق (١٦-١٤)

$$(١) \text{ ق (س ، ص) = } ٤\text{ص}^٢ - ٣\text{س ص} + ٢\text{س}$$

$$(٢) \text{ ق (س ، ص) = } (٢\text{س} - \text{ص})^٢$$

$$(٣) \text{ ق (س ، ص) = } ٣\text{س} + ٣\text{ص}$$

$$(٤) \text{ ق (س ، ص) = } ٢\text{س}^٢ - ٢\text{س ص} + ٣\text{ص}$$

في التمارين ٥-١٦ أوجد د ف

$$(٥) \text{ ف} = ٣\text{س}^٢ - ٢\text{س ص} + ٣\text{ص}^٢$$

$$(٦) \text{ ف} = ٥\text{س}^٢ + ٤\text{ص} - ٣\text{س ص}^٢$$

$$(٧) \text{ ف} = ٢\text{س}^٢ \text{ جا ص} + ٢\text{ص}^٢/٣$$

$$(٨) \text{ ف} = \text{ص}^٢ e - ٣\text{س}^٢$$

$$(٩) \text{ ف} = ٢\text{س}^٢ e + ١١\text{ص}^٢$$

$$(١٠) \text{ ف} = \text{لط} (٢\text{س} + ٢\text{ص}) + \text{س ظا} - ١\text{ص}$$

- (١١) ف = س^٢ لبط (ص^٢ + ع^٢)
- (١٢) ف = س^٢ ص^٣ ع + ع^٢ e^{-٢}
- (١٣) ف = س ص ع \ س + ص + ع
- (١٤) ف = س^٢ e^ص ع + ص لبط ع
- (١٥) ف = س^٢ ع + ع^٢ ص^٤ ن^{-٣} - س^٢ ع^٢ ن
- (١٦) ف = س^٢ ص^٣ ع ن^{-١} هـ .
- (١٧) استعمل التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية للتغير في ق (س ، ص) حيث
ق (س ، ص) = س^٢ - س^٣ ص^٣ + س^٢ ص^٤ - س^٢ ص^٣ + ٦ اذا تغيرت
(س ، ص) من (- ٢ ، ٣) الى (- ٢ ، ٠٢ ، ٠١ ، ٣) .
- (١٨) استعمل التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية للتغير في
ق (س ، ص) = س^٢ - س^٢ ص^٢ + س^٣ ع اذا تغيرت (س ، ص) من
(١ ، ٢) الى (١ ، ٠٣ ، ٩٩ ، ١) .
- (١٩) استعمل التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية للتغير في
ق (س ، ص ، ع) = س^٢ ع^٣ - س^٣ ص^٣ ع + س^٢ ع^٣ + ٢ ص^٢ ع^١ اذا
تغيرت (س ، ص ، ع) من (١ ، ٤ ، ٢) الى (١ ، ٠٢ ، ٩٧ ، ٣) ،
(١ ، ٩٦) .
- (٢٠) استعمل التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية للتغير في
ف = ر^٢ + ٣ ل هـ + ٢ و^٣ اذا تغيرت ر من ١ الى ١ ، ٠٢ ، ل من ٢ الى
١ ، ٩٩ ، و من ٣ الى ٢ ، ٩٧ ، هـ من ٤ الى ٤ ، ٠١
- (٢١) استعمل التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[3]{26,98} \sqrt{36,04}$
- (٢٢) استعمل التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية للمقدار $\frac{2}{5}$ (٣٢ ، ٠٣)
(١ ، ٩٥) .
- (٢٣) ابعاد صندوق بالانش ٣ ، ٤ ، ٥ أقدام مع خطأ محتمل ١ \ ١٦ أنش .
استعمل التفاضلات لايجاد أكبر خطأ في حساب الكميات التالية
P مساحة الصندوق ب حجم الصندوق

(٢٤) طولاً ضلعي مثلث قائم الزاوية ٣ و ٤ أنش على التوالي مع احتمال خطأ ٠,٠٢ .
 أنش . استعمل التفاضلات لإيجاد أكبر خطأ محتمل في حساب الكميات التالية
 (پ) الوتر (ب) مساحة المثلث .

(٢٥) صفيحة اسطوانية مفتوحة ومصنوعة من القصدير قطرها ٣ أنش وارتفاعها ٤
 أنش ، استعمل التفاضلات لإيجاد قيمة تقريبية لكمية القصدير المستعملة في
 صناعة الصفيحة إذا كان سمك القصدير ٠,١٥ أنش

(٢٦) المقاومة الكلية م لثلاثة مقاومات ١م ، ٢م ، ٣م موصلة على التوالي تعطى بالعلاقة

$$\frac{1}{٣م} + \frac{1}{٢م} + \frac{1}{١م} = \frac{1}{م}$$

إذا كانت ١م = ١٠٠ ، ٢م = ٢٠٠ ، ٣م = ٤٠٠ على التوالي مع أكبر خطأ
 محتمل يساوي ١٪ من القياسات . أوجد قيمة تقريبية للخطأ في حساب م .

(٢٧) الجاذبية النوعية لجسم ما تعطى بالعلاقة ج = $\frac{پ}{١-پ}$ حيث پ ، وهما وزن
 الجسم (بالباوند) في الهواء والماء على التوالي . فإذا كانت القياسات هي پ =
 ١٢ باوند ، و = ١٥ باوند وأكبر خطأ محتمل هو $\frac{1}{٢}$ أونس في الهواء ، ١ أونس
 في الماء ، ما أكبر خطأ في حساب قيمة ج ؟

(٢٨) العلاقة التي تربط بين الضغط ض ، والحجم ج ، والحرارة ت لغاز محصور هي
 ض ج = پ ت حيث پ ثابت فإذا كان ض = ٥ ، ٠ باوند / أنش مربع عندما
 ج = ٦٤ أنشا مكعبا . ت = ٨٠ . أوجد القيمة التقريبية للتغير في الضغط إذا
 تغير الحجم ج الى ٧٠ أنشا مكعبا والحرارة ت الى ٧٦ .

(٢٩) درجة الحرارة ج للنقطة پ (س ، ص ، ع) في نظام الاحداثيات الثلاثية
 المتعامدة تعطى بالعلاقة ج = ٨ (٢س + ٤ص + ٩ع) $\frac{1}{٣}$.
 استعمل التفاضلات لإيجاد قيمة تقريبية للفرق في الحرارة بين النقطتين (٦ ،
 ٣ ، ٢) و (١ ، ٦ ، ٣ ، ٣ ، ٩٨ ، ١)

(٣٠) أوجد القيمة التقريبية لمساحة مثلث متساوي الساقين إذا زاد طول كل من الضلعين
 المتساويين من ١٠٠ الى ١٠١ بينما تناقصت الزاوية بينها من ١٢٠ الى ١١٩ .

- (٣١) اذا كانت الاسطوانة المعطاة في المثال (٤) من هذا البند مغلقة من اعلى ومن اسفل ، استعمل التفاضلات لتقريب أكبر خطأ في حساب مساحتها الكلية .
- (٣٢) استعمل التفاضلات لتقريب التغير في مساحة متوازي المستطيلات المذكور في المثال (٥) من هذا البند . ما هي القيمة الحقيقية للتغير ؟

٥ — قاعدة السلسلة :

اذا كان ق ، ف ، ك اقترانات ذوات متغيرات بحيث أن

$$ع = ق (ل ، ر) ، ل = ف (س ، ص) ، ر = ك (س ، ص)$$

واذا كان الزوج المرتب (ل ، ر) المقابل للزوج (س ، ص) في مجموعة جزئية م من ح $\times$ ح يقع في مجال ق فان ع = ق (ف (س ، ص) ، ك (س ، ص)) يعرف كاقتران مركب في المتغيرين س ، ص فمثلا اذا كان

$$ع = ل^2 + ل جا ر ، ل = س e^2 ، ر = س ص$$

$$فان ع = س^2 e^2 + س^3 جا س ص .$$

والنظرية التالية تعطينا صيغا للمقادير $\frac{\partial ع}{\partial س} \cdot \frac{\partial ع}{\partial ص}$ بدلالة المشتقات الجزئية الاولى لكل من الاقترانات ف ، ك ، ق وسنعرض في نص النظرية أن مجالات هذه الاقترانات قد اختيرت بحيث أن الاقتران المركب معرّف على مجال مناسب م . وكل واحدة من الصيغ المعطاة في (١٦ - ١٧) تسمى بقاعدة السلسلة

(١٦ - ١٧) نظرية : اذا كانت ع = ق (ل ، ر) ، ل = ف (س ، ص) ، ر = ك (س ، ص) حيث ق اشتقاقي ، والمشتقات الجزئية الاولى للاقترانات ف ، ك متصلة فان

$$\frac{\partial ع}{\partial س} = \frac{\partial ع}{\partial ل} \cdot \frac{\partial ل}{\partial س} + \frac{\partial ع}{\partial ر} \cdot \frac{\partial ر}{\partial س}$$

$$\frac{\partial ع}{\partial ص} = \frac{\partial ع}{\partial ل} \cdot \frac{\partial ل}{\partial ص} + \frac{\partial ع}{\partial ر} \cdot \frac{\partial ر}{\partial ص}$$

البرهان : اذا اعطينا س زيادة مقدارها Δ س بينا ابقينا ص ثابتة (أي ان $\Delta ص = ٠$) فان

(١٦-١٨) $\Delta ع = ق (ف (س + \Delta س ، ص) ، ك (س + \Delta س ، ص)) - ق (ف (س ، ص) ، ك (س ، ص))$ وكذلك

$$(١٦-١٩) \left| \begin{array}{l} \Delta ل = ف (س + \Delta س ، ص) - ف (س ، ص) \\ \Delta ر = ك (س + \Delta س ، ص) - ك (س ، ص) \end{array} \right|$$

وبذلك يكون

ف (س + \Delta س ، ص) = ف (س ، ص) + \Delta ل
 ك (س + \Delta س ، ص) = ك (س ، ص) + \Delta ر
 وبالتعويض في (١٦-١٨) ينتج أن
 $\Delta ع = ق (ل + \Delta ل ، ر + \Delta ر) - ق (ل ، ر)$
 وبما أن ق اشتقاقي ، فمن الممكن كتابة

$$(١٦-٢٠) \Delta ع = \frac{\partial ع}{\partial ل} \Delta ل + \frac{\partial ع}{\partial ر} \Delta ر + \Delta ل \Delta ر$$

حيث $\Delta ل ، \Delta ر$ دالتان في $\Delta ل ، \Delta ر$ ولها النهاية صفر عندما
 $(\Delta ل ، \Delta ر)$ تقارب $(٠ ، ٠)$. كذلك من الممكن أن نفرض أن كلا من
 $\Delta ل ، \Delta ر$ يساوي صفرا إذا كانت $(\Delta ل ، \Delta ر) = (٠ ، ٠)$ وإذا لم يكونا
 كذلك فإنه باستطاعتنا أن نبدهما بالاقترانين $\Delta ل ، \Delta ر$ اللذين لهما نفس هذه
 الخاصية ويساويان الاقترانين $\Delta ل ، \Delta ر$ عند النقط الأخرى .
 وبهذه الفرضية يكون كل من الاقترانين $\Delta ل ، \Delta ر$ في (١٦-٢٠)
 متصلاً عند $(٠ ، ٠)$ ويقسمه الطرفين في (١٦-٢٠) على $\Delta س$ نحصل

$$(١٦-٢١) \frac{\Delta ع}{\Delta س} = \frac{\partial ع}{\partial ل} \frac{\Delta ل}{\Delta س} + \frac{\partial ع}{\partial ر} \frac{\Delta ر}{\Delta س} + \frac{\Delta ل \Delta ر}{\Delta س}$$

ومن (١٦-١٨) و (١٦-١٩) ينتج أن $\frac{\partial ع}{\partial س} = \frac{\Delta ع}{\Delta س}$ ، $\frac{\partial ل}{\partial س} = \frac{\Delta ل}{\Delta س}$ ، $\frac{\partial ر}{\partial س} = \frac{\Delta ر}{\Delta س}$

اشتقاقيا ذا ن من المتغيرات ل_١ ، ل_٢ ، ل_٣ ، ... ل_ن وكل من ل_ر دالة للمتغيرات س_١ ، س_٢ ، ... س_م ومشتقاتها الجزئية الاولى متصلة واذا كانت ع دالة مركبة في المتغيرات س_١ ، س_٢ ، ... س_م فان

$$\frac{\partial}{\partial س_١} ع = \frac{\partial ع}{\partial ل_١} + \frac{\partial ع}{\partial س_٢} \frac{\partial ل_٢}{\partial س_١} + \dots + \frac{\partial ع}{\partial ل_٣} \frac{\partial ل_٣}{\partial س_١} + \dots + \frac{\partial ع}{\partial ل_٣} \frac{\partial ل_٣}{\partial س_١}$$

$$\frac{\partial ل_٣}{\partial س_١} \text{ حيث } ر = ١ ، ٢ ، \dots ، م$$

مثال ٢ : اذا كانت ف = ر_٢ ل + ه_٣ ظا ن حيث ر = س_٣ ص ع^٢

$$ل = اس \cdot ع^٢ ، ه = س جتا ص ، ن = ص ل ط ع \text{ أوجد } \frac{\partial ف}{\partial ع}$$

الحل : بتطبيق (١٦-٢٢) نحصل على

$$\frac{\partial ف}{\partial ع} = \frac{\partial ف}{\partial ر} \frac{\partial ر}{\partial ع} + \frac{\partial ف}{\partial ل} \frac{\partial ل}{\partial ع} + \frac{\partial ف}{\partial ه} \frac{\partial ه}{\partial ع} + \frac{\partial ف}{\partial ن} \frac{\partial ن}{\partial ع} + \frac{\partial ف}{\partial س} \frac{\partial س}{\partial ع}$$

$$= (٢ ر ل) (٢ س٣ ص ع) + (٣ ه٣ ظا ن) (س ص ع) + (٠) + \left(\frac{ص}{ع} \right) (ه٣ قا ن) + (٠)$$

$$= ٤ ر ل س٣ ص ع + ر٢ س ص ع + (ه٣ ص ع) قا ن$$

والحالة الخاصة التالية من قاعدة السلسلة مهمة اذا كانت ع دالة للمتغيرات ل_١ ، ل_٢ ، ... ل_ن وكل من ل_م دالة للمتغير الواحد ر فان ع دالة للمتغير ومن ثم فان (١٦-٢٢) تأخذ الصيغة التالية :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial E}{\partial L} + \frac{\partial^2 L}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial E}{\partial L} = \frac{\partial E}{\partial r} \quad (١٦-٢٣)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s^2} + \dots + \frac{\partial E}{\partial L} +$$

ويمكن استعمال المشتقات الجزئية لايحاد مشتقات الاقترانات المعرفة ضمنيا .
ولنفرض كما في البند ٦ من الفصل الثالث ان المعادلة ف (س ، ص) = ٠
نعرف قيم س في المجال م للاقتران ق ، فثا اعتبرنا ع = ف (ل ، ك) حيث ل
= س ، ك = ق (س) فبتطبيق (١٦-٢٣) وباستعمال المعادلة ع = ف
(س ، ق (س)) = ٠ لجميع قيم س في م نحصل على

$$٠ = \frac{\partial E}{\partial s} \cdot \frac{\partial E}{\partial K} + \frac{\partial E}{\partial s} \cdot \frac{\partial E}{\partial s} = \frac{\partial E}{\partial s}$$

$$٠ = \text{أي أن } \frac{\partial E}{\partial s} + (١) \frac{\partial E}{\partial K} = (ق (س))$$

بما أن ل = س فاذا كانت $\frac{\partial E}{\partial K} \neq ٠$ فان

$$ق (س) = \left(\frac{\partial E}{\partial s} \right) \backslash \left(\frac{\partial E}{\partial K} \right)$$

والصيغة الاخيرة يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$\frac{ق(س) - ق(س, ص)}{ق(س, ص)} = \frac{ص}{س} \quad (١٦-٢٤) \quad \text{حيث } ق(س) = ق(س, ص)$$

مثال ٣ : اذا كانت ص = ق (س) تحقق المعادلة

$$ص^٤ + ٣ص - ٤س^٣ - ٥س - ١ = ٠ \quad \text{أوجد } ص^-$$

الحل : اذا كان ف (س ، ص) يعبر عن المقدار الموجود في الطرف الايمن من
المعادلة فان (١٦-٢٤) تعطي :

$$\frac{١٢س٢ + ٥}{٣ص٤ + ٣} = \frac{١٢س٢ - ٥}{٣ص٤ + ٣} - = ص$$

وعلى القاريء أن يقارن هذا مع المثال (٣) في البند ٦ من الفصل ٣ حيث طريقة المتغير الواحد .

نفرض ان المعادلة ف (س ، ص ، ع) = ٠ تعرف اقترانا اشتقاقيا ق في المتغيرين س ، ص في المعادلة ف (س ، ص ، ق) (س ، ص) = ٠ لجميع الازواج المرتبة (س ، ص) في المجال م للاقتران ق فاذا وضعنا ك = ف (ل ، ر ، ع) حيث ل = س ، ر = ص ، ع = ق (س ، ص) فانه باستعمال قاعدة السلسلة والمعادلة ك = ٠ لكل (س ، ص) في م نجد أن

$$\frac{\partial}{\partial س} \cdot \frac{\partial ك}{\partial ر} + \frac{\partial}{\partial س} \cdot \frac{\partial ك}{\partial ل} = \frac{\partial ك}{\partial س}$$

$$٠ = \frac{\partial ع}{\partial س} \frac{\partial ك}{\partial ع} +$$

وبما أن ل = س ، ر = ص فان

$$٠ = \left(\frac{\partial ع}{\partial س} \right) \frac{\partial ك}{\partial ع} + (٠) \frac{\partial ك}{\partial ص} + (١) \frac{\partial ك}{\partial س}$$

واذا كانت $\frac{\partial ك}{\partial ع} \neq ٠$ فان

$$\left(\frac{\partial ك}{\partial ع} \right) \left(\frac{\partial ك}{\partial س} \right) - = \frac{\partial ع}{\partial س} \quad (١٦-٢٥)$$

$$\frac{فس (س ، ص ، ع)}{فع (س ، ص ، ع)} =$$

وبنفس الطريقة ينتج أن

$$(١٦-٢٦) \quad \frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{ص}} = - \frac{\text{ف} \text{ص} (\text{س} , \text{ص} , \text{ع})}{\text{ف} \text{ع} (\text{س} , \text{ص} , \text{ع})}$$

مثال ٤ : إذا كان $\text{ع} = \text{ق} (\text{س} , \text{ص})$ يحقق المعادلة

$$\text{س}^٢ \text{ع}^٢ + \text{س} \text{ص}^٢ - \text{ع}^٢ - \text{ع}^٣ + ٤ \text{ص}^٤ - ٥ = ٠$$

$$\text{أوجد} \quad \frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{س}} , \quad \frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{ص}}$$

الحل : إذا كان $\text{ف} (\text{س} , \text{ص} , \text{ع})$ مساويا للطرف الايمن من المعادلة
فن (١٦-٢٥) و (١٦-٢٦) ينتج أن :

$$\frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{س}} = - \frac{٢ \text{س} \text{ع}^٢ + \text{ص}^٢}{٢ \text{س}^٢ \text{ع} - \text{ع}^٣ + ٤ \text{ص}^٤}$$

$$\frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{ص}} = - \frac{٢ \text{س} \text{ص} + \text{ع}^٢}{٢ \text{س}^٢ \text{ع} - \text{ع}^٣ + ٤ \text{ص}^٤}$$

تمارين :

$$\text{في التمرينين ١ ، ٢ أوجد} \quad \frac{\partial \text{ف}}{\partial \text{س}} , \quad \frac{\partial \text{ف}}{\partial \text{ص}}$$

$$(١) \quad \text{ف} = \text{ل}^٢ \text{جا ك} , \quad \text{ل} = \text{س}^٣ - ٢ \text{ص}^٣ , \quad \text{ك} = \text{س} \text{ص}^٢$$

$$(٢) \quad \text{ف} = \text{ل}^٣ + \text{ل}^٢ \text{ك} - ٣ \text{ك} , \quad \text{ل} = \text{جا س ص} , \quad \text{ك} = \text{ص ل ط س}$$

$$\text{في التمرينين ٣ ، ٤ أوجد} \quad \frac{\partial \text{ف}}{\partial \text{س}} , \quad \frac{\partial \text{ف}}{\partial \text{ص}}$$

$$(٣) \quad \text{ف} = \sqrt{\text{ل}^٢ + \text{ك}^٢} , \quad \text{ل} = \text{س} \cdot \text{ص} , \quad \text{ك} = \text{ص}^٢ \cdot \text{س}$$

$$(٤) \text{ ف} = \text{ل} \cdot \text{ك} , \text{ ل} = \text{س}^2 - \text{ص}^2 , \text{ ك} = \text{س}^3 - \text{ص}^3 .$$

$$\text{في التمرينين ٥ ، ٦ أوجد } \frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{س}} , \frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{ص}} .$$

$$(٥) \text{ ع} = \text{ر} + \text{ل} \setminus \text{ك} , \text{ ر} = \text{س جتا ص} , \text{ ل} = \text{ص جتا س} , \text{ ك} = \text{س}^2 - \text{ص}^2$$

$$(٦) \text{ ع} = \text{ل} \cdot \text{ك}^2 + \text{ك ل ط هـ} , \text{ ل} = \text{س}^2 - \text{ص}^2 , \text{ ك} = \text{س}^3 - \text{ص}^3 , \text{ هـ} = \text{س}^2 - \text{ص}^2$$

$$+ \text{ص}^2$$

$$\text{في التمرينين ٧ ، ٨ أوجد } \frac{\partial \text{ر}}{\partial \text{ل}} , \frac{\partial \text{ر}}{\partial \text{ك}} , \frac{\partial \text{ر}}{\partial \text{ن}} .$$

$$(٧) \text{ ر} = \text{س}^3 + \text{ص}^3 - \text{س ص}^2 , \text{ س} = \text{ل} + \text{ك ل ط ن} , \text{ ص} = \text{ك}^2 - \text{ل ط ل ن} .$$

$$(٨) \text{ ر} = \text{س جتا ص} , \text{ س} = \text{ل}^2 - \text{ك ن ص} = \text{ك}^2 - \text{ل ن} .$$

$$(٩) \text{ أوجد } \frac{\partial \text{ض}}{\partial \text{ر}} \text{ اذا كانت } \text{ض} = \text{ل}^2 \text{ جتا ك م} , \text{ ل} = \text{س ص} \cdot$$

$$\text{ك} = \text{ط ل ط س ص ن} , \text{ م} = \text{ص ط} + \text{ر جتا س} .$$

$$(١٠) \text{ أوجد } \frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{ص}} \text{ اذا كان } \text{ط} = \text{ن}^2 \text{ ر ظا}^2 \text{ ل ك} , \text{ ن} = \text{س} + \text{ص}^2 \text{ ع}$$

$$\text{ر} = \text{س}^2 + \text{ص}^3 \text{ ع} , \text{ ل} = \text{س ع}^2 , \text{ ك} = \text{س ص} \text{ ع} .$$

$$\text{في التمارين (١١-١٤) أوجد } \frac{\partial \text{ف}}{\partial \text{ر}}$$

$$(١١) \text{ ف} = \text{س}^3 - \text{ص}^3 , \text{ س} = \text{ل} \setminus \text{ل} + \text{ر} , \text{ ص} = \text{ر} \setminus (\text{ر} + \text{ل})$$

$$(١٢) \text{ ف} = \text{ل ط} (\text{ل} + \text{ك}) , \text{ ل} = \text{ل}^2 \cdot \text{ك}^2 , \text{ ك} = \text{ر}^3 - \text{ر}^2 .$$

$$(١٣) \text{ ف} = \text{ك}^2 - \text{ط ظا ل} , \text{ ك} = \text{جتا ر}^2 , \text{ ط} = \text{جتا ر} , \text{ ل} = \text{ر}^4$$

$$(١٤) \text{ ف} = \text{س}^4 \text{ ص}^2 \text{ ع}^4 , \text{ س} = \text{ر}^2 + \text{ل} , \text{ ص} = \text{س}^3 - \text{ص}^2 , \text{ ع} = \text{ر}^5 + \text{ل}^4$$

$$\text{في كل من التمارين (١٥-١٨) أوجد ص اذا كان ص = ق (س) يحقق}$$

$$\text{المعادلة المعطاة}$$

$$(15) \quad 1 = 2^3 \text{س} + 3^2 \text{ص} + 4^3 \text{ع}$$

$$(16) \quad 0 = 2^4 \text{س} + 3^2 \text{ص} + 4^3 \text{ع} - 2^3 \text{س} - 3^2 \text{ص} - 4^3 \text{ع}$$

$$(17) \quad 4 - 3\text{ص} = \sqrt{3\text{ص}} + 6\text{س}$$

$$(18) \quad 4 = \frac{2}{3} \text{ص} + \frac{2}{3} \text{س}$$

في كل من التمارين ١٩-٢٢ أوجد $\frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{س}}$. $\frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{ص}}$ اذا كانت $\text{ع} = \text{ق}$

(س ، ص) تحقق المعادلة المعطاة

$$(19) \quad 0 = 2^3 \text{ع} - 3^2 \text{ص} + 4^3 \text{س} + 2^4 \text{ع} + 3^2 \text{ص}$$

$$(20) \quad 0 = 2^4 \text{س} + 3^2 \text{ص} - 4^3 \text{ع} + 2^3 \text{س} - 3^2 \text{ص} - 4^3 \text{ع}$$

$$(21) \quad 1 = 3^2 \text{ع} - 4^3 \text{ص} + 2^4 \text{س} + 3^2 \text{ص}$$

$$(22) \quad 4 = 2^3 \text{ع} + 3^2 \text{ص} + 4^3 \text{س}$$

(23) اذا كانت $\text{ف} = \text{ق}$ (س ، ص) ، $\text{س} = \text{رجا م}$ ، $\text{ص} = \text{رجتا م}$ اثبت أن

$$\left(\frac{\partial \text{ف}}{\partial \text{ص}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \text{ف}}{\partial \text{س}} \right)^2 = \left(\frac{\partial \text{ق}}{\partial \text{س}} \right)^2 \frac{1}{\text{ر}} + \left(\frac{\partial \text{ف}}{\partial \text{ر}} \right)^2$$

$$(24) \quad \text{اذا كانت } \text{ع} = \text{ق} \text{ (س}^2 + \text{ص}^2) \text{ اثبت أن } \left(\frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{س}} \right) \text{س} - \left(\frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{ص}} \right) \text{ص} = 0$$

(ملاحظة : افرض أن $\text{ل} = \text{س}^2 + \text{ص}^2$).

(25) اذا كانت $\text{ع} = \text{ق}$ (هـ ، ر) ، $\text{هـ} = \text{ف}$ (س ، ص) ، $\text{ر} = \text{ك}$ (س ، ص) اثبت أن

$$\frac{\partial \text{هـ}}{\partial \text{س}} \left(\frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{هـ ر}} + \frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{ر هـ}} \right) + \left(\frac{\partial \text{هـ}}{\partial \text{س}} \right) \frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{هـ}} = \frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{س}^2}$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial}}{\frac{\partial}{\partial}} + \left(\frac{\frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial}}{\frac{\partial}{\partial}} \right) \frac{\frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial}}{\frac{\partial}{\partial}} + \left(\frac{\frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial}}{\frac{\partial}{\partial}} \right) \frac{\frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial}}{\frac{\partial}{\partial}} + \left(\frac{\frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial}}{\frac{\partial}{\partial}} \right) \frac{\frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial}}{\frac{\partial}{\partial}}$$

(٢٦) اذا كانت ع ، هـ ، ر كما في التمرين ٢٥ أوجد صيغة للمشتقة $\frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial}$

(٢٧) اذا كان نصف قطر اسطوانة دائرية قائمة ر وارتفاعها ع وكان نصف القطر والارتفاع يتزايدان بمعدل ٠,٠١ انش / دقيقة ، ٠,٠٢ انش / دقيقة على التوالي . استعمل قاعدة السلسلة لايجاد معدل تزايد حجم الاسطوانة عندما يكون ر = ٤ انش وع = ١ انش . ما هو معدل تغير مساحة سطح الاسطوانة عند هذه اللحظة ؟

(٢٨) اذا كان الضلعان المتساويان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث متساوي الساقين يتزايدان بمعدل ١ ، ٠ قدم / ساعة و ٢ ، ٠ / ساعة على التوالي . استعمل قاعدة السلسلة لايجاد معدل تزايد مساحة المثلث عند اللحظة التي يكون طول كل من الضلعين المتساويين ٢٠ قدما والزاوية المحصورة بينهما ٦٠° .

(٢٩) الضغط ض ، والحجم ج ، والحرارة ت لغاز محصور تربط بينها العلاقة ض ج =

$$T \text{ حيث } T \text{ ثابتة . فاذا كان ض ، ج يتغيران بمعدل } \frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial} \text{ على}$$

التوالي استعمل قاعدة السلسلة لايجاد صيغة للمقدار $\frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial}$. اختبر جوابك

باستعمال قاعدة المضروبين للاقترانات ذات المتغير الواحد .

٣٠ — اذا كان نصف قطر القاعدة ر ، والارتفاع ع لمخروط دائري قائم يتغيران بمعدل

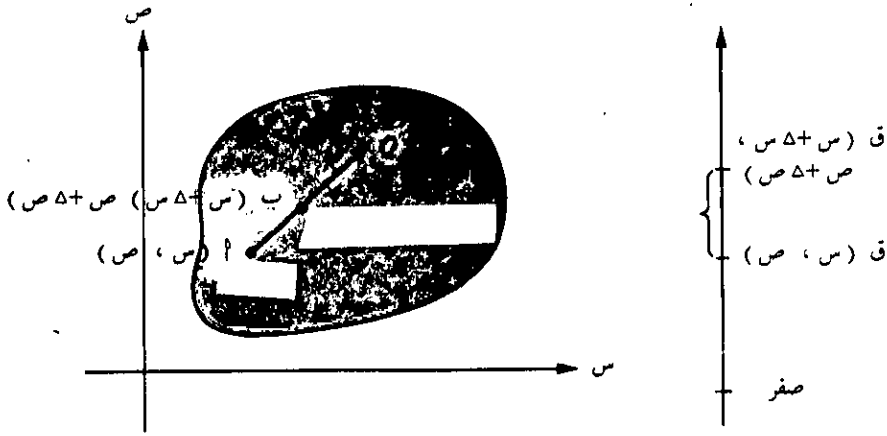
$$\frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial} \text{ ، } \frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial} \text{ على التوالي ، استعمل قاعدة السلسلة لايجاد صيغة}$$

للمقدار $\frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial} \frac{\partial}{\partial}$ حيث ج هو حجم المخروط . اختبر جوابك باستعمال طرق

المتغير الواحد .

٦ - المشتقات المتجهة :

لنعد ثانية الى المثال التوضيحي الذي فيه اعتبرنا $ع = ق (س ، ص)$ لدرجة حرارة النقطة $(س ، ص)$ من لوح ساخن ، وفي البند ٣ فسرنا المشتقات الجزئية $ق_س$ $(س ، ص)$ ، $ق_ص$ $(س ، ص)$ بمعدل تغير $ع$ عند النقطة $پ$ بالنسبة الى المسافة في الاتجاهين الأفقي والرأسي على التوالي . ويمكن تعميم هذا بالشكل التالي : اذا كانت $پ$ أى نقطة على اللوح وب $(س + \Delta س ، ص + \Delta ص)$ نقطة على المتجه $\vec{پ ب}$ كما هو موضح بالشكل (١٦ - ١٤) ، فالزيادة



(الشكل ١٦ - ١٤)

$\Delta ع = ق (س + \Delta س ، ص + \Delta ص) - ق (س ، ص)$
هي الفرق في درجة الحرارة بين النقطتين $پ$ ، $ب$
وخارج القسمة

$$(١٦-٢٧) \quad \frac{\Delta ع}{\sqrt{(\Delta س)^2 + (\Delta ص)^2}} = \frac{\Delta ع}{م (پ ، ب)} \quad (\text{حيث } م (پ ، ب))$$

$ب$ (المسافة بين $پ$ ، $ب$) هو معدل التغير في درجة الحرارة عندما تتحرك النقطة باتجاه $\vec{پ ب}$ من $پ$ الى $ب$. فمثلا اذا كانت درجة الحرارة ٥٠° عند $پ$ و ١٠٥° عند $ب$ فإن $\Delta ع = ١,٥$.

وإذا كانت م (پ ، ب) = ٣ انش فان معدل التغير في درجة الحرارة عندما تتحرك النقطة من پ الى ب هو $\Delta ع = ٠,٠٥$ درجة لكل انش .

وإذا كان لخارج القسمة (١٦ - ٢٧) نهاية عندما ب تؤول الى پ باتجاه $\overleftarrow{پ - ب}$ أي أن ($\Delta س$ ، $\Delta ص$) $\leftarrow (٠, ٠)$ فإن هذه النهاية تسمى معدل تغير ع بالنسبة الى المسافة في اتجاه المتجه $\overleftarrow{پ}$.

وإذا كان ق أي اقتران ذا متغيرين فمن الممكن استعمال النقاش السابق لتوضيح مفهوم المشتقة المتجهة للاقتران ق عند النقطة پ باتجاه پ وإذا كان اتجاه پ هو θ فان متجه الوحدة لهذا الاتجاه يعطى بالعلاقة $\overrightarrow{= جتا \theta}$ ،

جا $\theta <$ ومن هذا يتضح أن أي نقطة على الخط المار بالنقطتين پ ، ب لها الاحداثيان (س + ت جتا θ ، ص + ت جا θ) حيث ت عدد حقيقي . وإذا فرضنا أن $\Delta س = ت جتا \theta$ ، $\Delta ص = ت جا \theta$ فان

$\Delta ع = ق (س + ت جتا \theta ، ص + ت جا \theta) - ق (س ، ص)$
 $م (پ ، ب) = \sqrt{ت^2 جتا^2 \theta + ت^2 جا^2 \theta} = \sqrt{ت^2} = |ت|$
 وبالتعويض في (١٦ - ٢٧) وأخذ النهاية عندما $ت \rightarrow ٠$ نحصل على معدل التغير المطلوب في ق ، ونلخص هذه المقدمة بالتعريف التالي :

(١٦ - ٢٨) تعريف المشتقة المتجهة : إذا كانت ق اقتراناً في س ، ص ، $\overrightarrow{= و > جتا \theta}$ ، جا $\theta <$ متجه وحدة له الاتجاه θ ، فان المشتقة المتجهة للاقتران ق التي يرمز لها بالرمز $\frac{د}{دو}$ (س ، ص) تعطى بالعلاقة التالية

$$\frac{د}{دو} ق (س ، ص) = \frac{نها}{ت} \overrightarrow{= و > ت}$$

$$\frac{د}{دو} ق (س + ت جتا \theta ، ص + ت جا \theta) - ق (س ، ص)$$

ت

ومن السهولة ملاحظة ان المشتقات الجزئية الاولى عبارة عن حالات خاصة من

المشتقات المتجهة ، وفي الحقيقة اذا كانت $\theta = 0$ فان $\vec{w} = (1, 0) = \vec{e}_1$ ،
والعلاقة (١٦-٢٨) تختزل الى

$$\vec{w} \cdot \vec{q} = (ص، س) = \frac{نها}{ت}$$

$$\frac{ق (س + ت، ص) - ق (س، ص)}{ت}$$

= قس (س، ص) $\theta = \pi$ فان $\vec{w} = (0, 1) = \vec{e}_2$ ونحصل على
بالمثل اذا كانت $\theta = 0$

$$\vec{w} \cdot \vec{q} = (ص، س) = \frac{نها}{ت}$$

$$\frac{ق (س، ص + ت) - ق (س، ص)}{ت} = قس (س، ص)$$

والنظريات التالية تزودنا بصيغة لايحاد المشتقات المتجهة .

(١٦-٢٩) نظرية : اذا كان ق اقترانا اشتقاقيا ذا متغيرين ،

$$\vec{w} = \langle جتا \theta ، جا \theta \rangle$$

$$\vec{w} \cdot \vec{q} = (ص، س) = قس (ص، س) جتا \theta + قص (ص، س) جا \theta$$

البرهان : اذا كان ف اقترانا ذا متغير واحد معرفا بالعلاقة

$$ف (ت) = ق (س + ت جتا \theta ، ص + ت جا \theta)$$

فانه منه (٣-١١) و (١٦-٢٨) ينتج أن

$$(١٦-٣٠) ف (٠) = \frac{نها}{ت}$$

$$\frac{ف (ت) - ف (٠)}{ت} = \vec{w} \cdot \vec{q} = ق (س، ص)$$

وبما أن $f = (t, q, l, k)$ حيث
 $l = s + t$ جتا θ ، $k = s + t$ جا θ . فن (١٦ - ٢٣) ينتج
 أن

$$f_t(t) = q_l(t, l, k) + \frac{l}{t} q_k(t, l, k) \frac{\partial}{\partial t}$$

$$= q_l(t, l, k) \text{ جتا } \theta + q_k(t, l, k) \text{ جا } \theta .$$

وبناء على (١٦ - ٣٠) فإن المشتقة المتجهة يمكن إيجادها بوضع $t = 0$
 ويعمل هذا مع ملاحظة انه اذا كانت $t = 0$ فإن $l = s$ ، $k = s$
 نحصل على الصيغة المطلوبة في نص النظرية .

مثال ١ : اذا كان $q(s, s) = s^2 - 4s$ ص أو جد $\frac{\partial}{\partial s} q(s, s)$ اذا

كان اتجاه $\vec{u}$ هو $\frac{\pi}{3}$ ما هي قيمة $\frac{\partial}{\partial s} q(-3, 2)$ ؟

الحل : بما أن $q(s, s) = s^2 - 4s$ ، $q_s(s, s) = -$
 ٤

$\vec{u} = \langle \text{جتا } \frac{\pi}{3}, \text{جا } \frac{\pi}{3} \rangle = \langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$ فن (١٦ - ٢٩) ينتج
 أن

$$\frac{\partial}{\partial s} q(s, s) = (s^2 - 4s) \left(\frac{1}{2} \right) + (-4s) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) .$$

$$= (1 - \sqrt{3}) 2s - 2s =$$

وعند النقطة $p(-3, 2)$ فإن

$$\frac{\partial}{\partial s} q(-3, 2) = (1 - \sqrt{3}) 2(-3) - 2(2) =$$

$$= -6\sqrt{3} - 10 \approx -20.4$$

ويمكن استعمال العلاقة (١٦ - ٢٩) للتعبير عن المشتقة المتجهة كضرب قياسي
 لمتجهين كما يلي :

$$\frac{\partial}{\partial} \text{ ق (س ، ص) } = \text{ ق (س ، ص) } ، \text{ ق (س ، ص) } \text{ و}$$

وعادة يسمى المتجه الذي مركباته المشتقات الجزئية الاولى للافتزان ق (س ، ص) ،
ص) مدرج (gradient) الافتزان ق (س ، ص) ونرمز له
بالرمز ∇ ق (س ، ص) أو موج ق (س ، ص) . وبدلالة الرموز $\vec{w}_1$ ، $\vec{w}_2$
يمكن كتابة المدرج كما يلي :

$$(١٦-٣١) \quad \nabla \text{ ق (س ، ص) } = \text{ ق (س ، ص) } \vec{w}_1 + \text{ ق (س ، ص) } \vec{w}_2$$

ومن الشرح السابق نجد أن

$$(١٦-٣٢) \quad \frac{\partial}{\partial} \text{ ق (س ، ص) } = \nabla \text{ ق (س ، ص) } . \text{ و}$$

وبالكلمات : لايجاد المشتقة المتجهة للافتزان ق في اتجاه متجه الوحدة $\vec{w}$ ونضرب
مدرج الافتزان ضربا قياسيا بمتجه الوحدة $\vec{w}$ والرمز ∇ (يسمى دل) هو مؤثر
(فاعل) تفاضلي بمتجه ويرمز اليه بالعلاقة

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial} \vec{w}_1 + \frac{\partial}{\partial} \vec{w}_2$$

وله خواص مشابهة لخواص الفاعل $\frac{\partial}{\partial}$. وليس له لوحده اي معنى ولكن
اذا اثر على الافتزان ق (س ، ص) فانه يعطى افتزانا متجها ذا اتجاهين معرفا
بالعلاقة (١٦-٣١) .

مثال ٢ : أوجد المشتقة المتجهة للافتزان ق (س ، ص) = س^٣ ص^٢ عند النقطة م
(-١ ، ٢) في الاتجاه $\vec{M}$ = $\vec{w}_4 - \vec{w}_3$

الحل : من (١٦-٣١) نجد أن

$$\nabla \text{ ق (س ، ص) } = \text{ ق (س ، ص) } \vec{w}_1 + \text{ ق (س ، ص) } \vec{w}_2$$

وعلى وجه الخصوص فعند النقطة م (-١ ، ٢) نجد أن $\nabla \text{ ق (س ، ص) } =$
= $١٢ \vec{w}_1 - ٤ \vec{w}_2$ ووحدة المتجه في الاتجاه $\vec{M}$ هي

$$\overrightarrow{\left(\frac{3}{0}\right)} - \overrightarrow{\left(\frac{4}{0}\right)} = \overrightarrow{\left(\frac{1}{1}\right)} = \overrightarrow{0}$$

وهكذا فان

$$\overrightarrow{\left(\frac{5}{0}\right)} \text{ ق } (2, 1) = \nabla \text{ ق } (2, 1) = \overrightarrow{0} = \frac{12}{0} + \frac{48}{0} = 12.$$

ولنفرض ان النقطة P (س ، ص) ثابتة ولنعتبر المشتقة المتجهة $\overrightarrow{\left(\frac{5}{0}\right)}$ ق (س ، ص) عندما يكون الاتجاه لمتجه الوحدة $\overrightarrow{\left(\frac{5}{0}\right)}$ متغيرا . فلبعض قيم θ يمكن أن تكون ت المشتقة المتجهة موجبة (أي أن ق (س ، ص) تزايدية) أو ربما سالبة (أي ان ق (س ، ص) تناقصية) أو ربما صفرا . ومن المهم في معظم التطبيقات ان نجد الاتجاه الذي يكون فيه تزايد ق (س ، ص) اسرع ما يمكن ، وايضا ايجاد أكبر معدل لهذا التغير . والنظرية التالية تزودنا بهذه المعلومات .

(١٦-٣٣) نظرية : القيمة العظمى للمشتقة $\overrightarrow{\left(\frac{5}{0}\right)}$ ق (س ، ص) عند النقطة P

(س ، ص) هي | ∇ ق (س ، ص) | وتكون في اتجاه ∇ ق (س ، ص) .

البرهان : لنفرض أن γ هي الزاوية بين $\overrightarrow{\left(\frac{5}{0}\right)}$ و ∇ ق (س ، ص) وبتطبيق

$$(١٦-٣٢) \text{ و } (١٤-١٨) \text{ نجد أن}$$

$$\overrightarrow{\left(\frac{5}{0}\right)} \text{ ق } (س ، ص) = \nabla \text{ ق } (س ، ص) \cdot \overrightarrow{\left(\frac{5}{0}\right)}$$

$$= |\nabla \text{ ق } (س ، ص)| \cdot |\overrightarrow{\left(\frac{5}{0}\right)}| \cdot \cos \gamma = |\nabla \text{ ق } (س ، ص)| \cdot \cos \gamma$$

ولهذه القيمة العظمى اذا كان جتا $\gamma = 1$ أي أن $\gamma = 0$ ، وفي هذه الحالة

فان $\overrightarrow{\left(\frac{5}{0}\right)}$ لها نفس اتجاه ∇ ق (س ، ص) ، وبذلك ففي هذه الاتجاه تكون

$$\overrightarrow{\left(\frac{5}{0}\right)} \text{ ق } (س ، ص) = |\nabla \text{ ق } (س ، ص)| \cdot \cos \gamma = |\nabla \text{ ق } (س ، ص)| \cdot 1 .$$

وبطريقة مشابهة للعلاقة (١٦-٢٨) ، اذا كانت ق دالة للمتغيرات الثلاث

س ، ص ، ع وكان $\overrightarrow{\left(\frac{5}{0}\right)} = \langle \text{جتا } \alpha , \text{جتا } \beta , \text{جتا } \gamma \rangle$ وحدة متجهة

لها الزوايا الاتجاهية α , β , γ فان المشتقة المتجهة للاقتزان ق في

اتجاه $\overrightarrow{\left(\frac{5}{0}\right)}$ تعرف بالعلاقة

(۱۶-۳۴) $\frac{5}{9}$ ق (س، ص، ع) = نهـ

ق (س + ت جتا α ، ص + ت جتا β ، ع + ت جتا γ) - ق (س ، ص، ع)

ت

ويمكن استعمال (١٦ - ٣٤) لايجاد معدل التغير للاقتران ق في الاتجاه و[←] وكما في (١٦ - ٢٩) يمكن اثبات أن

(۱۶-۳۵) $\frac{3}{\alpha} \text{ ق (س، ص، ع)} = \text{قس (س، ص، ع)}$ جتا α + قص
(س، ص، ع) جتا β + قع (س، ص، ع) جتا γ . وهكذا اذا
عرفنا مدرج الاقتران ق (س، ص، ع) بالمقدار

(۱۶-۳۶) ∇ ق (س، ص، ع) = قس (س، ص، ع) هـ + قس
(س، ص، ع) و + ق (س، ص، ع) ز

(١٦-٣٧) $\frac{d}{dt} Q (S, V, E) = \Delta Q (S, V, E)$ و ←
ومن السهولة اثبات أن نظير العلاقة (١٦-٣٣) صحيح في الفراغ الثلاثي .

مثال ٣ : أوجد المشتقة المتجهة للاقتان $q(s, v, e) = s^2 - v^2 + e^2$
 s عند النقطة $p(1, -4, 3)$ في الاتجاه من p الى النقطة $b(2, 1, 1)$ ،
 $(-1, 4, 8)$.

ما هو أكبر معدل للتزايد في ق عند ٢.

الحل : المتجه الذي تمثيله الهندسي $\vec{P}$ في الفضاء الثلاثي M_3 هو

$$\vec{P} = (1, 3, 5) \text{ وهكذا فإن متجه الوحدة بالاتجاه } \vec{P} \text{ يعطي بالمقدار}$$

$$\vec{P} = \frac{(1, 3, 5)}{\sqrt{35}} \text{ ومن } (16 - 36) \text{ ينتج أن}$$

$$\nabla (س، ص، ع) = (س + ع^2) \underline{هـ} + (ع - ع) \underline{و} + (-ص + ع^2 س) \underline{ز}$$

واذن

$$\nabla \text{ ق } (1, -4, 3) = 11 - 3 + 10 = 18$$

والتطبيق (١٦-٣٧) ينتج أن

$$\nabla \text{ ق } (1, -4, 3) = 11 - 3 + 10 = 18$$

$$\frac{35\sqrt{52}}{35} = (50 + 9 - 11) (\sqrt{35} | 1) =$$

وإذا أكبر معدل للتزايد في ق عند P هو

$$\sqrt{230} = \sqrt{100 + 9 + 121} = \sqrt{(3, -4, 1) \text{ ق } (1, -4, 3)}$$

مثال ٤ : افترض أن نظاما احداثيا ثلاثيا موجودا في الفضاء بحيث أن درجة الحرارة ح عند النقطة (س، ص، ع) تعطى بالعلاقة ح = ١٠٠ \ (س^٢ + ص^٢ + ع^٢) .

(P) أوجد معدل التغير في ح عند النقطة P (١، ٣، -٢) في الاتجاه $\vec{L} = \underline{1} + \underline{3} + \underline{2}$.

(ب) ما هو الاتجاه الذي يجب ان تتحرك فيه P بحيث يكون تزايد ح اسرع ما يمكن ؟ ما هو أكبر معدل للتغير في ح عند P ؟

الحل :

(P) من التعريف فان مدرج ح هو

$$\nabla \text{ ح} = \underline{1} \frac{\partial \text{ ح}}{\partial \text{ ع}} + \underline{3} \frac{\partial \text{ ح}}{\partial \text{ ص}} + \underline{2} \frac{\partial \text{ ح}}{\partial \text{ س}}$$

وبما أن

$$\frac{\partial \text{ ح}}{\partial \text{ ص}} = \frac{-200}{(س^2 + ص^2 + ع^2)^{3/2}} = \frac{-200}{(1 + 9 + 4)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial \text{ ح}}{\partial \text{ س}} = \frac{-200}{(س^2 + ص^2 + ع^2)^{3/2}} = \frac{-200}{(1 + 9 + 4)^{3/2}}$$

$$\frac{200 - \text{ع}}{2(\text{ع} + \text{ص} + \text{س})} = \frac{\text{ع}}{\text{ح}}$$

نحصل على

$$\frac{200 - (\text{س} + \text{هـ} + \text{ص} + \text{و} + \text{ع})}{2(\text{ع} + \text{ص} + \text{س})} = \frac{\text{ح}}{\text{و}}$$

وإذا كانت $\text{ح} = \text{م}$ ترمز لقيمة و عند النقطة م (١، ٣، ٢) فإن

$$\frac{200 - (\text{هـ} + \text{و} + \text{ز})}{196} = \text{م} = \frac{\text{ح}}{\text{و}}$$

ومتجه الوحدة $\overrightarrow{\text{و}}$ بالاتجاه $\overrightarrow{\text{ل}}$ يعطي بالعلاقة

$$\overrightarrow{\text{و}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\text{هـ} + \text{و} + \text{ز})$$

وباستعمال (١٦-٣٧) نجد أن معدل تغير ح عند م في الاتجاه $\overrightarrow{\text{ل}}$ هو

$$\frac{\partial \text{ح}}{\partial \text{و}} = \text{م} = \frac{200 - (1 + 3 + 2)}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{196} = \overrightarrow{\text{و}} \approx -1, 18$$

فمثلا إذا كانت ح تقاس بالدرجات والمسافة بالبوصات فإن ح تتناقص بمعدل ١,١٨ درجة لكل بوصة عند م في الاتجاه $\overrightarrow{\text{ل}}$

(ب) يكون أكبر معدل للتغير في ح عند م في اتجاه المدرج أي أنه يكون في الاتجاه $\text{هـ} - \text{و} + \text{ز}$. وأكبر معدل لهذا التغير يساوي مقاس المدرج أي أن

$$|\text{م}| = \frac{200}{196} \sqrt{1 + 9 + 4} \approx 3, 8$$

تمارين :

في التمارين ١ - ٨ أوجد المشتقة المتجهة للاقتزان ق عند النقطة P في الاتجاه المشار

اليه :

$$(١) \text{ ق (س، ص) = س}^2 - ٥ \text{ س ص} + ٣ \text{ ص}^2، \text{ P (٣، -١) ،}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$(٢) \text{ ق (س، ص) = س}^3 - ٣ \text{ س}^2 \text{ ص} - ٣ \text{ ص}^2، \text{ P (١، -٢) ،} \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$(٣) \text{ ق (س، ص) = قو} \text{ ظا ص} \setminus \text{س}، \text{ P (٤، -٤) ،} \vec{J} = \vec{J}^2 - ٣ - \underline{و}$$

$$(٤) \text{ ق (س، ص) = س}^2 \text{ لط ص}، \text{ P (٥، ١) ،} \vec{J} = \vec{J}^2 + \underline{و} + \underline{و}$$

$$(٥) \text{ ق (س، ص، ع) = ع}^2 \text{ س ص}، \text{ P (-١، ٢، ٣) ،} \vec{J} = \vec{J}^3 + \underline{و} - \underline{و} + \underline{و}$$

$$(٦) \text{ ق (س، ص، ع) = } \sqrt{\text{س ص جاع}}، \text{ P (٤، ٩، } \frac{\pi}{4})، \vec{J} = \vec{J}^2 + \underline{و} - \underline{و} + \underline{و}$$

$$(٧) \text{ ق (س، ص، ع) = (س + ص)(ص + ع) ، P (٥، ٧، ١) ،} \vec{J} = \vec{J}^2 < ١، ٠، ٣ >$$

$$(٨) \text{ ق (س، ص، ع) = ع}^2 \text{ ظا}^{-١} \text{ (س + ص) ، P (٠، ٠، ٤) ،} \vec{J} = \vec{J}^2 < ١، ٠، ٦ >$$

في التمارين ٩ - ١٢ أوجد المشتقة المتجهة للاقتزان ق عند النقطة P في الاتجاه

من P الى ب . وأوجد ايضا الاتجاه الذي يكون فيه زيادة ق أكبر ما يمكن عند

P وأوجد أكبر معدل لهذه الزيادة .

$$(٩) \text{ ق (س، ص) = س}^2 \text{ س}^2 \text{ ص}، \text{ P (٢، ٠) ، ب (-٣، ١)}$$

$$(١٠) \text{ ق (س، ص) = جا (٢ س - ص) ، P (-\frac{\pi}{3}، \frac{\pi}{6}) ، ب (٠، ٠)}$$

$$(١١) \text{ ق (س، ص، ع) = } \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2}، \text{ P (-٢، ٣، ١) ، ب (٠، -٥، ٤)}$$

(١٢) ق (س ، ص ، ع) = $\frac{ص - ص}{ص} - \frac{ص}{ص}$ ، $\uparrow$ (٠ ، ١ - ٢) ، ب (٣ ، ١ ، ٤) - (٤) .

(١٣) وضع لوح معدني ساخن على المستوى س ص بحيث أن درجة الحرارة ح عند النقطة (س ، ص) تناسب عكسيا مع بعد هذه النقطة عن نقطة الاصل فإذا كانت درجة حرارة النقطة $\uparrow$ (٣ ، ٤) تساوي ١٠٠ ، أوجد معدل التغير في ح عند $\uparrow$ في الاتجاه هـ + و . في أي اتجاه تكون زيادة ح أسرع ما يمكن ؟ ما هو الاتجاه الذي يكون فيه معدل التغير مساويا للصفر ؟

(١٤) يمثل سطح بحيرة م بمنطقة م من المستوى س ص بحيث أن العمق (بالأقدام) تحت مستوى النقطة (س ، ص) يعطي بالعلاقة ق (س ، ص) = ٣٠٠ - ٢س - ٣ص . فإذا وجد ولد تحت النقطة $\uparrow$ (٤ ، ٩) في أي اتجاه يسبح هذا الولد حتى يكون تناقص العمق اسرع ما يمكن ؟ وفي أي اتجاه يسبح بحيث يبقى العمق ثابتا ؟

(١٥) يعطى الجهد الكهربائي ج عند النقطة $\uparrow$ (س ، ص ، ع) حيث س ، ص ، ع احداثيات ثلاثية متعامدة) بالعلاقة ج = $٢س + ٤ص + ٩ع$. أوجد معدل تغير ج عند النقطة $\uparrow$ (٢ ، ١ - ٣) في الاتجاه من $\uparrow$ الى نقطة الاصل . أوجد الاتجاه الذي يعطي أكبر معدل للتغير في الجهد عند النقطة $\uparrow$. ما هو أكبر معدل للتغير عند $\uparrow$ ؟

(١٦) وضع جسم ما في الفضاء ذي الاحداثيات الثلاثية المتعامدة حيث أن درجة الحرارة ح عند النقطة $\uparrow$ (س ، ص ، ع) تعطى بالعلاقة ح = $٤س - ٢ص + ١٦ع$.

أوجد معدل تغير ح عند النقطة $\uparrow$ (٤ ، ٢ - ١) في اتجاه المتجهة $٢هـ + ٦و - ٣ز$ في أي اتجاه تزداد ح بأسرع ما يمكن ؟ ما هي أكبر قيمة لمعدل التغير هذا ؟

(١٧) برهن العلاقة (١٦ - ٣٥)

(١٨) اثبت أن $\frac{ص}{و} = ق$ (س ، ص ، ع) = ق (س ، ص ، ع)

إذا كانت ع = ق (س ، ص ، ل) ، ل (س ، ص) حيث ق ، ل اقترانان

اشتقاقيان ، برهن كلاً من المتساويات في التمارين ١٩ - ٢٢

$$(19) \quad \nabla (ل + ع) = \nabla ل + \nabla ع$$

$$(20) \quad \nabla ع ل + ل \nabla ع = \nabla ل$$

$$(21) \quad \nabla \left(\frac{ع}{ل} \right) = \frac{ل \nabla ع - ع \nabla ل}{ل^2} , \quad ل \neq 0$$

$$(22) \quad \nabla ع^n = n ع^{n-1} \nabla ع , \quad \text{لاي عدد حقيقي } n$$

٧ — المستويات المماسية :

افرض ان السطح σ هو بيان المعادلة $F(س، ص، ع) = 0$ حيث F اقتران مشتقاته الجزئية الاولى متصلة. ولنفرض أن $M(س_1، ص_1، ع_1)$ نقطة على السطح σ حيث $F(س_1، ص_1، ع_1) = 0$ ليست كلها اصفاراً عند هذه النقطة. يعرف المماس للسطح σ عند النقطة M بمماس المنحني ط الواقع على السطح ماراً بالنقطة M . ولنفرض أن المعادلات الوسيطة لمثل هذا المنحني تعطى بالعلاقات $س = س(ر)$ ، $ص = ص(ر)$ ، $ع = ع(ر)$ وان $ر_0$ هي قيمة $ر$ المقابلة للنقطة M لجميع قيم $ر$ والنقطة $(ق)$ $(س(ر)، ص(ر)، ع(ر))$ الواقعة على ط تقع ايضا على السطح σ . وبذلك فان $F(س(ر)، ص(ر)، ع(ر)) = 0$

واذا فرضنا أن

$$م = ف(س، ص، ع) \quad \text{حيث } س = س(ر)، ص = ص(ر)، ع = ع(ر)$$

فن (١٦-٢٣)، $0 = م$ ينتج أن

$$\frac{م}{ع} \frac{\partial}{\partial ع} + \frac{م}{ص} \frac{\partial}{\partial ص} + \frac{م}{س} \frac{\partial}{\partial س} = \frac{م}{ر} \frac{\partial}{\partial ر}$$

$$0 = \frac{ع}{ر} \frac{\partial}{\partial ر}$$

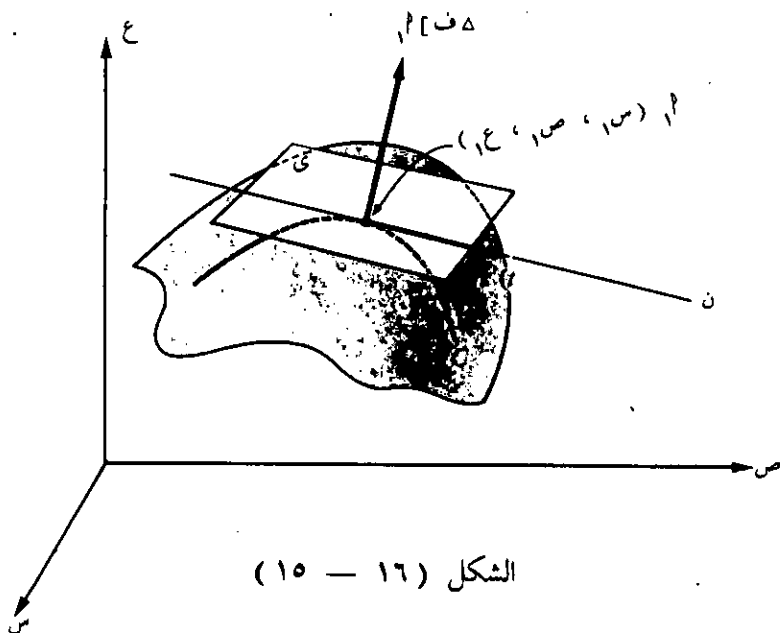
أو

فسر $(س، ص، ع)$ $ق(ر)$ + فسر $(س، ص، ع)$ $ك(ر)$ + ف $(س، ص، ع)$ $ل(ر) = 0$ وعلى وجه الخصوص فعند النقطة M ، نحصل على

فيس (س_١ ، ص_١ ، ع_١) (ق⁻(ر) + ف_ص (س_١ ، ص_١ ، ع_١) ك⁻(ر) + ف
ع (س_١ ، ص_١ ، ع_١) ل⁻(ر) = ٠ والمعادلة السابقة يمكن كتابتها مختصرة بالشكل
التالي :

$$(٣٨-١٦) \quad \nabla [ف]_P \cdot \vec{ن} = ٠$$

حيث الرمز $\nabla [ف]$ يرمز الى $\nabla [ف (س_١ ، ص_١ ، ع_١)]$
ض⁻(ر) = (ق⁻(ر) ، ك⁻(ر) ، ل⁻(ر)) . وبما أن ض⁻(ر) هو متجه
المماس للمنحنى ط عند النقطة P فان (٣٨-١٦) تبين أن المتجه $\nabla [ف]$
يكون عموديا على كل مماس ن للسطح س عند النقطة P . فالمستوى المماس
بالنقطة P والمتعامد مع المتجه $\nabla [ف]$ يسمى بالمستوى المماسي للسطح س
عند النقطة P . ويظهر الشكل (١٦-١٥) رسما توضيحياً لهذا المفهوم .
ومن العلاقة (٣٧-١٤) نجد أن معادلة المستوى المماسي هي



الشكل (١٦ - ١٥)

$$(٣٩-١٦) \quad \text{فيس (س}_1 \text{ ، ص}_1 \text{ ، ع}_1 \text{) (س - س}_1 \text{) (ع}_1 \text{ ، ص}_1 \text{ ، س}_1 \text{) ف}_{ص} \text{ (س}_1 \text{ ، ص}_1 \text{ ، ع}_1 \text{) (ص - ص}_1 \text{) (ع}_1 \text{ ، ص}_1 \text{ ، س}_1 \text{) ف}_{ع} \text{ (س}_1 \text{ ، ص}_1 \text{ ، ع}_1 \text{) (ع - ع}_1 \text{) (ع}_1 \text{ ، ص}_1 \text{ ، س}_1 \text{) ف}_{س} \text{ (س}_1 \text{ ، ص}_1 \text{ ، ع}_1 \text{) = ٠}$$

ولقد اثبتنا أن كل خط مماس ن للسطح سم عند النقطة م يقع في المستوى المماس عند م .

مثال ١ : أوجد معادلة المستوى المماس للجسم الناقصي
 $٤س + ٢ص + ٩ع - ٤٩ = ٠$ عند النقطة م (١ ، ٢ - ، ٣) .

الحل : اذا كانت ف (س ، ص ، ع) ترمز الى الطرف الايمن من المعادلة المعطاة
 فإن فس (س ، ص ، ع) = ٨س ، فس (س ، ص ، ع) =
 ١٨ص ، ف (س ، ص ، ع) = ٢ع
 وهكذا فانه عند النقطة م نحصل على

فس (١ ، ٢ - ، ٣) = ٨ ، فس (١ ، ٢ - ، ٣) = -٣٦ ، ف
 (١ ، ٢ - ، ٣) = ٦ وبالتعويض في (١٦ - ٣٩) والاختصار ينتج
 $٤س - ١٨ص + ٣ع - ٤٩ = ٠$

واذا كانت ع = ق (س ، ص) هي معادلة السطح سم وبفرض أن
 ف (س ، ص ، ع) = ق (س ، ص) - ع فإن المعادلة (١٦ - ٣٩)
 تصبح

قس (س ، ص) (١ - س) + قص (ص - ١) + (١ -)
 (ع - ١) = ٠ وهذه تكتب عادة بالشكل الآتي :

(١٦ - ٤٠) ع - ١ع = قس (س ، ص) (١ - س) + قص (ص - ١)
 (ص - ١) (ص - ١) .

والخط المستقيم العمودي على المستوى المماس للسطح سم عند النقطة م يسمى
 بالخط العمودي للسطح سم عند النقطة م . واذا كان سم هو بيان الاقتران ف
 (س ، ص ، ع) فإن العمودي للسطح يعين بالمتجه Δ ف [١٦] .

مثال ٢ : أوجد معادلة الخط العمودي للسطح الناقصي
 $٤س + ٢ص + ٩ع - ٤٩ = ٠$ عند النقطة م (١ ، ٢ - ، ٣) .

الحل : هذا البسيط هو نفس السطح المعطى بالمثال (١) . وهكذا فإن
 ∇ ف [١٦] = < ٦ ، ٣٦ - ، ٨ > .

وباستعمال (١٤ - ٣٥) نحصل على المعادلات الوسيطة التالية للخط العمودي

س = ١ + ٨ ر ، ص = - ٢ - ٣٦ ر ، ع = ٣ + ٦ ر
حيث ر عدد حقيقي . والصيغ التماثلية لهذا الخط (انظر ١٤ - ٤) هي :

$$\frac{س - ١}{٨} = \frac{ص + ٢}{٣٦ -} = \frac{ع - ٣}{٦}$$

ولنفرض أن ق اقتران في س ، ص وان س هو بيان المعادلة ع = ق (س) ،
ص (فيمكن استعمال المستوى المماس ي للسطح س عند م (س ، ص) ،
ع) لاعطاء تفسير هندسي للتفاضلة و ع = ق س (س ، ص)
Δ س + ق ص (س ، ص) Δ ص .

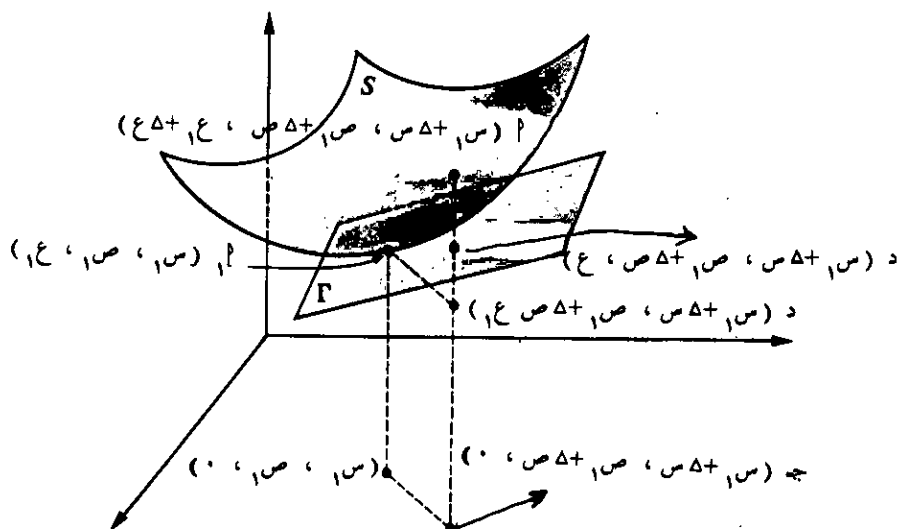
فما أن

Δ ع = ق (س ، ص) Δ س ، ص) Δ ص - ق (س ، ص)
فان النقطة م (س ، ص) Δ س ، ص) Δ ص ، ع) تقع على السطح
س . لنفرض أن ب (س ، ص) Δ س ، ص) Δ ص ، ع) تقع على المستوى
ي ولنعتبر النقطتين ج (س ، ص) Δ س ، ص) Δ ص ، ع) ، د
(س ، ص) Δ س ، ص) Δ ص ، ع) كما هو موضح بالشكل
(١٦ - ١٦) . وبما أن ب تقع في المستوى ي فان احداثياتها تحقق المعادلة
(١٦ - ٤٠) أي أن

$$ع - ع = ق س (س ، ص) (س ، ص) Δ س - س) + ق س (س ، ص) ،
(ص) (ص) Δ ص - ص)$$

= ق س (س ، ص) Δ س + ق ص (س ، ص) Δ ص = و ع .
ونتيجة لذلك فان ب ج = و ع . وبما أن د م = و ع ينتج أن ع - و ع =
د م - د ب = ب م . ومن هذا ينتج انه عند استعمال و ع لتقريب Δ ع فاننا
نفرض أن السطح س عبارة عن المستوى المماس عند النقط القريبة من م تقريبا
وكتطبيق لما سبق من النقاش في هذا البند نفرض أن جسماً ، صلباً أو سائلاً او

غازا ، قد وضع في نظام احداثي ثلاثي متعامد بحيث أن $ح = ف (س)$ ،
 $ص (ع)$ هي درجة الحرارة عند النقطة $پ (س ، ص ، ع)$. فاذا كانت $پ$ ،
 $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ نقطة ثابتة فان بيان المعادلة



الشكل (١٦-١٦)

$ف (س ، ص ، ع) = ف (س_1 ، ص_1 ، ع_1)$
هو السطح السوي (المتساوي الحرارة) $س_1$ المار بالنقطة $پ$ ، لاحظ أن درجة
حرارة كل نقطة على $س_1$ تساوي $ح_1 = ف (س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، ومن
المناسب أن نتخيل كل السطوح السوية التي يمكن الحصول عليها بأختيار نقط
مختلفة ولقد رسم في الشكل (١٦-٨) السطوح $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ المارة
بالنقط $پ_1$ ، $پ_2$ ، $پ_3$ على التوالي التي درجات حرارتها $ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ على
التوالي . ولقد اشرنا في نقاشنا السابق ان $ف [س_1]$ هو المتجه العمودي
للمستوى المماس لسطح $س_1$ عند النقطة $پ_1$. وبناء على ما ورد في البند
السابق فان الاتجاه الذي يعطى أكبر معدل للتغير في درجة الحرارة عند $پ_1$ هو
الاتجاه العمودي على السطح السوي خلال النقطة $پ_1$ أي باتجاه العمودي على
المستوى $س_1$. ويحدث وضع مشابه لهذا في نظرية الكهرباء حيث $ف (س)$ ،
 $ص (ع)$ هو الجهد عند النقطة $پ (س ، ص ، ع)$. فاذا تحرك جسم على
السطح السوية (المتساوية الجهد) يبقى الجهد ثابتا . وكما سبق فان تغير الجهد
يكون اسرع ما يمكن عندما يتحرك الجسم في الاتجاه العمودي على السطح
المتساوي الجهد .

ويمكن برهنة نتيجة مشابهة للافتراضات ذوات المتغيرين وعلى وجه الخصوص اذا اعطينا ق (س ، ص) يمكن برهنة أن أكبر معدل للتغير في ق عند النقطة P_1 (س_١ ، ص_١) يكون في الاتجاه العمودي على المنحنيات السوية جـ المارة بالنقطة P_1 فمثلا اذا كان ق (س ، ص) = ٩ - س^٢ - ص^٢ فالمنحنيات السوية هي دوائر (انظر الشكل ١٦ - ٧) وهكذا فان أكبر معدل للتغير في ق يكون باتجاه المستقيمت المارة بنقطة الاصل (لماذا ؟) . وهذا يقابل الصعود أو النزول الى اعظم جزء من بيان ق المرسوم في الشكل (١٦ - ٥) .

تمارين :

في التمارين من ١ - ١٠ أوجد معادلات كل من المستوى المماس والخط العمودي لبيان المعادلة عند النقطة P المشار اليها :

- (١) $٤س - ٢ص + ٣ع = ١٠$ ، $P (٢ ، ٣ ، ١)$
- (٢) $٩س - ٤ص - ٢ع = ٤٠$ ، $P (٤ ، ١ ، ٢٠)$
- (٣) $٤س + ٩ص = ٢٥$ ، $P (-٢ ، ١ ، ٢٥)$
- (٤) $٤س - ٢ص = ٣٦$ ، $P (٥ ، ٨ ، ٣٦)$
- (٥) $٢ص + ٢ع - ١٠س = ٥$ ، $P (٥ ، ٥ ، ١)$
- (٦) $٣س - ٢ص + ٣ع = ٦$ ، $P (١ ، ٤ ، ٣)$
- (٧) $٢س - ٥ص = ٠$ ، $P (٠ ، \frac{\pi}{٣} ، ١)$
- (٨) $٤س = ٢$ ، $P (٢ ، \frac{١}{٣} ، ٠)$
- (٩) $٢س = ٢$ ، $P (٢ ، ٠ ، ١)$

(١٠) $٤س - ٣ص + ٣ع = ١٠$ ، $P (-١ ، ٢ ، ١)$
في التمارين ١١ - ١٤ برهن ان معادلة المستوى المماس للسطح التربيعي المعطى عند النقطة P_1 (س_١ ، ص_١ ، ع_١) يمكن كتابتها بالصيغة المبينة :

$$١ = \frac{١ع}{٢ج} + \frac{١ص}{٢ب} + \frac{١س}{٢ا} ، ١ = \frac{٢ع}{٢ج} + \frac{٢ص}{٢ب} + \frac{٢س}{٢ا} \quad (١١)$$

$$(12) \quad 1 = \frac{س^2}{س_1} + \frac{ص^2}{ص_1} - \frac{ع^2}{ع_1}, \quad 1 = \frac{س^2}{س_2} + \frac{ص^2}{ص_2} - \frac{ع^2}{ع_2}$$

$$(13) \quad 1 = \frac{س^2}{س_2} - \frac{ص^2}{ص_2} - \frac{ع^2}{ع_2}, \quad 1 = \frac{س^2}{س_1} - \frac{ص^2}{ص_1} - \frac{ع^2}{ع_1}$$

$$(14) \quad ج = \frac{س^2}{س_2} + \frac{ص^2}{ص_2}, \quad ج = \frac{س^2}{س_1} + \frac{ص^2}{ص_1} - (ع + ع_1)$$

(15) أوجد النقطة الواقعة على الجسم الدوراني الزائدي $س^2 - ص^2 - ع^2 = 16$

التي عندها يكون المماس موازيا للمستوى $س^2 - ص^2 - ع^2 = 5$

(16) برهن أن مجموع مربعات مقاطع $س$ ، $ص$ ، $ع$ لكل مستوى مماس لبيان

$$س^2 + ص^2 + ع^2 = \frac{2}{3} \text{ ثابت}$$

(17) برهن أن أي خط عمودي على سطح كرة يمر بمركز هذه الكرة.

(18) أوجد النقط الواقعة على السطح الدوراني المكافيء $ع = س^2 + ص^2 = 9$ التي

عندها يكون الخط العمودي يوازي الخط المار بالنقطتين $م(2, 4)$

(3)، ب (5، 1، 2).

(19) يقال أن سطحين متعامدان عند نقطة التقاطع $م(س، ص، ع)$ إذا كان

العموديان عليهما عند النقطة $م$ متعامدين. برهن أن بياني $ق(س، ص، ع)$

$= 0$ ، $ك(س، ص، ع) = 0$ (حيث $ق، ك$ لها مشتقات تفاضلية

جزئية) متعامدان إذا وفقط إذا كان

$$قس^2 + قص^2 + قع^2 = 0$$

(20) برهن أن الكرة $س^2 + ص^2 + ع^2 = 1$ والمخروط $س^2 + ص^2 - ع^2 = 0$

متعامدان عند كل نقطة من نقط تقاطعها (انظر التمرين 19).

في التمارين 21 - 24 ارسم المتجهات السوية ج للاقتزان ق المارة بالنقطة $م$

وارسم منحني هندسيا (نقطة ابتدائه $م$) مقابلا للمتجه $\nabla ق$ [م].

(انظر التمارين 13 - 16 من البند 1).

$$(21) \quad ق(س، ص) = ص^2 - س^2، \quad م(1، 2)$$

$$(22) \quad ق(س، ص) = س^3 - ص^2، \quad م(1، 2)$$

$$(23) \quad ق (س، ص) = س^2 - ص، \quad پ (3، 5)$$

$$(24) \quad ق (س، ص) = س ص، \quad پ (3، 2).$$

في التمارين (25-28) ارسم السطوح السوية سم للاقتران ف المار بالنقطة P وارسم متجها هندسيا (نقطة بدايته P) مقابلا للمتجه ∇P (انظر التمارين 19-22 في البند 1).

$$(25) \quad ف (س، ص، ع) = س^2 + ص^2 + ع^2، \quad پ (1، 5، 2)$$

$$(26) \quad ف (س، ص، ع) = ع - س^2 - ص^2، \quad پ (2، 2، 1)$$

$$(27) \quad ف (س، ص، ع) = س + 2ص + 3ع، \quad پ (3، 4، 1)$$

$$(28) \quad ف (س، ص، ع) = س^2 + ص^2 - ع^2، \quad پ (3، 1، 1).$$

٨ — نقاط القمم للاقتانات ذوات المتغيرين :

في الجزء المتبقي من عملنا هذا نستعمل عبارة المنطقة المستطيلة لتشير الى النقط في مستو احداثي الواقعة داخل مستطيل اضلاعه موازية للمحاور. واذا اردنا شمول النقاط الواقعة على الحدود فاننا سنستعمل العبارة « منطقة مستطيلة مغلقة ». وفي اسلوب مشابه لذلك الذي استعمل في حالة المتغير الواحد، نقول أن للاقتران $ق$ و $پ$ المتغيرين نهاية عظمى محلية عند $(پ، ب)$ اذا كان هنالك منطقة مستطيلة $ط$ تحتوي $(پ، ب)$ بحيث أن $ق (س، ص) \leq ق (پ، ب)$ لجميع الازواج المرتبة $(س، ص)$ في $ط$. وتعني هذه هندسيا انه اذا كان سم هو بيان $ق$ فان نقاط النهاية العظمى المحلية تقابل النقاط المرتفعة على السطح سم. واذا كانت $ق$ موجودة فانه كما اشرنا في البند 3 يكون $ق$ ص $(پ، ب)$ هو ميل المماس للمسارم للسطح سم على المستوى $س = پ$ (انظر الشكل 16-12). وينتج من هذا انه في حالة كون $ق (پ، ب)$ نهاية عظمى محلية فان $ق ص (پ، ب) = 0$. وبالمثل فان $ق س (پ، ب) = 0$.

ويقال ان للاقتران نهاية صغرى محلية عند $(ج، د)$ اذا كان هنالك منطقة مستطيلة $ط$ تحتوي $(ج، د)$ بحيث أن $ق (س، ص) \geq ق (ج، د)$ لجميع النقاط $(س، ص)$ في $ط$. واذا كان للاقتران $ق$ مشتقات جزئية اولى، فكما سبق، كلها تساوي صفرا عند $(ج، د)$. ونقاط النهاية الصغرى المحلية تقابل النقاط المنخفضة على بيان $ق$.

ونقاط النهاية العظمى والصغرى المحلية تسمى بنقاط القمم للاقتران $ق$. واذا كان

للاقتران ق مشتقات جزئية اولى فنرى من النقاش السابق أن الأزواج التي تعطي نقاط
نهايات هي حلول للمعادلتين

$$(١٦-٤١) \quad ق (س، ص) = ٠، ق ص (س، ص) = ٠$$

مثال : اذا كان ق (س، ص) = $ص^2 + س^2$. أوجد نقاط النهايات .

الحل :

بما أن ق (س، ص) = $ص^2 + س^2$ ، ق ص (س، ص) = $٢ص$ فان
المعادلتين (١٦-٤١) هما

$$٢س = ٠، ٢ص = ٠$$

والزوج الوحيد الذي يحقق هاتين المعادلتين هو (٠، ٠) وهكذا فان ق (٠، ٠) = ٠ هو الاحتمال الوحيد للنهاية .

ولان

ق (س، ص) = $ص^2 + س^2 > ٠$ اذا كان (س، ص) $\neq (٠، ٠)$ فان للاقتران نهاية صغرى محلية عند (٠، ٠) . ويمكن ملاحظة هذه الحقيقة هندسيا بالرجوع الى بيان ع = ق (س، ص) المرسوم في الشكل (١٤-٣٥) . والمثال التالي يوضح ان ليس كل حل للمعادلتين (١٦-٤١) يعطي نقاط نهاية .

مثال ٢ :

اذا ق (س، ص) = $ص^2 - س^2$. أوجد نهاية الاقتران ق .

الحل : بما أن ق (س، ص) = $ص^2 - س^2$ ، ق ص (س، ص) = $٢ص$ فان

الاحتمال الوحيد للنهاية ق (٠، ٠) = ٠ ولكن اذا كان ص $\neq ٠$ فان

ق (٠، ص) = $ص^2 > ٠$. واذا كان س $\neq ٠$ فان ق (س، ٠) = $-س^2 < ٠$.

>

وهكذا فان كل منطقة مستطيلة في المستوى س ص تحتوي (٠، ٠) تحتوي نقاطا عندها تكون القيم العددية للاقتران أكبر من ق (٠، ٠) ونقاطا عند القيم اقل من ق (٠، ٠) . وبذلك فلا يوجد أي نقاط نهاية للاقتران ق . وهذا واضح من بيان ع = ق (س، ص) (انظر الشكل ١٤-٤٥) .

والاختبار التالي يفيد في الحالات الأكثر تعقيدا . وهو يقابل اختبار المشتقة الثانية في حالة الاقترانات ذوات المتغير الواحد .

(١٦-٤٢) اختبار لايجاد نقاط النهايات : افرض أن للاقتران ق ذا المتغيرين مشتقات

جزئية متصلة من الرتبة الثانية في منطقة مستطيلة م ولنفرض ايضا أن
ك (س ، ص) = ق س س (س ، ص) ق ص ص (س ، ص) - [ق س ص (س ، ص)]^٢

لجميع النقاط (س ، ص) في م . فإذا كانت (ب ، ب) في م ، قس (ب ، ب) = ٠

فان العبارات التالية صحيحة

(١) ق (ب ، ب) نهاية عظمى محلية للاقتران ق اذا كان ك (ب ، ب) < .
ق س س (ب ، ب) > .

(٢) ق (ب ، ب) نهاية صغرى محلية للاقتران ق اذا كان ك (ب ، ب) < .
ق س س (ب ، ب) < .

(٣) ق (ب ، ب) ليست نهاية محلية للاقتران ق اذا كان ك (ب ، ب) > .

البرهان : نبرهن : (١) ونترك (٢) ، (٣) كتمارين . بما أن ق س س (ب ، ب) > .

ك (ب ، ب) < . ، والمشتقات الجزئية الثانية متصلة فان هنالك منطقة

مستطيلة ط تحتوي (ب ، ب) بحيث أن ق س س (س ، ص) > . ، ك

(س ، ص) < . لجميع النقاط (س ، ص) في ط والشرط قس (ب ، ب)

ب = ٠ ، ق ص (ب ، ب) = ٠ يعطي أن $\lim_{(س،ص) \rightarrow (ب،ب)} \frac{ق(س،ص) - ق(ب،ب)}{س - ب} = ٠$ لاي وحدة

متجهة . وسنثبت (١) ببرهنة أن $\lim_{(س،ص) \rightarrow (ب،ب)} \frac{ق(س،ص) - ق(ب،ب)}{س - ب} = ٠$ اذا كانت

(س ، ص) في ط . لأنه اذا كان هذا صحيحا فان المشتقة المتجهة $\vec{\nabla} ق$

(س ، ص) تتناقص في اتجاه $\vec{واي}$. وهذا يبين أن ق (س ، ص) > .

تتناقص في أي اتجاه من (ب ، ب) أي ق (ب ، ب) هي نقطة نهاية

عظمى محلية للاقتران ق في المستطيل ط .

ولتبسيط الرموز نفرض ع = ق (س ، ص) ونرمز الى قس (س ، ص)

ص ، ق س س (س ، ص) ، ق ص ص (س ، ص) وهكذا بالرموز

ع_س ، ع_س س ، ع_س س على التوالي . واذا كانت $\leftarrow$ (جتا θ ، جا θ)
فان من (٩-١٦) ينتج أن

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (س ، ص) \right) = ع_{س} \text{ جتا } \theta + ع_{ص} \text{ جا } \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (س ، ص) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (س ، ص) \right) \frac{\partial}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (س ، ص) \right) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$= (ع_{س} \text{ جتا } \theta + ع_{ص} \text{ جا } \theta) \text{ جتا } \theta + (ع_{س} \text{ جا } \theta + ع_{ص} \text{ جتا } \theta) \text{ جا } \theta$$

وباستعمال $ع_{ص} = ع_{س}$ ينتج :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (س ، ص) \right) = ع_{س} \text{ جتا } \theta^2 + ع_{ص} \text{ جا } \theta^2 + ع_{ص} \text{ جا } \theta^2 + ع_{س} \text{ جتا } \theta^2$$

وباكمال المربع يمكن كتابة هذا المقدار على الشكل التالي :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (س ، ص) \right) = ع_{س} \text{ جتا } \theta^2 + ع_{ص} \text{ جا } \theta^2 + ع_{ص} \text{ جا } \theta^2 + ع_{س} \text{ جتا } \theta^2$$

ك (س ، ص)

بما أن ق_س س ، ك (س ، ص) < . على المنطقة المستطيلة ط ، وبما أن ليس
كل من جتا θ ، جا θ يساوي صفرا في الوقت الواحد فان
 $\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (س ، ص) \right) > .$ لجميع النقاط (س ، ص) في ط . وهذا هو
المطلوب برهانه .

لاحظ أن اذا كان ك (ب ، ب) < . فان ق_س س (ب ، ب) ق_ص ص
(ب ، ب) موجبا وهكذا فان ق_س س (ب ، ب) ، ق_ص ص (ب ، ب) لهما
نفس الاشارة واذن يمكن استبدال ق_س س (ب ، ب) بالقيمة ق_ص ص (ب ، ب)
ب (ب) في كل من (ب) ، (ب) اذا كان ك (ب ، ب) = 0 . فان هذا الاختبار لا

يعطينا أي معلومات وفي هذه الحالة من الضروري أن نستعمل طريقة مباشرة
كتلك الموضحة في المثالين ١ ، ٢ .

مثال : اذا كان ق (س ، ص) = $س^2 - ٤س ص + ٣ص^2 + ٤ص$. أوجد نهايات
الاقتران ق .

الحل :

بما أن ق(س ، ص) = $س^2 - ٤س ص + ٣ص^2 + ٤ص$ فان المعادلتين (١٦ - ٤١) هما

$$٢س - ٤ص = ٠ ، \quad -٤س + ٣ص + ٤ = ٠$$

وحل هاتين المعادلتين يعطينا الزوجين (٤ ، ٢) ، ($\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$) .

والمشتقات الجزئية الثانية للاقتران ق هي

$$ق_س = (س ، ص) = ٢ ، \quad ق_ص = (س ، ص) = -٤ . \quad ق_صص = ٦$$

واذن فإن ك (س ، ص) = $١٢ص - ١٦$. وبما أن ك ($\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$) = -٨ فن

(ج) في (١٦ - ٤٢) ينتج أن ق ($\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$) ليست نقطة نهاية للاقتران ق ،

وبما أن ق (٢ ، ٤) = ٢٨ ، ق_سس (٢ ، ٤) = ٢ . فن (ب) في

(١٦ - ٤٢) نرى أن النهاية الصغرى المحلية للاقتران ق هي ق (٢ ، ٤) = ٠

واخيرا يمكن اثبات انه اذا كان الاقتران ق ذو المتغيرين متصلا في منطقة

مستطيلة مغلقة ط فإن للاقتران ق نهاية عظمى مطلقة ق (١ ، ب) ونهاية

صغرى مطلقة ق (ج) ب عند بعض النقاط (١ ، ب) ، (ج ، د) في ط

يعني أن

$$(١٦ - ٤٣) \quad ق (ج ، د) \geq ق (س ، ص) \geq ق (١ ، ب)$$

لكل النقاط (س ، ص) في ط . ويمكن ايجاد البرهان في كتب التفاضل

والتكامل المتقدمة .

التمارين :

في التمارين ١ - ١٠ أوجد نقاط النهايات للاقتران ق .

$$(١) \quad ق (س ، ص) = س^2 + ٢س ص + ٣ص^2$$

- (٢) ق (س ، ص) = س^٢ - ٢ س ص - ص^٢ - ٦ س
- (٣) ق (س ، ص) = س^٣ + ٣ س ص - ص^٣
- (٤) ق (س ، ص) = ٤ س^٣ - ٢ س^٢ ص + ص^٢
- (٥) ق (س ، ص) = (٤ ص + ٢ س^٢ + ٨ س) س ص
- (٦) ق (س ، ص) = س \ (س + ص)
- (٧) ق (س ، ص) = جاس + جاص + جا (س + ص) ، ٠ ≥ س ≥ ٢ π ، ٠ ≥ ص ≥ ٢ π .
- (٨) ق (س ، ص) = (س + ص + ١)^٢ (س^٢ + ص^٢ + ١)
- (٩) ق (س ، ص) = ص س^٢ + ص^٣ - ٤ س^٢
- (١٠) ق (س ، ص) = س^٢ - ٦ س جتا ص + ٩ .
- (١١) أوجد اقصر مسافة من النقطة P (٢ ، ١ ، - ١) الى المستوى ٤ س - ٣ ص + ع = ٥ .
- (١٢) أوجد اقصر مسافة بين المستويين ٢ س + ٣ ص - ع = ٢ ، ٢ س + ٣ ص - ع = ٤ .
- (١٣) أوجد النقاط الواقعة على بيان س ص^٣ ع^٢ = ١٦ والقريبة من نقطة الاصل .
- (١٤) أوجد الاعداد الحقيقية الثلاثة التي مجموعها ١٠٠٠ وحاصل ضربها أكبر ما يمكن .

(١٥) اذا كان حجم صندوق مفتوح ثابتا ج ما هي أبعاده التي تجعل مساحته أصغر ما يمكن .

(١٦) اذا كانت مساحة صندوق مفتوح ثابتة ، P ، ما هي ابعاد الصندوق التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن .

(١٧) أوجد أبعاد أكبر متوازي المستطيلات أوجه موازية للمستويات الاحداثية وهو محتوى داخل الجسم الناقصي ١٦ س^٢ + ٤ ص^٢ ع^٢ = ١٤٤ .

(١٨) عمم التمرين ١٧ الى أي جسم ناقصي $1 = \frac{س^2}{٢٢} + \frac{ص^2}{٢ب} + \frac{ع^2}{٢ج}$

(١٩) أوجد ابعاد أكبر متوازي مستطيلات تقع ثلاثة من أوجهه في المستويات الاحداثية ويقع واحد من رؤوسه عند نقطة الاصل ، ورأس آخر في الثمن الاول على

المستوى ٤ س + ٣ ص + ع = ١٢ .

(٢٠) عمم القرين ١٩ لاي مستوى $\frac{س}{٩} + \frac{ص}{ب} + \frac{ع}{ج} = ١$ حيث ١ ، ب ، ج ، ع ، ص ، ثالثة اعداد حقيقية موجبة .

۹ — مضروبات لاجرانج :

يمكن تعميم تعاريف نقاط النهايات المحلية المعطاة في البند السابق لتشمل الاقتران
 ق الذي يعتمد على أكثر من متغيرين وعلاوة على ذلك ، فإن كانت $f = q$ (س ،
 ص ، ع ، ٠٠٠) لها مشتقات جزئية اولى فإنه يمكن اثبات أن النهايات العظمى
 والصغرى المحلية تحدث عند (س ، ص ، ع ، ٠٠٠) فقط اذا كان
 $f = ٠$ ، $f_v = ٠$ ، $f = ٠$ ، $f = ٠$ ، ٠٠٠

ونجد من الضروري في كثير من التطبيقات إيجاد النهايات المحلية للاقتراح عندما تكون المتغيرات s ، v ، e ، $\dots$ محددة بطريقة ما. وكنوضح لذلك. نعتبر المثال التالي :

مثال ١ : أوجد حجم أكبر صندوق أوجهه موازية للمستويات اللاحداثية وهو محنوى

داخل المجسم الناقصى ١٦س + ٤ص + ٩ع = ١٤٤

قبل البداية بالحل نلاحظ من التماثل انه يكفي أن نفحص ذلك الجزء الموجود في الثمن الاول ، كما هو موضح في الشكل (١٦ - ١٧) . فاذا كان ρ (س ، ص ، ع) هو الرأس المشار اليه فأن حجم الصندوق ح يعطي بالعلاقة $ح = ٨س ص ع$.

وهدفنا هو إيجاد أكبر قيمة للحجم ج تحت الشرط

$$= 144 - 269 + 2ص4 + 2س16$$

وبحل هذه المعادلة للمتغير x ولتعويض في صيغة الحجم J نحصل على

ج = (۸ س ص) $\frac{1}{3}$ $\sqrt{144 - 16 س ۴ ص}$

ويمكن إيجاد نقاط النهايات باستعمال (١٦ - ٤٢) . وهذه الطريقة معقدة

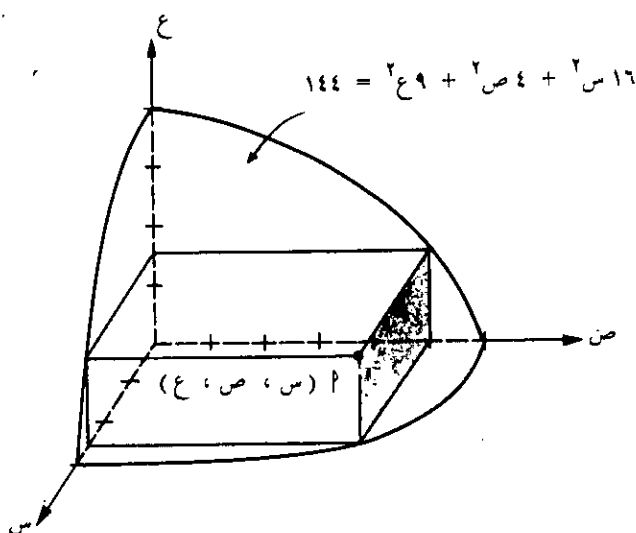
بسبب صعوبة الحسابات في إيجاد المشتقات الجزئية للاقتراح ج ولها عيب آخر

هو صعوبة الحل للمتغير ع في بعض الحالات . ايسط من ذلك أن نستعمل

طريقة مضروبات لاجرانج التي اكتشفها الرياضي الفرنسي جوزيف لاجرانج

(١٧٣٦ - ١٨١٣). وسنطى وصفا مختصرا لهذه الطريقة ومن ثم نطبقها على

المثال ١ .



الشكل ١٦ - ١٧

لنفرض ان $ق$ ، $ك$ اقترانان في $س$ ، $ص$ ، $ع$ ونرغب في إيجاد النهايات المحلية للاقتران $ق (س ، ص ، ع)$ تحت الشرط $ك (س ، ص ، ع) = ٠$ وعلاوة على ذلك نفرض انه يمكن حل المعادلة الأخيرة للمتغير $ع$ ونحصل على $ع = ل (س ، ص)$ وان $ل$ ، $ق$ ، $ك$ لها مشتقات جزئية اولى متصلة خلال مجال مناسب . ولنعرف اقترانا جديدا ذا متغيرات اربع بالعلاقة

$$(١٦-٤٤) \quad ف = ق (س ، ص ، ع) + ل (س ، ص ، ع) ك (س ، ص ، ع) .$$

حيث المتغير $ل$ يسمى بمضروب لاجرانج . ونظرية لاجرانج تنص على أن قيم $س$ ، $ص$ ، $ع$ التي تعطي النهايات للاقتران $ق$ تقع ضمن حلول المعادلات الاربع ذوات الاربع مجاهيل التالية

$$(١٦-٤٥) \quad \begin{aligned} ٠ &= ف_{س} ، ٠ = ف_{ص} ، ٠ = ف_{ع} ، ٠ = ف_{ل} \\ &= ك (س ، ص ، ع) + ل (س ، ص ، ع) ك_{س} (س ، ص ، ع) \\ &= ك (س ، ص ، ع) + ل (س ، ص ، ع) ك_{ص} (س ، ص ، ع) \\ &= ك (س ، ص ، ع) + ل (س ، ص ، ع) ك_{ع} (س ، ص ، ع) \end{aligned}$$

وسنعتي برهانا جزئيا لهذه الحقيقة ، وكمساعدة لتبسيط الرموز نفرض أن $هـ = ق (س ، ص ، ع)$ ، $و = ك (س ، ص ، ع)$ ، $ع = ل (س ، ص)$ واذا اعتبرنا أن $ع$ دالة للمتغيرين المستقلين $س$ ، $ص$ وطبقنا قاعدة السلسلة فعند نقطة نهاية محلية للاقتران $ق$ نجد أن

$$\begin{aligned} ق_{س} (س ، ص ، ع) &= هـ_{س} + هـ_{ع} ع_{س} = ٠ \\ ق_{ص} (س ، ص ، ع) &= هـ_{ص} + هـ_{ع} ع_{ص} = ٠ \end{aligned}$$

ونتيجة لذلك ، اذا كانت هـ ع $\neq 0$ فان

$$ع س = - \frac{هـ س}{هـ ع} ، ع ص = - \frac{هـ ص}{هـ ع}$$

واذا كانت و ع $\neq 0$ فان (١٦-٢٥) تعطى ان

$$ع س = - \frac{و س}{و ع} ، ع ص = - \frac{و ص}{و ع}$$

وبمساواة مقادير ع س ، ع ص نحصل على

$$(١٦-٤٦) هـ س و ع = هـ ع و س ، هـ ص و ع = هـ ع و س$$

والمعادلتان الاخيرتان مع المعادلة و = ٠ هي ثلاث معادلات في ثلاثة مجاهيل
حلونها تحوي قيم س ، ص ، ع التي تعطي نهايات الاقتران ق . واذا كتبنا ف =
هـ + ل وكما في (١٦-٤٤) ، فن (١٦-٤٥) نرى أن النهايات تعطي
بحلول المعادلات الاربع التالية في المجاهيل الاربعة

$$ف س = هـ س + ل و س = ٠$$

$$ف ص = هـ ص + ل و ص = ٠$$

$$ف ع = هـ ع + ل و ع = ٠$$

$$ف ل = و = ٠$$

وبفرض أن مشتقات و الجزئية ليست ظفرا نجد أن

$$ل = - \frac{هـ س}{و س} = - \frac{هـ ص}{و ص} = - \frac{هـ ع}{و ع}$$

وهذه تعطينا (١٦-٤٦) ايضا . وهكذا فان استعمال طريقة مضروب
لاجرانج يوصلنا الى نهايات ق ايضا .

الحل : (انظر المثال ١) : اذا فرضنا أن

$$ج = ق (س ، ص ، ع) = ٨ س ص ع$$

$$ك (س ، ص ، ع) = ١٦ س + ٤ ص + ٩ ع - ١٤٤$$

فان (١٦-٤٤) تصبح

ف = ٨س ص ع + (١٦س^٢ + ٤ص^٢ + ٩ع^٢ - ١٤٤)
وان المعادلات في (١٦-٤٥) هي

$$\left. \begin{aligned} \text{ف س} &= ٨\text{ص ع} + ٣٢\text{س} \lambda = ٠ \\ \text{ف ص} &= ٨\text{س ع} + ٨\text{ص} \lambda = ٠ \\ \text{ف ع} &= ٨\text{س ص} + ١٨\text{ع} \lambda = ٠ \\ \text{ف} \lambda &= ١٦\text{س}^٢ + ٤\text{ص}^٢ + ٩\text{ع}^٢ - ١٤٤ = ٠ \end{aligned} \right\} (١٦-٤٧)$$

بضرب المعادلة الاولى في س ، والثانية في ص والثالثة في ع ومن ثم الجمع نحصل على

$$\begin{aligned} ٢٤\text{س ص ع} + ٢\lambda (١٦\text{س}^٢ + ٤\text{ص}^٢ + ٩\text{ع}^٢) &= ٠ \\ \text{فهذه مع المعادلة الرابعة في (١٦-٤٧) تنتج أن} \\ ٢٤\text{س ص ع} + ٢\lambda (١٤٤) &= ٠ \text{ أو } \text{س ص ع} = \lambda \backslash ١٢ \\ \text{ويمكن استعمال العلاقة الاخيرة لايحاد س ، ص ، ع فثلا اذا بدأنا بالمعادلة} \\ \text{الاولى في (١٦-٤٧) نحصل على} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٨\text{س ص ع} + ٣٢\text{س}^٢ \lambda &= ٠ \\ ٨ (١٢ - \lambda) + ٣٢\text{س}^٢ \lambda &= ٠ \\ -٣٢\lambda + (٣ - \text{س}^٢) \lambda &= ٠ \\ \text{وهكذا ، فاما } \lambda = ٠ \text{ أو } \lambda = \sqrt{٣} . \text{ ويمكن أن نرفض } \lambda = ٠ \text{ لأن} \\ \text{س ص ع في هذه الحالة يساوي صفرا وبذلك فان ج} &= ٨\text{س ص ع} = ٠ \\ \text{وبنفس الطريقة نستعمل المعادلتين الثانية والثالثة في (١٦-٤٧) ونحصل على} \\ \text{ص} &= \sqrt{٣} \lambda = ٢ \end{aligned}$$

ع = ٤ / $\sqrt{٣}$ على التوالي . فيكون الحجم
ج = ٨ / $\sqrt{٣}$ ، ٢ / $\sqrt{٣}$ ، ٤ / $\sqrt{٣}$ = ٦٤ / $\sqrt{٣}$
وكتوضيح آخر أن ق (س ، ص ، ع) هي درجة الحرارة أو كتلة أو جهد أو
أي كمية قياسية عند النقطة (س ، ص ، ع) في نظام احداثي ثلاثي
متعامد . ومن ثم يمكن أن نبحث هل يحصل للاقتزان ق (س ، ص ، ع)
نهاية عظمى أو نهاية صغرى محلية على سطح ما . والمسألة الرياضية المقابلة لهذه
المسألة موضحة في المثال التالي :

مثال ٢ : اذا كان ق (س ، ص ، ع) = $٤س^٢ + ٣ص^٢ + ٥ع^٢$ أوجد النقطة الواقعة على المستوى $٢س + ٣ص + ٤ع = ١٢$ التي عندها تكون ق (س ، ص ، ع) لها اصغر قيمة .

الحل : نرغب في ايجاد القيمة الصغرى للاقتزان ق (س ، ص ، ع) بشرط أن ك (س ، ص ، ع) = $٢س + ٣ص + ٤ع - ١٢ = ٠$ وكما في (١٦ - ٤٤) اذا فرضنا أن

ف = $٤س^٢ + ٣ص^٢ + ٥ع^٢ + \lambda (٢س + ٣ص + ٤ع - ١٢)$ فان المعادلات (١٦ - ٤٥) هي

$$٠ = ٨س + ٢\lambda$$

$$٠ = ٦ص + ٣\lambda$$

$$٠ = ١٠ع + ٤\lambda$$

$$٠ = ٢س + ٣ص + ٤ع - ١٢$$

فالمعادلات الثلاثة الاولى تعطي

$$\lambda = -٤س = -٣ص = -١٠ع$$

ونتيجة لذلك فللنهاية المحلية نحتاج الى

$$ص = ٦س ، ع = ٨س$$

وبالتعويض في المعادلة $٢س + ٣ص + ٤ع - ١٢ = ٠$ نحصل على

$$٢س + ١٨س + \frac{٣٢}{٥}س - ١٢ = ٠$$

$$\frac{٥}{١١}س = ٠ \text{ . وهكذا فان } ص = \left(\frac{٥}{١١} \right) ٦ ، ع = \left(\frac{٨}{٥} \right)$$

$$\frac{٨}{١١} = \left(\frac{٥}{١١} \right)$$

وهكذا فان القيمة الصغرى تكون عند النقطة $\left(\frac{٨}{١١} ، \frac{٣٠}{١١} ، \frac{٥}{١١} \right)$

نجد في بعض التطبيقات أكثر من شرط . فمثلا اذا اردنا إيجاد النهايات المحلية للاقتران ق (س ، ص ، ع) تحت الشرطين التاليين
ك (س ، ص ، ع) = ٠ ، ل (س ، ص ، ع) = ٠
فطريقة مضروببات لا جرانج تنص على انه اذا فرضنا ان
ف = ق (س ، ص ، ع) + ل (س ، ص ، ع) + م (س ، ص ، ع)

حيث ل ، م متغيران فان قيم س ، ص ، ع التي تعطي نهاية ق تقع ضمن حلول المعادلات الخمس التالية في المجاهيل الخمسة .
ف = ٠ ، ص = ٠ ، ع = ٠ ، ف = ٠ ، ل = ٠ ، م = ٠
ويمكن تعميم مضروببات لاجرانج لتشمل اقترانات تعتمد على أكثر من ثلاثة متغيرات وتحت أي عدد من الشروط . وعلى القاريء أن يرجع الى كتب متقدمة في التفاضل والتكامل لدراسة هذه الحالة العامة .

مثال ٣ : اذا كان ج يرمز الى القوس الموجود في الثمن الاول من المنحنى (الناتج عن تقاطع الجسم المكافئ $z = 16 - s^2 - t^2$ والمستوى $s + t = 4$.
أوجد على القوس ج اقرب النقط الى نقطة الاصل وابعدا عنها . أوجد ايضاً اقصر مسافة واطول مسافة من نقطة الاصل الى ج .

الحل : رسم القوس ج في الشكل (١٦ - ١٨) فاذا كانت λ (س ، ص ، ع) أي نقطة على ج فاننا نرغب في إيجاد أكبر واصغر قيمة للمقدار

$$F(\lambda, s, t) = \sqrt{s^2 + t^2 + (16 - s^2 - t^2)^2}$$

وهذا يكافئ إيجاد نهايات الاقتران

$$Q(s, t, \lambda) = s^2 + t^2 + (16 - s^2 - t^2)^2$$

تحت الشروط الجانبية التالية

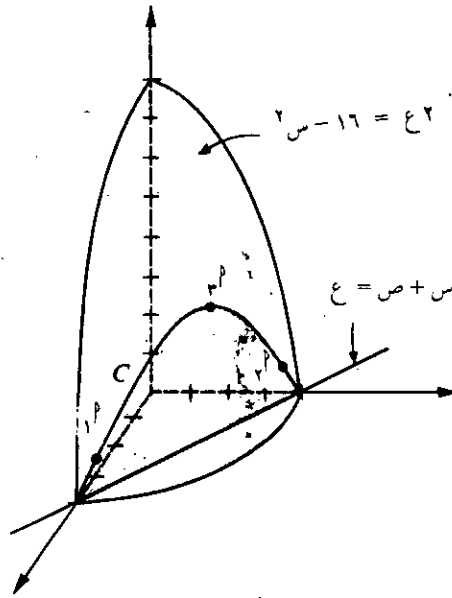
$$K(s, t, \lambda) = s^2 + t^2 + (16 - s^2 - t^2)^2 = 0$$

$$L(s, t, \lambda) = s + t - 4 = 0$$

فاذا فرضنا أن

$$F = (s^2 + t^2 + (16 - s^2 - t^2)^2) + \lambda(s + t - 4) - \mu(s^2 + t^2)$$

+ (٤ - ص) فان قيم س ، ص ، ع المطلوبة هي حلول المعادلات



الشكل ١٦ - ١٨

$$0 = \mu + \lambda \quad \text{ف} \quad x^2 + z^2 = \mu + \lambda$$

$$0 = \mu + \lambda \quad \text{ف} \quad x^2 + z^2 = \mu + \lambda$$

$$0 = \lambda + x^2 = \text{ف} \quad x^2 = -\lambda$$

فن المعادلتين الاولين نحصل على

$$0 = \text{ف} - \text{ف} = x^2 + z^2 - (x^2 + z^2) = 0 \quad \text{واذا فان}$$

$$0 = (x + z)(x - z)$$

$$\text{وهكذا فاما } x = 1 \text{ أو } z = 1$$

$$\text{فاذا كانت } x = 1 \text{ فان } x^2 + z^2 = 1 + z^2 = 1 \quad \text{وبذلك فان } z = 0$$

والشرط الجانبي الاول يعطي أن $x^2 + z^2 = 14 - x^2 + z^2 = 0$ ويحل هذه المعادلة

$$\text{مع المعادلة } x + z = 14 \quad \text{نرى أن } x = 14 - z \quad \text{فان } x^2 + z^2 = 14^2 - 28z + z^2 + z^2 = 0$$

والتي يمكن أن تعطينا نهايات هي

$$(1, 14 - 2, 14 + 2), (1, 14 - 2, 14 - 2)$$

والمسافات المقابلة من نقطة الاصل وهي

$$م (و، پ) = ١٥٧ = م (و، پ).$$

واذا كان $س = ص$ فباستعمال الشروط الجانبية نحصل على $پ (٢، ٢، ٤)$

$$م (و، پ) = ٦٧٢.$$

وبالرجوع الى الشكل (١٦-١٨) يمكن أن نحصل على المشاهدات

التالية . عندما تتحرك نقطة حركة استمرارية على المنحنى جـ من النقطة $پ$

$(٤، ٠، ٠)$ الى ب $(٠، ٤، ٠)$ فانه مسافتها عن نقطة الاصل تبدأ

بالقيمة $م (و، پ) = ٤$ وتتناقص الى قيمة صغرى ١٥٧ عند $پ$ ومن ثم تتزايد

الى نهاية عظمى ٦٧٢ عند $پ$. ومن ثم فان المسافة تتناقص الى ١٥٧ عند $پ$

وتتزايد مرة ثانية الى ٤ عند ب

وكفحص للحل ، لاحظ ان المعادلات الوسيطة للمنحنى جـ هي

$$س = ٤ - ر، ر = ص، ع = ٤ - ر - ر^٢$$

حيث . $٤ \geq ر \geq ٠$. وفي هذه الحالة فان

$$ق (س، ص، ع) = (٤ - ر) + ر + ٢(٤ - ر - ر^٢) = ٢(٢ - ر + ر^٢).$$

ونهاية ق يمكن ايجادها بطريقة المتغير الواحد . وسوف نترك للقاريء اثبات أن

نفس النقطة يمكن استنباطها بهذه الطريقة .

تمارين :

في التمارين ١ - ١٠ استعمل مضروبات لاجرانج لايجاد النهايات المحلية للاقتزان ق

المعطى تحت الشروط المذكورة .

$$١) ق (س، ص) = ص^٢ - ٤سص + ٤س^٢، س^٢ + ص^٢ = ١$$

$$٢) ق (س، ص) = ٢س^٢ + سص - ص^٢ + ٢ص، س^٢ + ص^٢ = ١$$

$$٣) ق (س، ص، ع) = س + ص + ع، س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٢٥$$

$$٤) ق (س، ص، ع) = س^٢ + ص^٢ + ع^٢، س + ص + ع = ٢٥$$

$$٥) ق (س، ص، ع) = س^٢ + ص^٢ + ع^٢، س - ص + ع = ١$$

$$٦) ق (س، ص، ع) = س + ٢ص - ع^٣، ع = ٤س^٢ + ص^٢$$

$$٧) ق (س، ص، ع) = س^٢ + ص^٢ + ع^٢، س - ص = ١، ع - ٢ص = ١$$

$$٨) ق (س، ص، ع) = ع - س^٢ - ص^٢، س + ص + ع = ١، س^٢ +$$

$$ص^٢ = ٤$$

٩ (ق (س ، ص ، ع ، ن) = س ص ع ن ، س - ع = ٢ ، ص + ن = ٤

١٠ (ق (س ، ص ، ع ، ن) = س + ص + ع + ن + ٢ ، س + ص + ع + ٢ =

١ ، ٢ س - ع + ن = ٢ ، ص + ع + ٣ + ن = ١ - .

١١ (أوجد اقرب نقطة الى النقطة (٢ ، ٣ ، ٤) تقع على سطح الكرة س + ص + ع = ٩ .

١٢ (اذا كان جـ يرمز الى خط تقاطع المستويين ٣ س + ٢ ص + ع = ٦ ،

س - ٤ ص + ٢ ع = ٨ ، فما اقرب نقطة الى نقطة الاصل تقع على الخط

جـ .

١٣ (يراد صنع صندوق مغلق حجمه ٢ قدم مكعب فاذا كانت كلفة القدم المربع من

المادة المستعملة في الجوانب والقاعدة والغطاء دولارا ، ودولارين و $\frac{3}{4}$ دولار على

التوالي ، فما هي ابعاد الصندوق التي تجعل الكلفة اقل ما يمكن .

١٤ (أوجد حجم أكبر صندوق تقع ثلاثة من رؤوسه على المحاور س ، ص ، ع الموجبة

على التوالي ويقع الرأس الرابع على المستوى ٢ س + ٣ ص + ٤ ع = ١٢ .

١٥ (يراد صنع وعاء اسطواني دائري قائم طرفه العلوي مغلق ، فاذا كانت مساحة

سطحه ثابتة وتساوي ١ ، فما هي الابعاد التي تجعل الحجم أكبر ما يمكن .

١٦ (برهن أن المثلث الذي مساحته أكبر ما يمكن وله محيط ثابت ١ يكون متساوي

الاضلاع (ارشاد : اذا كانت اضلاع المثلث س ، ص ، ع واذا كان $ل = \frac{1}{2}$

فان المساحة تساوي $ل (ل - س) (ل - ص) (ل - ع) [\frac{1}{4}]$.

١٧ (٢٦ — حل التمارين ١١ - ٢٠ في البند السابق باستعمال طريقة مضروب

لاجرائج .

١٠ — تمارين مراجعة :

شفهية :

عرف أو ناقش كلا من الآتية :

١ (الاقتران ذا المتغيرات المتعددة

٢ (المنحنيات السوية

٣ (السطوح السوية .

٤ (نهايات الاقترانات ذوات المتغيرات المتعددة .

- (٥) الاقتران المتصل
- (٦) المشتقات الجزئية الاولى
- (٧) المشتقات الجزئية ذات الرتب العليا
- (٨) التفاضلات
- (٩) الاقتران الاشتقاقي
- (١٠) قاعدة السلسلة
- (١١) التفاضل الضمني
- (١٢) المشتقة المتجهة
- (١٣) مدرج الاقتران
- (١٤) المستوى المماس لسطح .
- (١٥) نقاط نهايات الاقترانات ذوات المتغيرين
- (١٦) مضروبوات لاجرانج .

كتايبية :

في التمارين ١ - ٤ عين مجال الاقتران ق

$$(١) \text{ ق (س ، ص) } = \sqrt{36 - 4س^2 + 9ص^2} . \text{ ق (س ، ص) } = \text{لط س ص}$$

$$(٢) \text{ ق (س ، ص ، ع) } = (ع^2 - س^2 - ص^2)^{-2/3}$$

$$(٤) \text{ ق (س ، ص ، ع) } = \text{ق ا ع (س - ص)} .$$

في التمارين ٥ - ١٠ أوجد المشتقات الجزئية الاولى للاقتران ق

$$(٥) \text{ ق (س ، ص) } = س^3 \text{ جتا ص } - ص^3 + 4س$$

$$(٦) \text{ ق (ر ، هـ) } = ر^2 e^{4هـ}$$

$$(٦) \text{ ق (ر ، هـ) } = ر^2 e^{هـ}$$

$$(٧) \text{ ق (س ، ص ، ع) } = (س^2 + ص^2) \mid (ص^2 + ع^2)$$

$$(٨) \text{ ق (هـ ، و ، ن) } = هـ \text{ لط (و ، ن)} .$$

$$(٩) \text{ ق (س ، ص ، ع ، ن) } = س^2 ع \sqrt{2ص + ن}$$

$$(١٠) \text{ ق (هـ ، و) } = هـ^2 \text{ جتا و } + و^2 \text{ جتا هـ} .$$

في التمارين ١١ ، ١٢ أوجد المشتقات الجزئية الثانية للاقتران ق

$$(١١) \text{ ق (س ، ص) } = س^3 ص^2 - 3س^2 ص^3 + س^4 - 3ص^3 + 2$$

$$(١٢) \quad ق (س، ص، ع) = س^2 e^2 - ع^2$$

$$(١٣) \quad \text{إذا كان ه} = (س^2 + ص^2 + ع^2)^{\frac{1}{2}} \text{ برهن أن } \frac{\partial ه}{\partial س} = \frac{س}{ه} + \frac{\partial ه}{\partial ص} = \frac{ص}{ه} + \frac{\partial ه}{\partial ع} = \frac{ع}{ه}$$

$$(١٤) \quad (٢) \text{ أوجد } و \text{ ف إذا كانت } ف = ص^3 - ظ^١ س^٢ + ٢ س - ص$$

$$(ب) \text{ أوجد } و \text{ ف إذا كانت } ف = س^٢ جا ص ع$$

$$(١٥) \text{ أوجد } \Delta ف، و \text{ ف إذا كانت } ف = س^٣ + ٣ س - ص^٢. \text{ استعمل } \Delta ف$$

لايجاد القيمة الحقيقية للتغير في ف وو ف لايجاد قيمة تقريبية للتغير في ف إذا

تغيرت (س، ص) من (٢، ١) الى (١، ١) أو (١، ٢).

$$(١٦) \text{ ينص قانون أوم على أن } م = \frac{ج}{س}. \text{ فإذا كان } ج = ١٠٨ \text{ فولت، } ت = ٢ \text{ امبير مع}$$

احتمال خطأ ٢، ٠ فولت، ٠، ١ امبير على التوالي، استعمل التفاضلات

لايجاد قيمة تقريبية لأكبر خطأ في حساب م (بالاوم).

استعمل قاعدة السلسلة لايجاد الحلول في التمارين ١٧-١٩.

$$(١٧) \text{ إذا كان } ل = ه^٢ و^٢ + و^٢ ر - ر^٣ ه، ه = ص جتا س، و = س e^{-ص}$$

$$ر = ص \text{ لبط } س، \text{ أوجد } \frac{\partial ل}{\partial س}، \frac{\partial ل}{\partial ص}$$

$$(١٨) \text{ إذا كانت } ع = \sqrt{س^٢ + ص^٢}، س = ر e^2 ه، ص = و ر e^{-ه}$$

$$\text{أوجد } \frac{\partial ع}{\partial ر}، \frac{\partial ع}{\partial و}، \frac{\partial ع}{\partial ه}$$

$$(١٩) \text{ إذا كان } ف = س ظا ص + ص ظا ع، س = ن^٣، ص = e^{-ن^٢}، ع = ١ | ن^٢$$

$$\text{أوجد } \frac{د ف}{د ن}$$

$$(٢٠) \text{ أوجد المشتقة المتجهة للاقتزان } ق (س، ص) = ٣ س^٢ - ص^٢ + ٥ س ص$$

عند النقطة P (٢، ١) في اتجاه المتجه $\vec{u} = ٣ - ٤ و$. ما هي أكبر

قيمة للزيادة في ق (س، ص) عند P؟

$$(٢١) \text{ تعطى درجة حرارة النقطة } (س، ص، ع) \text{ بالعلاقة}$$

ح (س ، ص ، ع) = $3س^2 + 2ص^2 - 4ع$. أوجد معدل تغير ρ عند النقطة ρ
 (- ١ ، ٣ ، ٢) في الاتجاه من ρ الى النقطة ب (- ٤ ، ١ ، ٢) .
 (٢٢) المعادلات الوسيطة للمنحنى ج هي $س = ر$ ، $ص = ر^2$ ، $ع = ر^3$. فاذا كانت
 ق (س ، ص ، ع) = $ص^2 + س$ ع أوجد $\frac{d}{ds}$ ق (٢ ، ٨٠٤) حيث $\rho \leftarrow$ وحدة
 متجه باتجاه مماس للمنحنى ج عند النقطة ρ (٢ ، ٤ ، ٨) .

(٢٣) أوجد معادلات المستوى المماس والخط العمودي لبيان $٧ع = ٤س^2 - ٢ص^2$
 عند النقطة ρ (- ٢ ، ١ ، ٢) .

(٢٤) برهن أن كل مستو مماس للمخروط $\frac{س^2}{٢\rho} - \frac{ص^2}{٢ب} + \frac{ع^2}{٢ج} = ٠$ يمر بنقطة
 الاصل .

(٢٥) اذا كانت $ص = ق$ (س) تحقق المعادلة $٣ - ٤س + ٣ص - ٢س = ٠$
 استعمل المشتقات الجزئية لايجاد ق (س) .

(٢٦) اذا كانت $ع = ق$ (س ، ص) تحقق المعادلة $٢ص + ع جتا ص - ٣ع = ٠$

$$\text{أوجد } \frac{\partial ع}{\partial س} ، \frac{\partial ع}{\partial ص}$$

(٢٧) أوجد نهايات ق اذا كانت ق (س ، ص) = $٢س + ٣ص - ٣$.
 (٢٨) اذا كانت كلفة الانش المربع من قاعدة صندوق تساوي ضعف كلفة الانش المربع
 من الجوانب والغطاء . أوجد ابعاد الصندوق التي تجعل الكلفة اقل ما يمكن اذا
 كان حجم الصندوق ثابتا .

(٢٩) اذا كان ق (س ، ص) = $\frac{س^2}{٤} + \frac{ص^2}{٢٥}$ ارسم عددا من المنحنيات السوية

المرتبطة بالاقتران ق ومثل ∇ ق ρ بمتجه هندسي عند النقطة ρ على كل منحنى .
 (٣٠) اذا كانت ق (س ، ص ، ع) = $ع + ٤س^2 + ٩س^2$ ارسم عدداً من السطوح
 السوية المرتبطة بالاقتران ق ومثل ∇ ق ρ بمتجه هندسي عند نقطة ρ على كل
 سطح .

(٣١) أوجد النهايات المحلية للاقتران ق (س ، ص ، ع) = $س ص ع$ تحت الشرط
 $٨ = ٢ع + ٤ص + ٢س$.

٣٢ (استعمال مضروبوات لاجرانج لايجاد النهايات المحلية للاقتزان

ق (س ، ص ، ع) = $4س^2 + 2ص^2 + ع^2$ تحت الشروط $2س - ص + ع = 4$ ، $س + 2ص - ع = 1$. اختر جوابك باستعمال طريقة المتغير الواحد .

٣٣ (أوجد اقرب نقاط الى نقطة الاصل تقع على بيان

$$0.1 = \frac{3}{ع} + \frac{2}{ص} + \frac{1}{س}$$

٣٤ (صومعة جبوب على شكل مخروط دائري قائم نصف قطره ٢ قدم ، محاطة باسطوانة دائرية قائمة . فان كان الحجم ١٠٠ قدم مكعب أوجد ارتفاع الاسطوانة ل وارتفاع المخروط ك بحيث تكون مساحة السطح أقل ما يمكن .

$$\frac{1}{1 + s^2} = \text{ص} = s^2, \text{ص} = \frac{1}{1 + s^2}$$

$$(10) \text{ ص} = \text{جناز (س)}, \text{ص} = \text{حاز (س)}, \text{س} = 1, \text{س} = 1.$$

$$(11) \text{ جد حجم الجسم الذي يقع تحت بيان (مخطط) الاقتران ع} = s^4 + s^2 \text{ ص}^2 \text{ وفوق المنطقة المستطيلة م في المستوى س ص التي رؤوسها النقاط}$$

$$(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 2), (0, 0, 2)$$

$$(12) \text{ جد حجم الجسم الواقع تحت بيان الاقتران ع} = s^2 + s^4 \text{ ص}^2 \text{ وفوق المنطقة المثلثة}$$

$$\text{في المستوى س ص التي رؤوسها النقاط } (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 1)$$

في كل من التمارين ١٣ - ١٦ جد حجم الجسم ع في الثمن الاول المحدد ببيانات المعادلات المعطاة.

$$(13) s^2 + s^2 = 9, \text{ص} = 2\text{س}, \text{ص} = 0, \text{س} = 0$$

$$(15) 2\text{س} + \text{ص} + \text{ع} = 4, \text{س} = 0, \text{ص} = 0, \text{ع} = 0$$

$$(16) \text{ص}^2 = \text{ع}, \text{ص} = \text{س}, \text{س} = 4, \text{ع} = \text{صفر}$$

$$(17) \text{ جد حجم الجسم المحدد ببياني المعادلتين س}^2 + \text{ع}^2 = \text{نق}^2, \text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{نق}^2 \text{ حيث } \text{نق} < \text{صفر}$$

$$(18) \text{ جد حجم الجسم المحدد ببيان المعادلة س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 = \text{نق}^2, \text{نق} < \text{صفر}$$

التكامل التكراري في كل من التمارين ١٩ - ٢٢ يمثل حجم جسم . صف هذا الجسم .

$$(19) \int_0^1 \int_0^{1-s^2} (s^2 + \text{ص}^2) \text{ص} \text{ دس}$$

$$(20) \int_0^1 \int_0^{1-s^2} \sqrt{25 - \text{ص}^2 - \text{س}^2} \text{ص} \text{ دس}$$

$$(21) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{\text{ص}}} (س + \text{ص}) \text{دس} \text{ دص}$$

$$C = \left[\begin{array}{c} 3 \\ (9 - 3^2) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ (9 - 3^2) \end{array} \right] \text{ و ص}$$

$$= \left[\begin{array}{c} 3 \\ (9 - 3^2) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ (9 - 3^2) \end{array} \right] \text{ و ص}$$

$$= \left[\begin{array}{c} 3 \\ (9 - 3^2) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 3 \\ (9 - 3^2) \end{array} \right] = 8 \text{ و ص}$$

$$= 144 .$$

ان هذا التكامل الثنائي يمكن ان نجده بان نكامل اولاً بالنسبة للمتغير ص ولكن ترتيب التكامل بهذا الشكل يجعله أكثر تعقيداً من الحالة التي ناقشناها في المثال السابق .

تمارين :

في التمارين ١ - ١٠ خطط المنطقة المحدودة ببيانات المعادلات المعطاة ثم جد المساحة باستعمال التكاملات الثنائية . فسر كل تكامل ثنائي تكراري كنهاية مجموع ثنائي برسم مستطيل مساحته Δ ص_ز Δ ص_ر وشرحة مستطيلة تمثل المجموع الاول في المجموع الثنائي .

$$(1) \text{ ص} = \frac{1}{3} \text{ ص} - \text{ص} = 3 \text{ ص}^2 , \text{ ص} = 1 , \text{ ص} = 2$$

$$(2) \text{ ص} = \sqrt{\text{ص}} , \text{ ص} - \text{ص} = 3 \text{ ص} , \text{ ص} = 1 , \text{ ص} = 4 .$$

$$(3) \text{ ص}^2 = 3 \text{ ص} - \text{ص} , \text{ ص} - \text{ص} = 4 \text{ ص} , \text{ ص} = 1 , \text{ ص} = 2 .$$

$$(4) \text{ ص} = 3 \text{ ص}^2 , \text{ ص} - \text{ص} = 2 \text{ ص} , \text{ ص} = 2 , \text{ ص} = 3 .$$

$$(5) \text{ ص} = 3 \text{ ص} , \text{ ص} = 3 \text{ ص} , \text{ ص} + \text{ص} = 4 .$$

$$(6) \text{ ص} - \text{ص} = 1 + \text{ص} , \text{ ص} = 7 \text{ ص} - \text{ص} = 17 \text{ ص} , \text{ ص} = 2 \text{ ص} + \text{ص} = 2 \text{ ص} = \text{صفر}$$

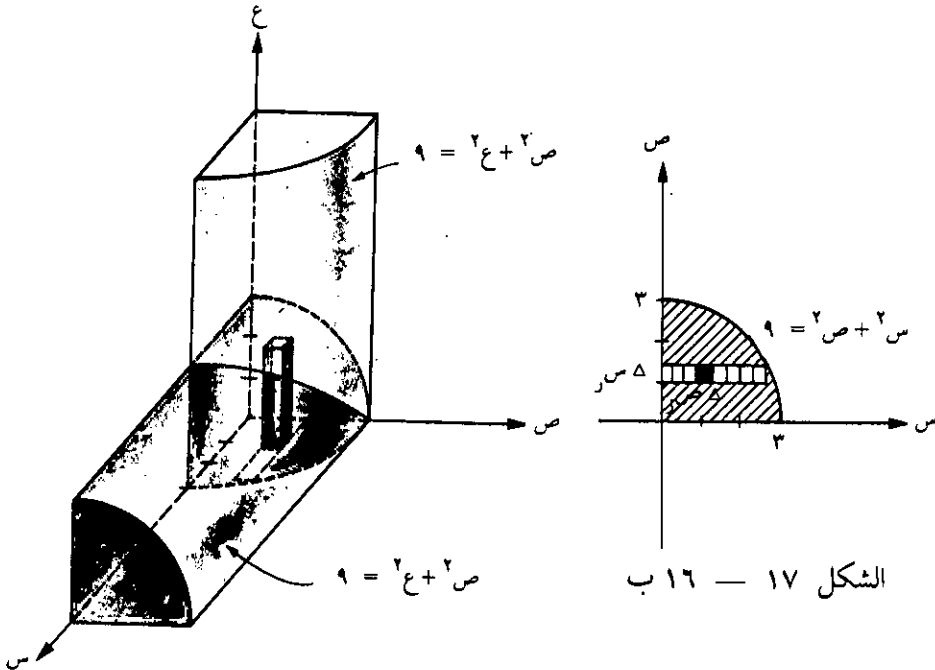
$$(7) \text{ ص} = \text{ص} , \text{ ص} = \text{ص} , \text{ ص} = \text{ص} , \text{ ص} = \text{ص} .$$

$$(8) \text{ ص} = \text{لط} (\text{ص}) , \text{ ص} = \text{صفر} , \text{ ص} = 1$$

الجواب في ٨ ونحصل على حجم الجسم المطلوب . وبالرجوع الى الشكل ١٧ - ١٦ (١) نجد أن الجسم يقع تحت بيان الاقتران $z = 9 - x^2 - y^2$ وفوق المنطقة م المحددة بمحوري السينات والصادات وبيان المعادلة $z = x^2 + y^2$ ، ولهذا فباستعمال (١٧ - ١٥) نجد أن

$$H = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (9 - x^2 - y^2) dy dx$$

وسنجد التكامل الثنائي باستعمال (١٧ - ١٤ ب) وفي هذه الحالة نعتبر التكامل عبارة عن نهاية مجموع ثنائي لحجوم منشير من النوع الموضح في الشكل ١٧ - ١٦ (١) . حيث المجموع الاول باتجاه محور السينات من $z = 0$ الى $z = 9 - x^2 - y^2$. والمخطط في الشكل ١٧ - ١٦ (ب) يبين المنطقة م في المستوى $z = 0$. والشريط يمثل المجموع الاول . وهذا يعطينا حجم صفيحة وجهها يوازي المستوى $z = 0$. ثم نأخذ مجموع هذه الصفائح باتجاه محور الصادات من $z = 0$ الى $z = 3$. وباستعمال التكامل التكراري نحصل على



الشكل ١٧ - ١٦ ب

$$ح = \left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right] = (س^2 + ص^2 + 1) د ف .$$

وكما في (١٧-١٨) ان هذا التكامل يمكن تصوره على انه نهاية مجموع ثنائي :

$$\sum_r \sum_q (هـ_r ، و_r) \Delta ص_r \Delta س_r \text{ حيث } q (هـ_r ، و_r) \Delta ص_r \Delta س_r$$

عبارة عن حجم منشور من النوع الموضح في الشكل ١٧-١٥ ثم نأخذ المجموع باتجاه محور الصادات من $ص = ٠$ الى $ص = ٢ - ٢ س$. ومخطط المنطقة في الشكل ١٧-١٥ ب يبين المنطقة م في المستوى س ص مع شريحة المجموع الاول ، وهذا يعطي حجم صفيحة وجهها مواز للمستوى ص ع . ثم نأخذ مجموع الصفائح باتجاه محور السينات من $س = ٠$ الى $س = ١$ ، وباستعمال تكامل تكراري نحصل على :

$$ح = \left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right] = (س^2 + ص^2 + 1) د س = \left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right] د س + \frac{ص^3}{3} + \frac{ص^2 - ٢}{٢ د س}$$

$$= \left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right] = \left(- \frac{١٤}{٣} س^3 + ١٠ س^2 - ١٠ س + \frac{١٤}{٣} \right) د س = \frac{١١}{٦} .$$

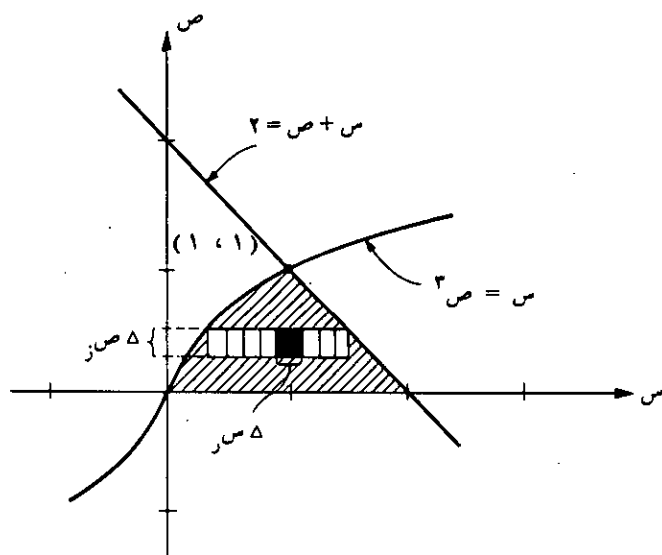
ويمكننا ايجاد ح بان تكامل اولاً بالنسبة للمتغير س ، وهنا يجب أن يتحقق القاريء ان التكامل التكراري يتخذ الشكل :

$$ح = \left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right] = (س^2 + ص^2 + 1) د س د ص$$

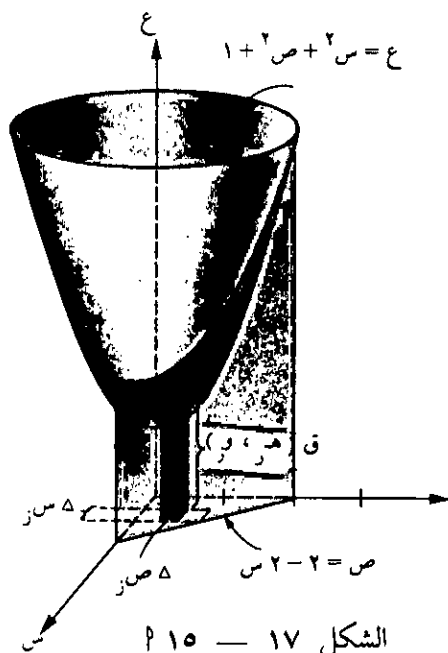
مثال ٤ : أوجد حجم الجسم المحدد بالبيانين $ص^2 + س^2 = ٩$ ، $ص + ع = ٩$.

الحل : ان بياني الاقترانين عبارة عن اسطوانتين نصف قطر كل منهما ٣ ويتقاطع محاورهما عمودياً ، وبين الشكل ١٧-١٦ القسم من هذا الجسم الواقع في الثمن الاول ، ويكفي أن نجد حجم هذا القسم ، ثم باستعمال التناظر نصرب

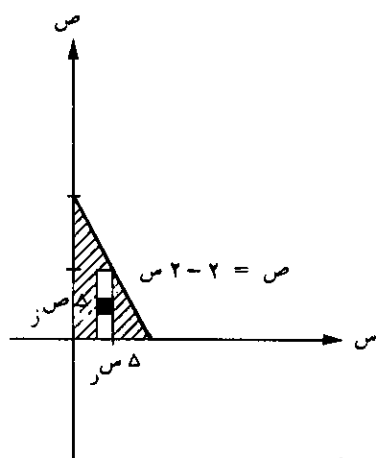
الحل : كما هو في الشكل ١٧ - ١٥ ان الجسم يقع تحت السطح المكافئ $ع = ص^2 + ٢$
 ص + ١ وفوق المنطقة المثلثة م في المستوى س ص المحددة بالمحورين
 الاحداثيين والخط المستقيم $ص = ٣ - س$ ، وحسب (١٧ - ١٥) ، اذا كان
 ق (س ، ص) فان $ص^2 + ٢ + ص = ١$



الشكل ١٧ — ١٤



الشكل ١٧ — ١٥ ب



الشكل ١٧ — ١٥ ب

ثانيا : نسمح المنطقة م بجمع مساحات الاشرطة المستطيلة من ص = ج الى ص = د . وكما في السابق فان التكامل التكراري يعطي نفس النتيجة وفي نفس الوقت فان

$$\Delta \text{ س ر } \Delta \text{ ص ز تقترب من الصفر .}$$

مثال ٢ : أوجد مساحة المنطقة م في المستوى س ص المحدودة بالبيانات س = ص^٣ ، س + ص = ٢ ، ص = صفرأ .

الحل : ان مخطط المنطقة موضح في الشكل ١٧ - ١٤ ، وفي الشكل ايضا مستطيل مساحته $\Delta \text{ س ر } \Delta \text{ ص ز}$ ، وشريط نحصل عليه بالجمع باتجاه محور السينات . فباستعمال التكامل التكراري نحصل على

$$\begin{aligned} \text{ف} &= \int_0^2 \text{د} \text{ف} = \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{2-\text{ص}}} \text{د} \text{س} \text{د} \text{ص} \right] \text{د} \text{ص} \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{4} \text{س}^2 \right]_{\text{س}=\sqrt{2-\text{ص}}}^{\text{س}=\sqrt{2-\text{ص}}} \text{د} \text{ص} \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{4} (2-\text{ص}) - \frac{1}{4} (2-\text{ص})^3 \right] \text{د} \text{ص} = \frac{5}{4} . \end{aligned}$$

كذلك يمكننا ايجاد المساحة باستعمال (١٧ - ١٤) ، ولكن في هذه الحالة يجب قسمة المنطقة م الى جزأين ، بخط رأسي يمر بالنقطة (١ ، ١) ولهذا فان :

$$\text{ف} = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{2-\text{ص}}} \text{د} \text{س} \text{د} \text{ص} \right] \text{د} \text{ص} + \int_1^2 \left[\int_0^{\sqrt{2-\text{ص}}} \text{د} \text{س} \text{د} \text{ص} \right] \text{د} \text{ص}$$

ان العلاقة (١٧ - ١٥) يمكن استخدامها لايحاد حجوم بعض الاجسام بالتكامل الثنائي . والتكامل الثنائي يمكن ايجاده باستعمال التكامل التكراري ، كما هو موضح في المثال التالي :

مثال ٣ : أوجد حجم الجسم الذي يقع في الثمن الاول ويحدد بالمستويات الاحداثية ، وبيانات الاقترانات ع = س^٢ + ص^٢ + ١ ، ٢س + ص = ١ .

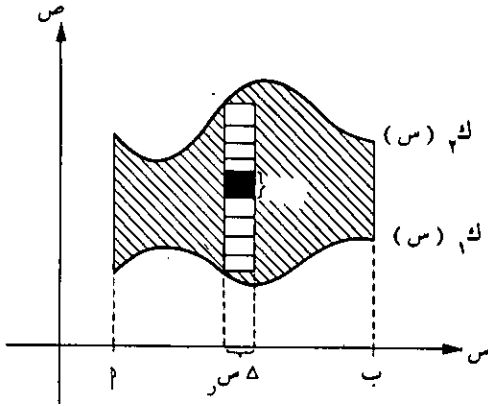
واذا استعملنا (١٧ - ١٤ ب) لاييجاد المساحة ، فان :

$$F = \int_a^b \left[\begin{matrix} \text{ل} (ص) \\ \text{ج} \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} \text{ل} (ص) \\ \text{ج} \end{matrix} \right] ds = \int_a^b \text{ل} (ص) - \text{ج} (ص) ds$$

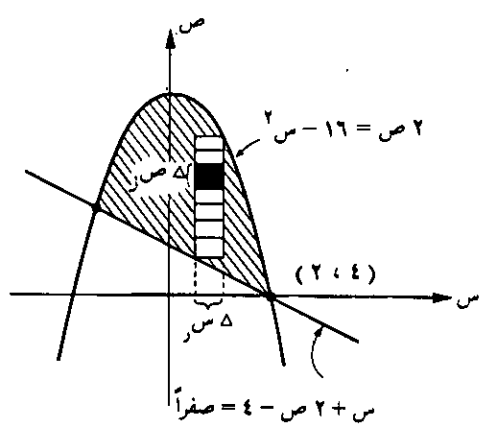
$$\int_a^b \Delta \text{ل} (ص) - \Delta \text{ج} (ص) ds$$

ويمكن تفسير المجموع الثاني الاخير كما يلي : أولاً : نجعل ص ثابتة ثم نجد مجموع مساحات المستطيلات $\Delta \text{ل} (ص) - \Delta \text{ج} (ص)$ باتجاه محور السينات من بيان الاقتران $\text{ل} (ص) = \text{ل} (ص)$ الى $\text{ل} (ص) = \text{ل} (ص)$ كما هو موضح في الشكل

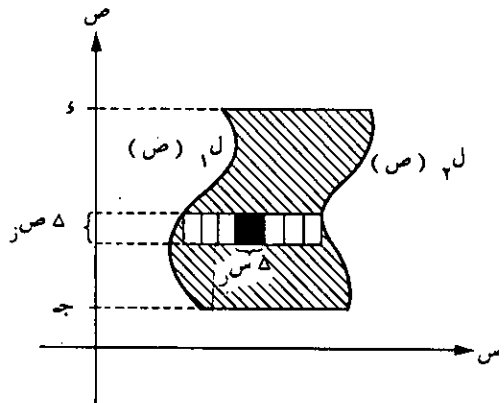
١٧ - ١٣ .



الشكل ١٧ - ١١



الشكل ١٧ - ١٢



الشكل ١٧ - ١٣

وإذا استعمل التكامل التكراري لاييجاد المساحة فان المساحة تعتبر دائما نهاية مجموع ثنائي ، على نحو يشبه ما استعمل لحساب الحجم في آخر البند السابق . وبالتحديد وكما في (١٧ - ١٨) اذا كان ق (س ، ص) = ١ فاننا نكتب :

$$ف = \int_0^1 \int_0^1 \left[\int_0^1 \int_0^1 \right] = \text{وف} = \int_0^1 \int_0^1 \left[\int_0^1 \int_0^1 \right] \text{ص ص و س}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \text{نها} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \text{ص ص و س}$$

ويمكن تفسير المجموع الثنائي كما يلي : أولا : نجعل س ثابتة ، ثم نأخذ مجموع مساحات المستطيلات Δ ص Δ س باتجاه محور الصادات من بيان (مخطط) الاقتران ص = $\int_0^1$ (س) الى بيان (مخطط) الاقتران ص = $\int_0^1$ (س) وهذا يعطي مساحة شريحة مستطيلة موازية لمحور الصادات ، كما هو موضح في الشكل ١٧ - ١١ .

ثانيا : نسمح المنطقة م يجمع مساحات هذه الشرائح المستطيلة من س = ٠ الى س = ١ .
فنهاية المجموع الثنائي (وبعبارة اخرى التكامل التكراري) ايضا يعطي نفس الجواب . وفي نفس الوقت فان كلا من Δ س Δ ص Δ ص تقترب من الصفر .

مثال ١ : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين Δ ص = ١٦ - س^٢ ، س + ٢ ص = ٤ - ص^٢ .

الحل : المنطقة تقع تحت القطع المكافيء ص = ٨ - $\left(\frac{س}{٢}\right)^٢$ وفوق الخط المستقيم

ص = ٢ - $\frac{س}{٢}$ كما هو موضح في الشكل ١٧ - ١٢ . وبين الشكل مستطيلا قياسيا يمثل المساحة Δ ص Δ س والشرحة التي تحصل يجمع مساحات المستطيلات باتجاه محور الصادات . فباستعمال التكامل التكراري نحصل على :

$$ف = \int_0^2 \int_0^8 \left[\int_0^8 \int_0^8 \right] \text{ص و س} = \int_0^2 \int_0^8 \left[\int_0^8 \int_0^8 \right] \text{ص و س}$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^8 \left(\frac{س}{٢} + ٨ \right) \text{ص} \right] \text{ص} = \int_0^2 \left[\frac{س^٢}{٤} + ٨س \right] \text{ص} = \frac{٢٤٣}{١٢}$$

$$(21) \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} ق (س ، ص) \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] \quad دس \quad دص$$

$$(22) \quad \left[\begin{array}{c} 1- \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} ق (س ، ص) \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] \quad دس \quad دص$$

$$(23) \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} ق (س ، ص) \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] \quad دس \quad دص$$

$$(24) \quad \left[\begin{array}{c} 2 \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} ق (س ، ص) \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] \quad دس \quad دص$$

(25) وضع التكامل التكراري في (17 - 14 ب) كنهاية مجموع ثنائي بطريقة مطابقة للصيغة (17 - 18).

٣ - المساحات والحجوم :

من المعتاد ان نرسم للتكامل الثنائي $\left[\begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} ق (س ، ص) \\ \sqrt{ص} \end{array} \right]$ بالرمز $\left[\begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} ق (س ، ص) \\ \sqrt{ص} \end{array} \right]$ فاذا

كانت م منطقة من النوع الموضح في الشكل 17 - 1 (ب) فحسب (17 - 14) يكون

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} ق (س ، ص) \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} ق (س ، ص) \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{ص} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} ق (س ، ص) \\ \sqrt{ص} \end{array} \right]$$

وحسب (3 - 6) فان هذا يساوي المساحة ف للمنطقة م . وبالمثل فان هذا صحيح اذا كانت م منطقة من النوع الموضح في الشكل 17 - 1 (ب) . وتوضح هذه الحقائق من تعريف التكامل الثنائي فاذا كان ق (س ، ص) = 1 في المنطقة م فان مجموع ريمان في م (17 - 3) يساوي مجموع مساحات المستطيلات الموجودة في التجزئة الداخلية للمنطقة م . وعندما يقترب المقياس ج || من الصفر فان مجموع مساحات المربعات تعطي مساحة أكبر من المنطقة م ، ولذلك فنهايتها تساوي مساحة المنطقة م .

$$(10) \int_{ص}^1 \left(\frac{1}{ص^2 + 1} \right) دص$$

$$(11) \int_{طاس}^{قاس} (ص + جا س) دص$$

$$(12) \int_{\pi/6}^{\pi/4} e^{ص جا س} دص$$

إذا كانت م هي المنطقة المحدودة ببيانات المعادلات المعطاة في التمارين ١٣ - ١٨ فمثل

ق (س ، ص) و ف على شكل تكامل ثنائي تكراري كما في (١٧ - ١٤)

(١٧ - ١٤ ب) .

$$(13) ص = \sqrt{س} ، س = ٤ ، ص = ٠$$

$$(14) ص = \sqrt{س} ، س = ٠ ، ص = ٢$$

$$(15) ص = س^3 ، س = ٠ ، ص = ٨$$

$$(16) ص = س^3 ، س = ٢ ، ص = ٠$$

$$(17) ص = \sqrt{س} ، ص = س^3$$

$$(18) ص = \sqrt{١ - س^2} ، ص = ٠$$

في التمارين ١٩ - ٢٤ خطط منطقة التكامل للتكامل التكراري :

$$(19) \int_{س=١}^{س=٢} \int_{ص=٤}^{ص=٢} ق (س ، ص) دص دس$$

$$(20) \int_{س=٢}^{س=٤} \int_{ص=١}^{ص=٢} ق (س ، ص) دص دس$$

$$\left[\begin{smallmatrix} \text{ج} \\ \text{ب} \end{smallmatrix} \right]_{\text{س}} \text{ق} (\text{ص} , \text{س}) \left[\begin{smallmatrix} \text{ج} \\ \text{ب} \end{smallmatrix} \right]_{\text{م}} = \left[\begin{smallmatrix} \text{ج} \\ \text{ب} \end{smallmatrix} \right]_{\text{س}} \text{ق} (\text{ص} , \text{س}) \left[\begin{smallmatrix} \text{ج} \\ \text{ب} \end{smallmatrix} \right]_{\text{م}}$$

(۱) $p=1$ ، $b=2$ ، $j=-1$ ، $z=2$ ، $q=(s, v)$ ، $12s=2$

(۲) $1 = \beta$ ، $2 = \alpha$ ، $3 = \gamma$ ، $4 = \delta$ ، $5 = \epsilon$ ، $6 = \zeta$ ، $7 = \eta$ ، $8 = \theta$ ، $9 = \iota$ ، $10 = \kappa$ ، $11 = \lambda$ ، $12 = \mu$ ، $13 = \nu$ ، $14 = \xi$ ، $15 = \omicron$ ، $16 = \pi$ ، $17 = \rho$ ، $18 = \sigma$ ، $19 = \tau$ ، $20 = \upsilon$ ، $21 = \phi$ ، $22 = \chi$ ، $23 = \psi$ ، $24 = \omega$ ، $25 = \delta$ ، $26 = \epsilon$ ، $27 = \zeta$ ، $28 = \eta$ ، $29 = \theta$ ، $30 = \iota$ ، $31 = \kappa$ ، $32 = \lambda$ ، $33 = \mu$ ، $34 = \nu$ ، $35 = \xi$ ، $36 = \omicron$ ، $37 = \pi$ ، $38 = \rho$ ، $39 = \sigma$ ، $40 = \tau$ ، $41 = \upsilon$ ، $42 = \phi$ ، $43 = \chi$ ، $44 = \psi$ ، $45 = \omega$ ، $46 = \delta$ ، $47 = \epsilon$ ، $48 = \zeta$ ، $49 = \eta$ ، $50 = \theta$ ، $51 = \iota$ ، $52 = \kappa$ ، $53 = \lambda$ ، $54 = \mu$ ، $55 = \nu$ ، $56 = \xi$ ، $57 = \omicron$ ، $58 = \pi$ ، $59 = \rho$ ، $60 = \sigma$ ، $61 = \tau$ ، $62 = \upsilon$ ، $63 = \phi$ ، $64 = \chi$ ، $65 = \psi$ ، $66 = \omega$ ، $67 = \delta$ ، $68 = \epsilon$ ، $69 = \zeta$ ، $70 = \eta$ ، $71 = \theta$ ، $72 = \iota$ ، $73 = \kappa$ ، $74 = \lambda$ ، $75 = \mu$ ، $76 = \nu$ ، $77 = \xi$ ، $78 = \omicron$ ، $79 = \pi$ ، $80 = \rho$ ، $81 = \sigma$ ، $82 = \tau$ ، $83 = \upsilon$ ، $84 = \phi$ ، $85 = \chi$ ، $86 = \psi$ ، $87 = \omega$ ، $88 = \delta$ ، $89 = \epsilon$ ، $90 = \zeta$ ، $91 = \eta$ ، $92 = \theta$ ، $93 = \iota$ ، $94 = \kappa$ ، $95 = \lambda$ ، $96 = \mu$ ، $97 = \nu$ ، $98 = \xi$ ، $99 = \omicron$ ، $100 = \pi$ ، $101 = \rho$ ، $102 = \sigma$ ، $103 = \tau$ ، $104 = \upsilon$ ، $105 = \phi$ ، $106 = \chi$ ، $107 = \psi$ ، $108 = \omega$ ، $109 = \delta$ ، $110 = \epsilon$ ، $111 = \zeta$ ، $112 = \eta$ ، $113 = \theta$ ، $114 = \iota$ ، $115 = \kappa$ ، $116 = \lambda$ ، $117 = \mu$ ، $118 = \nu$ ، $119 = \xi$ ، $120 = \omicron$ ، $121 = \pi$ ، $122 = \rho$ ، $123 = \sigma$ ، $124 = \tau$ ، $125 = \upsilon$ ، $126 = \phi$ ، $127 = \chi$ ، $128 = \psi$ ، $129 = \omega$ ، $130 = \delta$ ، $131 = \epsilon$ ، $132 = \zeta$ ، $133 = \eta$ ، $134 = \theta$ ، $135 = \iota$ ، $136 = \kappa$ ، $137 = \lambda$ ، $138 = \mu$ ، $139 = \nu$ ، $140 = \xi$ ، $141 = \omicron$ ، $142 = \pi$ ، $143 = \rho$ ، $144 = \sigma$ ، $145 = \tau$ ، $146 = \upsilon$ ، $147 = \phi$ ، $148 = \chi$ ، $149 = \psi$ ، $150 = \omega$ ، $151 = \delta$ ، $152 = \epsilon$ ، $153 = \zeta$ ، $154 = \eta$ ، $155 = \theta$ ، $156 = \iota$ ، $157 = \kappa$ ، $158 = \lambda$ ، $159 = \mu$ ، $160 = \nu$ ، $161 = \xi$ ، $162 = \omicron$ ، $163 = \pi$ ، $164 = \rho$ ، $165 = \sigma$ ، $166 = \tau$ ، $167 = \upsilon$ ، $168 = \phi$ ، $169 = \chi$ ، $170 = \psi$ ، $171 = \omega$ ، $172 = \delta$ ، $173 = \epsilon$ ، $174 = \zeta$ ، $175 = \eta$ ، $176 = \theta$ ، $177 = \iota$ ، $178 = \kappa$ ، $179 = \lambda$ ، $180 = \mu$ ، $181 = \nu$ ، $182 = \xi$ ، $183 = \omicron$ ، $184 = \pi$ ، $185 = \rho$ ، $186 = \sigma$ ، $187 = \tau$ ، $188 = \upsilon$ ، $189 = \phi$ ، $190 = \chi$ ، $191 = \psi$ ، $192 = \omega$ ، $193 = \delta$ ، $194 = \epsilon$ ، $195 = \zeta$ ، $196 = \eta$ ، $197 = \theta$ ، $198 = \iota$ ، $199 = \kappa$ ، $200 = \lambda$ ، $201 = \mu$ ، $202 = \nu$ ، $203 = \xi$ ، $204 = \omicron$ ، $205 = \pi$ ، $206 = \rho$ ، $207 = \sigma$ ، $208 = \tau$ ، $209 = \upsilon$ ، $210 = \phi$ ، $211 = \chi$ ، $212 = \psi$ ، $213 = \omega$ ، $214 = \delta$ ، $215 = \epsilon$ ، $216 = \zeta$ ، $217 = \eta$ ، $218 = \theta$ ، $219 = \iota$ ، $220 = \kappa$ ، $221 = \lambda$ ، $222 = \mu$ ، $223 = \nu$ ، $224 = \xi$ ، $225 = \omicron$ ، $226 = \pi$ ، $227 = \rho$ ، $228 = \sigma$ ، $229 = \tau$ ، $230 = \upsilon$ ، $231 = \phi$ ، $232 = \chi$ ، $233 = \psi$ ، $234 = \omega$ ، $235 = \delta$ ، $236 = \epsilon$ ، $237 = \zeta$ ، $238 = \eta$ ، $239 = \theta$ ، $240 = \iota$ ، $241 = \kappa$ ، $242 = \lambda$ ، $243 = \mu$ ، $244 = \nu$ ، $245 = \xi$ ، $246 = \omicron$ ، $247 = \pi$ ، $248 = \rho$ ، $249 = \sigma$ ، $250 = \tau$ ، $251 = \upsilon$ ، $252 = \phi$ ، $253 = \chi$ ، $254 = \psi$ ، $255 = \omega$ ، $256 = \delta$ ، $257 = \epsilon$ ، $258 = \zeta$ ، $259 = \eta$ ، $260 = \theta$ ، $261 = \iota$ ، $262 = \kappa$ ، $263 = \lambda$ ، $264 = \mu$ ، $265 = \nu$ ، $266 = \xi$ ، $267 = \omicron$ ، $268 = \pi$ ، $269 = \rho$ ، $270 = \sigma$ ، $271 = \tau$ ، $272 = \upsilon$ ، $273 = \phi$ ، $274 = \chi$ ، $275 = \psi$ ، $276 = \omega$ ، $277 = \delta$ ، $278 = \epsilon$ ، $279 = \zeta$ ، $280 = \eta$ ، $281 = \theta$ ، $282 = \iota$ ، $283 = \kappa$ ، $284 = \lambda$ ، $285 = \mu$ ، $286 = \nu$ ، $287 = \xi$ ، $288 = \omicron$ ، $289 = \pi$ ، $290 = \rho$ ، $291 = \sigma$ ، $292 = \tau$ ، $293 = \upsilon$ ، $294 = \phi$ ، $295 = \chi$ ، $296 = \psi$ ، $297 = \omega$ ، $298 = \delta$ ، $299 = \epsilon$ ، $300 = \zeta$ ، $301 = \eta$ ، $302 = \theta$ ، $303 = \iota$ ، $304 = \kappa$ ، $305 = \lambda$ ، $306 = \mu$ ، $307 = \nu$ ، $308 = \xi$ ، $309 = \omicron$ ، $310 = \pi$ ، $311 = \rho$ ، $312 = \sigma$ ، $313 = \tau$ ، $314 = \upsilon$ ، $315 = \phi$ ، $316 = \chi$ ، $317 = \psi$ ، $318 = \omega$ ، 31

ص
جد قيمة التكمالات في التمارين ٣-١٢.

(۳) $\left[\begin{array}{c} ۲ \\ ۱-۳ \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} ۳ \\ ۲-۱ \end{array} \right]$

$$(4) \quad \left[\begin{matrix} 1^+ \\ 1^- \end{matrix} \right]_{\text{س}} (3\text{س} + 2\text{ص}) \text{ و } \text{ص} \text{ و } \text{س}$$

(۵) $\left[\begin{matrix} ۲ \\ ۲ \end{matrix} \right] (۴س - ص) (۵س - ص)$

$$(6) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ (s^2 + 2s) & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} s-1 \\ s-1 \\ s-1 \end{matrix}$$

$$(7) \quad \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} s \\ s \\ e \\ s \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} s \\ s \\ s \\ s \end{array} \right]$$

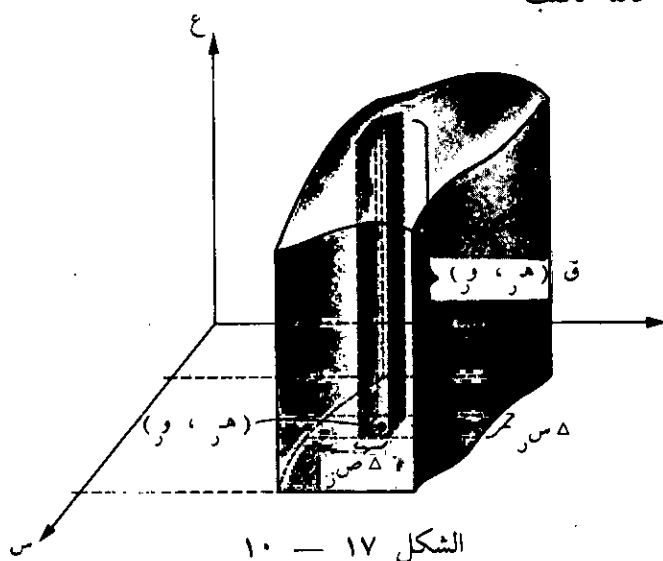
$$(8) \quad \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (s \text{ جتا } s - s \text{ جتا } s) \, ds \, ds$$

(۹) $\left[\begin{smallmatrix} e \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} s \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} s \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{smallmatrix} \right]$

وبالرجوع الى الشكل ١٧ - ١٠ نلاحظ ان المقدار (Δ_r, Δ_r) ص_٢ Δ_r عبارة عن حجم المنشور الذي مساحه قاعدته Δ_r ص_٢ Δ_r وارتفاعه

يساوي ق (هـ ، و) . ويمكن تفسير المجموع الثاني كما يلي :

نبي س ثابتة . ثم نأخذ مجموع حجوم المناشير باتجاه محور الصادات فنحصل على حجم الصفحة الموضحة في الشكل (١٧ - ٩) ثم نأخذ مجموع هذه الصفائح باتجاه محور السينات . وفي مفهوم معين اننا في التكامل الثاني التكراري نجري ذلك ثم نحسب النهاية عندما تنقص قواعد المناشير الى نقاط . ان هذا التفسير مهم لتصوير تطبيقات التكامل الثاني . ولتأكيد وجهة النظر هذه فاننا نكتب



(١٧-١٨) ح [ك (س) ك (س) ق (س ، ص) و ص و س =

نہا ۛۛ ق (ہر، و) Δ ص ز Δ س ر
• - ||Δ||

حيث أن الرمز $\Delta \parallel \Delta \leftarrow$ يدل على أن كلا من Δ س، Δ ص، تقترب من الصفر.

تمارين :

باستعمال القيم المعطاة في تمريني ١ ، ٢ برهن على أن

حيث ج تجزئة للفترة [١، ب]، هر أي عدد في الفترة الجزئية [س_١ - ١، س_١] من ج، Δ س_١ = س_١ - س_١ - ١. وكما هو موضح في الشكل ١٧ - ٩ فإن ف (هر) Δ س_١ هو حجم الصفيحة جر التي وجهها يوازي المستوى ص ع وقاعدتها شريط عرضه Δ س_١ في المستوى س ص. ونتيجة لذلك يمكن ان يعتبر الحجم ح عبارة عن نهاية مجموع أحجام الصفائح. والتكامل التكراري في (١٧ - ١٦) يمكن أن يمثل بدلالة نهايات بجاميع، لذلك بتطبيق تعريف التكامل المحدود على (١٧ - ١٥) نحصل على

$$ف(س) = \int_{س_1}^{س_2} ق(س، ص) دص =$$

$$\|ج\| - \|ج\|_{س_1} ق(س، و) \Delta ص$$

حيث ان لكل قيمة للمتغير س تكون ج تجزئة للفترة [ك_١ (س)، ك_٢ (س)] وتكون و نقطة في الفترة الجزئية [ص_١ - ١، ص_٢] من التجزئة ج. وكذلك فإن Δ ص_١ = ص_٢ - ص_١ - ١. لذلك فإنه لأي هر في الفترة [١، ب] يكون

$$ف(هر) = \int_{س_1}^{س_2} ق(هر، و) \Delta ص$$

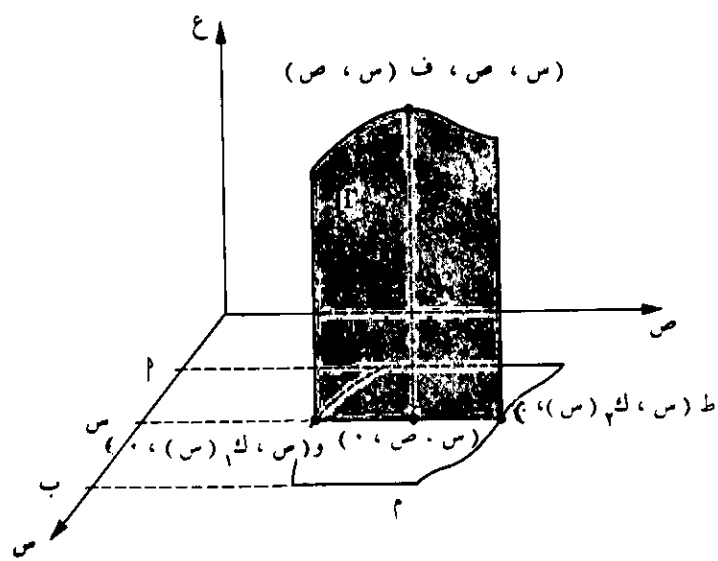
وبتعويض قيمة ف (هر) في (١٧ - ١٧) نحصل على

$$ح = \int_{س_1}^{س_2} ف(س) دس = \int_{س_1}^{س_2} \int_{ص_1}^{ص_2} ق(س، و) \Delta ص \Delta س$$

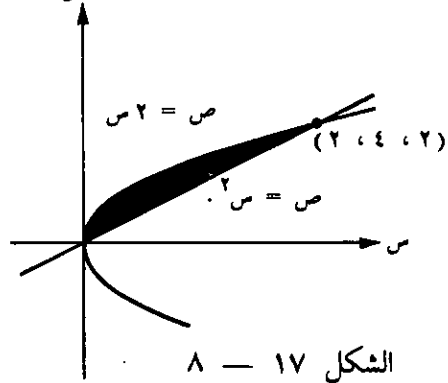
$$\int_{س_1}^{س_2} ق(هر، و) \Delta ص \Delta س$$

فاذا اهلنا النهايات في صيغة العلاقة السابقة نحصل على مجموع ثنائي على شكل

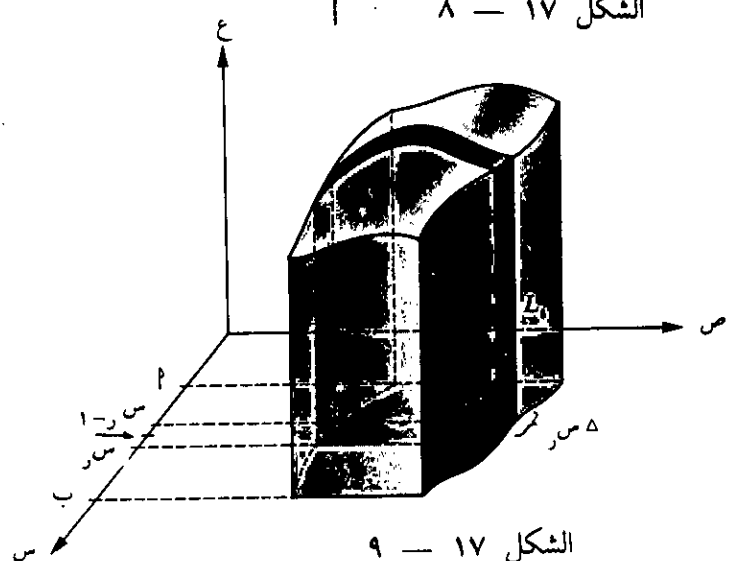
$$\int_{س_1}^{س_2} \int_{ص_1}^{ص_2} ق(هر، و) \Delta ص \Delta س$$



الشكل ١٧ — ٧



الشكل ١٧ — ٨



الشكل ١٧ — ٩

مثال ٥ : جد قيمة $\left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٤ ص)$ وف ، حيث م هي النقطة في المستوى

س ص والمحصورة بين مخططتي الاقترانين ص = س^٢ ، ص = ٢ س .

الحل : ان رسم مخطط المنطقة م موضح في الشكل (١٧ - ٨) ، وباستعمال (١٧ - ١٤) ينتج ان

$$\left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٤ ص) = \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٣ ص + ص) = \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٣ ص) + \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] ص$$

ومن المثال (٣) نعلم ان قيمة هذا التكامل هي $\frac{٣٢}{٣}$.

ان التكامل الثنائي يمكن ايجاده كذلك باستعمال (١٧ - ١٤ ب) . وفي

هذه الحالة نحل معادلات حدود المنطقة م لنجد س بدلالة ص لذلك فان

$$س = \frac{١}{٢} ص ، س = \sqrt{ص} ،$$

وباستعمال ل_١ (ص) = $\frac{١}{٢} ص$ ، ل_٢ (ص) = $\sqrt{ص}$ ، ج = ٠ ، د = ٤

نحصل على

$$\left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٤ ص) = \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٣ ص + ص) = \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٣ ص) + \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] ص$$

$$= \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٣ ص + ص) = \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٣ ص + ص) = \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٣ ص + ص)$$

$$= \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٣ ص + ص) = \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٣ ص + ص) = \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٣ ص + ص)$$

ومن المفيد ان نعتبر التكامل الاول في (١٧ - ١٦) عبارة عن نهاية مجموع ،

فباستعمال (٦ - ٢.٢) ينتج ان :

$$\left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٤ ص) = \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٤ ص) = \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (س^2 + ٤ ص)$$

(ب) اذا كان L_1 ، L_2 اقترانين ممهدين على الفترة [ج ، د] فان

$$\left[\begin{matrix} \text{ق (س ، ص)} \\ \text{د ف} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \text{د} \\ \text{ج} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \text{ق (س ، ص)} \\ \text{د س} \end{matrix} \right] \text{ص}$$

وبدلا من أن نعطي برهانا رصينا للنظرية (١٧ - ١٤) ، سوف نعطي مناقشة بديهية لهذه النظرية ، تجعلها تبدو معقولة على الأقل في حالة الافتراضات غير السالبة . افرض أن $Q (S, V)$ صفر في المنطقة م الموضحة في الشكل ١٧ - ١ . وان ت هو بيان (مخطط) الاقتران Q وان ج هو الجسم الذي يقع تحت ت وفوق م . كذلك افرض أن ح حجم الجسم ج .

ولنبداً بأخذ المستوى ز الذي يوازي المستوى ص ع ويقطع محور السينات في النقطة (س ، ٠ ، ٠) حيث $b \leq s \leq m$ كما هو موضح في الشكل ١٧ - ٧ . افرض ان ن هو مسقط ت على المستوى ز ولتكن النقطتان (س ، $k_p (S, 0)$ ، ط (س ، $k_p (S)$) هما حيث يقطع ن حدود المنطقة $V = k_p (S)$ ، ص = $k_p (S)$ من م . فالقسم المظلل في الشكل هو الجزء من المستوى ز الذي يقع فوق قطعة الخط و ط وتحت ن . فن الفصل السادس (انظر ٦ - ١٥) تكون مساحة القسم المظلل تساوي .

$$(15-17) \quad \left[\begin{matrix} \text{ق (س ، ص)} \\ \text{د س} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \text{د} \\ \text{ج} \end{matrix} \right] \text{ص}$$

وبما أن $F (S)$ هي مساحة مقطع عرضي للجسم ج نستنتج من

$$(16-17) \quad \left[\begin{matrix} \text{ح} \\ \text{م} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \text{ف (س ، ص)} \\ \text{د س} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \text{ب} \\ \text{م} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \text{ق (س ، ص)} \\ \text{د س} \end{matrix} \right] \text{ص}$$

وباستعمال العلاقة التي تعطينا ح من (١٧ - ٥) نحصل على الجزء الاول (١٧ - ١٤) من نظرية ايجاد قيمة التكامل الثنائي . وبطريقة مماثلة يمكننا أن نناقش الجزء التالي (١٧ - ١٤ ب) .

$$\frac{1}{6} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[(2 \text{ ص } 2 + 3 \text{ ص } 3) - (2 \text{ ص } 8 + 4 \text{ ص } 2) \right] =$$

$$\frac{32}{3} = 2 \left[6 \right]$$

مثال (۴) $\left. \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} 2 \\ \pi \\ 6 \end{matrix} \right\} 2$ ص جتا س و س و ص .

الحل : حسب (١٧ - ١٣) فان التكامل يساوي

$$\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{\frac{\pi}{6}} = \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{\frac{\pi}{6}} \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{\frac{\pi}{6}} \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left[\left(2^3 \text{ ص جا ص}^2 - \text{ص} \right) \text{ ص} - \text{جنا ص}^2 - \frac{1}{4} \text{ ص}^2 \right] =$$

$$\left(\frac{1}{2} - 1 \text{ جتا} -\right) - \left(\frac{9}{2} - 9 \text{ جتا} -\right) =$$

= جتا ۱ - جتا ۹ - ۴ .

والنظرية التالية تبين أن التكامل الثنائي الذي عرف في البند الاول يمكن أن يحسب في معظم الاحيان بواسطة التكامل التكراري .

(١٧-١٤) نظرية : ايجاد قيمة التكامل الثنائي :

(٢) اذا كان ق اقترانا متصلا على المنطقة م الموضحة في الشكل ١٧ - ١

حيث K_1 ، K_2 اقترانان ممهدان على الفترة $[P, B]$ فان :

$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ (س) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ (س) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ (س) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ (س) \end{array} \right]$

$$\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right] = \text{ص} [(2 + 1) - (128 - 16)] \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right] =$$

(١٥ + ص

$$= \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right] [15 \text{ ص} + 63 \text{ ص}] = 234 .$$

ويمكن تعريف التكامل الثنائي التكراري على مناطق غير مستطيلة الشكل .
ولنأخذ الحالة الخاصة التالية :

إذا كان الاقتران ق متصلا على منطقة كالموضحة في الشكل (١٧ - ١)

فانه حسب التعريف

$$(17-12) \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right] = \text{ق} (\text{س} , \text{ص}) \text{ص} \text{ص} = \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]$$

(س) ك_١ ب (س) ك_١ ب

(س ، ص) [ص د س .

وفي هذه الحالة بعد التكامل الجزئي بالنسبة للمتغير ص نعوض بدلا من ص
حدى التكامل ك_١ (س) ، ك_٢ (س) كالمعتاد ومن ثم تكامل المقدار الناتج
بالنسبة للمتغير س من ب الى ب .

وبالمثل اذا كان ق اقترانا متصلا معرفا على منطقة كالموضحة في الشكل

١٧ - ١ ب فانه حسب التعريف :

$$(17-13) \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right] = \text{ق} (\text{س} , \text{ص}) \text{ص} \text{ص} = \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]$$

(ص) ه_١ د (ص) ه_١ ج

ق (س ، ص) [دس ص

مثال ٣ :

$$\text{أوجد قيمة} \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] \text{ (س}^2 + 4 \text{ ص}) \text{ص} \text{ص}$$

الحل : حسب (١٧ - ٢) فان التكامل يساوي

مثال ١ :

$$\text{جد قيمة التكامل } \int_1^4 \int_{-1}^2 (2س + ٦س^٢ص) د ص د س$$

الحل : كما في (١٧ - ١٠) ان هذا التكامل يساوي

$$\int_1^4 \left[\int_{-1}^2 (2س + ٦س^٢ص) د ص \right] د س = \int_1^4 (٢س٣ + ٢س٣ص) د س$$

$$= \int_1^4 (٢س٣ + ٢س٣ص) د س = \left[\frac{٢س^٤}{٤} + \frac{٢س^٤ص}{٤} \right]_1^4$$

$$= \left[\frac{٢٣٤}{٤} + \frac{٢٣٤ص}{٤} \right]_1^4$$

وبالمثل يمكن ان نناقش التكامل الثنائي التكراري الذي على الشكل :

$$(١٧ - ١١) \int_a^b \int_c^d f(س، ص) د ص د س = \int_c^d \int_a^b f(س، ص) د س د ص$$

وفي هذه الحالة نكامل بالنسبة للمتغير س بينما يبقى ص ثابتا . وبعد تعويض
حدى التكامل بـ م كالمعتاد نكامل المقدار الناتج بالنسبة للمتغير ص من جـ
الى د . وفي كتب التفاضل والتكامل المتقدمة يعطى برهان على ان التكاملين في
(١٧ - ١٠) ، (١٧ - ١١) متساويان ، وهذا موضح في المثال الثاني
حيث نعكس ترتيب عملية التكامل بالنسبة للمتغيرين كما في المثال :

مثال ٢ :

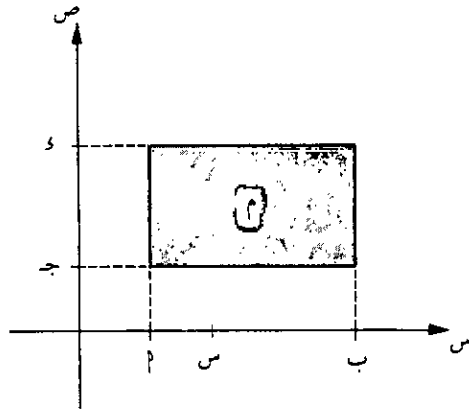
$$\text{أوجد } \int_{-1}^2 \int_1^4 (2س + ٦س^٢ص) د ص د س$$

الحل : بتطبيق (١٧ - ١١)

$$\int_{-1}^2 \left[\int_1^4 (2س + ٦س^٢ص) د س \right] د ص = \int_{-1}^2 (٢س٣ + ٢س٣ص) د ص$$

$$= \left[\frac{٢س^٤}{٤} + \frac{٢س^٤ص}{٤} \right]_1^4$$

$$(١٧-٩) \text{ ف (س) } \int_{\text{ج}}^{\text{د}} \text{ق (س، ص، د ص) .}$$



الشكل ١٧ — ٦

ولتوضيح (١٧-٩) اذا كان ق (س، ص) = $s^3 + 4v$ ، ج = ١ ،
 $v = 2$ فان

$$\text{ف (س) } = \int_1^2 (s^3 + 4v) ds = s^4 + 4vs \Big|_1^2 = 16 + 8v - 1 - 4v = 15 + 4v$$

$$= (2 + s^3) - (1 + s^3) = 1 + s^3$$

انه بالامكان البرهنة على أن الاقتران ف المعروف في (١٧-٩) متصل على
 الفترة [١، ٢] ، ولهذا يمكن إيجاد تكامله المحدود ، وهذا يمكن كتابته كما
 يلي :

$$\int_p^b \text{ف (س) } ds = \int_p^b \left[\int_j^d \text{ق (س، ص، د ص) } dv \right] ds$$

والمقدار الذي في الطرف الايسر يسمى التكامل « الثنائي » التكراري
 وفي العادة يمكن

Iterated Double Integral

اختصار الرمز بحذف الاقواس لهذا فحسب التعريف :

$$(١٧-١٠) \int_p^b \left[\int_j^d \text{ق (س، ص، د ص) } dv \right] ds = \int_p^b \text{ف (س) } ds$$

التكامل المحدود الذي نوقش في الفصل الخامس . وسنفرض أن كل الاقتارات
والمناطق مختارة بحيث يكون التكامل موجودا .

$$(٦-١٧) \quad \left[\begin{array}{c} \text{ق (س ، ص) ز ف} \\ \text{م} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{ق (س ، ص) ز ف} \\ \text{م} \end{array} \right]$$

حيث م عدد حقيقي

$$(٧-١٧) \quad \left[\begin{array}{c} \text{ق (س ، ص) ز ف} \\ \text{م} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{غ (س ، ص) ز ف} \\ \text{م} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{ق (س ، ص) ز ف} \\ \text{م} \end{array} \right]$$

(٨-١٧) اذا كان $\text{ق (س ، ص)} \leq$ في المنطقة م ، فان

$$\left[\begin{array}{c} \text{ق (س ، ص) ز ف} \\ \text{م} \end{array} \right] \leq \text{صفر}$$

تمارين :

(١) اذا كانت ق ، م ، ج كما في المثال ، فجد مجموع ريمان للاقتان ق
والتجزئة ج عندما تكون $(\text{هر} ، \text{ور})$ كما يلي :

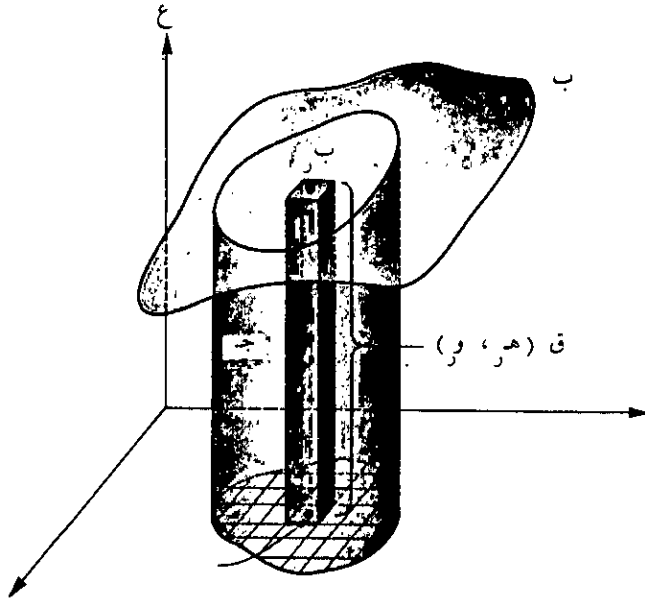
(أ) النقطة هي رأس الزاوية العليا اليمنى للمنطقة م .

(ب) النقطة هي رأس الزاوية العليا اليسرى للمنطقة م .

(٢) افرض أن ق ، م كما في المثال وان التجزئة الداخلية $\text{ج} = \{\text{م}\}$
تكونت برسم خطوط أفقية ورأسية قواطعها على المحورين . $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{7}{4}$.

فجد مجموع ريمان للاقتان ق والتجزئة ج اذا كانت $(\text{هر} ، \text{ور})$ مراكز م .

(٣) خذ م المنطقة المثلثة التي رؤوسها النقاط $(٠ ، ٠)$ ، $(٠ ، ٦)$ ، $(٦ ، ١٢)$
والتجزئة الداخلية ج المكونة من رسم خطوط رأسية قواطعها على محور السينات
هي ٠ ، ١ ، ٣ ، ٤ ، ٦ وخطوط افقية قواطعها على محور الصادات ٠ ، ٢ ،
 ٥ ، ٧ ، ٨ ، ١٢ . فاذا كان $\text{ق (س ، ص)} = \text{س}^٢ \text{ص}$ فجد مجموع ريمان
للاقتان م والتجزئة ج علما بأن النقطة $(\text{هر} ، \text{ور})$ هي مراكز م .

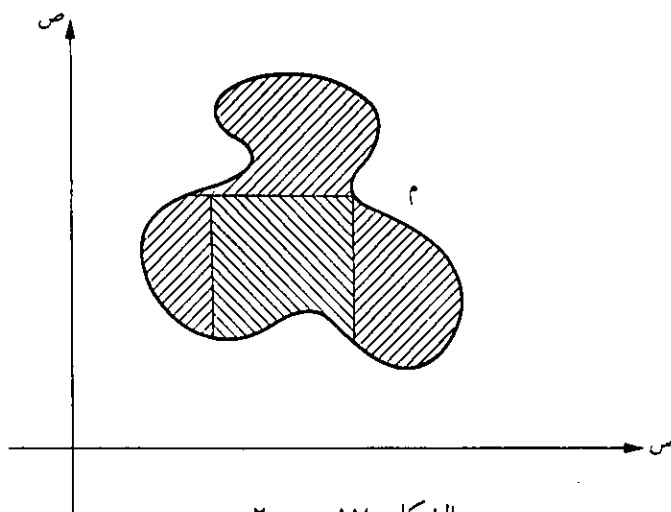


الشكل ١٧ - ٥

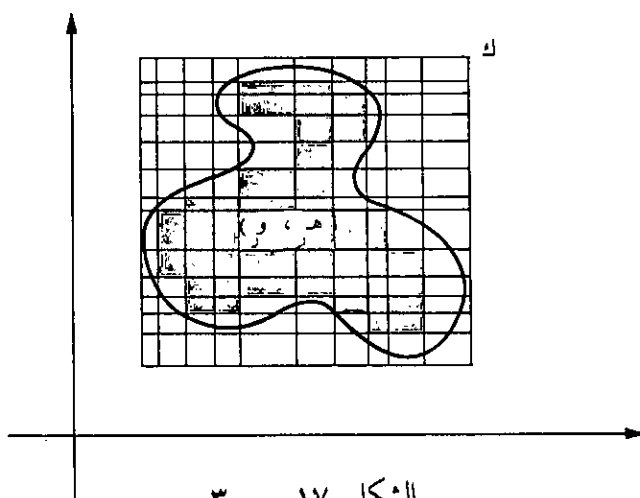
الجسم الذي يقع تحت ب وفوق م كما هو موضح في الشكل ١٧ - ٥ فإذا كانت ج (هر، و، ٠) أي نقطة في المنطقة الجزئية م من التجزئة ج للمنطقة م. فإن ق (هر، و) هي المسافة بين المستوى س ص والنقطة ب على ب التي تقع مباشرة فوق ج إن المقدار ق (هر، و) Δ ف هو حجم المنشور ذي القاعدة المستطيلة الموضح في الشكل ١٧ - ٥. ومجموع هذه الحجم يساوي تقريبا الحجم ج للجسم ج. وبما ان هذا الحجم يقترب أكثر فأكثر من ح عندما تقترب ج // من الصفر فالتناهي نعرف ح بأنه نهاية مجموع المقادير ق (هر، و) Δ ف. وتطبيق (١٧ - ٣) نحصل على

$$\left[\left[\begin{matrix} \text{ق (س، ص)} \\ \text{د ف} \end{matrix} \right] \right]_{\text{م}} = \text{ج (١٧ - ٥)}$$

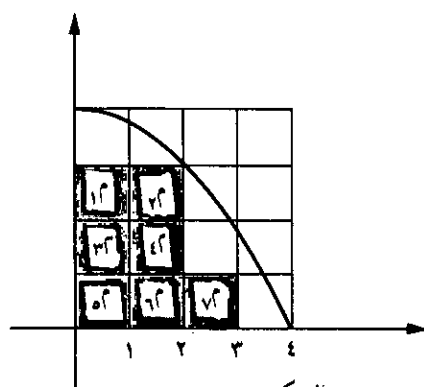
من الواضح انه اذا كان ق (س، ص) $\leq$ صفر في المنطقة م فان التكامل الثنائي للاقتزان ق على م هو عبارة عن حجم الجسم السالب الواقع تحت البيان (المخطط) ق وتحت المنطقة م. وسوف ننهي هذا البند بذكر خواص التكامل الثنائي وهي تشبه خواص



الشكل ١٧ - ٢



الشكل ١٧ - ٣



الشكل ١٧ - ٤

$$م = \{(س، ص) : ٤ \leq س \leq ١٦ - س^٢، ص \leq ٠\}، \text{ ولتكن}$$

ج = {م_ر : ر = ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦} تجزئة داخلية للمنطقة م حصلنا عليها برسم خطوط أفقية ورأسية عند الأعداد الصحيحة على المحورين كما هو موضح في الشكل ١٧ - ٤. فإذا كانت (ه_ر، و_ر) هي مركز المنطقة م_ر فما مجموع ريمان (١٧ - ١) ؟

الحل : لقد اختيرت النقاط (ه_ر، و_ر) لتكون كما يلي :

$$\left(\frac{١}{٢}, \frac{١}{٢}\right) \text{ في } م_١, \left(\frac{٣}{٢}, \frac{٣}{٢}\right) \text{ في } م_٢, \left(\frac{١}{٢}, \frac{٣}{٢}\right) \text{ في } م_٣, \left(\frac{٣}{٢}, \frac{١}{٢}\right) \text{ في } م_٤,$$

$$\left(\frac{١}{٢}, \frac{١}{٢}\right) \text{ في } م_٥, \left(\frac{٣}{٢}, \frac{٣}{٢}\right) \text{ في } م_٦, \left(\frac{١}{٢}, \frac{٥}{٢}\right) \text{ في } م_٧, \left(\frac{٥}{٢}, \frac{١}{٢}\right) \text{ في } م_٨.$$

وبما أن المساحة Δ لكل م_ر هي وحدة فان مجموع ريمان هو

$$\begin{aligned} & ١ \times \left(\frac{١}{٢}, \frac{١}{٢}\right) + ١ \times \left(\frac{٣}{٢}, \frac{٣}{٢}\right) + ١ \times \left(\frac{١}{٢}, \frac{٣}{٢}\right) + ١ \times \left(\frac{٣}{٢}, \frac{١}{٢}\right) \\ & + ١ \times \left(\frac{١}{٢}, \frac{١}{٢}\right) + ١ \times \left(\frac{٣}{٢}, \frac{٣}{٢}\right) + ١ \times \left(\frac{١}{٢}, \frac{٥}{٢}\right) + ١ \times \left(\frac{٥}{٢}, \frac{١}{٢}\right) \\ & + ١ \times \left(\frac{١}{٢}, \frac{٥}{٢}\right) + ١ \times \left(\frac{٥}{٢}, \frac{١}{٢}\right) = ٦٠. \end{aligned}$$

وهذا يبسط الى ١٢ + ٨ + ٤ + ١٠ + ٦ + ١٢ + ٨ = ٦٠.

في المثال السابق اختيرت النقاط (ه_ر، و_ر) في مراكز المناطق م_ر.

ولكن من المهم ان نتذكر انه عند التعامل مع مجاميع ريمانية عشوائية فانه يمكن

اختيار أي زوج (ه_ر، و_ر) في م_ر. (انظر السؤال ١). وللاختصار سوف

نرمز للتجزئات الداخلية للمنطقة م بالرمز ج = {م_ر} بدون تحديد مجال الترقيم

السفلي. ورمز المجموع $\sum$ سوف يرمز للمجموع على كل المناطق المستطيلة

م_ر للتجزئة.

والتعريف التالي مطابق للتعريف (٥ - ١٥).

(١٧ - ٢٠) تعريف نهاية مجاميع ريمان

إذا كان اقترانا ذا متغيرين ومعرفا على المنطقة م. وكان ع عددا حقيقيا، فان

الصيغة :

$$\lim_{\Delta} \sum_{r} f_r(ه_r, و_r) = ع.$$

ل_١ ، ل_٢ ممهدة على الفترتين [١ ، ب] ، [ج ، د] على الترتيب وحيث ف_١ (س) < ف_٢ (س) لكل قيم س و [١ ، ب] وكذلك ل_١ (ص) < ل_٢ (ص) لكل قيم ص و [ج ، د] وحتى نهاية هذا الفصل سيرمز م الى المنطقة التي يمكن تجزئتها الى عدد محدود من مناطق جزئية كالتي في الشكل ١٧ - ١ . فعلى سبيل المثال ان المنطقة م المبينة بالشكل ١٧ - ٢ يمكن تجزئتها الى عدد محدود من المناطق الجزئية بالطريقة المبينة وبطرق أخرى غيرها . وكل من هذه المناطق يمكن احتواؤها في منطقة مستطيلة ك . فإذا جزئت ك الى مناطق مستطيلة اصغر برسم مستقيمت أفقية ورأسية محدودة العدد فان مجموع المناطق المستطيلة المغلقة المحتواة تماما في المنطقة م تسمى تجزئة داخلية (Inner Partition) للمنطقة م .

فإذا كانت المناطق المستطيلة الجزئية م_١ ، م_٢ ، ... م_{١٠٠٠} فالتجزئة الداخلية هي ج = {م_١ : ر = ١ ، ٢ ، ... ، ١٠٠٠ ، ن} . ويسمى اطول قطر للمناطق المستطيلة م_١ بمقياس التجزئة (Norm of a Partition) ويرمز له بالرمز || ج || وسنستعمل الرمز Δ ف_١ ليرمز لمساحة المنطقة م_١ .

(١٧ - ١) تعريف مجموع ريمان :

إذا كان ق اقترانا ذا متغيرين معرفا على المنطقة م وكانت ج = {م_١ : ر = ١ ، ٢ ، ... ، ١٠٠٠ ، ن} تجزئة داخلية للمنطقة م فان أي مجموع

على الشكل التالي

ر_ك^ن ق (هر_١ ، ور_١) Δ فر_١ ، حيث (هر_١ ، ور_١) نقطة في المنطقة م_١ .
يسمى مجموع ريمان للاقتران ق للتجزئة ج .

ومن المهم ان نلاحظ التشابه بين هذا التعريف وبين التعريف المعطى في الفصل الخامس للاقترانات ذات المتغير الواحد . ففي (٥ - ١٣) نجد قيمة الاقتران ق ذا المتغير الواحد في النقطة هر الواقعة في فترة جزئية موجودة في تجزئة للفترة الجزئية . ثم نجد مجموع الحدود التي على شكل ق (هر_١) Δ سر_١ . وهنا في الوضع الحالي نجد قيمة الاقتران ق ذي المتغيرين عند الزوج (هر_١ ، ور_١) الذي يقع في المنطقة الجزئية م_١ من تجزئة المنطقة م . ثم نضرب ق (هر_١ ، ور_١) في المساحة فر_١ ، ثم نأخذ مجموع كل هذه الحدود .

مثال : افرض أن ق (س ، ص) = ٤س + ٢ص + ١ ، وان

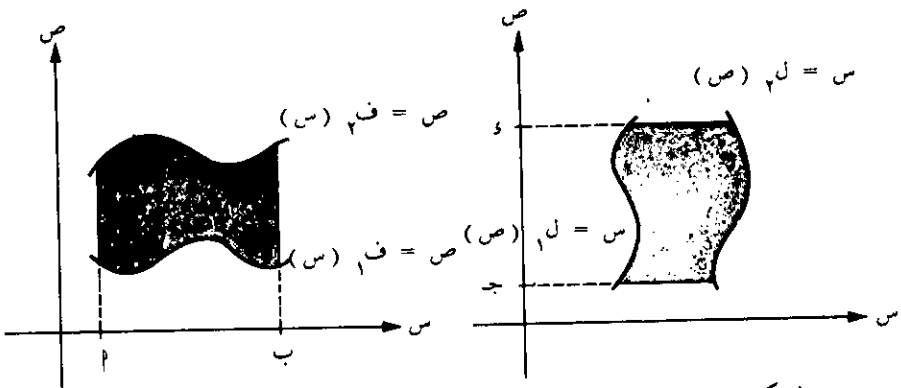
الفصل السابع عشر

التكاملات المتعددة

ان فكرة التكاملات المحدودة التي قدمنا لها في الفصل الخامس يمكن تعميمها حتى تشمل الاقترانات ذات المتغيرات المتعددة . وفي هذا الفصل سنعرف التكاملات الثنائية Double Integrals والتكاملات الثلاثية Triple Integrals وسناقش بعض خواصها الأساسية وتطبيقاتها :

١ — التكاملات الثنائية :

من الامور ذات الأهمية الكبيرة في تعريف التكاملات الثنائية تحديد مناطق في مستوى s - v كالملخصة في الشكل ١٧ - ١ حيث الاقترانات f_1 ، f_2 ، وكذلك



الشكل ١٧ - ١

الشكل ١٧ - ١ ب

periodicity	دورية	product rule	قاعدة المضروبين
piecewise	جزءاً جزءاً	product set	مجموعة حاصل الضرب
piecewise smooth	ممهّد جزءاً جزءاً	product, scalar	ضرب قياسي
plane	مستوى ، مستوٍ	product, vector	ضرب متجه
plane curve	منحنى مستوٍ	p-series	متسلسلة قوة
quadrangle	رباعي الزوايا	quantity	كمية
quadratic	تربيعي	quantity, scalar	كمية قياسية
quadric surface	سطح تربيعي	quantity, vector	كمية متجهة
quadrilateral	شكل رباعي	quotient rule	قاعدة المقسومين
quadrilateral, Saccheri	رباعي سكييري		
radical ($\sqrt{\quad}$)	إشارة الجذر ($\sqrt{\quad}$)	reduction formula	صيغة اختزال
range	مدى	reflection	انعكاس
rational	مُنتَق ، نسي	region	منطقة
reciprocal	مقلوب	related rates	سرعات مترابطة
rectify	يعدل	removable	زائل
rectifiable	قابل للتعديل	revolution, volume of	حجم دوراني
rectilinear	عديل	Riemann sum	مجموع ريمان
		rotation of axes	تدوير المحاور
sandwiching theorem	نظرية التشطير السندويش	singularity	نقطة منعزلة
section	مقطع	sink	غور
section, conic	مقطع مخروطي	solid revolution	بحجم دوراني
separable	قابل للفصل	solinoid	لفافة
sequence	متسلسلة	solinoidal	ملف
series	متالية	source	نبع
series solution	الحل بمتسلسلة	smooth curve	منحنى ممهّد
set	مجموعة	space	فضاء
set, solution	مجموعة الحل	space curve	منحنى في الفضاء
shell	قشرة	space, vector	فضاء متجه (مجم ، مجم)
shell, cylindrical	قشرة اسطوانية	standard	قياسي ، معياري
simpson's rule	قاعدة سمسون	subset	مجموعة جزئية
singular solution	حل منعزل	surface of revolution	سطح دوراني

tangent line	مماس	translation of axes	سحب المحورين
tangent of angle	ظل الزاوية	trapezoidal rule	نظرية شبه المنحرف
transcendental	غير جبري ، متسام	terminal point	نقطة نهاية
translation	ازاحة ، انسحاب	triple scalar product	ضرب قياسي ثلاثي
Union (U)	اتحاد (U)	vector space, 3-dimensional	فضاء متجه ذو ثلاثة ابعاد (مجم)
unit, unity	وحدة	vector valued	متجه القيمة
unit circle	دائرة وحدة	velocity	سرعة متجهة
variable	متغير	vertex	رأس
variable, dependent	دالة ، تابع	vertices	رؤوس
variable, independent	متغير مستقل	vector field	حقول متجه
vector space	فضاء متجه	vector field, steady	حقول متجه مستقر
vector space, 2-dimensional	فضاء متجه ذو بعدين (مجم ٢)	zero vector	متجه صفري
		zeros of a function	اصغار الأقران

level curve	منحنى سوي	linear	خطي
L'Hopital rule	قاعدة لوبتال	linear equation	معادلة خطية
limacone	لماكون	linear relation	علاقة خطية
limniscate	لمنسكيت	linear function	اقتزان خطي
line	خط ، خط مستقيم	linearisation	تقريب خطي
line, horizontal	خط افقي		
magnitude	مقدار	minima	قيم صغرى
multiple, scalar	مضاعف قياسي	minima, local	قيم صغرى محلية
maxima	قيم ، قيم عظمى	minimum	قيمة صغرى
maxima, local	قيم (او قيم عظمى) محلية	moment	عزم
maximum	قيمة ، قيمة عظمى	moment of inertia	عزم القصور الذاتي
mean value	قيمة متوسطة	monotone	ونيري
midpoint	منتصف	monotonic	ونيري
neighborhood	حوار	normal	عمودي
n-leaved rose	وردة ذات ن ورقات	normal, lower	عمودي سفلي
norm n	مقياس ن	normal, upper	عمودي علوي
norm of partition p	مقياس التجزئة ج	number line	خط الأعداد
odd function	اقتزان وتري	ordered pair	زوج مرتب
odd number	عدد فردي	ordinary equations	معادلات عادية
one-to-one	واحد لواحد	oriented plane	سطح معدول
operator	مؤثر ، فاعل	origin	نقطة الأصل
operator, differential (D)	مؤثر تفاضلي (D)	orthogonal trajectory	راسم عمودي
orbit	مدار		
parabola	قطع مكافئ	polar axis	محور قطبي
parabolic	مكافئ	polar coordinates	احداثيات قطبية
paraboloid	(مجسم) مكافئ	polar equation	معادلة قطبية
paraboloid of revolution	مكافئ دوراني	polynomial	حدودية ، كثيرة حدود
parameter	(متغير) وسيط	position function	اقتزان موضع
parametric equation	معادلة وسيطة	position vector	متجه موضع
partial fractions	كسور جزئية	potential	جهد
path	مسار	potential function	اقتزان ممكن
period	دورة	power rule	قاعدة القوى
periodic	دوري	power series	متسلسلة قوى

inequality, triangle	متباينة مثلثية	integral, double	تكامل ثنائي
inertia	القصور الذاتي	integral, iterated	تكامل تكراري
inertia, moment of	عزم القصور الذاتي	integral, multiple	تكامل مضاعف
infinite	لامتناه	integral, triple	تكامل ثلاثي
infinite series	متسلسلة لا متناهية	integrel, definite	تكامل محدد
infinity (∞)	اللانهاية (∞)	integral, indefinite	تكامل غير محدد
integrand	مكامل	inverse cosine ($\cos^{-1}$)	معكوس جيب التمام ($\cos^{-1}$)
integrating factor	معامل تكامل	inverse tangent ($\tan^{-1}$)	معكوس الظل ($\tan^{-1}$)
integration	تكامل	inverse cotangent ($\cot^{-1}$)	معكوس ظل التمام ($\cot^{-1}$)
integration by parts	تكامل بالأجزاء	inverse secant ($\sec^{-1}$)	معكوس القاطع ($\sec^{-1}$)
integration, partial	تكامل جزئي	inverse cosecant ($\csc^{-1}$)	معكوس قاطع التمام ($\csc^{-1}$)
intercept	مقطع	inverse hyperbolic sine ($\sinh^{-1}$)	معكوس الجيب الزائدي ($\sinh^{-1}$)
intermediate value theorems	نظرية القيم المتوسطة	inverse hyperbolic cosine ($\cosh^{-1}$)	معكوس جيب التمام الزائدي
interpolation	استكمال	inverse hyperbolic tangent ($\tanh^{-1}$)	معكوس الظل الزائدي
intersection ($\cap$)	تقاطع ($\cap$)	inverse hyperbolic cotangent ($\coth^{-1}$)	معكوس ظل التمام الزائدي
interval	فترة	inverse hyperbolic secant (sech^{-1})	معكوس القاطع الزائدي
interval, closed	فترة مغلقة	inverse hyperbolic cosecant ($\operatorname{cosech}^{-1}$)	معكوس قاطع التمام الزائدي
interval, open	فترة مفتوحة	inverse square field	حقل تربيع عكسي
irrational	لا نسبي ، أصم	isobar	منحني تساوي الضغط
irrotational	لا دوراني	isothermal surface	سطح تساوي الحرارة
inverse	عكسي ، معكوس ، معاكس ، متعاكس	line, normal	خط عمودي
inverse sine ($\sin^{-1}$)	معكوس الجيب ($\sin^{-1}$)	line, vertical	خط رأسي
		line, ruling	راسم
lamina	صفحة		
Lagrange multipliers	مضروبات لاغرانج		
Laplacian (Lap)	لابلاسية (لب)		

form	شكل ، صيغة	function, inverse hyperbolic	اقتزان زائدي معاكس
formula	صيغة ، قاعدة ، قانون	functions, inverse	اقتزانات متعاكسة
four-leaved rose	ورددة رباعية	function, jump	اقتزان قافز
fraction	كسر	function, linear	اقتزان خطي
fractions, partial	كسور جزئية	function, logarithmic (log)	اقتزان لوغرفي (لو)
free vector	متجه حر	function, natural logarithmic (ln)	اقتزان لوغرفي طبيعي (لط)
		function, quadratic	اقتزان تربيعي
		function, step	اقتزان سلمي
grad (grad.)	مدرج (مع)	govern	يحكم ، يتحكم
gradient	ميلان	growth, law of	قانون التكاثر
graph	مخطط ، رسم بياني ، بيان	gyration. radius of	نصف قطر الدوران
Gomperz growth curve	منحنى غمبيرز للتكاثر		
harmonic	توافقي	hyperbolic cosine	جيب تمام زائدي
harmonic motion	سرعة توافقية	hyperbolic cotangent	ظل تمام زائدي
helix	(منحنى) لولي او حلزوني	hyperbolic secant	قاطع زائدي
homogeneous	متجانس	hyperbolic sine	جيب زائدي
horizontal	افقي	hyperbolic tangent	ظل زائدي
hyperbola	قطع زائد	hyperbolic paraboloid	مكافئ زائدي
hyperbolic	زائدي	hyperboloid	مجسم (زائدي)
hyperbolic function	اقتزان زائدي	hyperboloid of one sheet	زائدي احادي
hyperbolic cosecant	قاطع تمام زائدي	hypocycloid	دائرة سفلية
if and only if (iff.)	اذا وفقط اذا	inflection, point of	نقطة انعطاف
image	صورة	initial conditions	شروط ابتدائية
implicit	ضمني	initial point	نقطة ابتداء
improper integral	تكامل معتل	inner partition	تجزئة داخلية
inclination	زاوية الميل	inner product	ضرب داخلي (أو نقطي)
increment	زيادة (Δ)	instantaneous	آني ،
independence of path	الاستقلال عن المسار	integer	عدد صحيح
indeterminate form	صيغة غير معينة	integral. (∫)	تكامل (∫)
inequality	متباينة	integral calculus	حساب التكامل

decay, law of	قانون التلاشي	differential equation, partial	معادلة تفاضلية جزئية
definite	محدد	differentiation	التفاضل
definite integral	تكامل محدد	differentiation, partial	التفاضل الجزئي
defined	معرف	direction angles	زوايا اتجاهات
definition	تعريف	direction cosines	جيوب تمام الاتجاهات
degenerate conic	قطع منحل	directrix	الخط الدليل
derived	مشتق	discontinuity	انقطاع
derivative	مشتقة (تفاضلية)	discontinuous	منقطع
derivative, nth order	مشتقة الرتبة ن	disjoint	منفصل
determinant	محددة	divergence (div)	التباعد (بع)
differential, (dx)	المفاضل (دس)	domain	مجال
differential calculus	حساب التفاضل	dot product	الضرب النقطي ، الداخلي ، القياسي
differential equation	معادلة تفاضلية	double integration	التكامل الثنائي
eccentricity	الاختلاف المركزي	error	خطأ
élément	عنصر	error, average	متوسط الخطأ
elementary region	منطقة أولية	error, relative	خطأ نسبي
ellipse	قطع ناقص	evaluation theorem	نظرية التقييم
ellipsoid, ellipsoidal	(مجسم) ناقصي	even number	عدد زوجي
elliptic	ناقصي	even function	اقتزان شفعي
empty set ($\emptyset$)	المجموعة الخالية $\emptyset$	exact equation	معادلة مضبوطة
epicycloid	دائرة علوية	explicit	صریح
equality	مساواة	exponent	أس
equation	معادلة	exponential	أسي
equation of continuity	معادلة الاستمرارية	exp	سا
equiangular	متساوي الزوايا	exponential function, natural	اقتزان طبيعي
equilateral	متساوي الأضلاع	extrema	قيم ، ذرى
equipotential surface	سطح تساوي الجهد	extremum	قمة ، ذروة
equivalent	مكافئ		
family of curves	طائفة منحنيات	function	اقتزان ، دالة ، تابع
figure	شكل	function, constant	اقتزان ثابت
flux	دفق	function, hyperbolic	اقتزان زائدي
focal chord	وتر بؤري	function, identity	اقتزان محاييد
foci	بؤرات	function, implicit	اقتزان ضمني
focus	بؤرة	function, inverse	اقتزان عكسي (أو معاكس)

centripetal force vector	متجه القوة المركزية	conic	محروطي
centroid	مركز الكتلة	conics	القطوع المخروطية
chain rule	قاعدة السلسلة	conic section	قطع محروطي
change of variables	تغيير المتغيرات	conjugate	مرافق ، مترافق
chord	وتر	conservative field	حقل محافظ
circle	دائرة	continuous	متصل ، متواصل
circle, great	دائرة كبرى	continuity	اتصال ، تواصل
circle, small	دائرة صغرى	contour curve	منحنى كنتوري
circle, unit	دائرة وحدة	convergence	تقارب
circle of curvature	دائرة الانحناء	cconvergence, absolute	تقارب مطلق
circular	دائري	convergence, conditional	تقارب مشروط
circular function	اقتزان دائري	convergent	تقاربي
circular helix	لولب دائري	coordinates	احداثيات
circular paraboloid	مكافئي دائري	coordinates, cylindrical	احداثيات اسطوانية
		coordinates, polar	احداثيات قطبية
coefficient	معامل	coordinates, rectangular	احداثيات متعامدة
coefficient, leading	المعامل الأول (المقدم)	coordinates, spherical	احداثيات كروية
complement	متمة	coordinate axes	محاور احداثيات
complementary equation	معادلة تكيلية	coordinate line	خط احداثيات
completeness property	خاصية التمام	coordinate system	نظام احداثيات
complex variable	متغير مركب	correspondence	تناظر
component	مركبة (مر)	correspondence, one-to-one	تناظر واحد لواحد
composite function	اقتزان مركب	cosecant	قاطع التمام
composition of functions	تركيب الاقترانات	cosec	قتا
cosecant, hyperbolic	قاطع التمام الزائدي	cube	مكعب
cosech	قتاز	cubic	تكعبي
cosine	جيب التمام	cubic, twisted	تكعبي ملوي
cos	جتا	curl	جعلدة (جمع ، Δ)
cosine, hyperbolic	جيب التمام الزائدي	curvature	انحناء
cosh	جتاز	curvature, radius of	نصف قطر الانحناء
cotangent	ظل التمام	curve	منحنى
cot	ظنا	curve, level	منحنى سوي
cotangent, hyperbolic	ظل التمام الزائدي	curve, plane	منحنى مستوي
coth	ظناز	curve, smooth	منحنى مهد
critical number	عدد حاسم	cycloid	دوارة
cross product	الضرب التصادلي	cycloid, inverted	دوارة مقلوبة

قاموس

المصطلحات الواردة في هذا الكتاب ورموزها

abscissa	الاحداثي السيني	are cos, ($\cos^{-1}$)	قوسنا ، (جتا ⁻¹)
absolute value, n	القيمة المطلقة : ن	arc cosecant	قوس قاطع التمام
absolute convergence	تقارب مطلق	arc cosec, ($\operatorname{cosec}^{-1}$)	قوسنا ، (قتا ⁻¹)
absolutely	اطلاقاً	arc cotangent	قوس ظل التمام
acceleration	تسارع	arc cot, ($\cot^{-1}$)	قوسنا ، (ظنا ⁻¹)
acceleration, angular	تسارع زاوي	arc sine	قوس الجيب
alternating	متبادل ، متناوب	arc sin, ($\sin^{-1}$)	قوسنا ، (جا ⁻¹)
alternating angles	زوايا متبادلة	arc secant	قوس القاطع
alternating series	متسلسلة متناوبة	arc sec, ($\sec^{-1}$)	قوسنا ، (قا ⁻¹)
analytical geometry	الهندسة التحليلية	arc tangent	قوس الظل
angle	زاوية	arc tan, ($\tan^{-1}$)	قوسنا ، (ظا ⁻¹)
angular uelocity	سرعة زاوية	asymptote	خط تقارب
antiderivative	أصل المشتقة	axes, axis	محاور ، محور
arbitrary	عشوائي ، اعتباطي	axes, coordinate	المحاور الاحداثية
arc	قوس	major axis	المحور الأكبر
arc cosine	قوس جيب التمام	minor axis	المحور الأصغر
base	قاعدة	boundary conditions	شروط جانبية
base angles	زوايا القاعدة	boundary values	قيم حاصرة
belonging, (ε)	انتماء (ε)	bound, lower	حاصرة دنيا
binomial	ذات الحدين ، حدانية	bound, upper	حاصرة عليا
binomial theorem	نظرية ذات الحدين	bounded	محصور
binomial expansion	فك (أو مفكوك) الحدانية	bounds	حواصر
calculus	(حساب) التفاضل والتكامل ، الحسبان	concave	مقوس
calculus, differential	(حساب) التفاضل	concave downward	محدب
calculus, integral	(حساب) التكامل	concave upward	مقعر
cardioid	(المنحنى) القلبي	concavity	التقوس ، التحدب والتقعير
cartesian	ديكارتي	conchoid	كنكرويد
cartesian coordinates	احداثيات ديكارتية	conditional convergence	تقارب مشروط
cartesian product	ضرب ديكارتي	cone	مخروط
catenary	الكاتينة	configuration	تشكل

متوازي الاضلاع

$$ف = ل ع$$

شبه المنحرف

$$ف = \frac{1}{4} (ل + ق) ع$$

الاسطوانة الدائرية القائمة

$$ع = \pi ر^2 ع$$

$$س = \pi ر^2 ع$$

المخروط الدائري القائم

$$ح = \frac{1}{3} \pi ر^2 ع$$

$$س = \pi ر \sqrt{ر^2 + ع^2}$$

الكرة

$$ج = \frac{4}{3} \pi ر^3$$

$$ع = \pi ر^2 ع$$

المنشور

$$ج = ج ع$$

الهرم

$$ج = \frac{1}{3} ع ع$$

الملحق الخامس

قواعد هندسية

من الرموز التي تستعمل مرارا في هذا الكتاب الرموز التالية :

ر = نصف القطر

ع = الارتفاع

ل (ل و ق) طول القاعدة

ف = المساحة

ح = المحيط

ح (أو ج) = الحجم

س = مساحة السطح المنحني

م = مساحة القاعدة

وصيغ مساحات ومحيط الدائرة والحجوم ومساحة السطح المنحني هي كما يلي :

المثلث $ف = \frac{1}{2} ق ع$

الدائرة $ف = \pi ر^2$

ح $= \pi ر^2$

الجدول ٣. اللوغرات الطبيعية

٠.٩	٠.٨	٠.٧	٠.٦	٠.٥	٠.٤	٠.٣	٠.٢	٠.١	٠.٠	٠.
٩, ٨٩٥	٩, ٧٧٧	٩, ٦٤٣	٩, ٤٨٩	٩, ٣٠٧	٩, ٠٨٤	٨, ٧٩٦	٨, ٣٩١	٧, ٦٩٧	٧, ٦٩٧	٠.
٠, ٦٤٢	٠, ٥٨٨	٠, ٥٣١	٠, ٤٧٠	٠, ٣٣٦	٠, ٤٠٥	٠, ٢٦٢	٠, ١٨٢	٠, ٠٩٥	٠, ٠٠٠	١
١, ٠٦٥	١, ٠٣٠	٠, ٩٩٣	٠, ٩٥٦	٠, ٨٧٥	٠, ٩١٦	٠, ٨٣٣	٠, ٧٨٨	٠, ٧٤٢	٠, ٦٩٣	٢
١, ٣٦١	١, ٣٣٥	١, ٣٠٨	١, ٢٨١	١, ٢٣٤	١, ٢٥٣	١, ١٩٤	١, ١٦٣	١, ١٣١	١, ٠٩٩	٣
١, ٥٨٩	١, ٥٦٩	١, ٥٤٨	١, ٥٢٦	١, ٤٨٢	١, ٥٠٤	١, ٤٥٩	١, ٤٣٥	١, ٤١١	١, ٣٨٦	٤
١, ٧٧٥	١, ٧٥٨	١, ٧٤٠	١, ٧٢٣	١, ٦٨٦	١, ٧٠٥	١, ٦٦٨	١, ٦٤٩	١, ٦٢٩	١, ٦٠٩	٥
١, ٩٣٢	١, ٩١٧	١, ٩٠٢	١, ٨٨٧	١, ٨٥٦	١, ٨٧٢	١, ٨٤١	١, ٨٢٥	١, ٨٠٨	١, ٧٩٢	٦
٢, ٠٦٧	٢, ٠٥٤	٢, ٠٤١	٢, ٠٢٨	٢, ٠٠١	٢, ٠١٥	١, ٩٨٨	١, ٩٧٤	١, ٩٦٠	١, ٩٤٦	٧
٢, ١٨٦	٢, ١٧٥	٢, ١٦٣	٢, ١٥٢	٢, ١٣٨	٢, ١٤٠	٢, ١١٦	٢, ١٠٤	٢, ٠٩٢	٢, ٠٧٩	٨
٢, ٢٩٣	٢, ٢٨٢	٢, ٢٧٢	٢, ٢٦٢	٢, ٢٥١		٢, ٢٤١	٢, ٢٣٠	٢, ٢٠٨	٢, ١٩٧	٩
٢, ٣٨٩	٢, ٣٨٠	٢, ٣٧٠	٢, ٣٦١	٢, ٣٤٢	٢, ٣٥١	٢, ٣٣٢	٢, ٣٢٢	٢, ٣١٣	٢, ٣٠٣	١٠

* اطرح ١٠ اذا كانت ن > ١. مثلا لط ٣, ٧٩٦ ≈ ١٠ - ٨, ٢٠٤

الجدول ١ . الاقتارات المثلية (تكلمة)

درجات	دائري	جا	ظا	ظنا	جتا	ظنا	دائري	درجات
٦٥	١,١٣٤	٠,٩٠٦	٢,١٤٤	٠,٤٦٦	٠,٤٢٣	٠,٤٣٦	٢٥	
٦٤	١,١١٧	٠,٨٩٩	٢,٠٥٠	٠,٤٨٨	٠,٤٣٨	٠,٤٥٤	٢٦	
٦٣	١,١٠٠	٠,٨٩١	١,٩٦٣	٠,٥١٠	٠,٤٥٤	٠,٤٧١	٢٧	
٦٢	١,٠٨٢	٠,٨٨٣	١,٨٨١	٠,٥٣٢	٠,٤٦٩	٠,٤٨٩	٢٨	
٦١	١,٠٦٥	٠,٨٧٥	١,٨٠٤	٠,٥٥٤	٠,٤٨٥	٠,٥٠٦	٢٩	
٦٠	١,٠٤٧	٠,٨٦٦	١,٧٣٢	٠,٥٧٧	٠,٥٠٠	٠,٥٢٤	٣٠	
٦٩	١,٠٣٠	٠,٨٥٧	١,٦٦٤	٠,٦٠١	٠,٥١٥	٠,٥٤١	٣١	
٥٨	١,٠١٢	٠,٨٤٨	١,٦٠٠	٠,٦٢٥	٠,٥٣٠	٠,٥٥٩	٣٢	
٥٧	٠,٩٩٥	٠,٨٣٩	١,٥٤٠	٠,٦٤٩	٠,٥٤٥	٠,٥٧٦	٣٣	
٥٦	٠,٩٧٧	٠,٨٢٩	١,٤٨٣	٠,٦٧٥	٠,٥٥٩	٠,٥٩٣	٣٤	
٥٥	٠,٩٦٠	٠,٨١٩	١,٤٢٨	٠,٧٠٠	٠,٥٧٤	٠,٦١١	٣٥	
٥٤	٠,٩٤٢	٠,٨٠٩	١,٣٧٦	٠,٧٢٧	٠,٥٨٨	٠,٦٢٨	٣٦	
٥٣	٠,٩٢٥	٠,٧٩٩	١,٣٢٧	٠,٧٥٤	٠,٦٠٢	٠,٦٤٦	٣٧	
٥٢	٠,٩٠٨	٠,٧٨٨	١,٢٨٠	٠,٧٨١	٠,٦١٦	٠,٦٦٣	٣٨	
٥١	٠,٨٩٠	٠,٧٧٧	١,٢٣٥	٠,٨١٠	٠,٦٢٩	٠,٦٨١	٣٩	
٥٠	٠,٨٧٣	٠,٧٦٦	١,١٩٢	٠,٨٣٩	٠,٦٤٣	٠,٦٩٨	٤٠	
٤٩	٠,٨٥٥	٠,٧٥٥	١,١٥٠	٠,٨٦٩	٠,٦٥٦	٠,٧١٦	٤١	
٤٨	٠,٨٣٨	٠,٧٤٣	١,١١١	٠,٩٠٠	٠,٦٦٩	٠,٧٣٣	٤٢	
٤٧	٠,٨٢٠	٠,٧٣١	١,٠٧٢	٠,٩٣٣	٠,٦٨٢	٠,٧٥٠	٤٣	
٤٦	٠,٨٠٣	٠,٧١٩	١,٠٣٦	٠,٩٦٦	٠,٦٩٥	٠,٧٦٨	٤٤	
٤٥	٠,٧٨٥	٠,٧٠٧	١,٠٠٠	١,٠٠٠	٠,٧٠٧	٠,٧٨٥	٤٥	
		جتا	ظنا	ظا	جا	دائري	درجات	

الجدول ٢ . الاقترانات الأسية :

س	س _e	س _e
٠,٠٥٠	٢٠,١	٣,٠
٠,٠٥٤	٢٢,٢	٣,١
٠,٠٤١	٢٤,٥	٣,٢
٠,٠٣٧	٢٧,١	٣,٣
٠,٠٣٣	٣٠,٠	٣,٤
٠,٠٣٠	٣٣,١	٣,٥
٠,٠٢٧	٣٦,٦	٣,٦
٠,٠٢٥	٤٠,٤	٣,٧
٠,٠٢٢	٤٤,٧	٣,٨
٠,٠٢٠	٤٩,٤	٣,٩
٠,٠١٨	٥٤,٦	٤,٠
٠,٠١٧	٦٠,٣	٤,١
٠,٠١٥	٦٦,٧	٤,٢
٠,٠١٤	٧٣,٧	٤,٣
٠,٠١٢	٨١,٥	٤,٤
٠,٠١١	٩٠,٠	٤,٥
٠,٠١٠	٩٩,٥	٤,٦
٠,٠٠٩١	١١٠,٠	٤,٧
٠,٠٠٨٢	١٢٢,٠	٤,٨
٠,٠٠٧٤	١٣٤,٠	٤,٩
٠,٠٠٦٧	١٤٨,٠	٥,٠
٠,٠٠٦١	١٦٤,٠	٥,١
٠,٠٠٥٥٠	١٨١,٠	٥,٢
٠,٠٠٥٠	٢٠٠,٠	٥,٣
٠,٠٠٤٥	٢٢١,٠	٥,٤
٠,٠٠٤١	٢٤٥,٠	٥,٥
٠,٠٠٣٧	٢٧٠,٠	٥,٦
٠,٠٠٣٣	٢٩٩,٠	٥,٧
٠,٠٠٣٠	٣٣٠,٠	٥,٨
٠,٠٠٢٧	٣٦٥,٠	٥,٩
س	س _e	س _e
١,٠٠	١,٠٠	٠,٠
١,٩٠٥	١,١١	٠,١
١,٨١٩	١,٢٢	٠,٢
١,٧٤١	١,٣٥	٠,٣
١,٦٧٠	١,٤٩	٠,٤
١,٦٠٧	١,٦٥	٠,٥
١,٥٤٩	١,٨٢	٠,٦
١,٤٩٧	٢,٠١	٠,٧
١,٤٤٩	٢,٢٣	٠,٨
١,٤٠٧	٢,٤٦	٠,٩
١,٣٦٨	٢,٧٢	١,٠
١,٣٣٣	٣,٠٠	١,١
١,٣٠١	٣,٣٢	١,٢
١,٢٧٣	٣,٦٧	١,٣
١,٢٤٧	٤,٠٦	١,٤
١,٢٢٣	٤,٤٨	١,٥
١,٢٠٢	٤,٩٥	١,٦
١,١٨٣	٥,٤٧	١,٧
١,١٦٥	٦,٠٥	١,٨
١,١٥٠	٦,٦٩	١,٩
١,١٣٥	٧,٣٩	٢,٠
١,١٢٢	٨,١٧	٢,١
١,١١١	٩,٠٢	٢,٢
١,١٠٠	٩,٩٧	٢,٣
١,٠٩١	١١,٠	٢,٤
١,٠٨٢	١٢,٢	٢,٥
١,٠٧٤	١٣,٥	٢,٦
١,٠٦٧	١٤,٩	٢,٧
١,٠٦١	١٦,٤	٢,٨
١,٠٥٥	١٨,٢	٢,٩

الملحق الرابع

الجداول

الجدول الاول : الاقترانات المتثلية

درجات	دائري	جا	ظا	ظنا	جنا
٩٠	٠,٠٠٠	٠,٠٠٠			١,٥٧١
٨٩	٠,٠١٧	٠,٠١٧	٠,٠١٧	٥٧,٢٩	١,٥٥٣
٨٨	٠,٠٣٥	٠,٠٣٥		٢٨,٦٤	١,٩٩٩
٨٧	٠,٠٥٢	٠,٠٥٢	٠,٠٥٢	١٩,٠٨١	٠,٩٩٩
٨٦	٠,٠٧٠	٠,٠٧٠	٠,٠٧٠	١٤,٢٠١	٠,٩٩٨
٨٥	٠,٠٨٧	٠,٠٨٧	٠,٠٨٧	١١,٤٣٠	٠,٩٩٦
٨٤	٠,١٠٥	٠,١٠٥	٠,١٠٥	٩,٥١٤	٠,٩٩٥
٨٣	٠,١٢٢	٠,١٢٢	٠,١٢٣	٨,١٤٤	٠,٩٩٣
٨٢	٠,١٤٠	٠,١٣٩	٠,١٤١	٧,١١٥	٠,٩٩٠
٨١	٠,١٥٧	٠,١٥٦	٠,١٥٨	٦,٣١٤	٠,٨٨
٨٠	٠,١٧٥	٠,١٧٤	٠,١٧٦	٥,٦٧١	٠,٩٨٥
٧٩	٠,١٩٢	٠,١٩١	٠,١٩٤	٥,١٤٥	٠,٩٨٢
٧٨	٠,٢٠٩	٠,٢٠٨	٠,٢١٣	٤,٧٠٥	٠,٩٧٨
٧٧	٠,٢٢٧	٠,٢٢٥	٠,٢٣١	٤,٣٣١	٠,٩٧٤
٧٦	٠,٢٤٤	٠,٢٤٢	٠,٢٤٩	٤,٠١١	٠,٩٧٠
٧٥	٠,٢٦٦	٠,٢٥٩	٠,٢٦٨	٣,٧٣٢	٠,٩٦٦
٧٤	٠,٢٧٩	٠,٢٧٦	٠,٢٨٧	٣,٤٨٧	٠,٩٦١
٧٣	٠,٢٩٧	٠,٢٩٢	٠,٣١٦	٣,٢٧١	٠,٩٥٦
٧٢	٠,٣١٤	٠,٣٠٩	٠,٣٢٥	٣,٠٧٨	٠,٩٥١
٧١	٠,٣٣٢	٠,٣٢٦	٠,٣٤٤	٢,٩٠٤	٠,٩٤٦
٧٠	٠,٣٤٩	٠,٣٤٢	٠,٣٦٤	٢,٧٤٧	٠,٩٤٠
٦٩	٠,٣٦٧	٠,٣٥٨	٠,٣٨٤	٢,٦٠٥	٠,٩٣٤
٦٨	٠,٣٨٤	٠,٣٧٥	٠,٤٠٤	٢,٤٧٥	٠,٩٢٧
٦٧	٠,٤٠١	٠,٣٩١	٠,٤٢٤	٢,٣٥٦	٠,٩٢١
٦٦	٠,٤١٩	٠,٤٠٧	٠,٤٤٥	٢,٢٤٦	٠,٩١٤
درجات	دائري	جا	ظا	ظنا	جنا

(أ) أوجد قياس θ بالدائري وبالدرجات

(ب) أوجد مساحة القطعة الدائرية المعينة بالزاوية .

١٠ . أوجد طول القوس المعين بزاوية مركزية قدرها 40° في دائرة نصف قطرها ٦
انشأت .

حقق المتطابقات في التمارين ١١ - ١٤ .

$$11. \quad \frac{\text{جتان}}{1 - \text{جان}} = \text{قان} + \text{ظان}$$

$$12. \quad \text{ظا}^2 \theta - \text{جا}^2 \theta = \theta^2 \text{ظا} - \theta^2 \text{جا}$$

$$13. \quad \text{جا}^4 \theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \text{جتا}^2 \theta + \frac{1}{8} \text{جتا}^4 \theta$$

$$14. \quad \text{جا}^4 \text{س} = 4 \text{جتاس} - \text{جتاس}^2 (1 - 2 \text{جا}^2 \text{س})$$

في التمارين ١٥ - ١٨ أوجد حلول المعادلات المعطاة في الفترة $[0, 2\pi]$

.[π

$$15. \quad 2 \text{جا}^2 \theta + \theta - 1 = 0$$

$$16. \quad 1 = \theta + \text{جتا} \theta$$

$$17. \quad 0 = \text{جتاس} - 2 \text{جا}^2 \text{س}$$

$$18. \quad \text{ظا}^2 \text{س} = \text{ظاس}$$

$$19. \quad \text{استعمل (م ٣-١٢) لاثبات (م ٣-١٣)}$$

$$20. \quad \text{استعمل (م ٣-١٣) لاثبات (م ٣-١٤)}$$

$$\text{جتا ع جتا ن} = \frac{1}{4} [\text{جتا (ع + ن)} + \text{جتا (ع - ن)}]$$

$$\text{جاء جان} = \frac{1}{4} [\text{جتا (ع - ن)} - \text{جتا (ع + ن)}] .$$

(م ٣-١٦) صيغ للعوامل

$$\text{جاء} \pm \text{جان} = ٢ \text{ جتا} \frac{\text{ع} \pm \text{ن}}{٢} \text{ جاء} \frac{\text{ع} \pm \text{ن}}{٢}$$

$$\text{جتا ع} + \text{جتا ن} = ٢ \text{ جتا} \frac{\text{ع} + \text{ن}}{٢} \text{ جتا} \frac{\text{ع} - \text{ن}}{٢}$$

$$\text{جتا ع} - \text{جتا ن} = ٢ \text{ جا} \frac{\text{ع} + \text{ن}}{٢} \text{ جا} \frac{\text{ع} - \text{ن}}{٢}$$

تمارين :

١ . حقق القراءات الموجودة في الجدول الذي يسبق (م ٣-٨) للدائريات والدرجات .

٢ . حقق (م ٣-٤) و (م ٣-٥) .

٣ . أوجد القياس الدائري الذي يقابل قياس الدرجات التالية :

$$٢٢٥^\circ ، ١٥٠^\circ ، - ١٢٠^\circ ، ٢٧٠^\circ ، ٣٠^\circ .$$

٤ . أوجد قياسات الدرجات المقابلة للقياسات الدائرية التالية

$$-\frac{\pi}{4} ، \frac{\pi}{6} ، \pi ، ٣ ، -\frac{\pi}{3} ، \frac{\pi}{2} .$$

في التمارين ٥-٨) أوجد قيم الاقتارات المثلثية الستة عند الزاوية

$$٩٠^\circ = \theta \quad . \quad ٥$$

$$٣٣٠^\circ = \theta \quad . \quad ٦$$

$$\frac{\pi}{4} = \theta \quad . \quad ٧$$

$$\pi = \theta \quad . \quad ٨$$

٩ . تقابل الزاوية المركزية θ قوسا طوله ٥ انشات على دائرة نصف قطرها ٣ انشات .

$$(م-١١) \text{ جا } (-ع) = - \text{ جاع} , \text{ جتا } (-ع) = \text{جتاع}$$

$$\text{ظا } (-ع) = - \text{ظئاع} , \text{ قئا } (-ع) = \text{قتاع}$$

$$\text{قا } (-ع) = \text{قاع} , \text{ ظئا } (-ع) = - \text{ظئاع}$$

(م-١٢) صيغ الجمع

$$\text{جا } (ع \pm ل) = \text{جاع جئال} \pm \text{جتاع جال}$$

$$\text{جتا } (ع \pm ل) = \text{جتاع جئال} \pm \text{جاع جال}$$

$$\text{ظا } (ع \pm ل) = \frac{\text{ظاع} \pm \text{ظال}}{1 \pm \text{ظاع ظال}}$$

(م-١٣) صيغ ضعف الزاوية

$$\text{جا } ٢ع = ٢ \text{ جاع جئاع}$$

$$\text{جتا } ٢ع = \text{جتا } ٢ع - \text{جا } ٢ع = ٢ - ١ = ٢ \text{ جاع جئاع}$$

$$= ٢ \text{ جتا } ٢ع - ١$$

$$\text{ظا } ٢ع = \frac{٢ \text{ ظا } ع}{١ - \text{ظا } ٢ع}$$

(م-١٤) صيغ نصف الزاوية

$$\text{جا } \frac{ع}{٢} = \frac{١ - \text{جتاع}}{٢} , \text{ جتا } \frac{ع}{٢} = \frac{١ + \text{جتاع}}{٢}$$

$$\text{ظا } \frac{ع}{٢} = \frac{١ - \text{جتاع}}{\text{جاع}} , \frac{\text{جاع}}{١ + \text{جتاع}}$$

(م-١٥) صيغ حاصل الضرب

$$\text{جاع جئان} = \frac{١}{٢} [\text{جا } (ع + ن) - \text{جا } (ع - ن)]$$

$$\text{جتاع جان} = \frac{١}{٢} [\text{جا } (ع + ن) - \text{جا } (ع - ن)]$$

$$\text{جا } \theta = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} \quad \text{قتا } \theta = \frac{\text{ج}}{\text{ص}} \quad (\text{إذا كانت ص} \neq 0)$$

$$\text{جنا } \theta = \frac{\text{س}}{\text{ر}} \quad \text{قا } \theta = \frac{\text{ج}}{\text{س}} \quad (\text{إذا كانت س} \neq 0)$$

$$\text{ظا } \theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \quad (\text{إذا كانت س} \neq 0)$$

$$\text{ظتا } \theta = \frac{\text{س}}{\text{ص}} \quad (\text{إذا كانت ص} \neq 0)$$

وباستعمال المثلثات المتشابهة يمكن اثبات ان الصيغ المعطاة في (م ٣-٩) لا تعتمد على النقطة P (س ، ص) التي اختيرت لتقع على الضلع النهائي . لاحظ انه اذا كانت $r = 1$ فتتحول (م ٣-٩) الى (م ٣-١) .

ويمكن اعتبار الزاوية الحادة θ زاوية للمثلث القائم الزاوية ويمكن الاشارة لاطوال الوتر ، والضلع المقابل ، والضلع المجاور بالطريقة العادية . ومن الملائم ان نستعمل الاسماء الوتر ، والمقابل ، والضلع للدلالة على هذه الاعداد على الترتيب . وباستعمال نظام الاحداثيات المتعامدة كما في الشكل م ٣-٣ ، (٢) نرى أن طولي الضلع المجاور والضلع المقابل للزاوية θ هما الاحداثي السيني والصادي على الترتيب للنقطة P الواقعة على ضلع θ النهائي . ومن هنا فباستعمال

$$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \theta \quad \text{جا} \quad , \quad \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \theta \quad \text{جنا}$$

$$\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \theta \quad \text{قتا} \quad , \quad \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \theta \quad \text{قا}$$

$$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \theta \quad \text{ظا} \quad , \quad \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \theta \quad \text{ظتا}$$

والصيغ المعطاة في (م ٣-١٠) مفيدة للمسائل التي تدور حول المثلثات . وتسمى الصيغ (م ٣-٢) - (م ٣-٥) بالمتطابقات الرئيسية . واليك متطابقات اخرى تشمل الاقترانات المثلثية :

$$(م-٣-٧) \quad \frac{1}{2} ر = ح$$

وإذا كانت الزاوية θ ناشئة عن نصف دورة كاملة بعكس اتجاه عقارب الساعة فإن $\theta = ١٨٠$. والمقياس الدائري للزاوية θ هو π . وهذا يعطينا العلاقة الأساسية $\pi = ١٨٠$ وحدات دائرية. والصيغ الاتية متكافئة.

$$١ = \frac{\pi}{١٨٠} \text{ دائرة و } ١ \text{ دائرة} = \left(\frac{١٨٠}{\pi} \right)$$

وبالقسمة الطويلة نحصل على

$$١ \approx ١٧٤٥ \text{ و } ٠ \text{ دائرة و } ١ \text{ دائرة} \approx ٥٧, ٢٩٦$$

والجدول الآتي يعطينا العلاقة بين القياس الدائري والدرجات لعدة زوايا عامة.

$$\text{دائرة} \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{6}$$

درجات ١٨٠ ١٥٠ ١٣٥ ١٢٠ ٩٠ ٦٠ ٤٥ ٣٠
ومن الملائم في تطبيقات معينة تغيير مجالات الاقترانات المثلثية من مجموعة جزئية للمجموعة ح الى مجموعة الزوايا. ويمكن اتمام هذا باستخدام التعريف التالي:

(م-٣-٨) تعريف الاقترانات المثلثية للزوايا

إذا كانت θ زاوية مقياسها الدائري ن فتكون قيمة كل اقتران مثلثي عند θ بقيمته عند العدد الحقيقي ن.

ويتبع من (م-٣-٨) ان $\sin \theta = \sin \theta$ و $\cos \theta = \cos \theta$ وهكذا حيث ن هي المقياس الدائري للزاوية. وللسهولة سنستعمل تعبير الاقترانات المثلثية بغض النظر عن مجالاتها من الزوايا أو الاعداد الحقيقية.

ويمكن تعيين قيم الاقترانات المثلثية عند الزاوية θ بواسطة نقطة اختيارية على ضلع θ النهائي كما في النظرية التالية:

(م-٣-٩) نظرية:

افترض أن θ هي زاوية في موضع معياري بنظام احداثيات متعامدة

بشرط ألا تكون المقامات مساوية للصفر .

والصين التالية نتيجة لحقيقة انه اذا كانت $\frac{1}{m}$ (س ، ص) تقع على y فان $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$

$$(3-3) \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$$

$$(3-4) \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{r}$$

ومن المفيد احيانا استخدام الزوايا عندما نعمل بالاقترانات المثلثية . وتنتج الزوايا عن دوران شعاع L حول نقطة نهايته M في المستوى الى مركز يعينه شعاع آخر L' . ويسمى الشعاعان L و L' بالضلعين الابتدائي والنهائي على الترتيب وتسمى M برأس الزاوية . ويمكن ايجاد الموضع المعياري للزاوية θ بأخذ الرأس عند نقطة الاصل في نظام احداثيات متعامدة والضلع الابتدائي محور السينات الموجب . وفي هذه الحالة تنشأ θ عن دوران محور السينات الموجب حول M في المستوى S . واذا كان الدوران بعكس اتجاه عقارب الساعة فنعتبر الزاوية موجبة واذا كان الدوران باتجاه عقارب الساعة فنحصل على زاوية سالبة . واذا كانت y دائرة وحدة مركزها M فكلمة دار محور السينات الى موضعه النهائي تتحرك نقطة تقاطعه مع y مسافة معينة n قبل وصولها الى موضعها الاخير $\frac{1}{m}$ كما هو موضح في الشكل م ٣ - ٢ . وحسب ما تقدم تكون $\frac{1}{m}$ النقطة المقابلة للعدد الطبيعي n . والطريقة الطبيعية لتعيين قياس θ هي استعمال n . فعندها يشار الى θ بانها n وحدات دائرية ونكتب $\theta = n$. وبشكل خاص اذا كانت $\theta = 1$ تكون θ الزاوية المقابلة لقوس طوله الوحدة يقع على دائرة الوحدة y .

ويمكن ايجاد القياس الدائري باستعمال دائرة بأي نصف قطر وبالتحديد اذا كانت θ زاوية مركزية في دائرة نصف قطرها r وتقابل θ قوسا طوله L حيث $L \geq 0$. فيتبع من الهندسة المستوية أن المقياس الدائري للزاوية يعطى بالصيغة

$$(3-6) \quad \frac{L}{r} = \theta$$

ويمكن اثبات أن المساحة A لقطعة من دائرة نصف قطرها r وتعينها زاوية مركزية θ بمقياسها الدائري هي

(م ٣-١) تعريف الاقترانات المثلثية :

اذا كان ن أي عدد حقيقي و م (س ، ص) نقطة واقعة على دائرة الوحدة ي
وتقابل ن فان

$$\text{جان} = \text{ص} \quad \text{قتان} = \frac{1}{\text{ص}} \quad (\text{اذا كانت ص} \neq 0)$$

$$\text{جتان} = \text{س} \quad \text{قان} = \frac{1}{\text{س}} \quad (\text{اذا كانت س} \neq 0)$$

$$\text{ظان} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \quad (\text{اذا كانت س} \neq 0)$$

$$\text{ظتان} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} \quad (\text{اذا كانت ص} \neq 0)$$

وبما انه يمكن الحصول على نفس النقطة م (س ، ص) ل ن + ٢ م π
حيث م اي عدد صحيح فتكرر قيم الاقترانات المثلثية على التتابع في فترات
اطوالها π . نقول أن الاقتران ق الذي مجاله س دوري
(Periodic) اذا امكن ايجاد عدد حقيقي موجب ك بحيث ق
(ن + ك) = ق (ن) لجميع ن في س . ويعني هذا هندسيا أن بيان ق يكرر
نفسه كلما تغيرت الاحداثيات السينية للنقط على فترات متتابة اطوالها ك .
ويسمى اصغر عدد حقيقي ك يحقق ما ذكر اعلاه (ان وجد) بدورة ق .
ويمكن اثبات ان اقترانات الجيب ، وجيب التمام ، وقاطع التمام والقاطع لها
دورة مقدارها π . بينما دورة الاقترانين الظل وظل التمام هي π .
ويتبع من (م ٣-١) أن

$$(م ٣-٢) \quad \frac{1}{\text{جان}} = \text{قتان} , \quad \frac{1}{\text{قان}} = \text{جتان}$$

$$\frac{\text{جان}}{\text{جتان}} = \text{ظان} , \quad \frac{1}{\text{ظان}} = \text{ظتان}$$

$$\frac{\text{جتان}}{\text{جان}} = \text{ظتان}$$

الملحق الثالث

الاقترانات المثلثية

لنأخذ γ دائرة وحدة فهي دائرة نصف قطرها ١ ومركزها نقطة الاصل في نظام احداثيات متعامدة ولنأخذ μ النقطة $(1, 0)$. فاذا كان γ أي عدد بين $0, 2\pi$ فكما يتضح بالشكل م ٣ - ١ توجد نقطة واحدة فقط δ (س، ص) على γ بحيث أن طول القوس $\mu\delta$ و مقياسا بعكس اتجاه عقارب الساعة من μ هو γ . وبصورة عامة اذا كانت γ تمثل عدداً حقيقياً سالبا فيمكن إيجاد نقطة وحيدة δ بقياس مسافة γ من μ بعكس اتجاه عقارب الساعة على γ . وبالطبع اذا كانت $\gamma < 2\pi$ فمن الضروري دوران γ أكثر من مرة حتى تصل الى μ . فمثلا اذا كانت $\gamma = 3\pi$ فالنقطة δ احداثياها $(-1, 0)$. وبالمثل مع كل عدد حقيقي سالب γ يمكن إيجاد نقطة δ بقياس مسافة $|\gamma|$ من μ باتجاه عقارب الساعة على γ . والنقطة δ التي نعنيها بهذه الطريقة هي النقطة الواقعة على γ مقابلة للعدد الحقيقي γ . وبما أن طول γ يساوي 2π فالنقطة التي تقابل γ هي نفس النقطة التي تقابل $\gamma + 2\pi$ ، $\gamma + 4\pi$ ، $\gamma - 2\pi$ ، $\gamma - 4\pi$ ، وبصورة عامة $\gamma + 2k\pi$ حيث k أي عدد صحيح. ويمكن استعمال دائرة الوحدة γ لتعريف الاقترانات المثلثية. ويشار الى هذه الاقترانات باقترانات الجيب، وجيب التمام، والظل، وقاطع التمام، والقاطع، وظل التمام، ويرمز لها بالرموز $\sin$ ، $\cos$ ، $\tan$ ، $\cot$ ، $\sec$ ، $\csc$ ، فالتا على الترتيب. فاذا كان γ عدداً حقيقياً فنرمز للعدد الذي يرافقه اي اقتران الجيب بالرمز $\sin(\gamma)$ أو $\cos(\gamma)$. ويمكن استعمال رموز مشابهة للاقترانات الخمسة الاخرى.

البرهان : سنعطي برهانا غير مباشر. فلنأخذ $\left[\begin{matrix} \text{ب} \\ \text{ق} \end{matrix} \right] (س) \text{ و } س = ج .$

ولنفترض أن $ج > .$ اعتبر أي تجزئة $ت$ للفترة $[\text{ب} , \text{پ}]$ ولتكن $رت$

$= \sum_{ن} \text{ق} (ون) \Delta س_{ن}$ أي جمع ريماني اختياري يرافق $ت$. فبما أن $ق$

$(ون) \leq .$ لجميع $ون \in [س_{ن-1} , س_{ن}]$ ، فنتبع أن $رت \leq .$

فلو أخذنا $\epsilon = \frac{1}{4} - \frac{ج}{4}$ فحسب $(5-15)$ فعندما يكون

$||ت||$ صغيرا بما فيه الكفاية فإن

$$|رت - ج| < \epsilon = \frac{1}{4} - \frac{ج}{4} .$$

ويتبع أن $رت > ج - \frac{ج}{4} = \frac{3ج}{4} .$ وهذا تناقض . ولذا فالفرض أن $ج > .$

خاطيء ومن ثم فإن $ج \leq .$

$$|ر_ت - (ر_ت + ر_٢)| = ق(و_ك) - ق(د) \Delta س_ك$$

وبتطبيق المتباينة المثلثية واختيار δ نحصل على أن

$$(٢٣-٢٢) |ر_ت - (ر_ت + ر_٢)| \geq ق(و_ك) - ق(د) \Delta س_ك$$

$$\frac{\epsilon}{٢} = \frac{\epsilon}{٢} (م + م)$$

بشرط أن يكون $||ت|| > \delta$.

وإذا كتبنا

$$|ر_ت - (ج_١ + ج_٢)| = |ر_ت - (ر_٢ + ر_٢) - (ج_١)|$$

$$|ر_ت - (ر_٢ + ر_٢)| + |ر_٢ - (ج_١ + ج_٢)|$$

فيتبع من (٢٣٠٢) و (٢٢-٢٢) أنه عندما يكون $||ت|| > \delta$ فإن

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{٢} + \frac{\epsilon}{٢} > |ر_ت - (ج_١ + ج_٢)|$$

لكل مجموع ريماني ر_ت. وهذا يكمل البرهان.

(٥-٢٧) نظرية :

إذا كانت ق قابلة للتكامل على $[٢, ب]$ وكانت

ق (س) $\leq$ لجميع س $\in [٢, ب]$ فإن

$$\int_٢^ب ق(س) دس \leq$$

$$(م٢-٢٠) رت = \sum_{\substack{1=ع \\ 1=ك}}^{1=ك} ق (وع) \Delta س ع + ق (وك) س ك$$

$$+ \sum_{1=ك}^{\substack{ن \\ 1=ك}} ق (وع) \Delta س ع$$

ولنفرض أن ت_١ ترمز لتجزئة [١، ٥] المعينة بواسطة

[١، س_١، س_٢، ٠٠٠، س_{١-ك}، ٥] ت_٢ ترمز لتجزئة [ج،

ب] التي تعينها [٥، س_ك، س_{١+ك}، ٠٠٠، س_{١-ن}، ب]

واعتبر مجاميع ريمان

$$\left. \begin{aligned} \text{ن} = \sum_{1=ع}^{1=ك} ق (وع) \Delta س ع + ق (٥) (٥-س-ك-١) \\ \text{ن} = ق (٥) (٥+س-ك) \sum_{1=ك}^{\substack{ن \\ 1=ك}} ق (وع) \Delta س ع \end{aligned} \right\} (م٢١-٢٠)$$

وباستخدام المتباينة المثلثية و (م٢١-١٩)

$$(م٢٢-٢٠) | رت_١ + رت_٢ - (ج_١ + ج_٢) | \geq | رت_١ - ج_١ | + | رت_٢ - ج_٢ |$$

$$\frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4}$$

ويتبع من (م٢٠-٢٠) و (م٢١-٢١) أن

واذا وضعنا $\frac{\epsilon}{4} = \epsilon$ فحسب (م ٢-١٨) هنالك عددان موجبان

δ_1 و δ_2 بحيث انه اذا كانت $\|t_1\| > \delta_1$ و $\|t_2\| > \delta_2$ فان

$$\frac{\epsilon}{4} = \epsilon < |r_1 - j_1| \quad (م ٢-١٩)$$

$$, \quad |r_2 - j_2| < \epsilon = \frac{\epsilon}{4}$$

واذا كان δ عددا موجبا اصغر من δ_1 و δ_2 فتكون المتباينتان (م ٢-١٩) صحيحتين عندما تكون $\|t\| > \delta$. وبما أن ق قابلة للتكامل على الفترتين $[p, z]$ و $[z, b]$ فتكون محصورة في كل من الفترتين ومن ثم فيوجد عدد م بحيث أن

$|q(s)| \geq m$ لجميع قيم س في $[p, b]$ وسنفترض الان أن δ قد اختيرت بحيث تحقق بالاضافة الى المتطلب السابق أن

$$\delta > \frac{\epsilon}{m^4}$$

واذا كانت ت تجزئة للفترة $[p, b]$ بحيث أن

$\|t\| < \delta$. واذا كانت الاعداد التي تعين ت هي

$$p = s_0, s_1, s_2, \dots, s_n = b$$

فتوجد فترة نصف مفتوحة وحيدة بالصيغة $(s_{n-1}, s_n]$ [

تحتوي على z . واذا كانت $r_n = \sum_{e=1}^n q(e) \Delta s_e$

فيمكن كتابة :

$$(م-١٧) \quad | \sum_n^3 \text{ ق (ون) } \Delta \text{ سن} - \text{ج}_1 | > \epsilon = \frac{\epsilon}{2} \text{ و}$$

$$| \sum_n^3 \text{ ه ن) } \Delta \text{ سن} - \text{ج}_2 | > \epsilon = \frac{\epsilon}{2}$$

لكل ون ϵ [سن-١ ، سن] ، فاذا كانت δ عددا اصغر من δ و δ ϵ فعندما تكون $||\Delta|| > \delta$ فان كلا المتباينتين (م-١٧) صحيحتان ومن ثم فباستخدام (م-١٦) فان

$$| \text{رت} - (\text{ج}_1 + \text{ج}_2) | > \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

وهذا ما اردنا برهنته .

(٥-٢٥) نظرية :

اذا كانت $\Delta > \epsilon$ و $\Delta > \epsilon$ وق قابلة للتكامل على كل من $[\Delta , \epsilon]$ و $[\epsilon , \Delta]$ فان Δ قابلة للتكامل على $[\Delta , \epsilon]$

$$\left[\sum_n^{\Delta} \text{ ق (س) } \Delta \right] = \left[\sum_n^{\epsilon} \text{ ق (س) } \Delta \right] + \left[\sum_n^{\Delta} \text{ ق (س) } \Delta \right]$$

البرهان : حسب الفرض هنالك عددان Δ ، ϵ حيث

$$(م-١٨) \quad \left[\sum_n^{\Delta} \text{ ق (س) } \Delta \right] = \text{ج}_1 \text{ و } \left[\sum_n^{\epsilon} \text{ ق (س) } \Delta \right] = \text{ج}_2$$

لتكن Δ تجزئة للفترة $[\Delta , \epsilon]$ و ϵ تجزئة للفترة $[\epsilon , \Delta]$ و Δ تجزئة $[\Delta , \epsilon]$ ونرمز لمجموع ريمان الاختيارية المرافقة للتجزئات Δ ، ϵ ، Δ بالرموز Δ ، ϵ ، Δ على الترتيب . وعلينا نبين لكل $\epsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث اذا كانت $||\Delta|| < \delta$ فان $|\Delta - (\text{ج}_1 - \text{ج}_2)| < \epsilon$

البرهان : باستخدام الفرض يوجد عددان j_1 و j_2 بحيث أن

$$\left[\begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{م} \end{array} \right] \text{ق (س) } \Delta s = j_1 \text{ و } \left[\begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{م} \end{array} \right] \text{هـ (س) } \Delta s = j_2$$

فاذا كانت تجزئة للفترة $[j_1, j_2]$ ورت مجموع ريماني اختياري للاقتراح ق
+ هـ الذي يرافق ت أي ان

$$(2-15) \quad \sum_n \left[\text{ق (ون) } - \text{هـ (ون) } \right] \Delta s_n$$

حيث ون $\epsilon [s_n - j_1, s_n]$ لكل ن. ونريد اثبات انه لاي ϵ
< . توجد δ < . بحيث عندما تكون $\|t\| < \delta$ تكون :

$$| \text{رت} - (j_1 + j_2) | < \epsilon$$

وباستخدام (5-11) ، (1) يمكن كتابة (2-15) بالصيغة

$$\text{رت} = \sum_n \text{ق (ون) } \Delta s_n + \sum_n \text{هـ (ون) } \Delta s_n$$

وباعادة ترتيب الحدود واستعمال المتباينة المثلثية (1-3) يكون :

$$(2-16) \quad | \text{رت} - (j_1 + j_2) | = | \sum_n \text{ق (ون) } \Delta s_n - (j_1 + j_2) |$$

$$+ \left| \sum_n \text{هـ (ون) } \Delta s_n - j_2 \right|$$

$$+ \left| \sum_n \text{هـ (ون) } \Delta s_n - j_1 \right|$$

ومن قابلية ق وهـ للاشتقاق واخذ $\frac{\epsilon}{2} = \bar{\epsilon}$ توجد $\delta_1 < 0$ و $\delta_2 < 0$.

بحيث عندما تكون $\|t\| < \delta_1$ و $\|t\| < \delta_2$ يكون :

$\sum_{n=1}^{\infty} K(n) \Delta$ سن

حيث انه لكل n تكون n منتمية الى الفترة الجزئية النونية

$[n-1, n]$ للجزئية t . ونريد اثبات انه لكل $\epsilon > 0$ توجد

$\delta > 0$ بحيث انه عندما $\|t\| > \delta$ فان

$\sum_{n=1}^{\infty} K(n) \Delta$ سن - K ج (م ٢-١٤)

لكل $n \in [n-1, n]$ فاذا وضعنا $\epsilon = \frac{\epsilon}{K}$ فبا

أن n قابلة للتكامل فتوجد $\delta > 0$ بحيث انه عندما تكون $\|t\| > \delta$ فان

$$\sum_{n=1}^{\infty} K(n) \Delta \text{ سن} - \text{ج} < \epsilon = \frac{\epsilon}{K}$$

وبضرب طرفي هذه المتباينة بالعدد K نحصل على (م ٢-١٤). ومن ثم فان

نه $\sum_{n=1}^{\infty} K(n) \Delta \text{ سن} = K$ ج
ات $\|t\| > \delta$

$$K = \sum_{p=1}^{\infty} K(p) \Delta \text{ سن} = \sum_{p=1}^{\infty} K(p) \Delta \text{ سن}$$

(٥-٢٣) نظرية :

اذا كان q و h اقترانين قابلين للتكامل على الفترة $[p, b]$ فان $q + h$

تكون قابلة للتكامل على $[p, b]$ و

$$\sum_{p=1}^{\infty} K(p) \Delta \text{ سن} + \sum_{p=1}^{\infty} K(p) \Delta \text{ سن} = \sum_{p=1}^{\infty} K(p) \Delta \text{ سن} + \sum_{p=1}^{\infty} K(p) \Delta \text{ سن}$$

البرهان :

لكل ϵ ، توجد δ_1 ، δ_2 و δ_3 بحيث أن

(م ٢-١٣) $|ق(س) - ل| > \epsilon$ عندما تكون $|س - پ| > \delta_1$

، $|ه(س) - ل| > \epsilon$ عندما تكون $|س - پ| > \delta_2$

فاذا كانت δ اصغر من δ_1 و δ_2 فعندما تكون $|س - پ| > \delta$ فتكون المتباينتان في (م ٢-١٣) اللتان تشتملان على ϵ صحيحتين أي أن

$-\epsilon < ق(س) - ل < \epsilon$ و $-\epsilon < ه(س) - ل < \epsilon$.

ونتيجة لذلك اذا كانت $|س - پ| > \delta$ فان $ل - \epsilon < ق(س)$

وكذلك $ه(س) < ل + \epsilon$. وبما أن $ق(س) \geq ك(س) \geq ه(س)$

فيتبع انه عندما تكون $|س - پ| > \delta$ فتكون $ل - \epsilon > ك(س) >$

$ل + \epsilon$ أو ما يكافئه :

$|ك(س) - ل| > \epsilon$ وهذا ما نريد برهنته .

(٥-٢٢) نظرية :

اذا كانت ق قابلة للتكامل على الفترة [پ ، ب] ولك أي عدد فتكون ك ق

قابلة للتكامل على [پ ، ب] و

$$\int_p^b ك ق(س) دس = \int_p^b ك \left\{ ق(س) دس \right\}$$

البرهان : اذا كانت $ك = ٠$ فالنتيجة تتبع من (٥-٢١) . ولهذا فسنفترض أن ك

$\neq ٠$. فبما أن ق قابلة للتكامل فيمكن وضع

$$\int_p^b ق(س) دس = ج$$

حيث ج عدد ما .

واذا كانت ت تجزئة للفترة [پ ، ب] فتكون صيغة كل مجموع ريماني ج

للاقتران ك ق هي

$$P - \sqrt[n]{(P\sqrt[n]{\epsilon} + \epsilon)} > P - \sqrt[n]{\epsilon} > P - \sqrt[n]{(P\sqrt[n]{\epsilon} - \epsilon)}$$

$$P - \sqrt[n]{(P\sqrt[n]{\epsilon} + \epsilon)} > P - \sqrt[n]{\epsilon} > [\sqrt[n]{(P\sqrt[n]{\epsilon} - \epsilon)} - P] -$$

$$P - \sqrt[n]{(P\sqrt[n]{\epsilon} + \epsilon)} \text{ و } \sqrt[n]{(P\sqrt[n]{\epsilon} - \epsilon)} - P \text{ اصغر من } \delta$$

ف عندما تكون $\delta > P - \sqrt[n]{\epsilon} > \delta$ تكون المتباينة الاخيرة في القائمة صحيحة ومن ثم فالاولى صحيحة . وهذا يعطينا (م ٢-١٢) .

ولنفترض الان ان $P > 0$. وان n عدد فردي موجب . ففي هذه الحالة يكون $P - \sqrt[n]{\epsilon}$ و $\sqrt[n]{P - \sqrt[n]{\epsilon}}$ موجبين ومن برهان الجزء الاول يمكن كتابة

$$\sqrt[n]{P - \sqrt[n]{\epsilon}} = \sqrt[n]{P - \sqrt[n]{\epsilon}}$$

وهكذا فلكل $\epsilon < 0$. توجد δ بحيث ان

$$\delta > | \sqrt[n]{P - \sqrt[n]{\epsilon}} - \sqrt[n]{P - \sqrt[n]{\epsilon}} | > \epsilon \text{ عندما تكون } . | \sqrt[n]{P - \sqrt[n]{\epsilon}} - \sqrt[n]{P - \sqrt[n]{\epsilon}} | > \delta$$

أو ما يكافئه :

$$\delta > | \sqrt[n]{P - \sqrt[n]{\epsilon}} - \sqrt[n]{P - \sqrt[n]{\epsilon}} | > \epsilon \text{ عندما تكون } . | \sqrt[n]{P - \sqrt[n]{\epsilon}} - \sqrt[n]{P - \sqrt[n]{\epsilon}} | > \delta$$

والمتباينتان الاخيرتان تعطيان

$$\sqrt[n]{P - \sqrt[n]{\epsilon}} = \sqrt[n]{P - \sqrt[n]{\epsilon}}$$

(٢-٢٦) نظرية السندويش (الشرحة)

اذا كانت $Q(s) \geq K(s) \geq H(s)$ لجميع قيم s في فترة مفتوحة تحتوي على P (ربما باستثناء $s = P$) واذا كانت

$$\lim_{s \rightarrow P} Q(s) = L = \lim_{s \rightarrow P} H(s) \text{ فان}$$

$$\lim_{s \rightarrow P} K(s) = L .$$

$$\left| \frac{1}{m} - \frac{1}{(s)} \right| < \epsilon \text{ عندما تكون } > |p - s| \delta >$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{s-p} \text{ هنا}$$

(٢-٢٤) نظرية :

إذا كانت $p < 0$ ، وكان n عدد صحيحا موجبا أو كانت $p > 0$ ، وكان n عدد فرديا موجبا فان

$$\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{s}$$

البرهان : افترض أن $p < 0$ ، وان n اي عدد صحيح موجب . فيجب ان نبين انه لاي $\epsilon < 0$. توجد δ بحيث ان

$$| \sqrt[n]{p} - \sqrt[n]{s} | > \epsilon \text{ عندما تكون } > |p - s| \delta > \text{ أو ما يكافئه :}$$

$$- \epsilon > \sqrt[n]{p} - \sqrt[n]{s} > \epsilon \text{ عندما تكون } - \delta > p - s > \delta ,$$

$s \neq p$ ويكفي برهان (٢-١٢) اذا كان $\sqrt[n]{p} > \epsilon$ لانه اذا وجدت

δ تحت هذا الشرط فيمكن استعمال نفس δ لاي قيمة أكبر للرمز ϵ .

ولهذا فسنعتبر فيما تبقى من البرهان أن $\sqrt[n]{p} - \epsilon$ عدد موجب اقل من δ . والمتباينات الاتية كلها متكافئة .

$$- \epsilon > \sqrt[n]{p} - \sqrt[n]{s} > \epsilon$$

$$\sqrt[n]{p} + \epsilon > \sqrt[n]{s} > \epsilon - \sqrt[n]{p}$$

$$(\sqrt[n]{p} + \epsilon) > s > (\epsilon - \sqrt[n]{p})$$

وبما أن نهـا هـ (س) = م فتوجد $\delta_1 < 0$ بحيث أن

$$|هـ - (س) - م| > \frac{\epsilon}{2} \text{ عندما تكون } |س - م| > \delta_1 \text{ ونتيجة لذلك}$$

فلجميع قيم س التي تحقق ما سبق

$$|م| = |هـ - (س) + (م - هـ)| \geq |هـ - (س)| + |م - هـ|$$

$$> |م| + |هـ - (س)|$$

ولهذا فإن

$$\frac{2}{|م|} > \frac{1}{|هـ - (س)|} \text{ أي أن } |هـ - (س)| > \frac{|م|}{2}$$

وبالتعويض في (م-٢) ينتج

$$(م-٢) |هـ - (س)| > \frac{1}{م} - \frac{2}{|م|} > |هـ - (س) - م|$$

عندما تكون $0 < |س - م| < \delta_1$

ومرة أخرى استعمل الحقيقة نهـا هـ (س) = م

يتبع انه لاي $\epsilon < 0$ توجد $\delta_2 < 0$ بحيث

$$(م-٢) |هـ - (س) - م| > \frac{2}{م} |م| \text{ عندما تكون}$$

$$0 < |س - م| < \delta_2$$

واذا كانت δ اقل من δ_1 و δ_2 فنكون المتباينتان (م-٢) و

(م-٢) صحيحتين. وهكذا فإن

$$(م ٢-٨) ق (س) - ل م = ق (س) [هـ (س) - م] + م [ق (س) - ل] \\ \text{وبما أن نهـا} [ق (س) - م] = ٠ \text{ فيتبع من (م ٢-٥) بأخذ} \\ \text{س-٢}$$

$$ك (س) = هـ (س) - م \text{ ان}$$

$$\text{نهـا م} [ق (س) - ل] = ٠ \\ \text{س-٢}$$

$$\text{ومن (م ٢-٨) فان}$$

$$\text{نهـا} [ق (س) هـ (س) - م ل] = ٠ \\ \text{س-٢}$$

$$\text{اي ان}$$

$$\text{نهـا ق (س) هـ (س) = ل م.} \\ \text{س-٢}$$

$$(٣) \text{ يـكفي اثبات أن}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{\text{نهـا هـ (س)}} \\ \text{س-٢}$$

فاذا برهنا هذه الصيغة فيمكن ايجاد النتيجة المطلوبة بتطبيق (٢) لحاصل

$$\text{الضرب ق (س).} \frac{١}{\text{هـ (س)}}.$$

خذ :

$$\left| \frac{م - هـ (س)}{م هـ (س)} \right| = \left| \frac{١}{٢} - \frac{١}{\text{نهـا هـ (س)}} \right| (م ٢-٩)$$

$$\frac{١}{|م - هـ (س)|} = \frac{١}{|م| |هـ (س)|}$$

(م ٢-٥) اذا كانت $\text{هناك } (س) = ٠$ فان $\text{هنا } (س) ك (س) = ٠$
 $س - پ$ $س - پ$

فما أن $\text{هنا } (س) = ل$ يتبع من (٢-٦) (باخذ $\epsilon = ١$) انه

توجد $\delta_١ > ٠$ بحيث انه عندما تكون $|س - پ| > \delta_١$

فان $|ق (س) - ل| > ١$ ومن ثم فان

$$|ق (س)| = |ق (س) - ل + ل| \geq |ق (س) - ل| - |ل| > ١ - |ل|$$

+ |ل| ونتيجة لذلك

(م ٢-٦) $ق (س) ك (س) > (١ + |ل|) ك (س)$ عندما تكون

$$٠ < |س - پ| < \delta_١$$

وبما أن $\text{هنا } ك (س) = ٠$ فلاي $\epsilon < ٠$ توجد $\delta_٢ < ٠$

بحيث أن

$$(م ٢-٧) ك (س) - ٠ > \frac{\epsilon}{|ل| + ١} \text{ عندما تكون}$$

$$٠ < |س - پ| < \delta_٢$$

واذا كانت δ اقل من $\delta_١$ و $\delta_٢$ فعندما تكون $٠ < |س - پ| < \delta$ تكون كلا المتباينتين في (م ٢-٦) ، (م ٢-٧) صحيحتين ومن ثم فان

$$ق (س) ك (س) > (١ + |ل|) \times \frac{\epsilon}{|ل| + ١}$$

ولهذا فان

$|ك (س) - ق (س)| > \epsilon$ عندما تكون $٠ < |س - پ| < \delta$ وهذا

يبرهن (م ٢-٥) .

والآن خذ المتطابقة :

$$(م ٢-٢) |ق (س) + هـ (س) - (ل + م)| = |ق (س) - (ل)| + هـ$$

(س) - م | وتطبيق المتباينة المثلثية (١-٣) ينتج

$$|ق (س) - (ل)| + هـ (س) - م \geq |ق (س) - (ل)| + |هـ (س) - م|$$

وبيربط المتباينة الاخيرة مع (م ١-٢) نجد أن

$$(م ٣-٢) |ق (س) + هـ (س) - (ل + م)| \geq |ق (س) - (ل)| + |هـ (س) - م|$$

$$(س) - م | واما أن نهـ ق (س) = ل ونهـ هـ (س) = م$$

فيمكن ان نجد عددين |ق (س) - ل| و |هـ (س) - م| صغيرين كما

نشاء باختيار س قريبة من δ . وبشكل خاص يمكن جعلها اقل من $\frac{\epsilon}{4}$.

وهكذا توجد $\delta_1 < \delta$ و $\delta_2 < \delta$ بحيث أن

$$(م ٤-٢) |ق (س) - (ل)| > \frac{\epsilon}{4} \text{ عندما تكون } |س - ل| > \delta_1$$

$$|ق (س) - م| > \frac{\epsilon}{4} \text{ عندما تكون } |س - م| > \delta_2$$

واذا اخذنا δ اصغر من δ_1 و δ_2 فعندما $س - ل > \delta$ تكون

المتباينتان في (م ٤-٢) اللتان تشملان ق (س)، هـ (س) صحيحتين.

ونتيجة لذلك اذا كانت

$$|س - ل| > \delta \text{ فن } (م ٤-٢) \text{ و } (م ٣-٢) \text{ يكون}$$

$$\epsilon = \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} > |ق (س) + هـ (س) - (ل + م)|$$

وهي العبارة المطلوبة (م ١-٢).

(٢) نبين اولاً انه اذا كان ك اقترانا و

الملحق الثاني

نظريات على النهايات والتكاملات المحدودة

يحتوي هذا الملحق على براهين بعض النظريات المذكورة في الفصلين الخامس والسادس . ونظام الترقيم هنا هو نفس النظام المتبع في الفصلين المذكورين .
(٢-١٢) نظرية :

إذا كانت نها $ق (س) = ل$
س - م

و نها $هـ (س) = م$ فان
س - م

(١) نها $[ق (س) + هـ (س)] = ل + م$
س - م

(٢) نها $ق (س) . هـ (س) = ل . م$
س - م

(٣) نها $\frac{ق (س)}{هـ (س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط ان تكون $م \neq ٠$
س - م

البرهان :

(١) حسب (٢-٦) علينا اثبات انه لكل $\epsilon > ٠$. توجد $\delta > ٠$ بحيث
أن

$|ق (س) + هـ (س) - (ل + م)| < \epsilon$ عندما تكون $|س - م| < \delta$ فنبداً بكتابة

$$6. \dots + \frac{1}{5 \times 4 \times 3} + \frac{1}{4 \times 3 \times 2} + \frac{1}{3 \times 2 \times 1}$$

$$\frac{n(3+n)}{(2+n)(1+n)4} = \frac{1}{n(2+n)(1+n)} +$$

$$7. (1-2n) + \dots + 25 + 23 + 21 + \dots$$

$$\frac{n(1+2n)(1-2n)}{3} =$$

$$8. (1-2n)^2 n = (1-2n) + \dots + 23 + 21 + \dots$$

$$9. n > 2n$$

$$10. n \geq 2 + 1$$

11. استعمال الاستنتاج الرياضي لاثبات انه اذا كان p أي عدد حقيقي اكبر من 1 فان

$$n < 1 \text{ لكل عدد صحيح موجب } n.$$

$$12. \text{ اذا كانت } p \neq 1 \text{ اثبت ان}$$

$$\frac{1-p^n}{1-p} = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}$$

لكل عدد صحيح موجب n .

13. استعمال الاستنتاج الرياضي لاثبات أن $p - b$ هو أحد عوامل $p^n - b^n$ لكل

عدد صحيح موجب n (ملاحظة : $p^{k+1} - b^{k+1} = (p^k - b^k) + (p - b)$)

$$p^{k+1} - b^{k+1} = (p^k - b^k) + (p - b)$$

14. اثبت أن $p + b$ هو أحد عوامل $p^{2n+1} + b^{2n+1}$ لكل عدد صحيح

موجب n .

$$(p+1)k + 1 < p(k+1) + k^2$$

وبما أن $k^2 > 0$ فإن

$$p(k+1) + 1 < p(k+1) + k^2$$

ونتيجة لذلك فإن

$$(p+1)k + 1 < p(k+1) + k^2$$

وهكذا فإن $k+1$ تكون صحيحة وهو المطلوب .

تمارين :

في التمارين ١-١٠ برهن على أن العبارة المعطاة تكون صحيحة لكل عدد صحيح موجب n .

$$1. \quad 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

$$2. \quad 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3. \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$4. \quad \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

$$5. \quad \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1} =$$

٢ — افترض أن s صحيحة لأي $k \leq r$ وبرهن على أن s_{k+1} تكون صحيحة

مثال ٢ : إذا كان p عددا حقيقيا غير الصفر وكان $p < 1$.
برهن على أن $(p+1)^n < 1 + n$ لجميع الاعداد الصحيحة $n \leq 2$.

الحل : إذا كان n عددا صحيحا موجبا نأخذ عن لتمثيل المتباينة
 $(p+1)^n < 1 + n$. لاحظ ان p تكون خطأ لان $(p+1)^1 = 1 + p$.
ولكننا يمكن أن نثبت أن p تكون صحيحة لكل $n \leq 2$ باستخدام
(م ١-٧) على فرض أن $r = 2$.

١ — نكتب $(p+1)^2 = 1 + 2p + p^2$. وبما أن $p < 1$ ، فإن $p^2 < p$.
وبهذا فإن $1 + 2p + p^2 < 1 + 2p + p = 1 + 3p$. وهذا يعطينا $(p+1)^2 < 1 + 2p$ ومن
ثم فإن p تكون صحيحة .

٢ — افترض أن p تكون صحيحة . وهكذا فإن فرضية الاستنتاج
الرياضي

(م ١-٨) $(p+1)^k < 1 + k$.
ونرغب في اثبات ان p تكون صحيحة أي أن s_{k+1}

$(p+1)^{k+1} < 1 + (k+1)$. علما بأن $p < 1$ و $1 + p < 1 + (k+1)$.

فنضرب $p+1$ في طرفي (م ١-٨) وهذا لا يغير اشارة المتباينة . ولهذا فإن
 $(p+1)^{k+1} < (p+1)(1+k)$. وهذه يمكن اعادة كتابتها كما يلي :

$$(p+1)^{k+1} < 1 + k + p + p + k + 1$$

أو

$$(1+k) \quad 00 + 3 + 2 + 1(6-1م)$$

$$\frac{(1 + (1+k)) \cdot (1+k)}{2} =$$

فباستخدام فرضية الاستنتاج الرياضي نحصل على صيغة لحاصل جمع أول ك من الاعداد الصحيحة الموجبة . وبهذا يمكن إيجاد صيغة لحاصل جمع أول ك + ١ من الاعداد الصحيحة الموجبة ، يجمع ك + ١ الى كل من طرفي (١ - ٥) . فباستعمال هذا والاختصار نحصل على أن

$$(1+k) + \frac{k(1+k)}{2} = (1+k) + k + 000 + 3 + 2 + 1$$

$$\frac{k(1+k) + 2(1+k)}{2} =$$

$$\frac{k^2 + 3k + 2}{2} =$$

التي يمكن كتابتها بالصيغة (١م - ٦) . وهذا يبين أن ع ك + ١ تكون صحيحة ويكون البرهان بالاستنتاج الرياضي قد تم .

خذ عددا موجبا ر وافترض انه لكل عدد صحيح ن ≤ ر توجد عبارة مرافقة عن ن فمثلا اذا كانت ر = ٦ ترقم العبارات ع١ ، ع٢ ، ع٣ وهكذا . ويمكن تعميم مبدأ الاستنتاج الرياضي ليشمل هذه الحالة . فكما سبق تستعمل الخطوتين التاليتين لبرهان ان جميع العبارات س١ صحيحة لكل ن ≤ ر .

١ — برهن ان س١ صحيحة

(م ١-٢) . ونشير احيانا الى افتراض أن ع_ك صحيحة بفرضية الاستنتاج الرياضي .

مثال ١ : اثبت انه لاي عدد صحيح موجب ن يكون حاصل جمع أول ن من الاعداد

$$\frac{ن(ن+١)}{٢} \text{ الصحيحة الموجبة هو}$$

الحل : اذا كان ن عددا صحيحا موجبا فلنجعل عن ترمز للعبارة

$$\frac{ن(ن+١)}{٢} = ١ + ٢ + ٣ + \dots + ن \quad (\text{م ١-٤})$$

وهناك اتفاق على انه عندما تكون $ن \geq ٤$ بوضع في الطرف الايمن ن من الحدود بالضبط . ونريد أن نثبت أن عن صحيحة لجميع قيم ن وانه من المستحسن تحقيق (م ١-٤) بفرض عدة قيم للرمز ن ولكن هذا ليس ضروريا . علينا فقط اتباع الخطوتين ١ و ٢ في (م ١-٣) .
١ — اذا عوضنا $ن = ١$ في (م ١-٤) فيتحول الطرف الايمن الى ١ والطرف الايسر الى

$$\frac{(١)(١+١)}{٢}$$

وهذا يساوي ١ . وهذا يثبت ان ع_١ صحيحة .
٢ — نفترض ان ع_ك صحيحة وبهذا تكون فرضية الاستنتاج الرياضي هي

$$\frac{ك(ك+١)}{٢} = ١ + ٢ + \dots + ك \quad (\text{م ١-٥})$$

وهدفنا هو برهان أن ع_{ك+١} تكون صحيحة . أي أن

(م ١-٢) مبدأ الاستنتاج الرياضي

افرض ان كل عدد صحيح موجب ، ن ، يرتبط به عبارة محددة عن .
فتكون جميع العبارات عن صحيحة بشرط ان تتحقق الشروط التالية

(٢) اذا كان ك عددا صحيحا موجبا اختياريا بحيث ع_ك صحيحة فتكون

ع صحيحة ايضا .
ك + ١

البرهان : افرض أن (١) و (٢) في (م ١-٢) صحيحتان وضع

س = { ن ، ط : ع_ن صحيحة }

ع_١ صحيحة فرضا ومن ثم فان ١ ∈ س . وهكذا فان س تحقق الخاصية
(م ١-١) ، (١) . ولنفرض أن ك ∈ س . فتكون ع_ك صحيحة ومن
(م ١-٢) ، (٢) ع_{ك+١} صحيحة ايضا . ولهذا فان ك + ١ ∈ س .
وتكون الخاصية ، (م ١-١) ، (٢) صحيحة . ونتيجة لذلك فان س =
ط وهذا يعني ان ع_ن صحيحة لجميع الاعداد الصحيحة الموجبة ن .

(م ١-٣) وهناك صور مختلفة لمبدأ الاستنتاج الرياضي . وفي (م ١-٧) تعميم له
بسيط . وفي معظم التطبيقات تعطى العبارة عن بصيغة معادلة تتضمن العدد
الاختياري الموجب ن .

وعند تطبيق (م ١-٢) فيجب دائما اتباع الخطوتين التاليتين :

(١) برهن على أن ع_١ صحيحة .
(٢) اذا كانت ع_ك صحيحة فبرهن على أن ع_{ك+١} تكون صحيحة .

وفي العادة تتضمن الخطوة ٢ الصعوبة الكبرى للطالب المبتدي . اننا لا نبرهن
أن ع_ك تكون صحيحة (الا في حالة ك = ١) . ولكننا نبين انه اذا كانت ع_ك
صحيحة فتكون العبارة التالية ع_{ك+١} صحيحة . وهذا كل ما نحتاجه حسب

الملحق الاول الاستنتاج الرياضي

Mathematical Induction

يمكن استخدام طريقة البرهان المعروفة بالاستنتاج الرياضي لاثبات عبارات أو صيغ معينة تصح لجميع الاعداد الصحيحة الموجبة . وترتكز الطريقة على المسلمات الأساسية التالية لمجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة ط .

(م-١) مسلمات الاستنتاج الرياضي .

لتكن س مجموعة جزئية من ط لها الخواص التالية :

$$(١) \quad ١ \in س$$

$$(٢) \quad \text{إذا كان ك} \in س \text{ فإن ك} + ١ \in س .$$

$$\text{فتكون س} = ط .$$

إذا كانت س هي مجموعة اعداد طبيعية تحقق (٢) فعندما تحتوي على عدد طبيعي اختياري ك فيجب أن تحتوي على العدد الذي يليه ك + ١ . وإذا حققت س الخاصية (١) فهي تحتوي على ١ وباستعمال (٢) تحتوي س على ١ + ١ أي ٢ ، وبتطبيق (٢) مرة أخرى نرى أن س تحتوي على ٢ + ١ أو ٣ . وبالاستمرار بهذه الطريقة يمكن أن نقول أنه إذا كان ن أي عدد طبيعي معين فإن ن + ١ س لأنه يمكن التقدم خطوة خطوة كما تقدم حتى نصل إلى ن . ومع أن هذا الجدال لا يبرهن (م-١) إلا أنه يظهر أنه معقول . وسنستعمل (م-١) لاستنتاج النظرية الأساسية التالية .

$$(23) \quad \text{ص} + \text{ص} = \text{ع}^{\text{س}}$$

$$(24) \quad \text{ص} + \text{ص} = \text{و}$$

$$(25) \quad \text{ص} - \text{ص} + \text{ص} = \text{ع}^{\text{و}}$$

$$(26) \quad \text{و} = \text{ع}^{\text{و}} \text{ص} - (\text{و} + \text{و}) \text{ص}$$

$$(27) \quad \text{و} = \text{و} + \text{و} = (\text{و} - \text{و})$$

$$(28) \quad \text{و} = (\text{و} - \text{و} + \text{و}) + (\text{و} + \text{و}) + (\text{و} - \text{و} + \text{و})$$

$$(29) \quad \text{و} - \text{و} - \text{و} = \text{و} - \text{و} = \text{و}^{\text{و}}$$

$$(30) \quad \text{و} = (\text{و} - \text{و}) + \text{و} + \text{و}$$

$$(31) \quad \text{و} = \text{و} + \frac{\text{و}}{\text{و}} + \frac{\text{و}}{\text{و}}$$

$$(32) \quad \text{و} = \text{و} + \frac{\text{و}}{\text{و}}$$

$$(33) \quad \text{و} = \text{و} + \text{و} - \text{و}$$

$$(34) \quad \text{و} = \text{و} + \text{و} + \text{و}$$

$$(35) \quad \text{و} = \text{و} - \text{و} = \text{و}$$

$$(36) \quad \text{و} = \text{و} + \text{و} = \text{و}$$

$$(37) \quad \text{و} = (\text{و} - \text{و} + \text{و}) + (\text{و} - \text{و} + \text{و}) + (\text{و} - \text{و} + \text{و})$$

$$(38) \quad \text{و} = \text{و}$$

$$(39) \quad \text{و} = \text{و} + \text{و} = \text{و}$$

$$(40) \quad \text{و} = \text{و} + \text{و} = \text{و}$$

$$e^- = \bar{\nu}_e + \nu_e$$

$$. = \text{ص}^2 - \text{ص} \text{e}^{-\text{س}} + (\text{س}^2 + \text{ص} \text{س} + \text{ص}^3) \text{e}^{-\text{س}} = .$$

$$6) (s^2v + sv^2) + sv + v = 0$$

(۷) ص ظا س + ص = ۲ قاس

$$١ = صصص - (صص + صص) \quad (٨)$$

$$(9) \sqrt{s-1} = \sqrt{s-1}$$

(۱۰) (۲ص + ۳س) د س - س د ص = ۰

$$(11) \quad (2 \text{ س جا } \frac{\text{ص}}{\text{س}} - \text{ص جتا } \frac{\text{ص}}{\text{س}}) \text{ د س} + \text{س جتا } \frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{ د ص} = 0$$

$$(۱۲) \quad (ص \text{ جتا س} - ۲ \text{ س}) + (جاس + ۲ ص) = ص$$

(۱۳) س ص - ۲ ص = س ° ص ۴

$$v = v - v + v \quad (14)$$

(۱۵) ص - ۸ ص + ۱۶ ص = ۰

(۱۶) ص - ۶ ص + ۲۵ ص = .

$$1 = \frac{S_{ص}}{S_{س}} \cdot 2 - \frac{S_{ص}^2}{S_{س}^2} \quad (17)$$

$$\text{ص} + \text{جاس} = \frac{\text{ص}^2}{\text{ص}^2} \quad (18)$$

(۱۹) $\text{ص} - \text{ص} = e$ جا س

(۲۰) ص - ص - ۶ ص = ۲ س

(۲۱) قاً ص و س = $\sqrt{س - ۱}$ و ص - س قاً ص و س

$$(22) (2s - \text{ص} - 1 + \text{لط} \text{ص}) + (\text{س} \text{ص} - 1 - \text{لط} \text{س} + 1) = \text{ص} \text{س}$$

تمارين :

أوجد الحلول المتسلسلة للمعادلات التفاضلية في التمارين ١-٦

$$(١) \quad \dot{v} = v + v$$

$$(٢) \quad \dot{v} = 4v - v$$

$$(٣) \quad \dot{v} = 2s - v$$

$$(٤) \quad \dot{v} = v + 2s + v$$

$$(٥) \quad \dot{v} = 2v + \frac{v}{s} - \frac{v^2}{2s^2}$$

$$(٦) \quad \dot{v} = 2s + \frac{v}{2s}$$

٩ — تمارين مراجعة :

شفهي :

ابحث عن طرق لحل الانواع التالية من المعادلات التفاضلية .

(١) قابلة للفصل (٢) مضبوطة

(٣) متجانسة (٤) خطية من الرتبة الاولى

(٥) صيغة برنولي (٦) خطية من الرتبة الثانية

كتابي :

حل المعادلات التفاضلية في التمارين ١-٤٠ .

$$(١) \quad \dot{v} = v - v + v$$

$$(٢) \quad \dot{v} = (2s - v) + (1 - v) + v$$

$$(٣) \quad \dot{v} = (3s - v) + (s + v) + v$$

$$1P \frac{1}{2} = 3P \quad , \quad 1P = 2P$$

$$1P \frac{1}{4 \times 2} = 3P \frac{1}{4} = 5P \quad , \quad 1P \frac{1}{3} = 2P \frac{1}{3} = 4P$$

$$1P \frac{1}{6 \times 4 \times 2} = 5P \frac{1}{6} = 7P \quad , \quad 1P \frac{1}{5 \times 3} = 4P \frac{1}{5} = 6P$$

$$1P \frac{1}{7 \times 5 \times 3} = 6P \frac{1}{8} = 8P$$

وبشكل عام فان

$$1P \frac{1}{(1 - 2N) \dots \times 3 \times 1} = 2NP$$

$$1P \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots N} = 1P \frac{1}{(2N) \times \dots \times 4 \times 2} = 1 + 2NP$$

ويمكن التعبير عن الحل ص $\sum_{n=0}^{\infty} 1P \cdot 2^n$ كحاصل جمع متسلسلتين

لا نهائيتين

$$ص = 1P \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1 + \frac{1}{(1 - 2N) \dots \times 3 \times 1} \right)$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} 1P \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots N}$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n p_n$$

أو ما يكافئه

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-n) 2^n p_n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n p_n$$

وبعد ذلك نضبط التجميع على اليسار حتى تظهر القوة 2^n بدلا من 2^{n-1} . ويمكن تحقيق ذلك بأخذ 2 بدلا من 1 وبدء التجميع عند $n=0$. وهذا يعطينا

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2+n) 2^n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n) 2^n p_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2+n) 2^n p_n$$

ونرى من مقارنة المعاملات ان

$$(2+n) 2^n p_n = (1+n) 2^n p_n$$

أي ان

$$\frac{1}{1+n} = 2^n p_n$$

ويقودنا وضع $n=0, 1, 2, 3, \dots, 7$ الى الصيغ التالية للمعاملات

التي:

وهكذا .

ويمكن اثبات انه اذا كان n فرديا فان $\mu_n = 0$

بينما $\mu_{2n} = \frac{1}{n!}$ لجميع الاعداد الصحيحة الموجبة n .

ولهذا فيكون الحل المتسلسل هو

$$ص = \mu_0 (1 + س^2 + \frac{1}{2!} س^4 + \frac{1}{3!} س^6 + \dots + \frac{1}{n!} س^{2n} + \dots)$$

ويتبع من (١٢-٥٢) انه الحل المتسلسل في المثال ١ .

يمكن كتابته بالصيغة

$$ص = e^{س^2}$$

وفي الواقع يمكن ايجاد هذه الصيغة مباشرة من $ص'' = 2س$ باستخدام طريقة فصل المتغيرات التي ناقشناها في البند الاول . والهدف من المثال ١ هو توضيح للحلول المتسلسلة وليس ايجاد الحل بأبسط طريقة . وفي هذه حالات لا

يمكن ايجاد حاصل جمع $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n س^n$ ون يجب ابقاء الحل بصورة

متسلسلة .

مثال ٢ : حل المعادلة التفاضلية

$$ص'' - س ص' - ٢ ص = 0$$

الحل : بالتعويض عن $ص$ ، $ص'$ ، $ص''$ من (١٩-٤١) ، (١٩-٤٣) نحصل على ان

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \mu_n س^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n س^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n س^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n 2^{1+n} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+2} (2+n) 2^{1+n}$$

أو

$$p_1 2 + p_2 4 + \dots + p_{n+2} (2+n) 2^{1+n} + \dots$$

$$= 2 p_2 + 4 p_3 + \dots + 2^{1+n} p_{n+2} + \dots$$

ومقارنة المعاملات نرى أن

$$p_1 = 0$$

$$p_{n+2} (2+n) 2^{1+n} = 2^{1+n} p_{n+2} \text{ إذا كانت } n \leq 0$$

ونتيجة لذلك تعطى المعاملات بالصيغ

$$p_1 = 0, \quad p_{n+2} = \frac{2}{2+n} p_n \text{ إذا كانت } n \leq 0$$

وبشكل خاص فإن

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{2}{2} p_0 = p_0, \quad p_3 = \frac{2}{3} p_1 = 0$$

$$p_4 = \frac{2}{4} p_2 = \frac{1}{2} p_0, \quad p_5 = \frac{2}{5} p_3 = 0$$

$$p_6 = \frac{1}{3 \times 2} p_4 = \frac{1}{6} p_0, \quad p_7 = \frac{1}{3} p_5 = 0$$

$$p_8 = \frac{1}{4 \times 3 \times 2} p_6 = \frac{1}{24} p_0, \quad p_9 = \frac{2}{9} p_7 = 0$$

$$ص = 2p_2 + 3 \times 2p_2 \times 3p_3 \times 4p_4 + \dots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(1-n)p_n = 1$$

وهكذا .

ويمكن استعمال متسلسلات القوة لحل معادلات تفاضلية معينة . وعندها يعبر عن الحل غالباً بمتسلسلة لا نهائية ويسمى حلاً متسلسلاً للمعادلة التفاضلية .

Series Solution

مثال ١ : أوجد حلاً متسلسلاً للمعادلة التفاضلية

$$ص = 2p_2$$

الحل : إذا كان الحل المعطى بالصيغة

$$ص = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

$$ص = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{n-1} \text{ وبالتعويض في المعادلة نحصل على :}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{n-1} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{n-1}$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{n+1} =$$

ومن الملائم تغيير التجميع على اليسار حتى تظهر نفس القوة في التجميع على اليمين . ويمكن عمل ذلك بأخذ $2 + n$ بدلاً من n وبدء التجميع عند $n = 1$. وهكذا فإن

$$(12) \quad \text{ص} + \text{ص} 6 + \text{ص} 9 = e^2 \text{س}$$

$$(13) \quad \text{ص} + \text{ص} 2 = \text{جنا} 2 \text{س}$$

$$(14) \quad \text{ص} + \text{ص} = 5 \text{جاس}$$

$$(15) \quad \text{ص} - \text{ص} = \text{س} e^2 \text{س}$$

$$(16) \quad \text{ص} + \text{ص} 3 - \text{ص} 4 = \text{س} e^- \text{س}$$

$$(17) \quad \text{ص} 2 - \frac{\text{ص} 6}{\text{ص} 2} + \frac{\text{ص} 13}{\text{ص} 2} = \text{س} e = \text{جنا} \text{س}$$

$$(18) \quad \text{ص} 2 - \frac{\text{ص} 2}{\text{ص} 2} + \frac{\text{ص} 2}{\text{ص} 2} = \text{س} e^- \text{س} \text{جنا} 2 \text{س}$$

$$(19) \quad \text{اثبت (19-35)}$$

$$(20) \quad \text{اثبت (19-36)}$$

٨ — الحلول بالمتسلسلات :

بيننا في الفصل الثاني عشر ان متسلسلة القوى

$\sum$ أن س ن تعين اقتراناً ق حيث أن

(19-42) $\text{ص} = (\text{س}) = \text{س} + \text{س} 1 + \text{س} 2 + \text{س} 3 + \text{س} 4 + \dots$
لجميع س في فترة التقارب . وأكثر من ذلك فيمكن تمثيل مشتقات ق
بمتسلسلات وذلك بتفاضل كل حد من (19-41) . وهكذا فان

$$(19-43) \quad \text{ص} = \text{س} + \text{س} 2 + \text{س} 3 + \text{س} 4 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \text{س}^{n-1} =$$

$$\text{ص} = e^{\circ} \text{س} (ج_1 \text{ جتا } 4 \text{ س} + ج_2 \text{ جا } 4 \text{ س}) + \frac{1}{170} (جتا \text{س})$$

$$+ 4 \text{ جاس}.$$

تمارين :

حل المعادلات التفاضلية في التمارين ١ - ١٠ باستخدام طريقة التغير في الوسطاء .

$$(1) \text{ص} + \text{ظاس} = \text{ص}$$

$$(2) \text{ص} + \text{قاس} = \text{ص}$$

$$(3) \text{ص} - 6 \text{ص} + 9 \text{ص} = \text{مس}^2 e^{\text{س}}$$

$$(4) \text{ص} + 4 \text{ص} = e^{-\text{س}^3}$$

$$(5) \text{ص} - \text{ص} = e^{\text{س جتا س}}$$

$$(6) \text{ص} - 4 \text{ص} + 4 \text{ص} = \text{مس}^{-2} e^{\text{س}^2}$$

$$(7) \text{ص} - 9 \text{ص} = e^{\text{س}^3}$$

$$(8) \text{ص} + \text{جاس} = \text{ص}$$

$$(9) \frac{d^2 \text{ص}}{ds^2} - \frac{3}{2} \frac{d\text{ص}}{ds} - 4 \text{ص} = 2$$

$$(10) 1 + \text{س} = \frac{d\text{ص}}{ds} - \frac{d^2 \text{ص}}{ds^2}$$

حل المعادلات التفاضلية في التمارين (١١ - ١٨) باستخدام طريقة العوامل غير المعينة .

$$(11) \text{ص} - 3 \text{ص} + 2 \text{ص} = e^{-\text{س}} 4$$

$$ص = ص_6 e^{س_6} + ص_3 e^{س_3} - \frac{1}{196} e^{س_4} (س_4 + 5)$$

مثال ٥ : حل $ص - ١٠ ص + ٤١ ص = جاس$

الحل : لقد وجدنا الحل العام للمعادلة المكتملة في مثال ٣ من البند السابق وهو

$$صم = e^{س_5} (ج_١ جتا ٤ س + ج_٢ جا ٤ س).$$

وبالاشارة الى (١٩ - ٤١) ، (٣) بوضع $و = ٠$ ، $ن = ١$ فنبحث عن حل خاص صيغته

$$صخ = م جتا س + د جاس$$

وبما أن

$$صخ = - م جاس + د جتا س ،$$

$$صخ = - م جتا س - د جاس$$

ينتج عن التعويض في المعادلة المعطاة أن

$$- م جتا س - د جاس = م جتا س + د جاس - م جاس - ١٠ د جتا س + ٤١ م$$

$$جتا س + ٤١ د جاس = جاس أو$$

$$(٤٠ - م) جتا س + (١٠ + د) جاس = جاس$$

وينتج ان $صخ$ حل خاص بشرط أن يكون

$$٤٠ - م = ١٠ د = ٠ و$$

$$١٠ د + ٤٠ = ١$$

$$\text{وحل المعادلتين هو } م = \frac{1}{170} \text{ و } د = \frac{4}{170}$$

ولهذا فان

$$صخ = \frac{1}{170} (جتا س + ٤ جاس) \text{ ويكون الحل العام}$$

$$e(p+d, s) = \text{صخ}$$

ومن التفاضل نحصل على أن

$$e^{\xi} (d + d\xi + \frac{1}{2}\xi^2) = \text{صخ}$$

$$e(58 + 16 + 16) = \text{صُغ}$$

ويُنتج من التعويض في المعادلة المعطاة أن

$$e^{\frac{1}{2}} (d - d_s + p_s) - e^{\frac{1}{2}} (d + d_s + p_s)$$

$$e_{\text{س}}^{\text{ع}} = e_{(د + پ)}^{\text{ع}} \quad ۱۸ -$$

وهذه تختصر الى

$$- 14 + 5 - 18 = 5$$

ومن ثم فان صغى يكون حلا خاصا بشرط ان

$90 = 20 + 114 -$

1 = 28 —

وهذا يعطينا

$$\frac{0}{197} = p, \frac{1}{18} = 2$$

ومن ثم فان

$$\text{ص خ} = \frac{1}{197} (5 + 14 \text{ س} + 4 \text{ س}^2)$$

ولذلك يكون الحل العام هو

(١) اذا كانت ص + ب ص + ج ص = $e^{نس}$ حيث لا يكون ن

جذراً للمعادلة المساعدة فيوجد حل خاص صيغته صخ = $e^{نس}$.

(٢) اذا كانت ص + ب ص + ج ص = $e^{نس}$ حيث لا يكون ن جذراً للمعادلة المساعدة فيوجد حل خاص صيغته

$$صخ = e^{نس} (دس + پ)$$

(٣) اذا كانت

$$ص + ب ص + ج ص = e^{وس} جان س أو$$

$$ص + ب ص + ج ص = e^{وس} جتان س$$

حيث لا يكون و + ن : حلاً للمعادلة المساعدة فيوجد حل خاص صيغته

$$صخ = e^{وس} جتان س + e^{وس} د جان س$$

مثال ٤ : حل ص - ٣ ص - ١٨ ص = $e^{س٤}$

الحل : بما ان جذري المعادلة المساعدة

$$م^٢ - ٣م - ١٨ = ٠ \text{ هما } ٦ \text{ و } -٣ \text{ فيتبع من البند السابق أن الحل العام للمعادلة}$$

$$ص - ٣ ص - ١٨ ص = ٠ \text{ هو}$$

$$ص = e^{٦س} ج١ + e^{-٣س} ج٢$$

وبما أن ٤ ليس جذراً للمعادلة المساعدة فنرى من (١٩ - ٤١) ، (٢) انه يوجد حل خاص صيغته

$$ص_م = ج_١ e_٢ س + ج_٢ e_٤ س$$

ومن الملاحظة السابقة سنبحث عن حل خاص صيغته

$$ص_خ = e_٢ س^٣ . \text{ وبما أن}$$

$$ص_خ = e_٢ س^٣ , \quad ص_٩ = e_٢ س^٣$$

فبالتعويض في المعادلة نحصل على أن

$$ص_٩ = e_٢ س^٣ - e_٦ س^٣ + e_٨ س^٣ = e_٢ س^٣$$

وبقسمة الطرفين على $e_٢ س^٣$ نحصل على

$$١ = ٨ - ٦ + ٩ \text{ أو}$$

$$\frac{١}{٧} = ٢$$

وهكذا فإن $ص_خ = e_٢ س^٣ \frac{١}{٧}$ ويكون الحل العام هو

$$ص = ج_١ e_٢ س + ج_٢ e_٤ س + e_٢ س^٣ \frac{١}{٧}$$

وهناك عدة قواعد مذكورة في (١٩-٤١) للوصول الى حلول تجريبية للمعادلات التفاضلية غير المتجانسة ذات الرتبة الثانية والعوامل الثابتة . لاحظ اننا استعملنا القاعدة (١) في المثال ٣ ولمعالجة هذا الموضوع بشكل أوسع نشير على القارئ بالاطلاع على كتب في المعادلات التفاضلية .

(١٩-٤١) نظريات على الحلول الخاصة

$$ع = - جتا س ، ح = قتا س - جاس$$

لنأخذ

$$ع = - جاس$$

$$ح = لط | قتا س - ظتا س | + جتا س .$$

وبتطبيق (١٩-٣٨) يكون الحل الخاص للمعادلة المعطاة هو

$$ص = - جاس جتا س + جاس لط | قتا س - ظتا س | + جتا س$$

أو

$$ص = جاس لط | قتا س - ظتا س |$$

واخيرا باستخدام (١٩-٣٧) يكون الحل العام

$$ص = جـ جتا س + جـ جاس + جاس لط | قتا س - ظتا س |$$

اذا اعطينا المعادلة التفاضلية

$$ن س$$

$$e = (ص)$$

حيث e ليس حلا للمعادلة $ل (ص) = ٠$ فن المعقول ان نتوقع وجود

حل خاص صيغته

$$ص = م e^{ن س} \text{ وبما أن } e^{ن س} \text{ هو نتيجة لايحاد}$$

$$ص + ب ص + جـ ص = ٠ \text{ ويقودنا هذا الى استعمال } م e^{ن س} \text{ كحل}$$

تجريبي في المعادلة المعطاة ومحاولة ايجاد قيمة المعامل $م$. وتدعى هذه الطريقة

بطريقة العوامل غير المعينة كما هو موضح في المثال التالي :

مثال ٣ : حل المعادلة

$$ص + ٢ ص - ٨ ص = e^{٣ س}$$

الحل : بما أن جذري المعادلة المساعدة هما ٢ و - ٤ فيتبع أن الحل العام للمعادلة المكملّة هو

وبتعويض هذه في ل (ص غ) = ص غ + ج ص غ + ب ص غ

واعادة ترتيب الحدود نحصل على أن

$$(١٩-٣٩) \text{ ع } (ص_١ + ب_١ ص_١ + ج_١ ص_١) + ح (ص_٢ + ب_٢ ص_٢ + ج_٢ ص_٢) +$$

$$ج_٢ ص_٢ + ب (ع_١ ص_١ + ح_١ ص_١) +$$

$$+ (ع_٢ ص_٢ + ح_٢ ص_٢) + (ع_١ ص_١ + ح_١ ص_١) +$$

وبما أن ص_١ و ص_٢ حلان للمعادلة

$$ص + ب ص + ج ص = ٠$$

يكون الحدان الاولان على يمين (١٩-٣٩) صفرا .

وحتى نحصل على ل (ص غ) = هـ (س) يكفي اختيار ع وح بحيث أن

$$(١٩-٤٠) \text{ ع } ص_١ + ح_١ ص_٢ = ٠$$

$$\text{ع } ص_١ + ح_١ ص_٢ = هـ (س)$$

ويمكن اثبات ان هاتين المعادلتين لكل منهما دائما حل وحيد ع وح . وبعدها

يمكن تعيين ع وح بالتكامل استعمال (١٩-٣٨) لايجاد ص غ

مثال ٢ : حل المعادلة التفاضلية

$$ص + ص = ظ ناس$$

الحل : باستعمال (١٩-٣٣) يكون حل المعادلة المتجانسة

$$ص + ص = ٠ \text{ هو}$$

$$ص = ج_١ ج ناس + ج_٢ ج ناس$$

$$\text{وبأخذ } ص_١ = ج ناس \text{ و } ص_٢ = ج ناس$$

وتصبح المعادلتان (١٩-٤٠) .

$$\text{ع } ج ناس + ح_١ ج ناس = ٠$$

$$- \text{ع } ج ناس + ح_١ ج ناس = ظ ناس$$

وبالحل في ع وح نحصل على أن

الحل : بالتخمين نرى أن صخ = س^٣ حل خاص . والمعادلة المكتملة هي
ص^٣ - ٤ ص = ٠

وباستعمال (١٩ - ٢٨) يكون لها الحل العام

$$\text{صخ} = \text{ج}_1 \cdot e^{س^2} + \text{ج}_2 \cdot e^{-س^2}$$

ويكون نتيجة لذلك الحل العام للمعادلة غير المتجانسة هو

$$\text{ص} = \text{ج}_1 \cdot e^{س^2} + \text{ج}_2 \cdot e^{-س^2} + س^3$$

وفي اكثر الحالات لا يمكن ايجاد حل خاص بالتخمين كما عملنا في المثال ١ .

وتدعى الطريقة التالية طريقة تغير الوسطاء ويمكن تطبيقها لهذا الغرض .

إذا إعطينا المعادلة التفاضلية ل (ص) = هـ (س) نأخذ ص_١ وص_٢ التعبيرين اللذين يظهران في الحل العام .

$$\text{ص} = \text{ج}_1 \cdot \text{ص}_1 + \text{ج}_2 \cdot \text{ص}_2$$

للمعادلة المكتملة ل (ص) = ٠ وكمثال يمكن كما في (١٩ - ٢٨) ان تكون

$$\text{ص}_1 = e^{س^2} \text{ و } \text{ص}_2 = e^{-س^2}$$

ولنحاول الآن ايجاد حل خاص للمعادلة

$$\text{ل (ص) = هـ (س) له الصيغة}$$

$$(١٩ - ٣٨) \text{ صخ} = \text{ع ص}_1 + \text{ط ص}_2$$

$$\text{حيث ع} = \text{ق (س) و ط} = \text{ح (س)}$$

لبعض الاقتارات ق و ح . فتكون مشتقتا صخ الاولى والثانية هما

$$\text{صخ} = (\text{ع ص}_1 + \text{ح ص}_2) + (\text{ع ص}_1 + \text{ح ص}_2)$$

$$\text{صخ} = (\text{ع ص}_1 + \text{ح ص}_2) + (\text{ع ص}_1 + \text{ح ص}_2) + (\text{ع ص}_1 + \text{ح ص}_2) + (\text{ع ص}_1 + \text{ح ص}_2)$$

ل (ص) = هـ (س) وتسمى المعادلة المتجانسة التي تقابل ل (ص) = ٠ بالمعادلة المكتملة . افترض ان ص_ح حل خاص للمعادلة ل (ص) = هـ (س) و ص_ع أي حل للمعادلة المكتملة . فبما ان ل (ص_ح) = هـ (س) ول (ص_ع) = ٠ فان

$$ل (ص_ح + ص_ع) = ل (ص_ح) + ل (ص_ع)$$

$$= هـ (س)$$

وهذا يعني أن ص_ح + ص_ع حل للمعادلة (١٩ - ٣٤) . وأكثر من ذلك فإذا كانت ص = ق (س) أي حل آخر للمعادلة

$$ل (ص) = هـ (س) \text{ فان}$$

$$ل (ص - ص_ح) = ل (ص) - ل (ص_ح)$$

$$= هـ (س) - هـ (س) = ٠$$

ومن ثم فان ص - ص_ح حل للمعادلة المكتملة اي ص - ص_ح = ص_ع لبعض ص_ع . وهذا يبرهن النظرية التالية :

(١٩ - ٣٧) نظرية : اذا كان ص_ح حلاً خاصاً للمعادلة

$$ل (ص) = هـ (س) \text{ وكان}$$

$$ص د حلاً عاماً للمعادلة ل (ص) = ٠$$

فيكون الحال العام للمعادلة ل (ص) = هـ (س) هو

$$ص = ص_ح + ص_ع .$$

واذا استعملنا نتائج البند السابق لايجاد الحل العام ص_ع للمعادلة ل (ص) =

٠ فكل ما نحتاج اليه حسب (١٩ - ٣٧) لتعيين الحل العام للمعادلة

$$ل (ص) = هـ (س) \text{ هو حل خاص واحد ص_ح .}$$

مثال ١ : حل المعادلة التفاضلية

$$ص'' - ٤ ص' = ٦ س - ٤ س^٣$$

٧ — المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة :

سنعتبر في هذا البند المعادلات التفاضلية الخطية ذات الرتبة الثانية التي عواملها ثوابت أي معادلات تأخذ الصيغة

$$(١٩-٣٤) \quad \ddot{x} + b\dot{x} + cx = h \quad (س)$$

حيث b و c ثابتان والاقتران h (س) متصل . والرمزان b و c للفاعلين التفاضليين اللذين قدمناهما في الفصل الثالث لهما الخاصية التالية :

إذا كانت $\ddot{x} = c$ (س) فإن

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + ct = \dot{x}_0 + ct \quad (س) \quad و$$

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2} ct^2 = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2} ct^2 \quad (س) .$$

ولحل (١٩-٣٤) من الملائم استعمال الفاعل التفاضلي الخطي

$$L = \ddot{x} + b\dot{x} + cx$$

ويعرف هذا الفاعل الخاصية التالية

$$L(x) = \ddot{x} + b\dot{x} + cx = \dot{x} + b x + c x$$

$$= \ddot{x} + b\dot{x} + cx .$$

وباستعمال هذا الرمز يمكن كتابة (١٩-٣٤) بصيغة محددة وهي

$$L(x) = h \quad (س) .$$

ومن السهل تحقيق انه لكل عدد t يكون

$$(١٩-٣٥) \quad L(t x) = t L(x) = t h \quad (ص) .$$

وكذلك إذا كانت $x_1 = c_1$ (س) و $x_2 = c_2$ (س) فإن

$$(١٩-٣٦) \quad L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) = c_1 + c_2 .$$

إذا اعطينا المعادلة التفاضلية (١٩-٣٤) أي

$$(10) \quad 0 = \text{ص} 4 + \text{ص} 20 + \text{ص} 25$$

$$(11) \quad 0 = \text{ص} 4 + \text{ص} 2$$

$$(12) \quad 0 = \text{ص} 5 + \text{ص} 2$$

$$(13) \quad 0 = \text{ص} 4 + \text{ص} 13$$

$$(14) \quad 0 = \text{ص} 4$$

$$(15) \quad 0 = \text{ص} 2 + \frac{\text{ص} 6}{\text{ص} 2} + \frac{\text{ص} 2}{\text{ص} 2}$$

$$(16) \quad 0 = \text{ص} 6 + \frac{\text{ص} 2}{\text{ص} 2} + \frac{\text{ص} 2}{\text{ص} 2}$$

في كل من التمارين ١٧ - ٢٤ أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التي تحقق الشروط الجانبية المذكورة .

$$(17) \quad \text{ص} 3 - \text{ص} 2 + \text{ص} 0 = 0 : \text{ص} 0 = \text{ص} 2 \text{ عند } 3$$

$$(18) \quad \text{ص} 2 - \text{ص} 1 + \text{ص} 0 = 0 : \text{ص} 1 = \text{ص} 2 \text{ عند } 2$$

$$(19) \quad \text{ص} 1 + \text{ص} 0 = 0 : \text{ص} 1 = \text{ص} 2 \text{ عند } 1$$

$$(20) \quad \text{ص} 6 - \text{ص} 1 + \text{ص} 0 = 0 : \text{ص} 1 = \text{ص} 6 \text{ عند } 1$$

$$(21) \quad \text{ص} 8 + \text{ص} 16 + \text{ص} 0 = 0 : \text{ص} 2 = \text{ص} 1 \text{ عند } 1$$

$$(22) \quad \text{ص} 5 + \text{ص} 0 = 0 : \text{ص} 4 = \text{ص} 2 \text{ عند } 2$$

$$(23) \quad \text{ص} 2 - \frac{\text{ص} 2}{\text{ص} 2} + \frac{\text{ص} 5}{\text{ص} 2} + \text{ص} 0 = 0 : \text{ص} 1 = \frac{\text{ص} 1}{\text{ص} 1} \text{ عند } 1$$

$$(24) \quad \text{ص} 2 - \frac{\text{ص} 6}{\text{ص} 2} + \frac{\text{ص} 13}{\text{ص} 2} + \text{ص} 0 = 0 : \text{ص} 2 = \frac{\text{ص} 3}{\text{ص} 3} \text{ عند } 3$$

وبوضع ج_١ = - ج_٢ = - $\frac{1}{4}$ نحصل على الحل الخاص

$$ص = e^{رس} \text{ جان س.}$$

وهذا جزء من برهان النظرية القادمة .

(١٩-٢٣) **نظرية :** اذا كان جذرا المعادلة المساعدة مركبين $\pm i$ فان الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$ص'' + ب ص' + ج ص = ٠ \text{ هو}$$

$$ص = e^{رس} (ج_١ جتان س + ج_٢ جان س).$$

مثال ٣ : حل المعادلة التفاضلية

$$ص'' - ١٠ ص' + ١٤ ص = ٠$$

الحل : للمعادلة المساعدة $م^٢ - ١٠ م + ١٤ = ٠$ جذران مركبان هما $٥ \pm ٤ i$ ولهذا فباستخدام (١٩-٣٣) يكون الحل العام هو

$$ص = e^{٥س} (ج_١ جتا ٤ س + ج_٢ جا ٤ س).$$

تمارين :

حل المعادلات التفاضلية في التمارين ١-١٦ .

$$(١) ص'' - ٥ ص' + ٦ ص = ٠$$

$$(٢) ص'' - ص' - ٢ ص = ٠$$

$$(٣) ص'' - ٣ ص' = ٠$$

$$(٤) ص'' + ٦ ص' + ٨ ص = ٠$$

$$(٥) ص'' + ٤ ص' + ٤ ص = ٠$$

$$(٦) ص'' - ٤ ص' + ٤ ص = ٠$$

$$(٧) ص'' - ٤ ص' + ص = ٠$$

$$(٨) ص'' - ٧ ص' - ٣ ص = ٠$$

$$(٩) ص'' + ٢ \sqrt{٢} ص' + ص = ٠$$

$$\dots + \frac{{}^4(e\ i)}{!4} + \frac{{}^3(e\ i)}{!3} + \frac{{}^2(e\ i)}{!2} + (e\ i) + 1 = e^i.$$

وهذه يمكن كتابتها بالصيغة

$$\left(\dots - \frac{{}^0e}{!0} + \frac{{}^3e}{!3} - e \right) i + \left(0 - \frac{{}^4e}{!4} + \frac{{}^2e}{!2} - 1 \right) = e^i.$$

واذا عرفنا جاع وجتا ع باستبدال س في (١٢-٥٠) و (١٢-٥١) بالقيمة ع فتعطينا المتسلسلة السابقة العلاقة المهمة التالية :

(١٩-٣٢) صيغة أولر

$$e^i = \text{جتا } i + \text{جاع } i$$

وهناك حالتان خاصتان من (١٩-٣٢) هما

$$e^{i\pi/2} = \text{جتا } \pi/2 + i \text{جان } \pi/2$$

$$e^{-i\pi/2} = \text{جتا } -\pi/2 - i \text{جان } -\pi/2$$

ويتبع منها الاتي

$$\frac{e^{i\pi/2} + e^{-i\pi/2}}{2} = \text{جتا } \pi/2$$

$$\frac{e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}}{2i} = \text{جان } \pi/2$$

واذا وضعنا في (١٩-٣٠) ، ج_١ = ج_٣ = 1/٣ فنحصل على الحل الخاص للصيغة (١٩-٢٤) وهو

$$ص = e^{i\pi/3} \text{ جتا } \pi/3$$

$$ص = ج_١ e^3 س + ج_٢ س e^3 س \text{ أو}$$

$$ص = e^3 س (ج_١ + ج_٢ س)$$

والحالة النهائية التي سنعتبرها هي التي يكون فيها جذرا المعادلة المساعدة مركبين مترافقين $r \pm i n$ حيث أن العددين الحقيقيين r و n معطيان بالصيغتين

$$r = \frac{-b}{2} \text{ و } n = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}, \quad i = \sqrt{-1}$$

ويمكن ان نستنتج من (١٩-٢٨) ان الحل العام للمعادلة

$$ص'' + ب ص' + ج ص = ٠ \text{ هو}$$

$$ص = ج_١ e^{(r + i n) س} + ج_٢ e^{(r - i n) س}$$

أو ما يكافئه

$$(١٩-٣٠) \quad ص = e^{ر س} (ج_١ e^{i n س} + ج_٢ e^{-i n س})$$

ولهذا فيظهر انه من الضروري تعميم مفاهيم التفاضل والتكامل لتشمل اقترانا تكون فيها المتغيرات اعدادا مركبة . وبما أن التطوير الكلي لهذا خارج عن هيكل عملنا فسنعطي الخطوط العريضة للأفكار الاساسية مجردة عن التفصيلات . وليس من الصعب تعميم التعريف والنظريات في الفصل الثاني عشر للسلسلات اللانهائية التي تشمل على اعداد مركبة . وتكون هذه الحالة التي نعرف فيها e حيث e يكون مركبا باستعمال (١٢-٥٢) . ولهذا فان

$$(١٩-٣١) \quad e^c = 1 + c + \frac{c^2}{2!} + \dots + \frac{c^n}{n!} + \dots$$

ونتيجة لذلك فان

أو ٢ م + ب = ٠ وبما أن م تحقق المعادلة المساعدة فيكون

$$\text{ص} = e^m \text{ حلا للصيغة (١٩-٢٤)}$$

وحسب الملاحظة التابعة لبرهان (١٩-٢٥) يكفي اثبات ان

$$\text{ص} = \text{ص} e^m \text{ حل ايضا.}$$

فتعويض $\text{ص} e^m$ عن ص في ص + ب ص + ج ص = ٠ نحصل على

أن

$$(٢ م e^m + م^٢ e^m) + ب (م e^m + م e^m) + ج (م e^m + م e^m) = ٠$$

$$+ ج ص e^m = (٢ م + ب م + ج م) e^m + (٢ م + م) e^m$$

$$+ ب (٢ م + م) e^m$$

$$= ٠ = \text{ص} e^m + \text{ص} e^m = ٠$$

وهو المطلوب .

مثال ٢ : حل المعادلة التفاضلية

$$\text{ص} - ٦ \text{ص} + ٩ \text{ص} = ٠$$

الحل : المعادلة المساعدة هي

$$م^٢ - ٦ م + ٩ = ٠ \text{ أو}$$

$$٠ = (٣ - م)^٢$$

ولها جذر من الدرجة الثانية قيمته ٣ .

وباستخدام (١٩-٢٩) فيكون الحل العام هو

وللمعادلة المساعدة اما جذران حقيقيان غير متساويين م_١ و م_٢ واما جذران حقيقيان متساويان م أو جذران مركبان مترافقان حسب كون ب^٢ - ٤ ج موجباً أو صفراً أو سالباً على الترتيب . والنظرية التالية هي نتيجة للملاحظة التي تلت (١٩ - ٢٥) .

(١٩ - ٢٨) نظرية :

إذا كان الجذران م_١ و م_٢ للمعادلة المساعدة حقيقيين ومتساويين فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \text{ هو}$$

$$x = e^{-\frac{b}{2}t} [C_1 \cos \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}t]$$

مثال ١ : حل المعادلة التفاضلية

$$\ddot{x} - 3\dot{x} - 10x = 0$$

الحل : المعادلة المساعدة هي

$$m^2 - 3m - 10 = 0 \text{ أو}$$

$$(m - 5)(m + 2) = 0$$

وبما أن الجذرين م_١ = ٥ و م_٢ = -٢ حقيقيان ومتساويان فيكون الحل العام هو

$$x = e^{5t} [C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t]$$

(١٩ - ٢٩) نظرية :

إذا كان للمعادلة المساعدة جذران متساويان : م ، م فيكون حل المعادلة التفاضلية

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \text{ العام هو}$$

$$x = e^{-\frac{b}{2}t} [C_1 \cos \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}t]$$

البرهان : باستعمال (١٩ - ٢٧) واخذ ب^٢ - ٤ ج = ٠ نحصل على أن م^٢ - ٢

وليست هـ (س) مطابقة للصفر فان ص = جـ ق (س) + جـ هـ (س)
هو حل عام للمعادلة التفاضلية ص + ب ص + جـ ص = ٠

ولهذا فلتعين الحل العام يكني ايجاد مثل هذين الاقترانين ق و هـ وتطبق
(١٩-٢٥).

وفي بحثنا عن حل للصيغة (١٩-٢٤) سنستعمل ص = e^{ms}

كحل تجريبي . وبما أن

$$ص = e^{ms} ، ص = e^{ms} = ص^2$$

فيتبع أن ص = e^{ms} حل اذا فقط اذا كان

$$ص^2 = e^{ms} + ب e^{ms} + جـ e^{ms} = ٠ \text{ أو}$$

بما أن $e^{ms} \neq ٠$. فيكون اذا فقط اذا كان

$$(١٩-٢٦) ص^2 + ب ص + جـ = ٠$$

وتسمى المعادلة الاخيرة بالمعادلة المساعدة للمعادلة التفاضلية

$$ص + ب ص + جـ ص = ٠$$

ويمكن الحصول عليها من هذه المعادلة بوضع $ص^2$ بدلا من ص ، م بدلا من
ص و ١ بدلا من ص . وتطبيق الصيغة التربيعية تكون جذور المعادلة
المساعدة هي

$$\frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤جـ}}{٢} = م \quad (١٩-٢٧)$$

على المعادلات ذات الرتبة الثانية التي يكون فيها $ق$ و $ج$ ثابتين .
وفي هذا البند سنعتبر المعادلات المتجانسة اما المعادلات غير المتجانسة فسنناقشها
في البند القادم . وصيغة المعادلة التفاضلية الخطية العامة ذات الرتبة الثانية والتي
عواملها ثوابت هي

$$(١٩-٢٤) \quad \ddot{ص} + ب \dot{ص} + ج ص = ٠$$

حيث $ب$ و $ج$ ثابتان . وقبل محاولة الحصول على حلول خاصة سنبرهن النتيجة
التالية .

(١٩-٢٥) نظرية :

إذا كانت $ص = ق (س)$ ، $ص = هـ (س)$ حلين للمعادلة التفاضلية
 $\ddot{ص} + ب \dot{ص} + ج ص = ٠$ فان
 $ص = ج ق (س) + ج هـ (س)$
حل آخر مهما يكن العددين $ج ق$ و $ج هـ$.

البرهان :

باستعمال الفرض نحصل على أن
 $\ddot{ق} (س) + ب \dot{ق} (س) + ج ق (س) = ٠$
 $\ddot{هـ} (س) + ب \dot{هـ} (س) + ج هـ (س) = ٠$
واذا ضربنا اولى هاتين المعادلتين في $ج هـ$ والثانية في $ج ق$ وجمعنا فتكون
النتيجة :

$$[ج ق \ddot{ق} (س) + ج ق \dot{ق} (س) + ج ق^2 (س)] + [ج هـ \ddot{هـ} (س) + ج هـ \dot{هـ} (س) + ج هـ^2 (س)] = ٠$$

ولهذا فيكون $ج ق (س) + ج هـ (س)$ حلاً .
ويمكن اثبات انه اذا كانت $ق (س) \neq هـ (س)$ لجميع الاعداد $ث$.

$$م = \frac{ش}{س} + \frac{ش}{ن} = ق$$

الشحنة ش الموجودة على مكثف سعته س خلال عملية تعبئة تشمل مقاومة م وقوة دافعة كهربائية ق . فاذا كانت الشحنة . عند ن = ٠ مثل ش كأقتران في ن .

(١١) حل المثال ٢ في الحالة التي تكون فيها القوة الدافعة الكهربائية ق جا د ن حيث ق و د ثابتان .

(١٢) تمثل المعادلة

$$م = \frac{ش}{س} + \frac{ش}{ن} = ق$$

دائرة كهربائية مؤلفة من مقاومة م ومكثف سعته س مربوطين على التوالي . مثل ت بصيغة اقتران في ن اذا كانت ت = ت . عند ن = ٠ وكانت (١) ق ثابتة

(ب) ق = ق جا د ن حيث ق و د ثابتان .

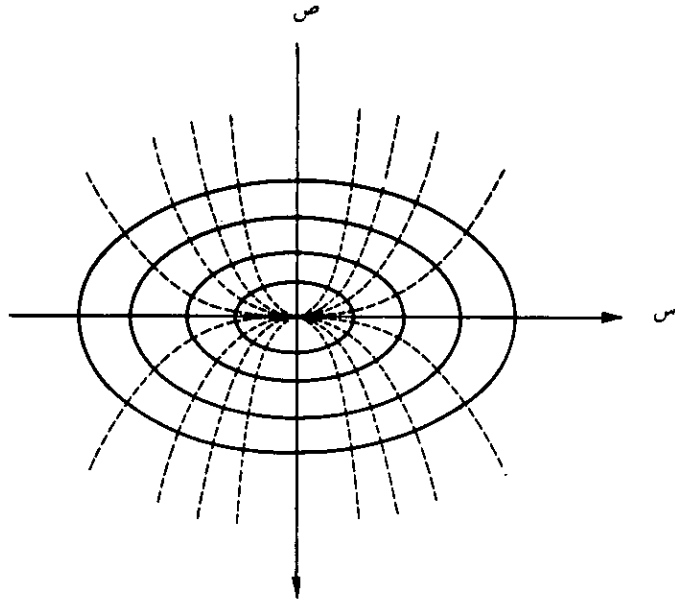
(١٣) حل المثال ١ اذا كانت قوة المقاومة الناتجة عن الهواء تتناسب تناسباً طردياً مع سرعة الجسم .

٦ — المعادلات التفاضلية الخطية ذات الرتبة الثانية :

اذا كانت ق_١ ، ق_٢ ، ... ، ق_ن وه اقترانات بمتغير واحد لها نفس المجال فتسمى معادلة صيغتها من النوع :

$$(١٩-٢٣) ص(ن) + ق(ن) (س) + ... + ق(١-ن) + ... + ق(١-ن) (س) + ص(ن) + ق(ن) (س)$$

بالمعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة النونية . واذا كانت ه (س) = ٠ لجميع س فتسمى المعادلة متجانسة . لاحظ ان هذا المعنى لكلمة «متجانسة» يختلف عن ذلك الذي ورد في البند ٣ واذا كانت ه (س) ≠ ٠ لبعض قيم س فنقول أن (١٩-٢٣) غير متجانسة . ويجد القاريء تحليلاً مستفيضاً للصيغة (١٩-٢٣) في كتب المعادلات التفاضلية . اما هنا فسنقتصر عملنا



الشكل ١٩ — ٣

تمارين :

أوجد الرواسم العمودية لفصيلة المنحنيات في التمارين ١ - ٨ وارسم بضعة اعضاء من كل فصيلة .

$$(١) \quad s^2 - v^2 = ج$$

$$(٢) \quad s \cdot v = ج$$

$$(٣) \quad v^2 = ج \cdot s$$

$$(٤) \quad v = ج \cdot s^2$$

$$(٥) \quad v^2 = ج \cdot s^3$$

$$(٦) \quad v = ج \cdot e - s$$

$$(٧) \quad s^2 + v^2 = ج \cdot s$$

$$(٨) \quad s^2 + v^2 - ج \cdot s = ٠$$

(٩) تمثل المعادلة التفاضلية $z + ج \cdot z' = ٠$ حالة التغير في الهواء حيث z و z' تمثلان الضغط والحجم على الترتيب . وجد ثابت . أوجد z بصيغة اقتران في

ح .
(١٠) تمثل المعادلة

مثال ٣ : أوجد الرواسم المتعامدة لفصيلة القطوع الناقصة

$$س^2 + ٣ص^2 = ج$$

وارسم عدة اعضاء من كل فصيلة

الحل : بتفاضل المعادلة المعطاة ضمينا نحصل على أن

$$٢س + ٦ص = ٠ \text{ أو } ص = -\frac{س}{٣}$$

ولهذا فيكون ميل المماس عند أي نقطة (س ، ص) تقع على القطوع

$$\frac{س}{٣} - = \text{النافضة هو } ص$$

وإذا كان $\frac{س}{٣}$ ميل المماس على الراسم المتعامد فيجب ان تساوي سالب معكوس ص. وهذا يعطينا المعادلة التفاضلية التالية لفصيلة الرواسم المتعامدة :

$$\frac{س}{٣} = \frac{ص}{س}$$

وبفصل المتغيرين نحصل على أن

$$\frac{س}{ص} = ٣ \frac{س}{ص} \text{ وبالتكامل وكتابة ثاني التكامل بالصيغة } لط | ك |$$

فنحصل على أن

$$لط | ص | = ٣ لط | س | + لط | ك |$$

$$= لط | ك س ٣ |$$

ويتبع أن

ص = ك س ٣ هي معادلة فصيلة الرواسم المعامدة . وهناك عدة اعضاء من الفصيلة المعطاة ورواسمها المقابلة (المنقطات) مرسومة في الشكل ١٩ - ٣ .

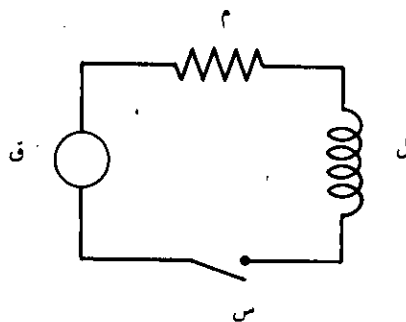
لاحظ انه اذا ازدادت ن بلا حصر فتقرب ت من $\frac{1}{2}$ وهو التيار المار بالدائرة عندما لا يكون للملف حث . وفي التمرين ١٢ ستجد أن المشكلة هي إيجاد ت عندما تكون القوة الدافعة الكهربائية معطاة بالصيغة
في جا ωt حيث ω ثابت .

الرسم العمودي orthogonal trajectory لفصيلة من المنحنيات هو منحنى يقطع كل تلك المنحنيات عموديا . وسنحصر مناقشتنا في مستوى الاحداثيات . وللتوضيح لنكن $v = 2s + b$ وهي فصيلة جميع المستقيمات التي ميلها ٢ فكل مستقيم $v = -\frac{1}{2}s + b$ هو ذو الميل $-\frac{1}{2}$ راسم عمودي . ونسمي احيانا مثل هاتين الفصيلتين من المنحنيات متعامدتين . واليك مثالا اخر لفصيلة جميع المستقيمات المارة بنقطة الاصل وفصيلة جميع الدوائر التي مركزها نقطة الاصل فهما متعامدتان (لماذا ؟) .

وتحدث احيانا ازواج من فصائل المنحنيات المتعامدة في التطبيقات الفيزيائية للرياضيات . وفي نظرية الكهرباء والمغناطيسية تكون خطوط القوة الناتجة عن مجال معطى رواسم متعامدة على منحنيات الجهد المتبادل المقابلة . وبالمثل فالخطوط الجذولية التي تدرس في علم الفضاء الديناميكي والهيدروليكي تكون رواسم متعامدة لما يسمى بمنحنيات سرعة تساوي الجهد .

واخيرا قد تبين في دراسة الحرارة الديناميكية ان سريان الحرارة عبر سطح مستو يكون عموديا على منحنيات تساوي الحرارة .

ويوضح المثال التالي طريقة لايجاد الرواسم المتعامدة على فصيلة منحنيات



الشكل ١٩ — ٢

مثل ت بصيغة اقتران في ن .

الحل : يمكن كتابة المعادلة المعطاة بالصيغة

$$\frac{ق}{ل} = ت \frac{م}{ل} + \frac{وت}{ون}$$

وهي بصيغة (١٩-١٦) . وبضرب طرفي المعادلة بمعامل التكامل

$$\left[\frac{م}{ل} ون \quad \frac{ق}{ل} ن \right] e$$

نحصل على أن

$$\left(\frac{ق}{ل} \right) e \cdot \frac{ب}{ل} = ت \left(\frac{م}{ل} \right) e \cdot \frac{م}{ل} + \frac{وت}{ون} \left(\frac{ق}{ل} \right) e$$

ونتيجة لذلك فكما في البند السابق فان

$$ت \left(\frac{ق}{ل} \right) e = \frac{ق}{م} \left(\frac{م}{ل} \right) e + ج$$

وبما أن ت = ٠ عندما ن = ٠ فيتبع ان

ج = - $\frac{ق}{م}$ وبالتعويض في المعادلة الأخيرة وبضرب طرفي المعادلة في

$$\left(\frac{ق}{ل} \right) e \quad \text{نحصل على أن}$$

$$\left(\frac{ق}{ل} \right) e$$

$$ت = \frac{ق}{م} (- ١) e$$

وبتكامل طرفي هذه المعادلة نرى أن

$$ف (ن) = \frac{ج}{p} + e \frac{ج}{r_p} - p + ب$$

ويمكن إيجاد الثابت ب بوضع $ن = 0$ وبما أن $ف (0) = 0$ فنحصل على أن

$$ب = - \frac{ج}{r_p}$$

ولهذا تكون المسافة التي قطعها الجسم بعد $ن$ ثانية هي

$$ف (ن) = \frac{ج}{p} + e \frac{ج}{r_p} - \frac{ج}{r_p} - p$$

ومن المفيد مقارنة هذه المعادلة للمسافة $ف (ن)$ بتلك التي حصلنا عليها عندما
اهملنا مقاومة الهواء . وفي الحالة الأخيرة تختصر (١٩ - ٢١) الى

$$\frac{دع}{ون} = ج \text{ ويتبع أن}$$

$$ف (ن) = ع = ج \cdot ن$$

وبتكامل طرفي المعادلة نحصل على الصيغة الاسهل وهي

$$ف (ن) = \frac{1}{p} ج \cdot ن$$

مثال ٢ : تتكون دائرة كهربائية بسيطة من سلك مقاومته $م$ وملف حثه الذاتي $ل$ متصلين
على التوالي كما هو موضح في الرسم بالشكل ١٩ - ٢ حيث $ق$ هي القوة الدافعة
الكهربائية . فاذا اغلق المفتاح $س$ عند زمن $ن = 0$ فيتبع من القوانين
الكهربائية انه اذا كانت $ن < 0$. فيحقق التيار ت المعادلة التفاضلية

$$ل \frac{د ت}{د ن} + م ت = ق$$

$$(١٩-٢١) \text{ ك } = \frac{\text{و ع}}{\text{ن}} = \text{ك ج} - \text{ث ع}$$

$$\text{أي و ع} = (\text{ج} - \frac{\text{ث}}{\text{ك}}) \text{ ع}$$

وإذا رمزنا للثابت $\frac{\text{و ع}}{\text{ن}}$ بالرمز پ فيمكن كتابة المعادلة الأخيرة بالصيغة المنفصلة التالية

$$\text{و ع} = \frac{\text{و ع}}{\text{ج} - \text{پ ع}}$$

وبتكامل طرفي المعادلة نحصل على أن
 $-\frac{1}{\text{پ}} \text{ لظ (ج - پ ع)} = \text{ن} + \text{د}$
 لاحت الثوابت د ولهذا فإن

$$(١٩-٢٢) \text{ ج} - \text{پ ع} = \text{پ} - (\text{ن} + \text{د})$$

$$\frac{\text{د} - \text{پ}}{\text{پ}} = \frac{\text{ج} - \text{پ ع}}{\text{پ}}$$

وإذا اخذنا $\text{ن} = ٠$ فإن $\text{ع} = ٠$ ومن ثم فإن

$$\text{ج} - \text{پ ع} = \frac{\text{د} - \text{پ}}{\text{پ}} \quad \text{وهكذا يمكن كتابة (١٩-٢٢) بالصيغة}$$

$$\text{ج} - \text{پ ع} = \frac{\text{د} - \text{پ}}{\text{پ}}$$

وبالحل في ع (أي ف ن) فنحصل على أن

$$\text{ف ن} = \text{ع} = \frac{\text{ج} - \frac{\text{د} - \text{پ}}{\text{پ}}}{\text{پ}}$$

التفاضلية المقابلة أكثر تعقيدا ونستخدم أحيانا التقريب بالحاسب الالكتروني . وفي هذا البند سنعطي عدة امثلة اخرى عن كيفية تطبيق المعادلات التفاضلية . وسيجد الطالب امثلة اضافية في هذا الكتاب على المعادلات التفاضلية أو في الكتب المتقدمة في الهندسة أو الفيزياء . وقد استخدمنا سابقا العملية العكسية للتفاضل لاشتقاق قوانين الحركة للأجسام الساقطة بافتراض انه يمكن اهمال مقاومة الهواء (انظر المثال ٤ في البند ١٠ في الفصل الرابع) . وهذا افتراض صالح للأجسام الصغيرة بالقرب من سطح الارض ولكن في حالات عديدة يجب اخذ مقاومة الهواء بالاعتبار . فهذه القوة الكسرية تزداد أحيانا بزيادة سرعة الجسم وسنشتق في المثال التالي قانونا لحركة جسم ساقط بافتراض ان مقاومة الهواء تتناسب تناسباً طردياً مع سرعة الجسم .

مثال ١ : اسقط جسم كتلته K من بالون . أوجد المسافة التي يقطعها في n من الثواني اذا كانت قوة المقاومة الناتجة عن الهواء تتناسب تناسباً طردياً مع سرعة الجسم .

الحل : لتتخذ محورا عموديا اتجاهاه الموجب للأسفل ونقطة الاصل عند نقطة الاسقاط . ونريد إيجاد المسافة $f(n)$ من نقطة الاصل الى الجسم عند الزمن n . ومن عملنا السابق فان سرعة الجسم هي $E = f'(n)$ ومقدار التسارع هو

$$T = \frac{dE}{dn} = f''(n) .$$

واذا كان J ثابت الجاذبية فينجذب الجسم باتجاه الارض بقوة مقدارها KJ . وحسب الفرض فان قوة المقاومة الناتجة عن الهواء هي Th حيث h عدد ثابت واتجاه هذه القوة عكس الحركة . ويتبع أن القوة المؤثرة على الجسم Q باتجاه الأسفل هي $KJ - Th$. وبما أن قانون نيوتن الثاني للحركة يقول أن

$$Q = K = \frac{dE}{dn}$$

فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية :

$$(6) (س^2 ص - 1) د س + س^3 د ص = 0$$

$$(7) (س^2 جتا س + ص) د س - س د ص = 0$$

$$(8) ص + ص = جاس$$

$$(9) س ص + (س^3 + 2) ص = س^3 - e س$$

$$(10) (س + 4) ص + 5 ص = س^2 + 8 س + 16$$

$$(11) س ص - ص = س^3 ص^4$$

$$(12) ص ص + 2 ص = 4 س^4 ص^4$$

$$(13) (2 س ص - س^2 ص^2) د س + (1 + س^2) د ص = 0$$

$$(14) ص + ص = 2 س^2 - e س$$

$$(15) س - 1 ص + 2 ص = 3$$

$$(16) ص - 5 ص = 5 - e س$$

$$(17) ظاس د ص + (ص - جاس) د س = 0$$

$$(18) جتا س د ص - (ص جاس + e س) د س = 0$$

$$(19) ص + 3 س^2 ص = س^2 + e س - س$$

$$(20) ص + ص ظاس = جتا س^3 س$$

في التمرينين ٢١ و ٢٢ أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التي تحقق الشروط الجانبية المعطاة .

$$(21) س ص - ص = س^2 + س : س = 1 ، ص = 2$$

$$(22) ص + 2 ص = e س^3 : س = 0 ، ص = 2$$

٥ - تطبيقات :

لا يمكن الاستغناء عن المعادلات التفاضلية في العلوم الفيزيائية . وفي بداية هذا الكتاب درسنا تطبيقات بدائية تشمل قوانين النمو الاسي والحركة والهندسة والاقتصاد ومفاهيم اخرى عديدة . وبالطبع كلما اصبحت المسائل اكثر صعوبة تصبح المعادلات

$$-\frac{1}{4} \bar{و} + ٢ \text{س}^{-١} = ٦ \text{س}$$

$$\bar{و} - ٤ \text{س}^{-١} = - ٢ \text{س}^{-٦}$$

وبما أن معامل التكامل للمعادلة الأخيرة هو

$$e \int -\frac{٤}{\text{س}} \text{س}^{-١} \text{لط} | \text{س} | = e_١ = \text{س}^{-٤}$$

فنكتب

$$\text{س}^{-٤} \bar{و} - ٤ \text{س}^{-٥} = - ٢ \text{س}^{-٢}$$

ومن ثم فإن

$$\text{س}^{-٤} \bar{و} = -\frac{٢}{٣} \text{س}^{-٣} + \text{ج} \bar{أو}$$

$$\bar{و} = -\frac{٢}{٣} \text{س}^{-٧} + \text{ج} \text{س}^{-٤}$$

واخيرا بما ان $\bar{و} = \text{ص}^{-٢}$ فيكون حل المعادلة المعطاة هو

$$(-\frac{٢}{٣} \text{س}^{-٧} + \text{ج} \text{س}^{-٤}) \text{ص}^{-٢} = ١.$$

تمارين:

حل المعادلات التفاضلية في التمارين ١-٢٠

$$(١) \text{ص} + ٢ \text{ص} = e^{٢ \text{س}}$$

$$(٢) \text{ص} - ٣ \text{ص} = ٢$$

$$(٣) \text{س} \text{ص} - ٣ \text{ص} = \text{س}^٥$$

$$(٤) \text{ص} + \text{ص} \text{ظنا س} = \text{قنا س}$$

$$(٥) (\text{ص} \text{جاس} - ٢) \text{س} + \text{جتاس} \text{س} = ٠$$

ومعادلة برنولي التالية هي تعميم للصيغة (١٩-١٦) .

$$(١٩-١٩) \quad \text{ص} + \text{ق} (\text{س}) = \text{هـ} (\text{س}) \text{ص}^{\text{ن}} .$$

حيث $\text{ن} \neq 0$. وواضح ان $\text{ص} = 0$ هو حل . واذا كانت $\text{ص} \neq 0$.
فيمكن قسمة طرفي المعادلة على $\text{ص}^{\text{ن}}$ ونحصل على أن

$$(١٩-٢٠) \quad \text{ص}^{-\text{ن}} + \text{ق} (\text{س}) \text{ص}^{-\text{ن}-1} = \text{هـ} (\text{س}) .$$

واذا وضعنا $\text{و} = \text{ص}^{-\text{ن}-1}$ فإن

$$\text{و} = \text{د} = \text{و} (\text{ن}-1) \text{ص}^{-\text{ن}-1} \text{ص}^{\text{ن}} = \text{و} \text{ص}^{-1}$$

وبالتعويض في (١٩-٢٠) فإن

$$\frac{1}{\text{ن}-1} \text{و} + \text{ق} (\text{س}) \text{و} = \text{هـ} (\text{س})$$

ويمكن حل هذه المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى في وباستعمال طريقة
معامل التكامل السابقة . وبعد ايجاد و يعطى حل المعادلة (١٩-١٩)

$$\text{بواسطة } \text{ص}^{-\text{ن}-1} = \text{و} (\text{، ص} = 0)$$

مثال ٢ : حل المعادلة التفاضلية

$$\text{ص} + ٢ \text{س}^{-1} \text{ص} = \text{س}^6 \text{ص}^3 .$$

الحل : المعادلة بصيغة برنولي (١٩-١٩) وذلك باعتبار $\text{ن} = 3$. فكما في المناقشة

السابقة نضرب طرفي المعادلة في ص^{-3} ونعوض $\text{و} = \text{ص}^{-\text{ن}-1}$

$$= \text{ص}^{-2} \text{فنحصل على}$$

$$= \text{ص}^{-2} \text{فنحصل على}$$

$$\text{ص}^{-3} + ٢ \text{س}^{-1} \text{ص}^{-2} = \text{س}^6 \text{ص}^{-3}$$

ونحل هذه المعادلة في ص نحصل على حل صريح . ويسمى المقدار $\int_e$ ق

(س) و س بمعامل التكامل للمعادلة (١٩-١٦) . وقد اثبتنا انه بضرب طرفي المعادلة (١٩-١٦) بهذا المقدار نحصل على معادلة حلها (١٩-١٧) .

مثال ١ : حل المعادلة التفاضلية :

$$س^٢ ص + س^٥ ص + س^٣ = ٠ , س \neq ٠$$

الحل : يمكن اعادة كتابة المعادلة بالصيغة

$$(١٩-١٨) ص + \frac{س^٥}{س} ص = - س^٣$$

التي لها الصيغة (١٩-١٦) وذلك بأخذ ق (س) = $\frac{س^٥}{س}$ وهـ (س)

= - س^٣ . ومعامل التكامل المطلوب هو

$$\int_e ق (س) د س = \int_e ل ط |س| ل ط |س| د س = \int_e ل ط |س| د س =$$

واذا كانت س < . فان |س| = س^٥ بينما اذا كانت س > . فان |س| = س^٥ - س^٥ وفي كلا الحالتين نضرب طرفي المعادلة (١٩-١٨) في س^٥ فنحصل على

$$س^٥ ص + س^٥ ص + س^٣ = ٠$$

$$د س (س^٥ ص) = - س^٣$$

ولهذا يكون الحل

$$س^٥ ص = - \frac{س^٩}{٣} + ج$$

$$ص = - \frac{س^٤}{٣} + \frac{ج}{س^٥}$$

$$\text{لط | ص |} = - \left[\text{ق (س) } \mathcal{L} \text{س} + \text{لط | ج | أو} \right]$$

$$\text{ص} = \text{ج} \cdot e - \left[\text{ق (س) } \mathcal{L} \text{س} \right]$$

والمعادلة الاخيرة تكافئ غ

$$\text{ص} \cdot e = \left[\text{ق (س) } \mathcal{L} \text{س} \right] = \text{ج}$$

وبالتالي نلاحظ أن

$$\text{د} \left(\text{ص} \cdot e \right) = \left[\text{ق (س) } \mathcal{L} \text{س} \right] = \text{ص} \cdot e \left[\text{ق (س) } \mathcal{L} \text{س} \right]$$

$$+ \left[\text{ق (س) } \mathcal{L} \text{ص} \cdot e \right] \text{ق (س) } \mathcal{L} \text{س}$$

$$= e \left[\text{ق (س) } \mathcal{L} \text{س} + \text{ص} \cdot e \left(\text{ق (س) } \mathcal{L} \text{ص} \right) \right]$$

ونتيجة لذلك اذا ضربنا طرفي المعادلة (١٩-١٦) في $\left[\text{ق (س) } \mathcal{L} \text{س} \right] e$

فيمكن كتابة المعادلة بالصيغة

$$(١٩-١٧) \text{ص} \cdot e \left[\text{ق (س) } \mathcal{L} \text{س} \right]$$

$$= \left[\text{هـ (س) } \right] e \left[\text{ق (س) } \mathcal{L} \text{س} \right] + \text{ج} \cdot e$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \circ = \text{س}^2 \text{ص} + (\text{ص}^2 - \text{س} \text{ص}) \text{س} \\
 (5) \quad & \circ = (\text{س}^2 + \text{ص}^2) \text{س} - \text{س}^2 \text{ص} \\
 (6) \quad & \circ = (\text{ص}^2 - \text{س} \text{ص} + \text{س}^2) \text{س} + \text{س} \text{ص} \text{ص} \\
 (7) \quad & \text{ص} = \text{س}^3 - (\text{س}^2 \text{ص} - \text{س}^3 \text{ص}^2) \\
 (8) \quad & \text{ص} = \text{س}^2 - \text{س} - \text{جنا} \text{س}^1 \text{ص}
 \end{aligned}$$

$$(9) \quad (\text{ص} + \sqrt{\text{س}^2 - \text{ص}^2}) \text{س} = \text{س} \text{س} \text{ص}$$

$$(10) \quad (\text{س} + \text{ص}) \text{س} = (\text{س} - \text{ص}) \text{س} \text{ص}$$

حل المعادلات التفاضلية في التمارين ١١ - ١٤ باستعمال التعويض

$$\begin{aligned}
 & \text{س} = \text{س}^2 \text{ص} \\
 (11) \quad & \circ = \text{س}^2 \text{ص} \text{س} + (\text{ص}^2 - \text{س}^2) \text{س} \\
 (12) \quad & \circ = \text{ص}^2 \text{س} + \text{س} (\text{س} - \text{ص}) \text{س} \\
 (13) \quad & \circ = \text{س}^3 \text{ص} \text{س} + (\text{س} + \text{ص}^2) \text{س} \\
 (14) \quad & \circ = \text{س} - (\text{ص}^2 - \text{س}^1 \text{ص} + \text{ظا} \text{ص}^1 \text{س}) \text{س}
 \end{aligned}$$

في التمرينين ١٥ و ١٦ اثبت ان المعادلة التفاضلية متجانسة ومضبوطة ثم حلها بالطريقة الملائمة .

$$(15) \quad \circ = (\text{س} + \text{ص}^3) \text{س} + (\text{ص}^2 - \text{س}^3) \text{س}$$

$$(16) \quad \circ = (\text{س}^2 + \text{ص}^2) \text{س} + \text{س}^2 \text{ص} \text{ص}$$

٤ — معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الاولى :

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الاولى هي معادلة تأخذ الصيغة

$$(16-19) \quad \text{ص} + \text{ق} (\text{س}) = \text{هـ} (\text{ص})$$

حيث ق وهـ اقترانان متصلان . واذا كانت هـ (س) = ٠ لجميع س فتكون

(١٦-١٩) منفصلة ويمكن كتابة

$$\frac{1}{\text{ص}} = \text{ق} - (\text{س})$$

بشرط ص ≠ ٠ وبالتكامل فان

لاختصار المعادلة المتجانسة . ويمكن استعمال التعويض $s = p$ ص الحل
المعادلة .

$$\text{مثال : } (s^2 - s) + s + s^2 = 0$$

$$\text{الحل : اذا وضعنا } q = (s, s) = s^2 - s$$

يكون كل من الاقترانين متجانسا من درجة ٢ . ولهذا فتكون المعادلة التفاضلية
متجانسة ونعوض :

$$s = p, \quad s + p = s + p + s^2 + s^2$$

ويقودنا هذا الى سلسلة من المعادلات التالية

$$(s^2 - p^2) + p + s + s^2 + s^2 = 0$$

$$(p - s^2) + s + p + s + s^2 + s^2 = 0$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{p} = 0$$

$$p = \frac{1}{s} - \frac{1}{p}$$

وبما أن $p = \frac{1}{s}$ فتكون المعادلة الاخيرة مكافئة الى

$$p = \frac{1}{s} - \frac{1}{p}$$

$$\text{واذا اخذنا } p = \frac{1}{s} \text{ فان } p = \frac{1}{s} - \frac{1}{p} = \frac{1}{s}$$

أولط $p = \frac{1}{s}$ ويمكن كتابة هذا بالصيغة

$$s = \frac{1}{p} = e$$

ويمكن ايضا ايجاد صيغة صريحة للحل .

تمارين :

حل المعادلات التفاضلية في التمارين ١-١٠ .

$$(1) \quad (s^3 + s) + s + s^2 = 0$$

$$(2) \quad (s^2 - s) + s + (s^2 + s) + s = 0$$

$$(3) \quad (s + \frac{1}{s} + s + \frac{1}{s}) + s - s + \frac{1}{s} = 0$$

والمعادلة التفاضلية المتجانسة هي المعادلة التي يمكن كتابتها بالصيغة

$$(١٩-١٣) \quad ق (س، ص) دس + هـ (س، ص) دص = ٠$$

حيث ق و هـ اقترانان متجانسان من نفس الدرجة .
ويمكن تحويل معادلات من هذا النوع الى معادلات قابلة للفصل بالتعويض :

$$(١٩-١٤) \quad ص = س \text{ حيث } P = ل (س) \text{ حيث } ل \text{ اقتران ما}$$

ولتحقيق تلك الحقيقة نلاحظ من (١٩-١٤) أن

$$دص = دس + س د + P دس$$

وبالتعويض س ن عن ص في (١٩-١٣) ينتج ان

$$ق (س، س) دس + هـ (س، س) (P دس + س د + P دس) = ٠$$

واذا كانت ق و هـ متجانستين من الدرجة ن فان

$$ق (س، س) = س ن \quad ق (P، ١) .$$

$$هـ (س، س) = س ن \quad هـ (P، ١) .$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية السابقة وبقسمة الطرفين على س^٢ نحصل

$$ق (P، ١) دس + هـ (P، ١) (P دس + س د + P دس) = ٠$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة بالصيغة المنفصلة

$$هـ (P، ١)$$

$$(١٩-١٥) \quad دس + \frac{١}{س} دس = P دس + \frac{١}{س} دس$$

بشرط الا تقع اصفار في المقام . وقد اثبتنا انه اذا كان ص = P س حلا
للمعادلة (١٩-١٣) فان P هي حل للمعادلة (١٩-١٥) . وبالعكس
اذا كانت P حلا للمعادلة (١٩-١٥) فبالرجوع لمناقشتنا يتبين أن ص = س
P حل للمعادلة (١٩-١٣) . وليس من المستحسن حفظ النتيجة النهائية
(١٩-١٥) . وبدلا من ذلك لنذكر التعويض ص = س P التي استعملت

(١٩) أكمل برهان (١٩-٨) .

(٢٠) اثبت ان المعادلة التفاضلية القابلة للفصل (١٩-٢) حالة خاصة من (١٩-٥) .

٣ — معادلات تفاضلية متجانسة :

يكون الاقتران ق ذو المتغيرين متجانسا من الدرجة ن اذا تحقق

$$(١٩-١٢) \quad \text{ق} (٢ \text{ س} , ٢ \text{ ص}) = ٢ \text{ ق} (٢ \text{ س} , ٢ \text{ ص}) .$$

لكل P بحيث أن $(٢ \text{ س} , ٢ \text{ ص})$ تنتمي الى مجال ق . مثلا اذا كانت

$$\text{ق} (٢ \text{ س} , ٢ \text{ ص}) = ٢ \text{ س}^٢ - ٢ \text{ ص}^٢ + ٥ \text{ س} \text{ ص}^٣$$

فان ق متجانسة من الدرجة ٤ لان

$$\text{ق} (٢ \text{ س} , ٢ \text{ ص}) = ٢ (٢ \text{ س})^٢ - ٢ (٢ \text{ ص})^٢ + ٥ (٢ \text{ س}) (٢ \text{ ص})^٣$$

$$= ٢ (٢ \text{ س}^٢ - ٢ \text{ ص}^٢ + ٥ \text{ س} \text{ ص}^٣) = ٢ \text{ ق} (٢ \text{ س} , ٢ \text{ ص}) .$$

وبالمثل اذا كانت

$$\text{ق} (٢ \text{ س} , ٢ \text{ ص}) = \frac{١}{٢ \text{ س} + ٢ \text{ ص}} \cdot \frac{\text{س}}{\text{ص}}$$

فان ق متجانسة من الدرجة - ٢ لان

$$\text{ق} (٢ \text{ س} , ٢ \text{ ص}) = \frac{١}{٢ \text{ س}^٢ + ٢ \text{ ص}^٢} \cdot \frac{\text{س}^٢}{\text{ص}^٢}$$

$$= \frac{١}{٢ \text{ س} + ٢ \text{ ص}} \cdot \frac{\text{س}}{\text{ص}} =$$

$$(9) \quad \theta = \theta (جا^2 + رجتا \theta) + ر (جا \theta - رجا \theta) + \theta$$

$$(10) \quad (س^2 + 2سص - ص^2) = ص (ص^2 - 2سص + س^2)$$

$$(11) \quad \theta = (سجتا س - 2س) + س + e^{-س} جا ص + ص$$

$$(12) \quad صجتا س + (جاس - جاص) + ص = \theta$$

$$(13) \quad (س - صس - 1 + لطص) + (سص - 1 - لطس)$$

$$(14) \quad \theta = \left(\frac{س}{ص + 1} + ص (1 - 3ص + \frac{1}{س + 1}) \right) + \left(\frac{1}{س + 1} + \frac{1}{س + 1} \right)$$

في التمارين ١٥ - ١٨ أوجد حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشروط الجانبية المعطاة.

$$(15) \quad \theta = (2سص^3 + 8س) + (3س^2ص^2 + 5) + ص$$

حيث $ص = 1$ عند $س = 1$.

$$(16) \quad \theta = (س^2ص + 3ص) + (س^3 + 2ص) + ص$$

حيث $ص = \theta$ عند $س = 1$.

$$(17) \quad \theta = (ص + \frac{ص}{ص + 1}) + (ص^2 + 1) + ص$$

$س = \theta$ ، $ص = \frac{1}{2}$.

$$(18) \quad (سجتا س + جاس + ص) + (جاص + س) + ص = \theta$$

$$س = \frac{\pi}{6} ، ص = \frac{\pi}{3}$$

لـ ص (س ، ص) = س^٢ جتا ص + جتا س + لـ (ص) .
وبالمقارنة مع صيغ لـ ص (س ، ص) الأخرى نرى أن

لـ (ص) = ٠ ولهذا فإن لـ (ص) = جـ .

وبتطبيق (٩-١٩) يكون

س^٢ جا ص + ص جتا س = جـ حلاً للمعادلة
حيث جـ ثابت يتضمن جـ ، وأخيراً فإن الشروط الجانبية تعطينا

$$جـ = (٠) \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(-\frac{\pi}{2} \right)$$

أو جـ = $\frac{2\pi}{8}$. ولهذا فيكون الحل الخاص المطلوب هو

$$س^٢ جا ص + ص جتا س = \frac{2\pi}{8} .$$

تمارين :

حل المعادلات التفاضلية ١-١٤

$$(١) (٢س + ص) دس + (٢ص + س) دص = ٠$$

$$(٢) (٢س ص + ص^٣) دس + (س^٣ + ٢ص^٢س) دص = ٠$$

$$(٣) (٢س - ١) دس + (٢ص - ٢س^٢ص) دص = ٠$$

$$(٤) (٢س - ٣س^٢ص) دس + (١ + ٢ص - س^٣) دص = ٠$$

$$(٥) (س^٢ جتا ص + ٤ص) دص + ٢س جتا ص - ٥ = ٠$$

$$(٦) ص^٢ e^س + ٤ص + (٢ص e^س + ٤س) دص = ٠$$

$$(٧) e^س (س ص + ١) دس + (س^٢ e^س + ٢ص) دص = ٠$$

$$(٨) (ن لـ ط ن + ٢ع لـ ط ع) دع + (ع لـ ط ن + ع) دن = ٠$$

وبتكامل ك س (س ، ص) بالنسبة الى س نحصل على ان
(١٩-١١) ك (س ، ص) = س^٣ - ص^٣ - ٢س^٢ + ٣س + ل (ص)

حيث ل اقتران في ص . ومن ثم فان

$$ك (س ، ص) = س^3 - ٣س^٢ + ٢س + ل (ص) .$$

$$ك (س ، ص) = س^3 - ٣س^٢ + ٢س + ل (ص) .$$

وبمقارنة هذا مع صيغة ك س (س ، ص) السابقة نرى أن

$$ل (ص) = ٢ص - أول (ص) = ص^٢ + ج$$

وبالتعويض عن ل (ص) في (١٩-١١) واستخدام (٩-١٩) يتبع أن

احد حلول المعادلة التفاضلية هو

$$س^٣ - ٢س - ٣س^٢ + ص^٢ = ج$$

حيث أن الثابت ج قد ضمن بالثابت ج . ويمكن تحقيق هذا الحل باستعمال

التفاضل الضمني .

مثال ٣ : حل المعادلة التفاضلية

$$٢س جا ص = ص جا س + (س^٢ جتا ص + جتا س) ص = ٠$$

$$\text{بالشروط الجانبية } ص = \frac{\pi}{٦} \text{ اذا كانت } س = \frac{\pi}{٢} .$$

الحل : بوضع ق (س ، ص) = ٢س جا ص - ص جا س

، هـ (س ، ص) = س^٢ جتا ص + جتا س نرى أن

$$ق (س ، ص) = ٢س جا ص - ص جا س = هـ (س ، ص) .$$

أي ان المعادلة التفاضلية مضبوطة . وباستخدام (١٩-٨) يوجد اقتران ك

بحيث أن

$$ك س (س ، ص) = ٢س جا ص - ص جا س$$

$$ك ص (س ، ص) = س^٢ جتا ص + جتا س .$$

وبأخذ تكامل ك س (س ، ص) بالنسبة الى س نحصل على أن ك (س ،

ص) = س^٢ جا ص + ص جتا س + ل (ص) حيث ل اقتران في ص .

ومن ثم فان

$$(١٩ - ١٠) \text{ س ك } = ((\text{س} , \text{ط} (\text{س})) + \text{ق} (\text{س} , \text{ص} (\text{س})) + \text{هـ} (\text{س} , \text{ط} (\text{س})) - \text{جـ} (\text{س}))$$

فاذا كانت $\text{ص} = \text{ط} (\text{س})$ حلا للمعادلة التفاضلية فينتج من (١٩ - ١٠) أن $\text{س ك} = ((\text{س} , \text{ط} (\text{س})) = ٠$ ولذلك فإن $\text{ك} (\text{س} , \text{ط} (\text{س})) = \text{جـ}$ ثابت ما، جـ. وبالعكس اذا كانت $\text{ك} (\text{س} , \text{ط} (\text{س})) = \text{جـ}$ فتعطينا (١٩ - ١٠) أن

$$٠ = \text{ق} (\text{س} , \text{ط} (\text{س})) + \text{هـ} (\text{س} , \text{ط} (\text{س})) - \text{ط} (\text{س} , \text{ط} (\text{س})).$$

أي أن $\text{ط} (\text{س})$ حل للمعادلة التفاضلية

واذا كانت $\text{ك} (\text{س} , \text{ط} (\text{س}))$ اقترانا في $\text{ص} , \text{ط} (\text{س})$ فباستخدام (١٦ - ١٣) يكون

$$\text{و ك} = \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}} + \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{ص}}$$

واذا كانت (١٩ - ٥) أو (١٩ - ٦) معادلة تفاضلية مضبوطة فينتج عن (١٩ - ٩) انه يوجد اقتران $\text{ك} (\text{س} , \text{ط} (\text{س}))$

$$\text{و ك} (\text{س} , \text{ط} (\text{س})) = ((\text{س} , \text{ط} (\text{س})) + \text{ق} (\text{س} , \text{ص} (\text{س})) + \text{هـ} (\text{س} , \text{ص} (\text{س})) - \text{جـ} (\text{س} , \text{ص} (\text{س})).$$

ويمكن ان نفكر بعد ذلك بأخذ التكامل للمعادلة لنحصل على الحل $\text{ك} (\text{س} , \text{ط} (\text{س}))$

مثال ٢: حل المعادلة التفاضلية

$$(٣ \text{ س}^٢ \text{ ص} - ٢ \text{ ص}^٢ \text{ س} + ٣ \text{ س} + ٣ \text{ ص} - ٦ \text{ س} \text{ ص}^٢ + ٢ \text{ ص}^٢) = ٠$$

لقد اثبتنا في المثال ١ ان هذه المعادلة مضبوطة. ومن ثم فباستعمال (١٩ - ٨) يوجد اقتران $\text{ك} (\text{س} , \text{ط} (\text{س}))$

$$\text{ك} (\text{س} , \text{ط} (\text{س})) = (٣ \text{ س}^٢ \text{ ص} - ٢ \text{ ص}^٢ \text{ س} + ٣ \text{ س} + ٣ \text{ ص} - ٦ \text{ س} \text{ ص}^٢ + ٢ \text{ ص}^٢)$$

البرهان :

إذا كانت $(س_١ ، ص_١)$ موجودة في مجالي ه وه فلنعرف ك بالصيغة

$$ك(س ، ص) = \left[\begin{matrix} س \\ ق(ن ، ص_١) و ن \end{matrix} \right]_{س_١}$$

$$+ \left[\begin{matrix} ص \\ ك(س_١ ، ن) و ن \end{matrix} \right]_{ص_١}$$

ويترك للتمرين اثبات أن

$ك(س ، ص) = ق(س ، ص) و ك(ص ، ص) = ه(س ، ص)$ ،
ص) والنظرية القادمة أساسية لوجود حلول للمعادلات التفاضلية المضبوطة .

(١٩-٩) نظرية :

هنالك حل للمعادلة التفاضلية المضبوطة

$$ق(س ، ص) + ه(س ، ص) = ص$$

وحلها $ك(س ، ص) = ج$ حيث ج ثابت و $ك$ أي اقتران في $س ، ص$

$$بحيث أن $ك = ق ، ق = ك$ $ص$ $ه$.$$

البرهان : باستخدام (١٩-٨) يوجد على الأقل اقتران واحد $ك$ بحيث أن $ك =$

$ق ، ك = ه$. وسنكمل البرهان باثبات أن $ص = ط(س)$ حل للمعادلة

التفاضلية المضبوطة إذا وفقط إذا كان

$$ك(س ، ط(س)) = ج$$

حيث ج ثابت ما . ونلاحظ أولا أنه باستخدام قاعدة السلسلة يكون

$$د(س) ك(س ، ط(س)) = ك(س ، ط(س)) + ك(ص ، ص)$$

$$ط(س) ط(س) ، أو ما يكافئه :$$

حيث ق ، هـ اقترانان في س ص . وهذه المعادلة مكافئة للصيغة

(١٩-٦) ق (س ، ص) د س + هـ (س ، ص) د ص = ٠
 بمعنى ان ص = ق (س) موحل للمعادلة (١٩-٥) اذا فقط اذا كان
 حلا للمعادلة (١٩-٦) حيث د ص = ق (س) د س و د س $\neq$ ٠ واذا
 كانت المشتقة الاولى لكل من ق و هـ متصلة فنقول ان (١٩-٥) و
 (١٩-٦) هما معادلتان تفاضليتان مضبوطتان اذا فقط اذا كان

$$(١٩-٧) \frac{\partial ق}{\partial ص} = \frac{\partial هـ}{\partial س}$$

مثال ١

اثبت ان المعادلة التفاضلية التالية مضبوطة :

$$(٣س^٢ص - ٢ص^٣ + ٣) د س + (٣ص - ٦س + ٢) د ص = ٠$$

الحل : بوضع ق (س ، ص) = ٣س^٢ص - ٢ص^٣ + ٣ ،
 هـ (س ، ص) = ٣ص - ٦س + ٢ نجد أن

$$ق س (س ، ص) = ٣س^٢ - ٢ص = هـ ص (س ، ص)$$

ومن ثم تكون (١٩-٧) صحيحة والمعادلة مضبوطة .

(١٩-٨) نظرية :

اذا كانت

$$ق (س ، ص) + هـ (س ، ص) = ٠$$

معادلة تفاضلية مضبوطة فيوجد اقتران ك في س ، ص بحيث أن

$$\frac{\partial ك}{\partial س} = ق \quad و \quad \frac{\partial ك}{\partial ص} = هـ$$

- (١٧) جميع الدوائر التي مراكزها تقع على محور السينات .
 (١٨) جميع القطاعات المكافئة التي تقع رؤوسها وبؤرهما على محور السينات .
 حل المعادلات التفاضلية في التمارين ١٩ - ٢٦ .

$$(١٩) \quad s \text{ و } v - v \text{ و } s = 0$$

$$(٢٠) \quad (١ + v^2) s + (١ + s^2) v = 0$$

$$(٢١) \quad v (١ + s^3) - v^3 + s^2 (١ + v^3) = 0$$

$$(٢٢) \quad s^2 v - v^2 s = v$$

$$(٢٣) \quad s \text{ ظا } v - v^2 \text{ قا } s = 0$$

$$(٢٤) \quad s \text{ ص } - v^2 \text{ ص } e^s \text{ لط } v = 0$$

$$(٢٥) \quad e^v \text{ جا } s \text{ و } s - \text{جتا}^2 s \text{ و } v = 0$$

$$(٢٦) \quad \text{جا } v \text{ جتا } s \text{ و } s + (١ + \text{جا } s^2) v = 0$$

في التمارين ٢٧ - ٣٠ أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التي تحقق الشروط الجانبية المعطاة .

$$(٢٧) \quad v^2 \text{ ص } = 3 \text{ ص } - \text{ص}^3 , s = 3 , v = 1$$

$$(٢٨) \quad \sqrt{s} \text{ ص } - \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{s} \text{ ص} , s = 9 , v = 4$$

$$(٢٩) \quad s \text{ و } v - v (١ + s^2) e^{-v} = 0 , s = 1 , v = 2$$

$$(٣٠) \quad \text{قا } v^2 \text{ و } s - \text{جتا}^2 s \text{ و } v = 0 , s = \frac{\pi}{4} , v = \frac{\pi}{6}$$

٢ — المعادلات التفاضلية المضبوطة : Exact Differential Equations

المعادلات التفاضلية القابلة للفصل التي اعتبرناها في البند السابق هي حالات خاصة من المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الاولى .

$$(١٩ - ٥) \quad \text{ق } (s , v) + \text{هـ } (s , v) \frac{dv}{ds} = 0$$

تمارين :

في كل من التمارين ١ - ٨ برهن على أن ص هو حل للمعادلة التفاضلية المشار إليها .

$$(١) \text{ ص} = \text{ج}_١ \text{e}^{\text{س}} + \text{ج}_٢ \text{e}^{٢\text{س}}, \text{ ص} - \text{ص}^٣ = ٢ \text{ ص} + \text{ص} = ٠$$

$$(٢) \text{ ص} = \text{ج} \text{e}^{-٣\text{س}}, \text{ ص} + \text{ص}^٣ = ٣ \text{ ص} = ٠$$

$$(٣) \text{ ص} = \text{e}^{\text{س}} (\text{ج}_١ \text{جتاس} + \text{ج}_٢ \text{جاس}), \text{ ص} - \text{ص}^٢ = ٢ \text{ ص} + \text{ص} = ٠$$

$$(٤) \text{ ص} = (\text{ج}_١ + \text{ج}_٢ \text{e}^{-٢\text{س}}), \text{ ص} + \text{ص}^٤ + \text{ص}^٤ = ٤ \text{ ص} = ٠$$

$$(٥) \text{ ص} = \text{ج} \text{e}^{-\frac{٢}{٣}\text{س}}, \text{ ٢ س ص}^٣ + \text{٣ س}^٢ \text{ص}^٢ + \text{ص}^٢ = ٠$$

$$(٦) \text{ ص} = \text{ج} \text{e}^{\text{س}^٣}, \text{ س}^٣ \text{ص} + \text{س}^٢ \text{ص} - \text{س}^٣ \text{ص} - \text{ص}^٣ = ٣ \text{ ص} = ٠$$

$$(٧) \text{ ص}^٢ - \text{س}^٢ \text{ص} = \text{س} \text{ص} = \text{ج} \text{e}^{\text{س}}, (\text{س} - \text{ص}^٢) \text{ص} + \text{س}^٢ \text{ص} + \text{ص} = ٠$$

$$(٨) \text{ س}^٢ - \text{ص}^٢ = \text{ج} \text{e}^{\text{ص}}, \text{ ص} \text{ص} = \text{س}.$$

في التمارين ٩ - ١٤ أوجد معادلة تفاضلية حلها العام هو

$$(٩) \text{ ص}^٢ = \text{س}^٣ + \text{ج} \text{e}^{\text{س}}$$

$$(١٠) \text{ س}^٢ \text{ص} + \text{ص}^٢ = \text{ج} \text{e}^{\text{س}}$$

$$(١١) \text{ ص} = \text{e}^{\text{جس}}$$

$$(١٢) \text{ ص} = \text{ج}_١ \text{e}^{\text{س}^٣} + \text{ج}_٢ \text{e}^{\text{س}}$$

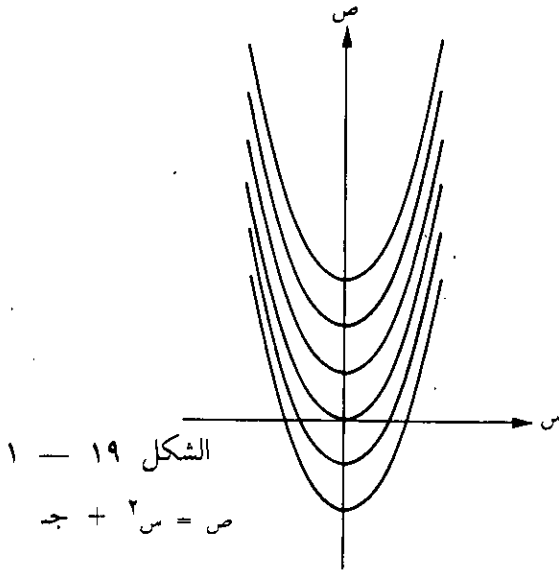
$$(١٣) \text{ ص} = \text{ج}_١ \text{e}^{\text{س}} + \text{ج}_٢ \text{e}^{\text{س}^٢}$$

$$(١٤) \text{ ص} = \text{ج}_١ \text{e}^{\text{س}} + \text{ج}_٢ \text{e}^{٢\text{س}} + \text{ج}_٣ \text{e}^{-\text{س}}$$

في التمارين ١٥ - ١٨ أوجد معادلة تفاضلية لعائلة المنحنيات المشار إليها فيما يلي :

(١٥) جميع المستقيمت غير العمودية المارة بنقطة الاصل .

(١٦) جميع الدوائر التي مراكزها عند نقطة الاصل .



مثال ٥ : أوجد المعادلة التفاضلية لفصلية القطوع المكافئة بالصيغة $ص = ج س^2$ حيث $ج$ عدد حقيقي غير الصفر

الحل : تتكون الفصلية من جميع القطوع المكافئة التي تقع رؤوسها على نقطة الاصل وبؤرتها على محور الصادات . ومن تفاضل المعادلة المعطاة نحصل على

$$ص' = ٢ ج س$$

وبهذا فان

$$ص = ج س^2 \Rightarrow (ج س) = س' = \left(\frac{1}{٢} ص'\right) س$$

وتكون معادلة العائلة التفاضلية هي

$$٢ ص - ص' س = ٠$$

$$\text{وبوضع } ص' = \frac{د ص}{د س} \text{ فنحصل على الصيغة التفاضلية}$$

$$٢ ص - س \frac{د ص}{د س} = ٠$$

وبافتراض ان (ص + ٣) (س - ٤) ≠ ٠ يمكن قسمة الطرفين على هذا المقدار وتمثيل المعادلة بالصيغة التفاضلية (١٩-٣) كما يلي :

$$٠ = \frac{١}{ص + ٣} + \frac{س}{س - ٤}$$

ونحصل بالتكامل على

$$ل٢ = |س - ٤| + |ص + ٣| = ج١ \text{ أو } ج٢$$

$$ل٢ = |س - ٤| (ص + ٣) = ج١$$

ويمكن كتابة هذا ايضا بالصيغة

$$ل٢ = ج١ = |س - ٤| (ص + ٣) = ج٢$$

ويمكن اثبات ان الحل هو

$$(س - ٤) (ص + ٣) = ج$$

لأي عدد ج غير الصفر. بصيغة صريحة تكون

$$(١٩-٤) \text{ ص} = \frac{ج}{س - ٤} - ٣$$

وبما اننا افترضنا (س - ٤) (ص + ٣) ≠ ٠ . فنتحتاج الحالات س = ± ٢ وص = ٣ الى انتباه خاص . ويبين التعويض المباشر أن ص = ٣ - هو حل للمعادلة المعطاة . ولكن اذا كانت س = ± ٢ فان ص تكون غير معرفة . ومن ثم فان (١٩-٤) هي الحل اذا كانت ج أي عدد حقيقي . وبما أن الحلول العامة للمعادلات التفاضلية تحتوي على وسطاء اختيارية فتكون بيانات هذه الحلول فصيلة من المنحنيات Family of curves . فمثلا يقودنا الحل ص = س٢ + ج للمعادلة التفاضلية ص = س الى فصيلة القطاعات المكافئة من النوع الموضح في الشكل (١٩-١) . وبالعكس فلو بدأنا بفصيلة المنحنيات فيقودنا التفاضل الضمني الى معادلة تفاضلية تدعى معادلة الفصيلة التفاضلية .

$$(١٩-٢) \text{ م (س) + ن (ص) } \bar{\text{ص}} = \cdot$$

حيث م ون هما اقترانان متصلان . واذا كان ص = ق (س) حلا فان

$$\text{م (س) + ن (ق (س)) } \bar{\text{ق}} (س) = \cdot$$

واذا كانت ق (س) متصلة فيقودنا التكامل غير المحدود الى ان

$$\left[\text{م (س) } \bar{\text{س}} + \text{ن (ق (س)) } \bar{\text{ق}} (س) \right] \bar{\text{س}} = \text{ج}$$

أو ما يكافئه

$$\left[\text{م (س) } \bar{\text{س}} + \text{ن (ص) } \bar{\text{ص}} \right] \bar{\text{ص}} = \text{ج}$$

والمعادلة الاخيرة هي حل (ضمني) للصيغة (١٩-٢) .

وهناك وسيلة مفيدة لتذكر طريقة الحل هذه وبذلك بكتابة (١٩-٢) كما

يلي :

$$\cdot = \frac{\bar{\text{س}} \text{ص}}{\bar{\text{س}}} \text{ م (س) + ن (ص) } \bar{\text{ص}}$$

وبعد ذلك تغيرها الى الصيغة التفاضلية التالية :

$$(١٩-٣) \text{ م (س) } \bar{\text{س}} + \text{ن (ص) } \bar{\text{ص}} = \cdot$$

ونجد الحل بعد ذلك باجراء عملية التكامل لكل حد . وتسمى المعادلة

التفاضلية (١٩-٢) منفصلة لانه يمكن فصل المتغيرين س وص كما هو مشار

في (١٩-٣) .

$$\text{مثال ٤ : } ٢ \text{ س } \bar{\text{ص}} + ٦ \text{ س} + (٤ - ٢ \text{ س}) \bar{\text{ص}} = \cdot$$

الحل : يمكن كتابة المعادلة المعطاة كما يلي :

$$\cdot = \frac{\bar{\text{س}} \text{ص}}{\bar{\text{س}}} ٢ \text{ س} + (٣ + \text{ص}) \bar{\text{ص}} + (٤ - ٢ \text{ س}) \bar{\text{ص}}$$

ونحصل على حل خاص بتعيين قيم معينة للاوساط . وبعض المعادلات التفاضلية لها حلول لا تكون حالة خاصة من الحل العام . وسوف لا نبحث في هذه في هذا الكتاب وهي تسمى الحلول المنفردة (Singular Solutions)

مثال ٢ : أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $\dot{v} = 2s$ الذي يحقق الشرط ان $v = 5$ عندما تكون $s = 2$

الحل : لنكتب الحل العام للمعادلة $\dot{v} = 2s$ بالصيغة $v = s^2 + c$ وإذا تحقق الشرط المعطى فمن الضروري ان يكون

$$5 = 4 + c \text{ أو } c = 1$$

ومن ثم فالحل الخاص المطلوب هو $v = s^2 + 1$. وتسمى الشروط من النوع المذكور في المثال ٢ بالشروط الجانبية للمعادلة التفاضلية . وإذا احتوى الحل العام على وسيط واحد فيكون شرط جانبي واحد لايجاد حل خاص . وإذا كان يحتوي الحل العام على وسيطين كما في المثال ١ فنحتاج للحل الخاص الى شرطين جانبيين . وتحقق عبارات مشابهة اذا كان هناك أكثر من وسيطين .

والحلول التي اعتبرناها تعطي ص بصراحة بدلالة s . وهناك حلول لمعادلات تفاضلية ضمنية تذكرها ضمناً . وفي هذه الحالة تستعمل التفاضل الضمني لتحقيق الحل كما هو موضح في المثال التالي :

مثال ٣ : أثبت أن $s^3 + s^2v - 2v^3 = c$ هو حل ضمني

للمعادلة التفاضلية $(s^2 - 6v^2) \dot{v} = 3s^2 + v$.

الحل : اذا تحققنا المعادلة الاولى باستعمال $\dot{v} = c(s)$ فمن التفاضل الضمني نحصل على ان

$$3s^2 + 2s\dot{v} + s^2\ddot{v} - 6v^2\dot{v} - 12v\dot{v}^2 = 0 \text{ أو } (s^2 - 6v^2)\dot{v} = 3s^2 + v$$

وهكذا فان $\dot{v} = c(s)$ تحقق المعادلة التفاضلية . وأسهل نوع من المعادلات التفاضلية هو ذلك الذي يمكن كتابته بالصيغة :

$$e_s = s^4 - s^2(s^2) + s(s^4) = s^4 - s^4 + s^5 = s^5$$

$$\frac{S_3}{S_4} = 1 - \frac{S_4}{S_3}$$

وإذا كان Q في (١٩ - ١) اقترانا حدوديا فيكون تعريف درجة المعادلة التفاضلية بأكبر أس مرافق لمشتقة أعلى رتبة $V^{(n)}$. فدرجات المعادلات أعلاه هي ١، ١، ٤، ٢ على الترتيب.

وإذا كان للاقتراح خاصية انه عند تعويض Q (س) بدلا من S في المعادلة التفاضلية يكون التعبير الناتج متطابقة لجميع قيم S في احدى الفترات فيعتبر Q (س) حلا للمعادلة التفاضلية . وكذلك اذا كان J عددا حقيقيا فان احد حلول $S'' = 2S$ هو $Q(S) = S^2 + C$

لأنه بتعويض ق (س) بدلا من ص نحصل على المتطابقة $ص = ٢$ س .
ونسمي س^٢ + ج بالحل العام للمعادلة التفاضلية $ص = ٢$ س لأن كل حل لها
هذه الصيغة .

مثال ۱ : اذا كان J_1 ، J_2 عددين حقيقيين فأثبت ان .

$$\text{ق (س)} = \text{ج}_1 e^{\text{س}} + \text{ج}_2 e^{-\text{س}} \text{ هو حل}$$

• للمعادلة ص - ٢٥ ص =

الحل : ق (س) = ٥ ج١ ٥ س - ٥ ج٢ ٥ س

$$e^+s = 25 \text{ جی} \quad e^+s + 25 \text{ جی} \quad e^-s = 25 \text{ ق (س)}$$

فنهحصل علی ان

ق (س) - ۲۵ ق (س) = ۰

وهذا يثبت ان ق (س) حل .

ويسمى الحل المعطى في المثال ١ بالحل العام للمعادلة

ص - ٢٥ ص = ٠ . لاحظ أن رتبة هذه المعادلة التفاضلية ٢ ويحتوي الحل العام على وسيطين اختياريين ج_١ ، ج_٢ .

والتعريف المحدود للحل العام يشتمل على مفهوم الاوساط المستقلة وسنتركه للمسافات متقدمة . ويمكن اثبات ان الحلول العامة للمعادلات التفاضلية التي رتبها تحتوي على n من الاوساط المستقلة $ج_١, ج_٢, \dots, ج_n$.

الفصل التاسع عشر

المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية هي المعادلة التي تشمل على مشتقات أو تفاضلات . وإذا حدث ان مشتقات الاقتران في متغير واحد فقط فتسمي المعادلة التفاضلية العادية ordinary . وتحتوي معادلة التفاضل الجزئي partial على مشتقات جزئية . وهدفنا الاول في هذا الفصل تقديم طرق لحل انواع معينة اساسية من المعادلات التفاضلية . وليس المراد من مناقشتنا التعمق في الموضوع بل ان تكون كمقدمة لهذا الحقل الواسع والهام من حقول الرياضيات .

١ — مقدمة :

تسمى المعادلة التي تأخذ الصيغة :

$$(1-19) \quad Q(s, \dot{s}, \ddot{s}, \dots, s^{(n)}) = 0$$

حيث Q اقتران في $n + 2$ من المتغيرات $s^{(r)}$ ترمز للمشتقة الرائية للمتغير s بالنسبة الى s ، بالمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة n . وفي الاتي امثلة على المعادلات التفاضلية العادية من الرتب ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ على الترتيب .

$$\ddot{s} = 2s$$

$$0 = \frac{s^2}{s^2} + s^2 \left(\frac{s}{s} \right)^2 - 10s$$

(٢٥) أوجد قيمة $\left[\begin{array}{c} \text{س ص ع د هـ} \\ \text{هـ} \end{array} \right]$ حيث هـ هو ذلك الجزء من المستوى ع = س +

ص الذي يقع فوق المنطقة المثلثة الواقعة في المستوى س ص ورؤوسها (٠ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ١) ، (٠ ، ٢ ، ٠) ،

(٢٦) أوجد قيمة $\left[\begin{array}{c} \text{س}^2 \text{ع}^2 \text{د هـ} \\ \text{هـ} \end{array} \right]$ حيث هـ هو النصف العلوي من الاسطوانة ص^٢ +

ع^٢ = ٤ المحصورة بين س = ٠ ، س = ١ .

(٢٧) لتكن غ هي المنطقة المحصورة بين الاسطوانة س^٢ + ص^٢ = ١ والمستويين ع = ٠ ، ع = ١ فإذا كان ق = س^٣ هـ + ص^٣ و + ع^٣ فاستعمل نظرية التباعد لايجاد

$\left[\begin{array}{c} \text{ق} \cdot \text{ع} \text{د هـ} \\ \text{هـ} \end{array} \right]$ حيث هـ سطح غ ، ع هو متجه وحدة عمودي

خارج على هـ

(٢٨) حقق نظرية التباعد اذا كان ق = ٢ س هـ + ص و - ع و كان هـ هو سطح متوازي المستطيلات المحصور بين المستويات س = ± ١ ، ص = ± ٢ ، ع = ± ٣ .

حقق نظرية ستوكس في ق ، هـ في التمرينين ٢٩ ، ٣٠ .

(٢٩) ق = ص^٢ هـ + ٢ س و + ٥ ص ز ، هـ هي نصف الكرة ع = $\frac{1}{4} (٢ - ص^2)$

(٣٠) ق = (س + ص) هـ + (ص + ع) و + (س + ع) ز ، هـ هي المنطقة المحصورة داخل المثلث الذي رؤوسه (٠ ، ٠ ، ١) ، (٠ ، ١ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٠) . (١ ، ٠ ، ٠) .

(١ ، ١ - ، ١) فما الشغل الذي تبذله قَ اذا دارت نقطة تأثيرها حول م مرة واحدة في اتجاه تزايد اللوحات السفلية P.

اثبت ان المتكاملين الخطيين في التمرينين ١٧ ، ١٨ مستقلان عن المسار ثم جد قيمة كل منهما :

$$\left. \begin{array}{l} (٣ ، ٢) \\ (س + ص) د س + (س + ص) د ص \\ (١ - ، ١) \end{array} \right\} (١٧)$$

$$\left. \begin{array}{l} (٠ ، ٠ ، ٠) \\ (٨ س^٣ + ع^٣) د س - ع^٣ د ص + (٢ س ع - \\ (٣ ، ١ ، ٢) \end{array} \right\} (١٨)$$

— (٣ ص) د ع

$$(١٩) \text{ اذا كان ق (س ، ص ، ع) } = ٢ س^٢ ص^٢ هـ + ٢ (س^٢ ع^٢ ص +$$

ص ظتاع) و- ص^٢ فتاع ز فاثبت ان $\left[\begin{array}{l} \text{ق} \\ \text{ق} \end{array} \right]$ و- مستقل عن المسار ثم أوجد

اقترانا كامنا ق في ق .

استعمل نظرية غرين لايحاد قيمة التكامل الخطي $\oint (س ص د س + (س^٢ + ص^٢) د ص$ اذا كان م هو المنحنى الموصوف في كل من التمارين ٢٠ - ٢٢ .

(٢٠) م هو المنحنى المغلق المحدود بالمعادلتين $ص = س^٢$ ، $ص - س = ٢$ من (١ - ، ١) الى (٢ ، ٤) .

(٢١) م هو المثلث الذي رؤوسه (٠ ، ٠) ، (٠ ، ١) ، (١ ، ٠) .

(٢٢) م هي الدائرة التي معادلتها $س^٢ + ص^٢ = ١$

(٢٣) أوجد بع ق وجع ق اذا كان ق (س ، ص ، ع) = $س^٣ ص^٤ هـ + س ص ع^٢ و + س^٢ ص^٢ ز$.

(٢٤) اذا كان ق ، ج اقتراين قياسيين بثلاثة متغيرات فاثبت ان

$$\nabla \cdot (\text{ق} \nabla \text{ج}) = \text{ق} \nabla^٢ \text{ج} - \text{ق} \nabla \cdot \text{ج} .$$

(٤) $\bar{ق} (س، ص، ع) = \nabla (س^2 + ص^2 + ع^2) \frac{1}{3}$.
 (٥) أوجد حقلا متجها محافظا ذا بعدين له الاقتران الكامن $ق (س، ص) = ص^2$ ظا س .

(٦) أوجد حقلا محافظا ذا ثلاثة ابعاد له الاقتران الكامن $ق (س، ص، ع) = لط$ (س + ص + ع) .

اعطيت النقطتين $P (١، ٠)$ ، $B (-١، ٤)$ والمطلوب ان تجد قيمة التكامل الخطي $\int_{\gamma} ص^2 دس + س ص دص + ص دس$ على م المعرفة في كل من التمارين ٧-١٠ .

(٧) م معرفة وسيطيا بالمعادلتين $س = ١ - ت$ ، $ص = ت^2$ ، $٠ \leq ت \leq ٢$

(٨) م تتكون من القطعة الخطية من P الى $J (-١، ٠)$ والقطعة من J الى B .

(٩) م هي القطعة الخطية من P الى B

(١٠) م هي المنحنى $ص = ٢ - ٢س^3$ من P الى B

(١١) أوجد قيمة $\int_{\gamma} س ص دس + س ص دص + ص دس$ حيث م هي ذلك الجزء من منحنى $ص = س^4$ الواقع بين $(١، ٠)$ و $(٢، ١٦)$.

اعطيت $P (٠، ٠، ٠)$ ، $B (٢، ٤، ٨)$ والمطلوب ان تجد

$\int_{\gamma} س دس + (س + ص) دص + ص دس + (س + ص + ع) دع$ علما بان م كما هي موصوفة بالتمارين ١٢-١٤ .

(١٢) م تتكون من ثلاث قطع خطية الاولى توازي محور $ع$ والثانية توازي محور $س$ والثالثة توازي محور $ص$.

(١٣) م تتكون من القطعة الخطية من P الى B .

(١٤) م اعطيت وسيطيا بالمعادلات $س = ت$ ، $ص = ت^2$ ، $ع = ت^3$.

(١٥) اذا كان $\bar{ق} (س، ص) = (س + ص) هـ + (س - ص) و$ فجد قيمة

$\int_{\gamma} \bar{ق} . د\bar{ر}$ حيث م معطاة بالمعادلتين $س = جتات$ ، $ص = جات$ ، $٠ \leq ت \leq \pi$.

(١٦) في النقطة $(س، ص، ع)$ قوة $\bar{ق}$ في ابعاد ثلاثة معرفة بالمعادلة $\bar{ق} (س، ص، ع)$

$= (س ص هـ + ص ع و + س ع ز)$. فاذا كان م المربع الذي رؤوسه P

$(١، ١، ١)$ ، $P (١، ١، -١)$ ، $P (-١، ١، -١)$ ، $P (-١، -١، ١)$ ، $P (١، -١، ١)$ ،

- فاستعمل (١٨ - ٥٤) (ب) لاثبات ان ق محافظ .
- (١٠) اذا كان s ، s لها مشتقات جزئية متصلة وبحققان معادلات كوشي وريمان
- (١٨ - ٥٥) فاثبت ان s يحقق معادلة لابلاس .
- (١١) ليكن C متجه الوحدة العمودي الخارج عند اي نقطة P على سطح الكرة s فاذا
- كان C له مشتقات اولى متصلة داخل s وعلى سطحها فاثبت ان $\left[\int_C \right] s$
- C ع و $s = 0$ (ب) باستعمال نظرية التباعد ، (ب) باستعمال نظرية ستوكس .

٩ — تمارين مراجعة :

شفهية :

عرف او ناقش ما يلي :

(١) الحقل المتجه	(٢) الاقتران المتجه
(٣) الاقتران القياسي	(٤) حقل التوزيع العكسي
(٥) الحقل المتجه المحافظ	(٦) التكامل الخطي
(٧) تطبيقات التكامل الخطي	(٨) الاستقلال عن المسار
(٩) نظرية غرين	(١٠) التباعد
(١١) الجعدة	(١٢) التكامل السطحي
(١٣) نظرية التباعد (نظرية غاوس)	(١٤) نظرية ستوكس

كتابي :

في التمارين ١ - ٤ اعط وصفا هندسيا للحقل المتجه

- (١) $C = (s, s) = 2s\bar{h} + s\bar{w}$
- (٢) $C = (s, s, s) = s\bar{h} + s\bar{w} + s\bar{z}$
- (٣) $C = (s, s, s) = \bar{z} - (s, s, s)$

تمارين :

في كل من التمارين ١-٤ حقق نظرية ستوكس في Q ، سه المعطيين :

$$(١) \quad Q = ص^٢ هـ + ع^٢ و + س^٢ ز ، سه هو الجزء من المستوى $س + ص + ع = ١$ الواقع في الثمن الاول .$$

$$(٢) \quad Q = ص^٢ هـ - ع^٢ و + و^٢ ز ، سه جزء المكافئ $ع = ٤ - س - ص^٢$ الواقع داخل الاسطوانة $س^٢ + ص^٢ = ١$.$$

$$(٣) \quad Q = ع هـ + س و + و ز ، سه هو نصف الكرة $ع = (٢ - س - ص^٢)^{١/٢}$.$$

$$(٤) \quad Q = س^٢ هـ + ص^٢ و + ع^٢ ز ، سه هو الجزء من المخروط $ع = (س^٢ + ص^٢)^{١/٢}$ المقطع بالمستوى $ع = ١$.$$

$$(٥) \quad \text{اذا كان } Q = (٣ - جاس) هـ + (س + ص) و + (ص - جتا ع) ز ،$$

فاستعمل نظرية ستوكس لايحاذ قيمة $\oint_C$. و $\vec{r}$ حيث $م$ هو المنحنى :

$$س = جتا ن ، ص = جانا ، ع = ١ ، ٠ \leq ن \leq ٢\pi$$

$$(٦) \quad \text{اذا كان } Q = ص ع هـ + س ص و + س ع ز \text{ فاستعمل نظرية ستوكس لايحاذ قيمة}$$

$$\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{r} \text{ حيث } م \text{ هو المربع الذي رؤوسه } (٠, ٠, ٠), (٢, ٠, ٠), (٠, ١, ٠),$$

$$(٢, ١, ٠), (٢, ١, ١), (٠, ١, ١), (٠, ٠, ١) .$$

برهن على المتطابقات المذكورة في التمرينين ٧ ، ٨ على اعتبار ان $م$ ، $س$ يحققان شروط نظرية ستوكس :

$$(٧) \quad \oint_C \nabla \cdot ج = \vec{r} \cdot \left[\int_S (\Delta \times ق) \Delta ج \right] . ع د سه ، حيث ق ، ج اقترانان قياسيان .$$

$$(٨) \quad \oint_C ج \times \vec{r} = \vec{r} \cdot ج = ٢ ج . \left[\int_S ع د س ، حيث ج متجه ثابت .$$

$$(٩) \quad \text{اذا كان } Q = (س ، ص ، ع) = ص هـ + (س + ص) و + (١ + ص) ع ز$$

وفي الرياضيات المتقدمة وتطبيقاتها نجد من المفيد ان ندرس ازوجا من الحقول المتجهة مثل $\bar{Q}$ ، $\bar{C}$ من النوع :

$\bar{Q} = (s, v) = (s, v) + (h, v) + (s, v)$ و
 $\bar{C} = (s, v) = (s, v) - (h, v) - (s, v)$ و
 حيث s, v اقترانان ذوامشتقات جزئية متصلة . لاحظ ان $\bar{Q}$ ، $\bar{C}$ متعامدان عند كل نقطة لان $\bar{Q} \cdot \bar{C} = s \cdot s - v \cdot v = 0$.
 اضف الى ذلك بناء على ما سبق ان $\bar{Q}$ ، $\bar{C}$ يكونان محافظين اذا وفقط اذا كان :

$$(18-55) \quad \frac{\partial s}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial v} , \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial v}{\partial s}$$

وهذان الشرطان هما معادلتا كوشي وريمان الشهيرتان اللتان نعول عليهما بكثرة في دراسة المتغيرات المركبة .

ونرى من (18-55) ان

$$\frac{\partial^2 s}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial v} = \frac{\partial^2 v}{\partial v \partial s} = \frac{\partial^2 s}{\partial v^2}$$

$$\therefore \text{فادن } \nabla^2 s = \frac{\partial^2 s}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial v^2}$$

$$\therefore \text{وبالمثل } \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial v^2}$$

فاذن s, v يحققان معادلة لابلاس فيها توافقيان (انظر (18-34)) .

اننا ، واقولها جادا ، انما خدشنا السطح في التطبيقات على نظريات غرين وغاوس وستوكس فاذا رغب القاريء في مزيد من المعرفة عن هذه النظريات وتطبيقاتها فليرجع الى كتب في تحليل المتجهات او في كتب متقدمة في الفيزياء او الهندسة .

وإذا كان $\vec{C} = 0$ في دكانت الدورة حول كل منحنى مغلق صفرا (انظر (١٨ - ٥١)). وهذا يعني أيضا ان دوران $\vec{C}$ حول أي متجه وحدة عمودي $\vec{C}$ هو أيضا صفر. لهذا توصف الحقول المتجهة التي تحقق الشروط المدرجة في (١٨ - ٥٤) بأنها لا دورانية (irrotational)

مثال ٢ : اثبت انه اذا كان $\vec{C} = (s, v, e)$ = (٣س^٢ + ٢ص^٢) $\vec{e}$ + ٢سص^٢ - ٣ع^٢ $\vec{z}$ كان $\vec{C}$ محافظا

$$\text{الحل : بما ان } \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{z} & \vec{v} & \vec{e} \\ \frac{\partial}{\partial e} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial s} \\ 2s^2 - 3e^2 & 2sv & 3s^2 + 2v^2 \end{vmatrix}$$

$$= (0-0) \vec{e} + (0-0) \vec{v} + (2v - 2s) \vec{z} = 0$$

فيكون $\vec{C}$ محافظا استنادا الى (١٨ - ٥٤) (ب)

ان أي حقل متجه ذي بعدين مثل $\vec{C} = (s, v)$ = م (س ، ص) $\vec{e}$ + ن (س ، ص) $\vec{v}$ ويمكن اعتباره حالة خاصة من حقل ذي ثلاثة ابعاد فيه المركبة الثالثة صفر. ففي هذه الحالة يكون :

$$\vec{z} \left(\frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial s} \right) = \begin{vmatrix} \vec{z} & \vec{v} & \vec{e} \\ \frac{\partial}{\partial e} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial s} \\ 0 & n & m \end{vmatrix} \vec{v} \times \vec{v}$$

فيستج من (١٨ - ٥٤) ان $\vec{C}$ يكون محافظا ، أي (ما يكافيء ذلك) ان

$\vec{C} = \vec{C}_m$ وتر يكون مستقلا عن مساره ، اذا فقط اذا كان

$$\frac{\partial m}{\partial v} = \frac{\partial n}{\partial s}$$

ويمكن استعمال نظرية ستوكس لاثبات الحقيقة الهامة التالية عن الحقول
المتجهة :

(١٨-٥٣) **نظرية :** اذا كان $\vec{v}$ (س ، ص ، ع) له مشتقات جزئية متصلة على
طول منطقة D متصلة ومفتوحة فان $\text{جمع } \vec{v} = 0$ في D اذا وفقط اذا كان

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ لكل منحنى م في } D \text{ مغلق بسيط ممهّد القطع.}$$

البرهان : اذا كان $\text{جمع } \vec{v} = 0$ فحسب (١٨-٥٠) يكون :

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ جمع } \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ في } \partial D$$

وبالعكس : لنفرض ان التكامل الخطي المذكور صفر لكل D . فاذا كان $\text{جمع } \vec{v} \neq 0$ صفراً عند نقطة ما N فيقتضي الاتصال ان هنالك منطقة جزئية من D تحوى N وعلى طولها يكون $\text{جمع } \vec{v} = 0$ فاذا اخذنا في هذه المنطقة الجزئية قرصاً
دائرياً كالمبين بالشكل ١٨-٢٤ حيث $\vec{v} \cdot d\vec{r}$ يوازي $\text{جمع } \vec{v}$ فعندها يكون :

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ جمع } \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ في } \partial D$$

وهذا تناقض . فاذن $\text{جمع } \vec{v} = 0$ ، على جميع D
ولقد سبق ان اشرنا الى ان تلاشي التكامل الخطي $\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ حول كل
منحنى M مغلق مناسب يكافئ الاستقلال عن المسار . فاذا ربطنا هذه الحقيقة
مع توسيع (١٨-١٥) على ثلاثة ابعاد ينتج انه تحت شروط استمرارية كافية
في المنطقة D يكون المتجه $\vec{v}$ (س ، ص ، ع) محافظا اذا وفقط اذا تحقق على
جميع D اي من الشروط التالية المتكافئة :

$$(A) \quad \vec{v} = \nabla \phi$$

$$(B) \quad \text{جمع } \vec{v} = 0$$

$$(C) \quad \oint_{\partial D} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ مستقلاً عن المسار.}$$

ولان جمع ق. ع. يتخذ قيمته العظمى عندما يكون ع موازيا لجعدة ق ينتج ان اتجاه جمع ق عند ن هو الاتجاه الذي فيه تكون الدورة حول محيط قرص عمودي على جمع ق في قيمتها العظمى اثناء تقلص القرص متحولا الى نقطة . واحيانا يسمى جمع ق. ع دوران ق حول ع لان له علاقة بميل الحقل المتجه للدوران حول ن ولكي نربط على نحو آخر بين جمع والدوران ننظر في الحالة الخاصة عندما يدور الحقل بانتظام حول محور كما لو كان جسما صلبا . فاذا ركزنا انظارنا على نقطة ما ن في السائل ينجم عندنا وضع كالمبين بالشكل ١٥ - ٩ حيث $\vec{r} = \vec{s} + \vec{v} + \vec{e}$ ع ز هو متجه الوضع للنقطة ن ، $\omega_1 = \omega$ $\vec{v} + \omega_2 + \omega_3$ ز هي السرعة الزاوية (الثابتة) . فاذا رمزنا للسرعة $\frac{d\vec{r}}{dt}$ بالرمز ق فعندها ، كما في البند ٢ من الفصل ١٥ ، يكون :

$$\vec{c} = \vec{r} \times \vec{\omega} = (\vec{e} - \vec{v}) \times \vec{\omega}_1 + (\vec{v} - \vec{s}) \times \vec{\omega}_2 + (\vec{s} - \vec{e}) \times \vec{\omega}_3$$

ومن (١٨ - ٣٠) يكون :

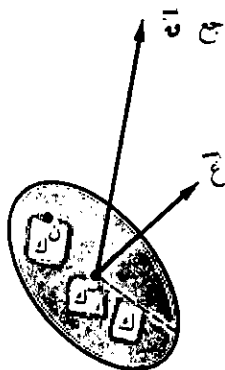
$$\left| \begin{array}{ccc} \vec{e} & \vec{v} & \vec{s} \\ \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{e} \times \vec{\omega}_1 & \vec{v} \times \vec{\omega}_2 - \vec{s} \times \vec{\omega}_1 & \vec{s} \times \vec{\omega}_3 - \vec{e} \times \vec{\omega}_2 \\ -\vec{s} \times \vec{\omega}_3 & & \end{array} \right| = \vec{c}$$

ولان $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$ متجه ثابت ينتج ان جمع ق = $\vec{r} \times \vec{\omega} = \vec{e} \times \vec{\omega}_1 + \vec{v} \times \vec{\omega}_2 + \vec{s} \times \vec{\omega}_3$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

اي ان مقدار جمع ق هو ضعف السرعة الزاوية واتجاهه على طول محور الدوران .

ن نقطة ما فليكن S_N قرصا دائريا نصف قطره L ومركزه N وليكن M_N محيط S_N (انظر الشكل ١٨ - ٢٤) . فباستعمال (١٨ - ٥٠) ونظرية القيمة الوسطى مطبقة على التكامل المزدوج ينتج :



الشكل ١٨ - ٢٤

$$(١٨ - ٥١) \quad \oint_{M_N} [C \cdot T \text{ و } S_N] = \iint_{S_N} [C \cdot E \text{ و } S_N] \quad \text{جمع ق} \cdot \text{ع} \cdot [N \text{ و } \pi \text{ و } L]$$

حيث N هي نقطة ما في S_N . فيكون جمع ق . ع $[N \text{ و } \pi \text{ و } L]$

$$= \frac{1}{\pi \cdot L^2} \left[C \cdot T \text{ و } S_N \right]_{M_N}$$

فاذا جعلنا $L \rightarrow 0$ فان $N \rightarrow N$ ، واذن :

$$(١٨ - ٥٢) \quad \text{جمع ق} \cdot \text{ع} \cdot [N \text{ و } \pi \text{ و } L] = \frac{1}{\pi \cdot L^2} \left[C \cdot T \text{ و } S_N \right]_{M_N}$$

واذا كان C حقل السرعة لائل ما فان التكامل الخطي في (١٨ - ٥١) يسمى الدورة حول M_N وهو يقيس متوسط ميل الائل للتحرك او الدوران حول المنحنى . ومن (١٨ - ٥٢) ينتج ان جمع ق . ع $[N \text{ و } \pi \text{ و } L]$ يعلمنا عن حركة الائل حول محيط قرص دائري عمودي على E اثناء تقلص القرص حتى يصير نقطة

$$= \left[\begin{matrix} 4س + 6ص + 4(س + ص) \end{matrix} \right]_ط$$

حيث P هي منطقة في مستوى S ص تحدها دائرة نصف قطرها 3 ومركزها نقطة الاصل. فباستعمال الاحداثيات القطبية يصير :

$$\left[\begin{matrix} \pi^2 \\ 3 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right] = \text{ج. ق. ع. دس} = (4 \text{ جتا } 0 + 6 \text{ جا } 0) + 2 \text{ مر}$$

0 3 55

$$\left. \begin{aligned} \pi_{36} &= \theta_5 (18 + \theta_{54} + \theta_{36}) \end{aligned} \right\} = \pi_2$$

والتكامل الخطي في (١٨-٥٠) يمكن ان يكتب على النحو

$$\phi_{\bar{c}. \bar{u}} = \phi_{\bar{c}^3 \bar{u}^2 \bar{s}} + \phi_{\bar{c}^4 \bar{s}} + \phi_{\bar{c}^2 \bar{s}^2 \bar{u}} + \phi_{\bar{c}^2 \bar{s} \bar{u}^2}$$

ولان ع = ٠ على طول م ، فهذا يصير $\phi = \overline{ق} . \overline{س} = \phi$ ، س و ص

فباستعمال المعادلتين الوسيطيتين $s = 3$ جتا ن ، $v = 3$ جان تعبيرا عن m ينتج :

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ \pi \end{matrix} \right\} = \overline{r} \cdot \overline{q} = 36 \text{ جتا } 2 \text{ ن و ن}$$

$$\pi_{36} = \pi_5 (1 + \pi_2) \} 18 =$$

ويمكن ان نستعمل نظرية ستوكس للحصول على تفسير فزيائي لجمعة ق على غرار ذلك الاسلوب الذي به استعملنا نظرية التباعد لتفسير بع ق . فاذا كانت

ق. وتر حيث $\bar{r}$ هو المتجه الموجب في النقطة (س ، ص ، ع) على م. ولكي ننظر في سطوح مفتوحة اعم من ذلك المين بالشكل ١٨ - ٢٣ يلزم ان ننظر في ما يسمى بالسطح المعدول (oriented) $\bar{r}$ وان نعرف الاتجاه الموجب على م بشكل ملائم. وبرهان نظرية ستوكس صعب وهو لا يورد في دروس اولية في التفاضل والتكامل فاذا شاء القاريء فليرجع الى كتب اعلى للبحث عن برهان (١٨ - ٥٠).

مثال ١ : ليكن $\bar{r}$ ذلك الجزء من مخطط $\bar{r} = 9 - 2\bar{s} - 3\bar{v}$ حيث $\bar{r} \leq 0$. وليكن م هو مقطع $\bar{r}$ من محور س ص ، فحقق نظرية ستوكس متخذاً $\bar{r}$ = $3\bar{e} + 4\bar{s} + 2\bar{v}$

الحل : هذا السطح هو نفسه الذي درسناه في المثال ٢ من البند ٦ (انظر ايضا الشكل ١٦ - ٥) ، ولقد وجدنا ان

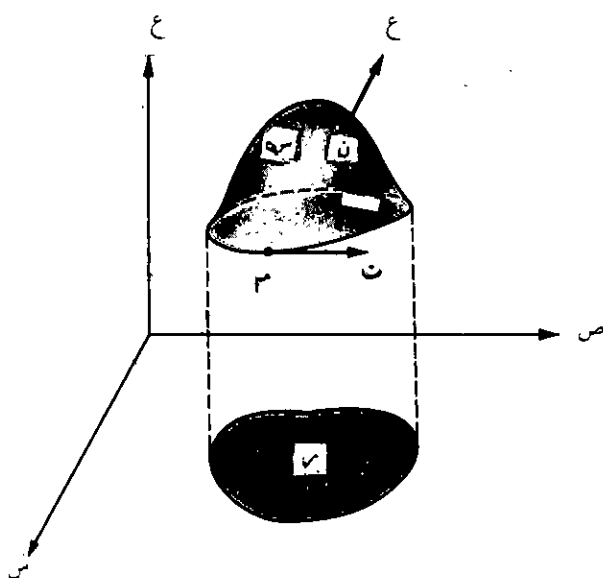
$$\bar{r} = \frac{2\bar{s} + 4\bar{v} + 3\bar{e}}{\sqrt{1 + 4 + 9}}$$

فحسب (١٨ - ٣٠) يكون :

$$\bar{r} = 2\bar{e} + 3\bar{v} + 4\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{r} & \bar{v} & \bar{s} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{e}} & \frac{\partial}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \text{جع ق} =$$

$$\text{فيكون } \bar{r} = \frac{4 + 6\bar{v} + 4\bar{s}}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \bar{r}$$

وهذه النتيجة يمكن مدها حتى تشمل منحني م مغلقا بسيطا ممهد القطع ذا ثلاثة ابعاد يغلف سطح مفتوحا م. والمخطط المين بالكشل ١٨ - ٢٣ يبين حالة خاصة فيها م هو م ورسم المعادلة $E = C(S, S)$ حيث ق له مشتقات اولى جزئية متصلة ، م هو مسقط م على المستوى س س وهو منحني يحصر منطقة ط من النوع الذي يتمشى مع نظرية غرين . وفي الشكل يمثل ع عمودي وحدة علويا على م . وناخذ الاتجاه الموجب على م مطابقا للاتجاه الموجب على م ، والرمز $\bar{C}$ يمثل متجه وحدة يمس م . فاذا كان $\bar{C}$ اقترانا متجها له مشتقات جزئية في منطقة تحوي م فعندها تتحقق لنا النظرية التالية المنسوبة الى ج ستوكس الرياضي الفزيائي الانجليزي (١٨١٩ - ١٩٠٣) .



الشكل ١٨ - ٢٣

(١٨ - ٥٠) نظرية ستوكس :

$$\oint_C \bar{C} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{[جمع ق . ع]} \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}$$

وهذا ما نعبر عنه بقولنا ان التكامل الخطي لمركبة ق المماسه ماخوذا على طول م مرة واحدة في الاتجاه الموجب يساوي التكامل السطحي للمركبة العمودية لـ جعدة ق على م . وبالطبع يمكن ان نكتب التكامل الخطي بالصيغة

(ارشاد : استعمل (١٨-٤٦) واجعل $\bar{Q} = Q \nabla J$)

(١٢) اذا كان Q ، J كما في التمرين ١١ فاثبت ان $\int_G (Q \nabla J - J \nabla Q) = 0$

$$\int_G (Q \nabla J - J \nabla Q) = 0$$

(ارشاد : استعمل مطابقة التمرين ١١ بالاضافة الى المطابقة التي تنشأ من تبادل Q ، J).

(١٣) اذا كان $\bar{Q}$ حقلا متجهها محافظا فيه Q اقتران كامن وكان $\bar{Q} = 0$ فاثبت ان :

$$\int_G \bar{Q} \cdot \bar{Q} = \int_G Q \cdot Q$$

(١٤) اذا كان $\bar{r} = s \bar{h} + v \bar{w} + e \bar{z}$ وكان J حجم G فاثبت ان

$$J = \frac{1}{3} \int_G \bar{r} \cdot \bar{r}$$

(١٥) اذا كان $\bar{Q}$ له مشتقات جزئية ثانية متصلة فاثبت ان

$$\int_G \bar{Q} \cdot \bar{Q} = 0$$

(١٦) اذا كان $\bar{t}$ متجهها ثابتا فاثبت ان $\int_G \bar{t} \cdot \bar{t} = 0$

٨ — نظرية ستوكس (Stoke's Theorem)

في (١٨-٣٣) عبرنا عن نظرية غرين بدلالة المتجهات على النحو التالي :

$$\int_C \bar{Q} \cdot d\bar{r} = \int_P \bar{Q} \cdot \nabla \bar{Q} \cdot \bar{r} \bar{z} \text{ حيث ان المنحنى المستوى مـ هو محيط } P$$

(٢) $\bar{C} = \text{ص}^3 \text{هـ} - \text{س ص و} + \text{س قو ظا ص ز} ، \text{س هـ هو سطح المنطقة المحدودة}$
 بالمستويات الاحداثية والمستوى س + ص + ع = ١ .

(٣) $\bar{C} = (\text{س}^2 + \text{جا ص ع}) \text{هـ} + (\text{ص} - \text{س}^3 \text{هـ}) \text{و} + \text{ع}^2 \text{ز} ، \text{س هـ هو سطح}$
 المنطقة المحدودة بالمنحنيات $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{ع} ، \text{س} + \text{ع} = ٢ ، \text{ع} = ٠$

(٤) $\bar{C} = ٢ \text{س ص هـ} + \text{ع جتا ز س و} + (\text{ع}^2 + \text{ص جا}^2 \text{س}) \text{ز} ، \text{س هـ هو سطح}$
 المنطقة المحدودة بالمنحنيات $\text{ع} = \text{س}^2 + \text{ص}^2 ، \text{ع} = ٩$.

في التمارين ٥ - ٨ حقق (١٨ - ٤٦) في المتجه $\bar{C}$ والسطح س هـ المعطيين

(٥) $\bar{C} = \text{س هـ} + \text{ص و} + \text{ع ز} ، \text{س هـ هو السطح س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 = ١٢$.

(٦) $\bar{C} = \text{س}^2 \text{هـ} + \text{ص}^2 \text{و} + \text{ع}^2 \text{ز} ، \text{س هـ هو سطح المكعب المحصور بين المستويات}$
 الاحداثية والمستويات $\text{س} = ١ = \text{ص} = \text{ع}$.

(٧) $\bar{C} = (\text{س} + \text{ع}) \text{هـ} + (\text{ص} + \text{ع}) \text{و} + (\text{س} + \text{ص}) \text{ز} ، \text{س هـ هو سطح المنطقة} :$

$\text{غ} = \{ (\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع}) ، (\text{ع} + \text{ص}^2 ، \text{ع} + \text{ص}^2 ، ١) ، (٠ ، ١ ، \text{س} \geq ٢) \}$

(٨) $\bar{C} = | \text{ر} | \text{ر}^2 \text{حيث} \text{ر} = \text{س هـ} + \text{ص و} + \text{ع ز} ، \text{س هـ هو السطح س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 = ١٢$.

(٩) يقال ان الحقل المتجه $\bar{C}$ ملتف (solenoidal) اذا كان

$\bar{C} = \text{ع د س هـ} = ٠$ لكل سطح مغلق من النوع الذي درسناه مع نظرية

التباعد . أثبت ان $\bar{C}$ يكون ملتفاً اذا وفقط اذا كان $\text{مج ق} = ٠$

(١٠) استعمل نظرية التباعد لاثبات انه اذا كان الاقتران القياسي $\text{ق له مشتقة جزئية ثانية}$

متصلة كان $\bar{C} = \text{ع د س هـ} = \text{ع د س هـ} \text{حيث د ق هي مشتقة ق}$
 غ

باتجاه العمودي $\bar{C}$ الخارج من السطح .

في التمارين ١١ - ١٦ اعتبر ان س ، غ يحققان شروط نظرية التباعد

(١١) اذا كان ق ، ج اقترانين قياسيين لهما مشتقة جزئية ثانية متصلة فاثبت ان

$\bar{C} = \text{ع د س هـ} = \text{ع د س هـ} \text{حيث د ق هي مشتقة ق}$
 غ

غ (س^۲ + س^۳) و ح

فإذا رجعنا الى الشكل ١٨-٢٢ واستعملنا (١٧-٣٨) نجد ان هذا التكامل يساوي

٢٤ - س٢ - ٥ - ع
٤ س٢ و ص و ع و س

[illegible]

$$= \frac{[{}^2_{20} s - {}^2_{21} e]({}^2_{20} s)}{{}^2_{20} s - {}^2_{21} e}$$

$$= \frac{1}{2} (48s^2 - 4s^3 - 2s^4) \text{ و } s$$

$$30 / 87.8 =$$

تمارين :

في التمارين ١ - ٤ استعمل نظرية التباعد لايجاد

هو عمودي وحدة خارجي للسطح σ

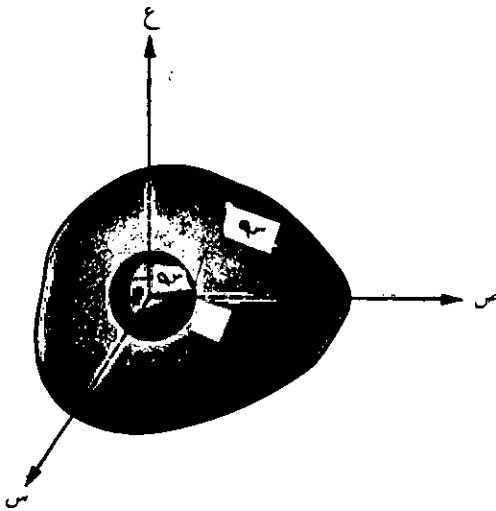
(١) $ق = ص ج ا س هـ + ص^٢ ع و + (س + ع^٣) ز$ ، $س$ هو السطح للمنطقة
بالمستويات $س = ١ \pm$ ، $ص = ١ \pm$ ، $ع = ١ \pm$

مثال ٣ : اذا كان غ هو المنطقة المحدودة بالاسطوانة $ع = ٤ - س^٢$ والمستوى $ص + ع = ٥$ ومستويي $س$ $ص$ ، $س$ $ع$ وكان $\bar{ع} = < جتا \alpha ، جتا \beta ، جتا \gamma >$ هو عمودي وحدة خارج من السطح $س$ للمنطقة غ ، فما قيمة التكامل السطحي التالي :

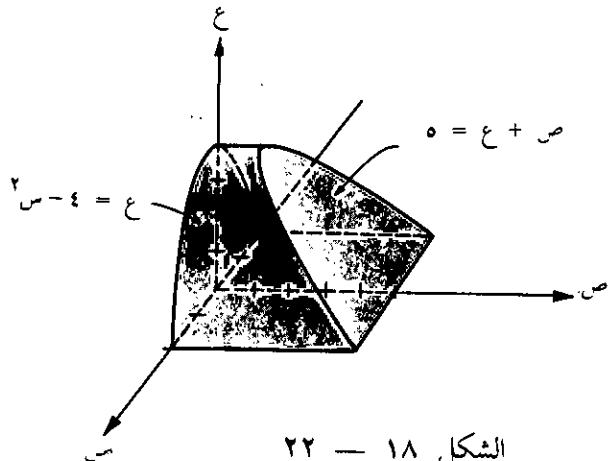
$$\int_{س} [(س^٣ + ع^- ص جاع) جتا \alpha + (س^٢ ص + ظا^{-١} ع) جتا \beta]$$

$$+ \sqrt{ص} قا س جتا \gamma] د س$$

الحل : بين الشكل ١٨ - ٢٢ المنطقة غ . وانه لامر بالغ الصعوبة ان نحاول ايجاد قيمة التكامل مباشرة . ولكن باستعمال الصيغة (١٨ - ٤٧) لنظرية التباعد يمكن ان نجد هذه القيمة من التكامل الثلاثي التالي :



الشكل ١٨ - ٢١



الشكل ١٨ - ٢٢

$r = |r|$ فائیت ان دفعی ق عند π هو π ك مها یكن شكل غ

الحل : بما ان ق ليس متصلا عند نقطة الاصل γ فلا يمكن استعمال نظرية الابتعاد بصورة مباشرة. ولكن يمكن المضي على النحو التالي :

التكن سم كرة نصف قطرها ١ ومركزها ٧ وتقع باجمعها داخل سم (انظر الشكل ١٧-٢١) وليكن غ_١ هو المنطقة التي تقع خارج سم_١ وداخل سم_٢. فلان ق متصل على غ_١ فيمكن هنا ان نستعمل (١٨-٤٦) فينتج ان :

$$|||_{\text{غ}} = \nabla \cdot \text{ح} = |||_{\text{س}} + |||_{\text{س}} \cdot \text{ق} \cdot \text{غ} \cdot \text{س}$$

ويمكن ان نثبت مباشرة انه اذا كان Q حقل ترريع عكسي كان $\nabla \cdot Q = 0$ (انظر التمرين ١٥ في البند ٥) فيكون

$$|| \text{ق. ع. س} || - || \text{ق. ع. س} || = || \text{ق. ع. س} ||$$

ولان العمودي الخارجي للسطح $\vec{r}$ هو $-\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r}$.

ہیکون

$$\left[\begin{array}{c} \text{ق. ع. د هـ} \\ \text{هـ} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{ك / ر}^{\text{ر}} \cdot \text{ر} - \text{پ / ر} \\ \text{هـ} \end{array} \right]$$

$$Q_S(P / P -) (P / \Delta) \quad \text{||} \quad - =$$

$$\frac{\frac{1}{\gamma_p}}{\pi \cdot \frac{1}{\gamma_p}} = \text{و س} \quad \frac{\frac{1}{\gamma_p}}{\frac{1}{\gamma_p}} =$$

$$\text{بع } \bar{Q} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} =$$

وتسمى هذه الصيغة بمعادلة الاستمرارية للسائل الذي لا ينضغط .
والصيغة (١٨ - ٤٩) التي تعطي نهاية التباعد يمكن ان تطبق على مفاهيم
اخرى فزيائية كالاتق المغناطيسي او الكهربائي ولهاتين الكيتين خصائص كثيرة
تشارك بها مع السوائل ،

مثال ١ : ليكن غ متوازي مستطيلات تحده المستويات الاحداثية والمنحنيات س =
١ ، ص = ٢ ، ع = ٣ ، فاذا كان $\bar{Q} = (س ، ص ، ع)$ ، $\bar{e} = (س ، ص ، ع)$ ،
س ص $\bar{e} + \bar{e} \bar{e}$ فاستعمل نظرية التباعد لايجاد دفع $\bar{Q}$ على السطح سه
للمنطقة غ .

الحل : حسب (١٨ - ٤٦)

$$\bar{Q} \cdot \bar{e} = \int \int \int \bar{Q} \cdot \bar{e} = \int \int \int (س + ص + ع) \bar{e} = \int \int \int (س + ص + ع) \bar{e} =$$

$$= \int \int \int (س + ص + ع) \bar{e} = \int \int \int (س + ص + ع) \bar{e} =$$

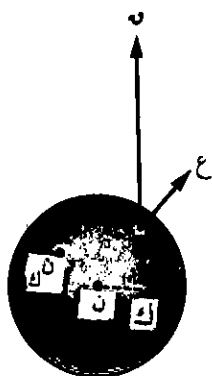
و ع ص د س

ونترك للقاريء ان يبين ان قيمة هذا التكامل هي $٦٠ + ١٨ \bar{e}$. فاذا كانت
ق تمثل سرعة سائل فهذا التكامل الموجب يعني ان الصادر من غ اكثر من
الوارد اليها اي ان منابعه أكثر من اغواره .

مثال ٢ : ليكن السطح سه غلافا كاملا لمنطقة غ من نوع ما استعمل في برهان نظرية
الابتعاد ولتكن نقطة الاصل γ في داخل غ فاذا اعطي حقل تربيع عكسي

$$\text{بالصيغة } \bar{e} = \left(\frac{\gamma}{r^3} \right) \text{ حيث } \gamma \text{ عدد ثابت ، } \bar{e} = س + ص + ع \bar{e} ،$$

حيث C هو حجم الكرة (انظر الشكل ١٨ - ٢٠). فإذا جعلنا $K \leftarrow 0$.
فإن $N \leftarrow 1$ ويتج ان :



الشكل ١٨ — ٢٠

(١٨-٤٩) ج ق = ن
 ك ← ن
 ح
 ك

اي ان ابتعاد ق عند ن هو نهاية الدفع في كل وحدة حجم لكرة مركزها ن عندما يقترب نصف قطرها من الصفر.

وبالتخصيص اذا كان ق هو سرعة سائل فان بع ق [ن يمكن ان يفسر بانه سرعة تزايد السائل وتناقصه عند ن في كل وحدة حجم . فنستنتج بناء على الملاحظات في اخر البند ٦ ان ن يكون فيها نبع اذا كان بع ق [ن < ٠ ويكون فيها غور اذا كان بع ق [ن > ٠ فاذا كان السائل غير قابل للضغط ولم يكن هنالك نبع ولا غور فلا يكون هنالك زيادة ولا نقصان داخل الحجم حر ، فعند كل ن يكون

فلنذكر في البدء نظرية القيمة الوسطى (٥ - ٢٩) التي تنص على انه اذا كان
ق اقترانا ذا متغير واحد متصلا في الفترة المغلقة [پ ، ب]

فهناك عدد ج في (پ ، ب) حيث $\left[\begin{matrix} \text{ق} (س) و س ل ق (ج) \end{matrix} \right]_{پ}^{\text{ب}}$ حيث

ل = ب - پ وهو طول [پ ، ب] ومثل هذه النتيجة يمكن استخراجها
للتكاملات الثلاثية ، فاذا كان ق اقترانا ذا ثلاثة متغيرات متصلا على المنطقة
الكروية غ فهناك نقطة پ (ى ، ف ، و) في داخل غ فيها :

$$\left[\begin{matrix} \text{ق} (س ، ص ، ع) و ح = \text{ق} (س ، ص ، ع) \end{matrix} \right]_{پ}^{\text{غ}}$$

حيث ح هو حجم غ ، ق (س ، ص ، ع) هو ق (ى ، ف ، و) وهذه

النتيجة تسمى احيانا نظرية القيمة الوسطى للتكاملات الثلاثية . وهي تعني انه
اذا كان ق اقترانا متجها متصلا فان

$$\left[\begin{matrix} \text{ق} \cdot \nabla = \text{ق} \cdot \nabla \end{matrix} \right]_{پ}^{\text{غ}}$$

واذن فاستنادا الى (١٨ - ٤٦) يكون

$$\frac{\left[\begin{matrix} \text{ق} \cdot \nabla \end{matrix} \right]_{پ}^{\text{غ}}}{\text{ح}} = \text{ق} \cdot \nabla$$

حيث $\text{ق} \cdot \nabla$ هو مسطح غ . اما النسبة في الطرف الايسر فتفسر بانها دفق ق في
كل وحدة حجم في الكرة . والان لتكن ن نقطة اعتباطية وليكن ق متصلا في
منطقة تحوى ن في داخلها . ولتكن $\text{ق} \cdot \nabla$ سطح كرة نصف قطرها ك ومركزها
ن . فحسب ما تقدم ان لكل ك نقطة ن في غ :

ولان قوانين التكامل السطحي في البند ٦ قد استنتجت كلها على اعتبار ان $\bar{C}$ عمودي علوي دائماً ولان $\bar{C}$ على S_1 عمودي سفلي يلزم ان نغير الاشارة على يسار (١٨ - ٣٩) عند التعامل مع S_1 فان العمودي $\bar{C}$ على S_1 يمكن وضع قانونه بأخذ سالب المتجه (١٨ - ٣٨) . فاذا ذكرنا هذا نجد ان

$$\left[\left[\begin{array}{c} L \\ J \end{array} \right] \right]_{\tau} = - \left[\left[\begin{array}{c} L \\ J \end{array} \right] \right]_{\tau} \quad (S, S, S, S)$$

(ص، ص، ص، ص)

$$= \left[\left[\begin{array}{c} L \\ J \end{array} \right] \right]_{\tau} \quad (S, S, S, S)$$

$$\left[\left[\begin{array}{c} L \\ J \end{array} \right] \right]_{\tau} - \left[\left[\begin{array}{c} L \\ J \end{array} \right] \right]_{\tau} = \left[\left[\begin{array}{c} L \\ J \end{array} \right] \right]_{\tau} \quad (S, S, S, S)$$

$$= \left[\left[\begin{array}{c} L \\ J \end{array} \right] \right]_{\tau} = \left[\left[\begin{array}{c} L \\ J \end{array} \right] \right]_{\tau} \quad (S, S, S, S)$$

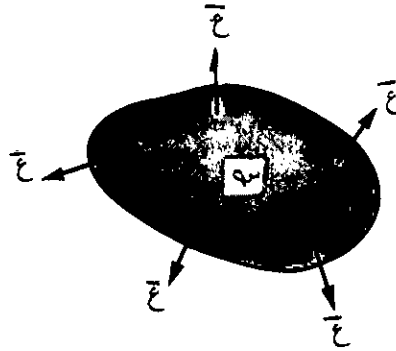
$$= \left[\left[\begin{array}{c} L \\ J \end{array} \right] \right]_{\tau} = \left[\left[\begin{array}{c} L \\ J \end{array} \right] \right]_{\tau}$$

وهو المطلوب

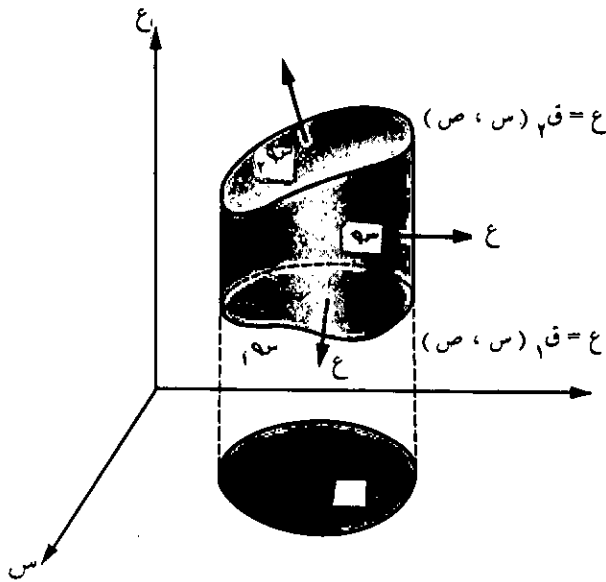
وليس من الصعب توسيع هذا البرهان حتى يشمل اتحاد مناطق من النوع الذي سبق .

واما اثبات القانونين الاولين في (١٨ - ٤٨) فعلى غرار البرهان السابق شريطة ان تؤخذ G, S بالشروط الملائمة .

ويمكن ان نستعمل نظرية التباعد لايحاد تفسير طبيعي لتباعد الحقل المتجه .



الشكل ١٨ — ١٨



الشكل ١٨ — ١٩

$$\left[\begin{matrix} \text{ع} \\ \text{س} \end{matrix} \right]_{\text{ج٢}} + \left[\begin{matrix} \text{ع} \\ \text{س} \end{matrix} \right]_{\text{ج١}} = \left[\begin{matrix} \text{ع} \\ \text{س} \end{matrix} \right]_{\text{ج٢}} \quad \text{و س}$$

وبتطبيق (١٨ - ٣٩):

$$\left[\begin{matrix} \text{ع} \\ \text{س} \end{matrix} \right]_{\text{ج٢}} = \left[\begin{matrix} \text{ع} \\ \text{س} \end{matrix} \right]_{\text{ج١}} + \left[\begin{matrix} \text{ع} \\ \text{س} \end{matrix} \right]_{\text{ط}}$$

و س و ص

$$(٤٧-١٨) \quad \prod_{\mathfrak{p}} (م جتا \mathfrak{p} + ن جتا \mathfrak{p} + ل جتا \mathfrak{p}) \mathfrak{p}$$

$$= \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{c}} \frac{\partial}{\partial} + \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{s}} \frac{\partial}{\partial} + \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{v}} \frac{\partial}{\partial} \right) \mathfrak{c} \mathfrak{h}$$

ولكي نصل الى (٤٧-١٨) يكفي ان نبرهن ما يلي :

$$\prod_{\mathfrak{p}} م جتا \mathfrak{p} \mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{s}} \frac{\partial}{\partial} \mathfrak{c} \mathfrak{h}$$

$$(٤٨-١٨) \quad \prod_{\mathfrak{p}} ن جتا \mathfrak{p} \mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{v}} \frac{\partial}{\partial} \mathfrak{c} \mathfrak{h}$$

$$\prod_{\mathfrak{p}} ل جتا \mathfrak{p} \mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{c}} \frac{\partial}{\partial} \mathfrak{c} \mathfrak{h}$$

وبراهين هذه القوانين الثلاثة هي في اساسها متماثلة فيكون ان نبرهن هنا احدها ولنأخذ الثالث :

ثم ان من الصعب البرهنة على النظرية عند اخذ سطح عام ولذا سنأخذ $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ و $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$ في حالة خاصة . وعلى التخصيص لتكن $\mathfrak{p}$ منطقة في المستوى $\mathfrak{s}$ $\mathfrak{v}$ تحقق شروط نظرية غرين ولنجعل $\mathfrak{p}$ تقوم فوق $\mathfrak{p}$ وبين سطحين معادلتهما $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ ($\mathfrak{s}$ ، $\mathfrak{v}$) ، $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ ($\mathfrak{s}$ ، $\mathfrak{v}$) حيث $\mathfrak{p}$ ، $\mathfrak{q}$ لكل منهما مشتقة تفاضلية اولى متصلة ، $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{s}$ ، $\mathfrak{v}$) $\geq$ $\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{s}$ ، $\mathfrak{v}$) لكل ($\mathfrak{s}$ ، $\mathfrak{v}$) في $\mathfrak{p}$. فكما يظهر بالشكل ١٨ - ١٩ ان السطح الذي يغلف $\mathfrak{p}$ يحوي سطحاً سفلياً $\mathfrak{p}$ و سطحاً علوياً $\mathfrak{p}$ و سطحاً جانبياً $\mathfrak{p}$. ونعرف ان $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. ولذا فان جتا $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$.

فينتج ان :

(٨) $\vec{C} = \vec{S} + \vec{H} + \vec{V} + \vec{W}$. $\vec{C}$. $\vec{S}$ هو ذلك الجزء من المستوى ٣ س + ٢ ص + ع = ١٢ الذي تحدده المستويات س = ٠ ، ص = ٠ ، س = ١ ، ص = ٢ .
 (٩) اثبت انه اذا عرفنا $\vec{S}$ بالمعادلة $\vec{C} = \vec{Q} (\vec{S} , \vec{V})$ فان (١٨ - ٤٣) يمكن ان تكتب بالصيغة :

$$\left[\vec{C} , \vec{S} \right] = \left[\vec{Q} , \vec{S} \right] - \left[\vec{Q} , \vec{V} \right] + \left[\vec{Q} , \vec{W} \right]$$

(١٠) اثبت (١٨ - ٤٠) .

٧ — نظرية التباعد : (The Divergence Theorem)

ان نظرية التباعد من اهم النظريات في تطبيقات حساب المتجهات . وهي تسمى ايضا نظرية غاوس (Gauss) باسم واحد من اعظم رياضي العالم هو كارل فردريك غاوس (١٧٧٧ - ١٨٥٥) . والنظرية تتعلق بالسطح $\vec{S}$ الذي هو غلاف كامل لمنطقة مغلقة محدودة $\vec{G}$. وفي هذا البند سنجعل المتجه $\vec{C}$ في (١٨ - ٣٧) متجه وحدة عموديا على $\vec{S}$ الى الخارج . وفي الشكل ١٨ - ١٨ يظهر مثال للسطح $\vec{S}$ ومواضع للمتجه $\vec{C}$ خارجا منه .

اذا اعطى اقتران متجه $\vec{C}$ بالمعادلة :

$$\vec{C} (\vec{S} , \vec{V} , \vec{W}) = \vec{M} (\vec{S} , \vec{V} , \vec{W}) + \vec{N} (\vec{S} , \vec{V} , \vec{W}) + \vec{O} (\vec{S} , \vec{V} , \vec{W})$$

(١٨ - ٤٦) نظرية التباعد :

$$\left[\vec{C} , \vec{S} \right] = \left[\vec{Q} , \vec{S} \right] + \left[\vec{Q} , \vec{V} \right] + \left[\vec{Q} , \vec{W} \right]$$

وفي التطبيقات الفيزيائية ينص هذا القانون على ان دفع $\vec{C}$ الجاري في $\vec{S}$ يعادل التكامل الثلاثي لتباعد $\vec{C}$ على $\vec{G}$.

ونعبر عن (١٨ - ٤٦) بغير لغة المتجهات واستنادا على (١٨ - ٤٣) و (١٨ - ٣٢) وذلك كما يلي :

حيث ط هي المنطقة الدائرية في مستوى س ص المحصورة في منحنى س^٢ + ص^٢ = ٩ .

وباستعمال الاحداثيات القطبية نحصل على

$$\iint_{\text{س}} \bar{ق} \cdot \bar{ع} \cdot \bar{د} \cdot \bar{س} = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 + r^2) r dr d\theta$$

$$= 567 \pi / 2$$

تمارين :

في التمارين ١ - ٤ جد قيمة $\iint_{\text{س}} \bar{ق} (س، ص، ع) د س$

(١) $\bar{ق} (س، ص، ع) = س^٢$ ، س^٢ هو النصف العلوي من الكرة س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٤ .

(٢) $\bar{ق} (س، ص، ع) = س^٢ + ص^٢ + ع^٢$ ، س^٢ هو جزء من المستوى ع = ص + ع الذي يقع داخل الاسطوانة س^٢ + ص^٢ = ٤

(٣) $\bar{ق} (س، ص، ع) = س + ص$ ، س^٢ هو ما يقع في الثمن الاول من المستوى ع = ٢ + ٣ ص + ٤ ع .

(٤) $\bar{ق} (س، ص، ع) = (س^٢ + ص^٢ + ع^٢) / ١$ ، س^٢ هو الجزء من المكافئ ع = ٢ الذي يقع داخل الاسطوانة س^٢ + ص^٢ = ٢ ص .

في التمارين ٥ - ٨ أوجد $\iint_{\text{س}} \bar{ق} \cdot \bar{ع} \cdot \bar{د} \cdot \bar{س}$ حيث ع عمودي وحدة على س^٢ الى اعلى

(٥) $\bar{ق} = س - ص + ع$ ، س^٢ هو النصف العلوي من الكرة س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٤ .

(٦) $\bar{ق} = س - ص + ع$ ، س^٢ هو ذلك الجزء من الكرة س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٤ الذي يقع في الثمن الاول .

(٧) $\bar{ق} = ٢ - ٣ س + ٥ ص + ٦ ع$ ، س^٢ هو ذلك الجزء من المخروط ع = (س^٢ + ص^٢) / ٤ الذي يقع داخل الاسطوانة س^٢ + ص^٢ = ١ .

وهذا الاصطلاح يطلق عشوائياً على كل الحقول المتجهة .
وقد تؤخذ التكاملات السطحية حول سطوح مغلقة كالكرة والمجسم الناقصي
وغيرهما . وفي هذه الحالة اذا اعتبرنا $\bar{C}$ العمودي الخارج كان الدفق مقدار
حصيلة ما يخرج من المجسم في وحدة الزمن واذا كان التكامل في
(١٨ - ٤٥) موجبا فان ما يخرج من $\bar{S}$ يزيد عما يدخل اليها فنقول ان في
 $\bar{S}$ نبعاً من $\bar{C}$ ، واذا كان التكامل سالبا كان ما يدخل الى $\bar{S}$ يزيد عما يخرج
منها فنقول ان في $\bar{S}$ غوراً من $\bar{C}$. واذا كان التكامل صفرا يتساوى ما يدخل
مع ما يخرج فيتبادل النبع والغور .

مثال ٢ : ليكن $\bar{S}$ جزء من منحنى $C = 9 - s^2 - 2s^2$ حيث $C \leq 0$ صفرا فاذا كان
 $\bar{C} = (s, v, e) = 3s^2 - 3s^2 + 3s^2 + 3e^2 + 3e^2$ ، فجاء دفق $\bar{C}$ عبر $\bar{S}$

الحل : المنحنى مرسوم بالشكل ١٦ - ٥ . وحسب (١٨ - ٣٨) ان عمودي الوحدة
من s الى اعلى في النقطة (s, v, e) هو

$$\bar{C} = \frac{2s^2 - 2s^2 + 2s^2 + 2e^2 + 2e^2}{\sqrt{1 + 4s^2 + 4e^2}}$$

فتبار $\bar{C}$ عبر $\bar{S}$ هو

$$\bar{C} \cdot \bar{C} = \frac{6s^2 + 6s^2 + 6s^2 + 6e^2 + 6e^2}{\sqrt{1 + 4s^2 + 4e^2}}$$

وبتطبيق (١٨ - ٣٦) ينتج ان

$$\bar{C} \cdot \bar{C} = \frac{6s^2 + 6s^2 + 6s^2 + 6e^2 + 6e^2}{\sqrt{1 + 4s^2 + 4e^2}}$$

$$= \frac{5s^2 + 5s^2 + 9 + 9}{\sqrt{1 + 4s^2 + 4e^2}}$$

هو عمودي الوحدة (١٨ - ٣٧) يكون ق (س ، ص ، ع) . ع هو المركبة العمودية للمتجه ق في النقطة (س ، ص ، ع) . والتكامل السطحي لمركبة ق العمودية هو ، حسب التعريف :

$$(١٨ - ٤٣) \quad \left[\begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{ع} \end{array} \right]_{\text{س}} = \left[\begin{array}{c} \text{م جتا } \alpha + \text{ن جتا } \beta + \text{ل} \end{array} \right]_{\text{س}}$$

جتا γ (د سه

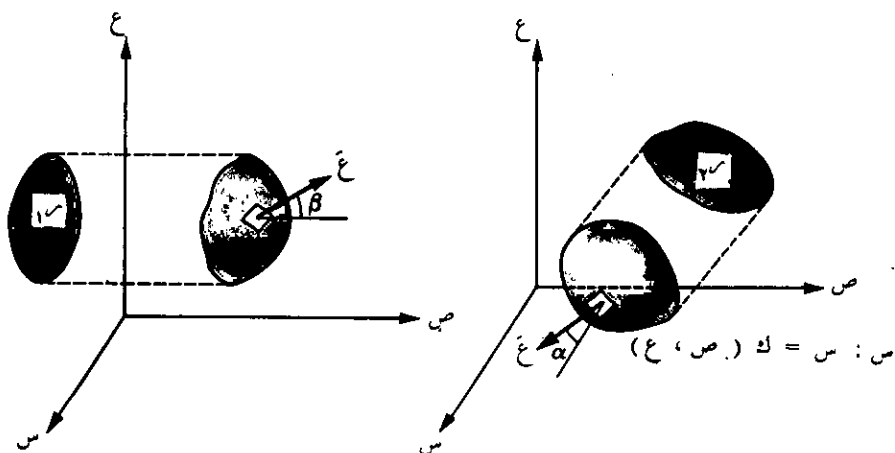
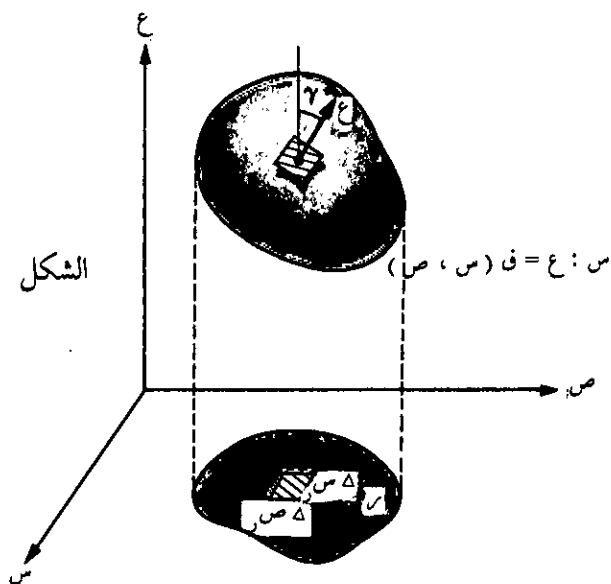
حيث تشير رموز الاقترانات الى قيمها عند (س ، ص ، ع) واذا كان س له مساقط منتظمة ط ، ط_١ ، ط_٢ على مستويات س ص ، س ع ، ص ع على التوالي فان (١٨ - ٤٣) يمكن ان تكتب بالصيغة :

$$(١٨ - ٤٤) \quad \left[\begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{ع} \end{array} \right]_{\text{سه}} = \left[\begin{array}{c} \text{م د ص د ع} \\ \text{ط} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{ن د س د ع} \\ \text{ط} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{ل د س د ص} \\ \text{ط} \end{array} \right]$$

ولكي نعطي دلالة فزيائية للقانون (١٨ - ٤٣) لنفرض ان سه مغمور في سائل ذي حقل سرعة متجهة ق (س ، ص ، ع) . فاذا كان د سه جزءا صغيرا من مساحة سه وكان ق متصلا فانه يكون ثابتا تقريبا على د سه ومن ثم فكما يشير الشكل ١٨ - ١٧ فان كمية السائل التي تمر عن د سه في وحدة الزمن هي بالتقريب معادلة لحجم اسطوانة مساحة قاعدتها د س وارتفاعها ق . ع . فاذا كان د ح هو حجم هذه الاسطوانة يكون د ح = ق . ع د س فلان د ح يمثل كمية السائل التي تعبر د س في وحدة الزمن فان التكامل السطحي (١٨ - ٣٤) هو حجم السائل الذي يعبر سه في وحدة الزمن . فهو بهذا التفسير يسمى **دفق** (flux) ق عبر سه . فحسب التعريف اذن يكون :

$$(١٨ - ٤٥) \quad \text{دفق ق عبر سه} = \left[\begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{ع} \end{array} \right]_{\text{سه}}$$

الشكل ١٨ — ١٥



الشكل ١٨ — ١٦

وفي التطبيقات يمكن ان نعتبر س جزءا من مساحة س السطحية مسقطه على

مستوى س ص منطقة مستطيلة الشكل مساحتها س و ص

وبالمثل فالتكاملات السطحية (٨ - ٤٠) و (١٨ - ٤١) تفضي الى س =

قا β و س و ع = قا α و ص و ع

وفي بعض الحالات قد ندرس تكاملات سطحية تحوى اقترانا ق متجهها حيث

(١٨ - ٤٢) $\vec{c} = (س ، ص ، ع) = م (س ، ص ، ع) + ن (س ، ص ، ع)$

و ل (س ، ص ، ع) ز ، م ، ن ، ل اقترانات متصلة . فاذا كان ع

فيمكن اذن ان نكتب (١٨-٣٦) بالصيغة :

$$(١٨-٣٩) \quad \left[\begin{array}{c} \text{ج (س ، ص ، ع)} \\ \text{س} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{ج (س ، ص ، ع)} \\ \text{ط} \end{array} \right] \quad \text{س} = \text{س} \quad \text{ج (س ، ص ، ع)} \quad \text{ق}$$

(س ، ص) (ض) قا γ Δ س Δ ص

وبالمثل اذا كانت معادلة $\text{س} = \text{ص}$ هي $\text{ص} = \text{ح (س ، ع)}$ حيث ح له مشتقة جزئية اولى متصلة ، س له مسقط ط منتظم على مستوى س ع (انظر الشكل ١٨-١٦) يكون :

$$(١٨-٤٠) \quad \left[\begin{array}{c} \text{ج (س ، ص ، ع)} \\ \text{س} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{ج (س ، ص ، ع)} \\ \text{ط} \end{array} \right] \quad \text{ج (س ، ص ، ع)} \quad \text{س}$$

(ع ، ع) قا β Δ س Δ ع

وبالمثل اذا كانت معادلة $\text{س} = \text{س}$ هي $\text{س} = \text{خ (ص ، ع)}$ حيث خ له مشتقة جزئية اولى متصلة ، س له مسقط ط منتظم على مستوى ص ع (انظر الشكل ١٨-١٦) يكون :

$$(١٨-٤١) \quad \left[\begin{array}{c} \text{ج (س ، ص ، ع)} \\ \text{س} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{ج (خ (ص ، ع))} \\ \text{ط} \end{array} \right] \quad \text{ج (خ (ص ، ع))} \quad \text{س}$$

(ص ، ع) قا α

ومن (١٧-٥١) نجد ان $\Delta \text{م} = \text{قا } \gamma \Delta \text{س} \Delta \text{ص}$ راي ان المساحة على

المستوى المماس يمكن حسابها بضرب مساحة ط في $\text{قا } \gamma$ فاذا مثلنا مساحة ط بالرمز س و ص فذلك يدعونا لان نعرف التفاضل و س للمساحة السطحية بالتعريف :

$\text{س} = \text{قا } \gamma \Delta \text{س} \Delta \text{ص}$

$$\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \left[\sqrt{2} \frac{1.023}{5} \right] =$$

$$\pi^2 \left[\theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \right] \frac{\sqrt{2} 1.023}{10} =$$

$$5 / \pi \sqrt{2} 1.023 =$$

لندرس متجه الوحدة التالي :

$$(18-37) \quad \bar{e} = \cos \alpha \bar{h} + \cos \beta \bar{w} + \cos \gamma \bar{z}$$

انه عمودي على $\bar{h}$. وكما يظهر بالشكل ١٨ - ١٥ سنأخذ العمود العلوي بحيث يكون $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ فاذا كان β ، $\bar{p}$ ، $\bar{b}$ كما في الشكل ١٧ - ٤٣ يكون :

$$\bar{e} = \frac{\bar{b} \times \bar{p}}{|\bar{b} \times \bar{p}|}$$

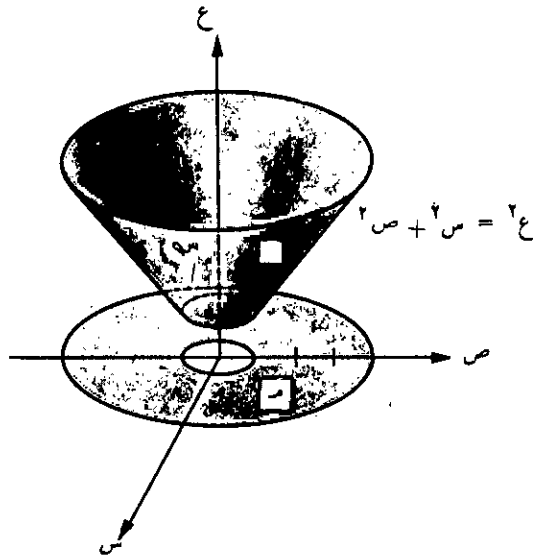
فنطبق (١٧ - ٥٠) و (١٧ - ٥١) ونختصر $\bar{v}$ (س_ر ، ص_ر) ،

$\bar{v}$ (س_ر ، ص_ر) الى $\bar{v}$ ، $\bar{v}$ فينتج

$$(18-38) \quad \bar{e} = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{v}_s^2 + \bar{v}_v^2}} (-\bar{v}_s \bar{h} - \bar{v}_v \bar{w} + \bar{z})$$

وبقارنة (١٨ - ٣٧) مع (١٨ - ٣٨) نجد ان

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{v}_s^2 + \bar{v}_v^2}}$$



الشكل ١٨ - ١٤

$$\frac{س}{\frac{1}{2} (س^2 + ص^2)} = (س، ص)$$

$$\frac{ص}{\frac{1}{2} (س^2 + ص^2)} = (س، ص)$$

فنتطبق (١٨ - ٣٦) مع ملاحظة ان الجذر يختزل الى $\sqrt{2}$ فنحصل على :

$$\left[\begin{matrix} س^2 ع و س^2 \\ س^2 (س^2 + ص^2) \sqrt{2} / 1 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} س^2 ع و س^2 \\ س^2 (س^2 + ص^2) \sqrt{2} \end{matrix} \right]$$

فستعمل الاحداثيات القطبية لتقييم التكامل المزدوج :

$$\left[\begin{matrix} س^2 ع و س^2 \\ س^2 (س^2 + ص^2) \sqrt{2} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} س^2 ع و س^2 \\ س^2 (س^2 + ص^2) \sqrt{2} \end{matrix} \right]$$

$$\left[\begin{matrix} س^2 ع و س^2 \\ س^2 (س^2 + ص^2) \sqrt{2} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} س^2 ع و س^2 \\ س^2 (س^2 + ص^2) \sqrt{2} \end{matrix} \right]$$

$$(١٨-٣٥) \quad \left[\begin{array}{c} \text{ج} \\ \text{ط} \end{array} \right] (س، ص، ع) د سه =$$

$$\text{نهـ} \quad \left[\begin{array}{c} \text{ج} \\ \text{ر} \end{array} \right] (س، ص، ع) ر \Delta \text{م}$$

حيث تعرف نهاية المجموع على النحو المعتاد . ويمثل ما صنعنا عند استنتاج (١٧-٥٢) يمكن ان نقيم هذا التكامل باستعمال القاعدة :

$$(١٨-٣٦) \quad \left[\begin{array}{c} \text{ج} \\ \text{سه} \end{array} \right] (س، ص، ع) د سه = \left[\begin{array}{c} \text{ج} \\ \text{ط} \end{array} \right] (س، ص، ع) ق$$

$$(س، ص) \sqrt{(س، ص) ق س + (س، ص) ق ص + 1} د س د ص$$

لاحظ أنه اذا كان ج (س، ص، ع) = ١ على اتساع سه فان (١٨-٣٦) يتحول الى (١٧-٥٢) فيكون التكامل السطحي هو المساحة السطحية

واليك تطبيقا بدائيا طبيعيا على ذلك : خذ صفيحة معدنية رقيقة بشكل S فاذا كانت الكثافة عند (س، ص، ع) هي ج (س، ص، ع) فان (١٨-٣٦) يعطي كتلة الصفيحة . فركز الثقل وعزوم القصور الذاتي تستخرج بذات الطرق التي استعملناها للجسام في الفصل السابق .

$$\text{مثال ١ : قيم} \quad \left[\begin{array}{c} \text{سه} \\ \text{سه} \end{array} \right] ع د سه \text{ حيث } س \text{ هو جزء من المخروط } ع = س^2 + ص^2$$

يقع بين المستويين ع = ١ ، ع = ٤ .

الحل : يظهر بالشكل ١٨-١٤ ان المسقط م للجسم سه على مستوى س ص هو منطقة حلقيّة تحدها دائرتان نصف قطرهما ١ ، ٤ ومركزاهما على نقطة الاصل . فلنكتب معادلة سه على النحو :

$$ع = (س^2 + ص^2) / 1 = ق (س، ص)$$

$\left(\frac{ج}{ر ك} \right) \bar{ر}$ حيث ج عدد ثابت ، ك عدد حقيقي موجب ، فاثبت ان

جعدة ق صفر (ملاحظة : استعمل التمرين ٧)

(١٧) اذا كان الحقل المتجه ق محافظا وله مشتقات جزئية متصلة فاثبت ان $ج ق = ٠$
 (١٨) اذا كان ق ، ج اقترانين قياسيين لكل منهما مشتقة جزئية ثانية فاثبت ان
 لب (ق ج) = ق لب ج + ج لب ق + ٢ (مج ق) . (مج ج) اثبت
 ان الاقترانين المعرفين في التمرينين ١٩ ، ٢٠ يحققان معادلة لبلاس .

$$(١٩) \quad ق (س ، ص ، ع) = (س^٢ + ص^٢ + ع^٢) - ١ / ٢$$

$$(٢٠) \quad ق (س ، ص ، ع) = لط (س^٢ + ص^٢ + ع^٢)$$

٦ — التكاملات السطحية :

نجد قيم التكاملات الخطية على طول منحنى ، ونجري التكاملات الثنائية والثلاثية في مناطق ذات بعدين او ثلاثة على التوالي . ويمكن ايضا اجراء التكامل على مدى سطح ما . ولتبسيط الامر سنحصر بحثنا في سطوح ذات سلوك سوي وسنجعل نقاشنا على مستوى مبدي . اما المستوى المنطقي الرصين فيجده القاريء في كتب التفاضل والتكامل المتقدمة .

فاذا كان مسقط السطح σ على المستوى الاحداثي منطقة تصلح للتكامل الثنائي نقول ان σ له مسقط منتظم على المستوى الاحداثي . فلنفرض ان σ هي مخطط المعادلة $ع = ق (س ، ص)$ وان σ له مسقط منتظم ط على مستوى س ص وان ق له مشتقات اولى جزئية متصلة على ط . ففي الفصل السابق عرفنا المساحة ح للسطح σ فبالمثل يمكن ان نعرف تكامل ج (س ، ص ، ع) على σ حيث ج متصل على منطقة تحوي σ . وسنستعمل الرموز التي استعملناها في البند ٩ من الفصل ١٧ فمثلا ، كما في الشكل (١٧ - ٤٢) Δ س ر ، Δ م ر يدلان على مساحات اجزاء من σ واجزاء من سطح يمر σ في النقطة ب ر (س ر ، ص ر ، ع ر) على التوالي ، وهذه تقع مساقطها على المستطيل ط ر في تجزئة داخلية للمسقط ط . وعلى نحو مماثل التعريفات التي مرت للتكاملات السابقة نقيم ج عند ب ر لكل ر وتكون المجموع $\int_C ج (س ر ، ص ر ، ع ر)$ Δ س ر . فالتكامل السطحي للاقتران ج على σ هو حسب التعريف :

وبتغيير ترتيب الحدود نحصل على المطلوب
ويلاحظ من (١٨ - ٣١) ان معامل $\bar{z}$ في صيغة $\nabla \times \bar{q}$ لها ذات شكل
المكامل في التكامل المزدوج في عبارة نظرية غرين (١٨ - ٢٢). فاذا
جعلنا :

$$\bar{q} = (s, v) = m(s, v) + n(s, v) + o(s, v)$$

$$\text{واخذنا المتجه } \bar{q} = \frac{ds}{dl} \bar{h} + \frac{dv}{dl} \bar{v} + \frac{do}{dl} \bar{z} \text{ الذي يمس } m$$

(حيث l طول القوس) فان نتيجة (١٨ - ٢٢) يمكن ان تكتب بالصيغة :

$$(١٨ - ٣٣) \oint \bar{q} \cdot d\bar{r} = \iint (\nabla \times \bar{q}) \cdot \bar{z} \, d\tau$$

ولان $(\nabla \times \bar{q}) \cdot \bar{z}$ مركبة جعدة q باتجاه محور z فنسميه المركبة العمودية
(على z) لجعدة q . ويمكن ان نعبر عن (١٨ - ٣٣) بالكلمات كما يلي :
التكامل الخطي للمركبة المماسية للافتزان $\bar{q}$ ، على طول m مرة واحدة بالاتجاه
الموجب ، يساوي التكامل المزدوج على طول z للمركبة العمودية لجعدة q .
اما ما يقابل هذا في الابعاد الثلاثة فتلك هي نظرية ستوكس (Stokes) التي
سندرسها في البند ٨. وهناك رمز آخر هو ∇^2 ويعرف كما يلي :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla q = \nabla^2 q$$

فاذا وقع فعله على $q(s, v, z)$ كانت النتيجة اقترانا قياسيا يسمى
لبلاسي q (Laplacian of f) وسنرمز له بالرمز $\nabla^2 q$. فحسب
التعريف السابق :

$$(١٨ - ٣٤) \nabla^2 q = \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}$$

الحصول عليها باجراء الضرب الداخلي بين ∇ ، $\bar{Q}$. تذكر ان بع $\bar{Q}$ كمية قياسية .

مثال ١ : أوجد $\nabla \times \bar{Q}$. $\nabla \cdot \bar{Q}$ اذا علم ان $\bar{Q} = (s, v, e)$ ، $s = s^1 v^2 e^3$ هـ
 $+ (2s^1 v^2 + e) \bar{Q} + v^3 e^2 \bar{Q}$

الحل : نستعمل $\nabla \times \bar{Q}$. $\nabla \cdot \bar{Q}$ للتبسيط لنعني قيمتي هذين الاقترانين عند (s, v, e) .
 فن (٣١-١٨) و (٣٢-١٨) ينتج ما يلي :
 $\nabla \times \bar{Q} = (3s^1 v^2 - 2) \bar{Q} + 4s^1 v^3 \bar{Q} + (4s^1 s - 2s^1 v^2) \bar{Q}$
 $2s^1 v^2 e^3 \bar{Q}$

$\nabla \cdot \bar{Q} = (v^2 e^3 + 2s^1 v^2 + 2v^3 e^2) \bar{Q}$.
 ويمكن الحصول على كثير من القواعد الجبرية لجمعة الاقترانات المتجهة وتباعدها وفي المثال الثاني نعطي قاعدة تماثل قاعدة ضرب المشتقات ، وهنالك قواعد اخرى يجدها القاريء في التمارين في آخر هذا البند .

مثال ٢ : اذا كان $\bar{Q}$ و $\bar{Q}$ اقترانين قياسيا ومتجهها على الترتيب ولها مشتقات جزئية فاثبت ان

$$\nabla \cdot (\bar{Q} \times \bar{Q}) = (\bar{Q} \cdot \nabla) \bar{Q} + (\bar{Q} \cdot \nabla) \bar{Q} . \bar{Q}$$

الحل : اذا كان $\bar{Q}$ ما هو معروف في (١٨-٢٩) نكتب
 $\bar{Q} \times \bar{Q} = Q^1 \bar{Q}^2 + Q^2 \bar{Q}^3 + Q^3 \bar{Q}^1$

$$\text{ونطبق (١٨-٣٢) فينتج } \nabla \cdot (\bar{Q} \times \bar{Q}) = (\bar{Q} \cdot \nabla) \bar{Q} + (\bar{Q} \cdot \nabla) \bar{Q} + (\bar{Q} \cdot \nabla) \bar{Q}$$

$$+ (Q^1 \bar{Q}^2 + Q^2 \bar{Q}^3 + Q^3 \bar{Q}^1) \nabla \cdot \bar{Q}$$

$$= Q^1 \frac{\partial \bar{Q}^2}{\partial s} + Q^2 \frac{\partial \bar{Q}^3}{\partial s} + Q^3 \frac{\partial \bar{Q}^1}{\partial s} + Q^1 \frac{\partial \bar{Q}^2}{\partial v} + Q^2 \frac{\partial \bar{Q}^3}{\partial v} + Q^3 \frac{\partial \bar{Q}^1}{\partial v} + Q^1 \frac{\partial \bar{Q}^2}{\partial e} + Q^2 \frac{\partial \bar{Q}^3}{\partial e} + Q^3 \frac{\partial \bar{Q}^1}{\partial e}$$

افرض ان $\bar{Q}$ اقتران متجه في ثلاثة ابعاد معرف كما يلي :

$$(١٨-٢٩) \quad \bar{Q} = (س، ص، ع) م = (س، ص، ع) \bar{هـ} + (س، ص، ع) ن + (س، ص، ع) ل$$

حيث م، ن، ل مشتقات جزئية في منطقة ما . فهناك ما نسميه جعدة $\bar{Q}$ ونرمز لها بالرمز $\bar{Q} \cdot \nabla$ او $\bar{Q} \times \nabla$ وتعرف بانها مفكوك المحددة التالية بالنسبة الى الصف الاول

$$(١٨-٣٠) \quad \bar{Q} \cdot \nabla = \bar{Q} \times \nabla = \begin{vmatrix} \bar{هـ} & \bar{و} & \bar{ز} \\ \frac{\partial}{\partial س} & \frac{\partial}{\partial ص} & \frac{\partial}{\partial ع} \\ م & ن & ل \end{vmatrix}$$

وفي هذه المحددة غموض ظاهر فالصف الاول متجهات والثاني فواعل هي مشتقات جزئية والثالث اقترانات قياسية . ولكنه ترتيب على درجة كبيرة من الفائدة لانه يغني عن تذكر الصيغة التالية :

$$(١٨-٣١) \quad \bar{Q} \cdot \nabla = \bar{Q} \times \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial س} - \frac{\partial}{\partial ع} \right) \bar{و} + \left(\frac{\partial}{\partial ص} - \frac{\partial}{\partial ع} \right) \bar{ز} + \left(\frac{\partial}{\partial س} - \frac{\partial}{\partial ص} \right) \bar{هـ}$$

فجعدة $\bar{Q}$ هي حقل متجه ذو ابعاد ثلاثة وله اهمية كبيرة في العلوم الفيزيائية

أما تباعد $\bar{Q}$ ونرمز له بالرمز $\bar{Q} \cdot \nabla$ او $\bar{Q} \cdot \nabla$ فتعريفه كما يلي :

$$(١٨-٣٢) \quad \bar{Q} \cdot \nabla = \bar{Q} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial س} \bar{هـ} + \frac{\partial}{\partial ص} \bar{و} + \frac{\partial}{\partial ع} \bar{ز}$$

ويظهر السبب في استعمال الرمز $\bar{Q} \cdot \nabla$. ق عندما نذكر ان صيغة $\bar{Q} \cdot \nabla$ يمكن

$$(8) \quad \phi \quad \text{ظا}^1 \text{س و س} + 3 \text{س و ص حيث م مستطيل رؤوسه } (0, 1), (0, 0), (1, 0), (1, 1).$$

$$(9) \quad \phi \quad \text{ص}^2 (1 + \text{س}^2) \text{و س} + 2 \text{ص ظا}^1 \text{س و ص حيث م هو المنحنى} \\ \text{س} = 3/2 \text{ص} + 3/2 \text{ص} = 1$$

$$(10) \quad \phi \quad (\text{س}^2 + \text{ص}^2) \text{و س} + 2 \text{س ص و ص حيث م هي حدود المنطقة} \\ \text{المحصورة بين المنحنيات ص} = \sqrt{\text{س}}, \text{ص} = 0, \text{س} = 4$$

في التمرينين ١١، ١٢ استعمل (١٨ - ٢٥) في إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى م المعروف بالمعادلات الوسيطة المعطاة :

$$(11) \quad \text{س} = \text{م جتا}^3 \text{ن}, \text{ص} = \text{م جا}^3 \text{ن}, 0 \leq \text{ن} \leq \pi/2$$

$$(12) \quad \text{س} = \text{م جتا} \text{ن}, \text{ص} = \text{م جا} \text{ن}, 0 \leq \text{ن} \leq \pi/2$$

في التمرينين ١٣، ١٤ استعمل (١٨ - ٢٥) في إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات المعطاة :

$$(13) \quad \text{ص} = 4\text{س}^2, \text{ص} = 16\text{س}$$

$$(14) \quad \text{ص} = \text{س}^3, \text{ص} = 2\text{س}$$

$$(15) \quad \text{اثبت (١٨ - ٢٤)}$$

$$(16) \quad \text{إذا كان ق}^-(\text{س}, \text{ص}) \text{ حقلا متجها ذا بعدين وكان } \left[\begin{matrix} \text{ق}^+ \\ \text{ج} \end{matrix} \right] \text{ ق}^- \text{ و}^+ \text{ مستقلا عن}$$

$$\text{المسار في المنطقة}, \text{استعمل نظرية غرين في اثبات أن } \phi \text{ ق}^+ \text{ و}^+ = 0$$

لكل منحنى مغلق بسيط ممهد بالقطع في د

(١٧) لتكن ط هي المنطقة المحصورة بالمنحنى م المغلق البسيط الممهد قطعاً في المستوى س ص. فإذا كانت مساحته ت فاستعمل نظرية غرين لاثبات أن مركزه (س، ص) تعطيه العلاقتان :

ان لنظرية غرين نتائج بعيدة وعميقة في الرياضيات العالية ، لا سيما في ميدان المتغيرات المركبة (complex variables) وهذا ميدان جوهري وهام في دراسة الموضوعات الفيزيائية وفي الهندسة الكهربائية وفروع الهندسة الاخرى .

تمارين :

استعمل نظرية غرين في ايجاد قيم التكاملات الخطية في التمارين ١ الى ١٠ :

$$(1) \oint (s^2 + s) ds \text{ حيث } s \text{ هو المنحنى المغلق المحصور بين } s^2 = s, s = -s \text{ من } (0, 0) \text{ الى } (1, 1) .$$

$$(2) \oint (s + s^2 + s^3) ds \text{ حيث } s \text{ هو المنحنى المغلق المحصور بين } s = s^3, s = s^2 \text{ من } (0, 0) \text{ الى } (1, 1) .$$

$$(3) \oint (s^2 + s - s^2) ds \text{ حيث } s \text{ هو مربع رؤوسه } (0, 0), (1, 0), (1, 1) .$$

$$(4) \oint (\sqrt{s} + \sqrt{s}) ds \text{ حيث } s \text{ هو المثلث الذي رؤوسه } (1, 1), (1, 0), (0, 0) .$$

$$(5) \oint (s + s + s) ds \text{ حيث } s \text{ دائرة وحدة مركزها } (0, 0) .$$

$$(6) \oint (s + s + s) ds \text{ حيث } s \text{ هو القطع الناقص } s^3 + s^2 + s = 0 .$$

$$(7) \oint (s + s + s) ds \text{ حيث } s \text{ مثلث رؤوسه } (1, 1), (1, 0), (0, 0) .$$

ولان الاتجاه الموجب على M بالنسبة الى المنطقة P في داخل M هي عكس ما اشير اليه في (١٨ - ٢٦) ينتج ان

$$\oint_{M_1} M \wedge S + N \wedge S = \oint_{M_2} M \wedge S + N \wedge S$$

وهو المطلوب

مثال ٦ : اذا كان $Q = (S, V) = \frac{1}{S^2 + V^2} (-V \wedge S + S \wedge V)$ فاثبت

ان $\oint_C Q = 2\pi$ لكل منحنى مغلق M بسيط ممهد بالقطع نقطة الاصل في داخله .

الحل : للتكامل الخطي نفس الشكل الذي رأيناه في المثال ٥ . فاذا اخذنا دائرة M نصف قطرها R ومركزها في نقطة الاصل وتقع كلية داخل M ، فحسب المثال ٥ يكون

$$\oint_C Q = 2\pi = \oint_C \left[\frac{1}{R^2 + V^2} (-V \wedge S + S \wedge V) \right]$$

ولان M تعطى بالمعادلتين الوسيطيتين $S = R \cos \theta$ ، $V = R \sin \theta$ ،

• $t \geq 0$ ، $2\pi \geq t$ يكون :

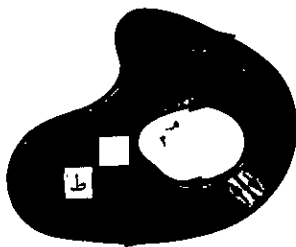
$$\oint_C Q = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{R^2 + V^2} (-V \wedge S + S \wedge V) \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{R^2 \cos^2 \theta}{R^2} + \frac{R^2 \sin^2 \theta}{R^2} \right] dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

($R \cos \theta$)

$$2\pi = \int_0^{2\pi} (R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta) dt = \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2$$

الحل : اذا كانت ط هي المنطقة المحصورة بين م_١ ، م_٢ يصبح الامر كما في الشكل ١٨ - ١٣ حيث تقع وداخل م_٢ ، فحسب الملاحظات السالفة يكون :



الشكل ١٨ - ١٣

$$(١٨ - ٢٦) \oint_{\text{م}_1} م \text{ و } س + ن \text{ و } ص + \oint_{\text{م}_2} م \text{ و } س + ن \text{ و } ص = \iint_{\text{ط}} \left(\frac{\partial}{\partial س} \right) ن$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial ص} م \right) و ت$$

وهنا تدل الاشارة $\oint$ على الاتجاه الموجب على م_٢ بالنسبة الى ط فلأن

$$\frac{\oint_{\text{م}_1} م \text{ و } س + ن \text{ و } ص - \oint_{\text{م}_2} م \text{ و } س + ن \text{ و } ص}{\oint_{\text{م}_2} م \text{ و } س + ن \text{ و } ص} = \frac{\partial}{\partial س} ن$$

$$\frac{\partial}{\partial ص} م = \frac{ص^2 - س^2}{\oint_{\text{م}_2} م \text{ و } س + ن \text{ و } ص} =$$

والتكامل المزدوج حول ط في (١٨ - ٢٦) يساوي صفرا فينتج ان :

$$\oint_{\text{م}_1} م \text{ و } س + ن \text{ و } ص - \oint_{\text{م}_2} م \text{ و } س + ن \text{ و } ص = 0$$

مثال ٤ : استعمل (١٨ - ٢٥) لإيجاد مساحة القطع الناقص

$$1 = \frac{s^2}{b^2} + \frac{v^2}{p^2}$$

الحل : للقطع الناقص المعادلتان الوسيطيتان $s = p \cdot \cos \theta$ ، $v = p \cdot \sin \theta$ حيث $\theta \geq 0$ فنعوض في (١٨ - ٢٥) وينتج ان :

$$1 = \frac{s^2}{b^2} + \frac{v^2}{p^2} = \frac{p^2 \cos^2 \theta}{b^2} + \frac{p^2 \sin^2 \theta}{p^2} = \frac{p^2}{b^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{p^2}{b^2}$$

بما ان $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$$1 = \frac{p^2}{b^2} \Rightarrow p = b$$

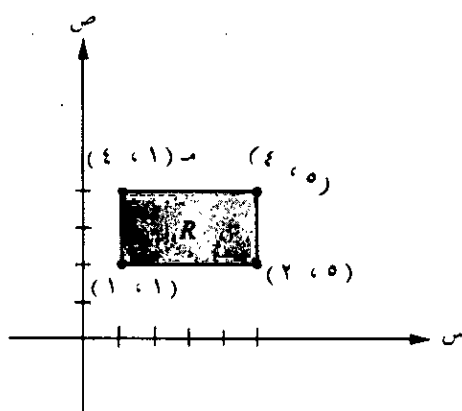
$$p = b \Rightarrow \frac{p}{b} = 1 \Rightarrow \frac{p}{b} \times \frac{b}{p} = 1 \Rightarrow \frac{p}{b} = \frac{b}{p}$$

ويمكن توسيع نظرية غرين حتى تسري على مناطق ط فيها ثقب شريطة ان يتم التكامل على طول الحدود مع ابقاء المنطقة ط دائماً الى اليسار. ويظهر هذا بالشكل ١٨ - ١٣ حيث يمكن ان نبين ان التكامل المزدوج على ط يساوي مجموع التكاملين الخطيين حول M_1 ، M_2 بالاتجاه المبين بالرسم. ويتم البرهان بان نعمل شقاً في ط كما في الشكل ثم نذكر ان مجموع تكاملين خطيين باتجاهين متعاكسين على منحنى واحد هو صفر. ومثل هذا يمكن ان يقال اذا كان في المنطقة عدة ثقوب. وسنرى ذلك في حل المثال التالي :

مثال ٥ : ليكن M_1 ، M_2 منحنين مغلقين بسيطين ممهدين بالقطع غير متقاطعين ، في داخلها نقطة الاصل O ، وليكن $M = - (s^2 + v^2)$ ، $N = s^2 / (s^2 + v^2)$ ، اثبت ان

$$\oint_{M_1} M ds + \oint_{N_1} N ds = \oint_{M_2} M ds + \oint_{N_2} N ds$$

$$\varepsilon_0 = \int_2^4 \left[\int_1^5 v \, ds = 20 \right] =$$



الشكل ١٨ — ١٢

إذا حاول القاريء ان يجد قيمة التكامل الخطي في المثال ٣ مباشرة فسيجد لنظرية غرين قيمة كبيرة . وهي يمكن ان تستعمل لايجاد قانون ممتع ومفيد للمساحة T للمنطقة P المحصورة داخل المنحنى M البسيط المغلق الممهد . فن جهة اذا جعلنا $m = 0$ ، $n = s$ في (١٨-٢٢) نجد ان :

$$T = \int_P \left[\int_M ds \right] = T$$

ومن ناحية اخرى اذا جعلنا $m = -s$ ، $n = 0$ ينتج ان $T = \int_P \left[\int_M ds \right]$

$= - \int_P \left[\int_M ds \right]$. فنصل بين هاتين الصيغتين لقيمة T يجمع الطرفين والقسمة على ٢ فينتج :

$$(18-25) \quad T = \frac{1}{2} \int_P \left[\int_M ds - \int_M ds \right]$$

وطبيعي ان التكامل الخطي يمكن ايضا ايجاد قيمته مباشرة .

مثال ٢ : استعمل نظرية غرين لاجاد قيمة التكامل الخطي

$$\oint_C 2x^2y^2 + (x^2 + y^2)z + (x^2 + y^2)z^2 \, dz$$

$$4x^2y^2 + 9x^2y^2 = 36$$

الحل : اذا كانت ط هي المنطقة المحدودة بالمنحنى م نطبق (١٨ - ٢٢) حيث م
(س ، ص) = (٢س ص ص ، ن (س ، ص) = (س٢ + ص٢) فينتج :

$$\oint_C 2x^2y^2 + (x^2 + y^2)z + (x^2 + y^2)z^2 \, dz = \int_P (2x^2 - 2y^2) \, dz$$

$$= \int_P x + z \, dz$$

$$= \text{صفرا}$$

مثال ٣ : أوجد قيمة $\oint_C (e^{x^2} + y^2)z + (x^2 + y^2)z^2 + (x^2 - y^2)z \, dz$

حيث م هو محيط المستطيل الذي رؤوسه (١ ، ٢) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٠) ، (١ ، ٠)

الحل : المنطقة ط المحدودة بالمنحنى م يظهر مخططها بالشكل ١٨ - ١٢ . نطبق نظرية غرين على التكاملين الخطيين :

$$\int_P (2x^2 - 2y^2) \, dz = \int_1^5 \int_0^2 (2x^2 - 2y^2) \, dz$$

$$= \int_1^5 [2x^2z - 2y^2z]_0^2 \, dz$$

$$\left\{ \left\{ \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial v} \right) \right\} \right\} \right\} = m \text{ و } s + n \text{ و } v$$

والآن يمكن ان نتابع بالاستنتاج الرياضي اي اتحاد محدود من التكمالات . اما برهان نظرية غرين في الوضع العام فذلك فوق مستوى هذا الكتاب .

مثال ۱ : استعمل نظرية غرين لاييجاد قيمة $\oint_C (5x^2y^2 + 3x^2y + 2xy^2) dx + (3x^2y + 2xy^2) dy$ حيث

م. هو المنحنى المغلق المشتمل على منحنى $ص = س^2$ ، $ص = ٢س$ بين النقطتين $(٠, ٠)$ و $(٢, ٤)$

الحل : المنطقة ط التي يحيط بها م ظاهرة بالشكل ١٧ - ٨ . نطبق (١٨ - ٢٢) .
حيث م (س ، ص) = ٥ س ص ، ن (س ، ص) = ٣ س :

$$\left[\frac{\partial}{\partial s} - (s^2) \frac{\partial}{\partial s} \right] \Big|_T = s^2 + s + \phi$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ س } (5 \text{ س} - 3 \text{ س} - 2 \text{ س})$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} (11 \text{ س } 3 - 10 \text{ س } 2 - 3 \text{ س } 1) \end{array} \right\} =$$

$$\frac{28}{10} - = \text{س و}$$

$$\phi = \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial v} \right) \left[\frac{2}{v} \right]$$

الشكل ١٨ — ١١

$$\left[\begin{matrix} \text{ب} \\ \text{م} \end{matrix} (س، ج، ١) + \begin{matrix} \text{ب} \\ \text{م} \end{matrix} (س، ج، ٢) \right] =$$

$$\left[\begin{matrix} \text{ب} \\ \text{م} \end{matrix} (س، ج، ١) - \begin{matrix} \text{ب} \\ \text{م} \end{matrix} (س، ج، ٢) \right] =$$

وبتطبيق (١٧-١٤) (٢) نحصل على :

$$\left[\begin{matrix} \text{ب} \\ \text{م} \end{matrix} (س، ج، ٢) \right] = \left[\begin{matrix} \text{ب} \\ \text{م} \end{matrix} (س، ج، ١) \right] + \left[\begin{matrix} \text{ب} \\ \text{م} \end{matrix} (س، ج، ٢) \right]$$

$$\left[\begin{matrix} \text{ب} \\ \text{م} \end{matrix} (س، ج، ٢) \right] =$$

$$\left[\begin{matrix} \text{ب} \\ \text{م} \end{matrix} (س، ج، ٢) - \begin{matrix} \text{ب} \\ \text{م} \end{matrix} (س، ج، ١) \right] =$$

ومقارنة هذه العبارة بتلك التي استنتاجناها للتكامل $\oint$ م و س نحصل على (٢٣-١٨) .

اما قوانين (١٨-٢٤) فيمكن اثباتها بطريقة مماثلة استنادا الى الشكل ١٨-١٠ (ب) ولكن سنترك هذا تمرينا للقارئ .

وتصح نظرية غرين على مناطق كالمبينة بالشكل ١٧-١ ولكن لن نبرهن على ذلك ، وهذه المناطق من حدودها خطوط افقية او عمودية . ويمكن توسيع النظرية ايضا حتى تشمل ط اتحاد عدد محدود من هذه المناطق . فمثلا في

الشكل ١٨-١١ نجد $ط = ط_١ \cup ط_٢$ وحدود $ط_١$ هي $م_١ \cup م_٢$ وحدود $ط_٢$ هي $م_٢ \cup م_٣$ فهنا يكون :

وما في داخله واذا كان م ، ن اقترانين متصلين ولهما مشتقتان اوليان جزئيتان متصلتان على طول منطقة محدودة ن تشتمل على ط يكون :

$$\phi_m \text{ و } \phi_s + \phi_n = \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial v} \right) \right] \phi_n \text{ و } \phi_v$$

برهان جزئي : سنبرهن على النظرية بالنسبة الى منطقة ط يمكن ان يرمز اليها بكلا الرمزین (١) و (ب) في الشكل ١٧-١ اي بالرمزين :

ط = { (س ، ص) : ١ ≥ س ≥ ب ، ج ، ١ (س) ≥ ص ≥ ج ، ٢ (س) }
 ط = { (س ، ص) : ج ≥ ص ≥ ج ، ٢ (ص) ≥ س ≥ ج ، ٢ (ص) }
 حيث الاقترانات ج ، ١ ، ج ، ٢ ، ح ، ١ ، ح ، ٢ ممهدة . ومن الامثلة على مناطق كهذه الشكل ١٨-١٠ . ويكفي ان نبرهن ان كلا مما يلي صحيح :

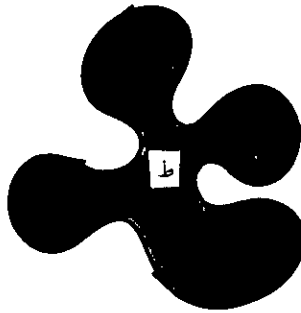
$$(٢٣-١٨) \phi_m \text{ و } \phi_s = - \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial v} \right) \right] \phi_n \text{ و } \phi_v$$

$$(٢٤-١٨) \phi_m \text{ و } \phi_s = \left[\frac{\partial}{\partial s} \right] \phi_n \text{ و } \phi_v$$

لان مجموع هذين التكاملين يعطي النتيجة المطلوبة .
 ولايات (٢٣-١٨) نرجع الى الشكل ١٨-١٠ (١) فنلاحظ ان م هو اتحاد منحنيين م_١ ، م_٢ معادلتهما ص = ج ، ١ (س) ، ص = ج ، ٢ (س) على التوالي . فالتكامل الخطي $\oint_m$ م و س يمكن ان يكتب

$$\oint_m \phi_s = \oint_{m_1} \phi_s + \oint_{m_2} \phi_s + \oint_{m_3} \phi_s$$

آخرين n_1 ، n_2 في $[p, b]$ فإن m لا يقاطع نفسه بين n ، m ويسمى بسيطاً . ومن الامثلة المعروفة على المنحنيات البسيطة المغلقة الدائرة والقطع الناقص . وبالمثل ان المنحنى المغلق البسيط الممهد قطعاً يشتمل على اتحاد قطع ممهدة m بحيث انه حين تتغيرت من p الى b فإن النقطة q (t) الناجمة عن المعادلات الوسيطة للقطعة m ترسم مساراً هو بالضبط m مرة واحدة ، وفيه $n = m$. ان منحنى كهذا يرسم حدود منطقة p في المستوى ، وحسب التعريف ان الاتجاه الموجب على طول m هو الذي يجعل p الى اليسار في غضون مضي n (t) لترسم m . وهذا ما يوضحه الشكل ١٨ - ٩ حيث تشير الاسهم الى الاتجاه الموجب على m .



الشكل ١٨ - ٩

والرمز $\left. \begin{array}{l} m \\ \vdots \end{array} \right\} (s, s) + n (s, s) + v$

يرمز الى تكامل خطي على طول m مرة واحدة بالاتجاه الموجب . والنظرية التالية المسماة باسم الرياضي الفزيائي الانجليزي جورج غرين (١٧٩٣ - ١٨٤١) تربط بين هذا التكامل الخطي والتكامل المزدوج حول p . ولتبسيط النص استعملت الرموز n ،

$$\frac{\partial}{\partial s} m , \frac{\partial}{\partial s} n \text{ في المكامل للدلالة على قيم هذه الاقترانات عند } (s, s)$$

(١٨ - ٢٢) نظرية غرين :

اذا كان m منحنى مغلقاً بسيطاً ممهداً قطعاً وكانت p هي المنطقة التي تحوي m

- (١٥) افرض ان القوة Q (س ، ص ، ع) تتجه نحو المركز وان مقدارها يتناسب عكسيا مع البعد عنه واثبت ان Q محافظة وأوجد لها اقترانا ممكنا .
- (١٦) افرض ان القوة Q (س ، ص ، ع) تتجه مبتعدة عن المركز وان مقدارها يتناسب طرديا مع البعد عنه ، واثبت ان Q محافظة وأوجد لها اقترانا ممكنا .
- (١٧) اذا كان (١٨ - ١٣) مستقلا عن المسار وكان م ، ن ، ل مشتقات اولى جزئية متصلة فاثبت ان

$$\frac{\partial L}{\partial \text{ص}} = \frac{\partial N}{\partial \text{ع}} , \frac{\partial L}{\partial \text{س}} = \frac{\partial M}{\partial \text{ع}} ; \frac{\partial N}{\partial \text{س}} = \frac{\partial M}{\partial \text{ص}}$$

- (١٨) اثبت ما يقابل (١٨ - ١٥) في التكاملات الخطية في الفضاء ذي الابعاد الثلاثة .
- استعمل التمرين ١٧ لاثبات ان التكاملات الخطية التالية ليست مستقلة عن المسار :

$$\left. \begin{aligned} & (١, ٢, ٣) \\ & ٢ \text{س ص د س} + (\text{س}^٢ + \text{ص}^٢) \text{د ص} + \text{ص ع د ع} \\ & (٠, ٠, ٠) \end{aligned} \right\} (١٩)$$

$$\left. \begin{aligned} & (\pi, ١, ٠) \\ & \text{ص جتا ع د س} + \text{ص}^٢ \text{جتا ع د ص} + \text{س}^٢ \text{ع} \\ & (٠, ٠, ١) \end{aligned} \right\} (٢٠)$$

جاء د ع

٤ — نظرية غرين : (Green's Theorem)

اذا اعطي منحنى مستو بمعادلتين وسيطيتين $\text{س} = \text{ج} (ت) , \text{ص} = \text{ح} (ت)$ وكان ج ، ح مهيدين في الفترة $[٠, ب]$ وكانت $\text{ن} = (\text{ج} (٠), \text{ح} (٠)) , \text{ج} = (\text{ب}, \text{ح} (ب))$ ، عندها يسمى منحنى مغلقا مهيذا . واذا كان بالاضافة الى ما تقدم $\text{ج} (١), \text{ح} (١) \neq \text{ج} (٠), \text{ح} (٠)$ لاي عددين

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \bar{و} (س، ص) &= ٤س ص٣ \bar{هـ} + ٢س ص٣ \bar{و} \\
 (6) \quad \bar{و} (س، ص) &= ص٣ جتا س \bar{هـ} - ص٣ جا س \bar{و} \\
 (7) \quad \bar{و} (س، ص، ع) &= (ص٢ قا س - ع٣ \bar{هـ}) + ظا س \bar{و} + (س + ص) \bar{ز} \\
 (8) \quad \bar{و} (س، ص، ع) &= (ص + ع) \bar{هـ} + (س + ع) \bar{و} + (س + ص) \bar{ز} \\
 (9) \quad \bar{و} (س، ص، ع) &= ٨س ع \bar{هـ} + (١ - ٦س ع٣) \bar{و} + (٤س٢ - ٩ص٢ ع٢) \bar{ز}
 \end{aligned}$$

$$(10) \quad \bar{و} (س، ص، ع) = \bar{هـ} ع^- + ٢ص \bar{و} + س ع^- \bar{ز}$$

في كل من التمارين ١١ - ١٤ اثبت ان التكامل الخطي مستقل عن المسار ثم أوجد قيمته :

$$(11) \quad \left. \begin{aligned} & (١، ٣) \\ & (ص٢ + ٢س ص) دس + (٢س٢ + ٢س ص) دص \\ & (٢، ١ -) \end{aligned} \right\}$$

$$(12) \quad \left. \begin{aligned} & (١، \frac{\pi}{2}) \\ & جا ص دس + س جتا ص دص \\ & (٠، ٠) \end{aligned} \right\}$$

$$(13) \quad \left. \begin{aligned} & (-٢، ١، ٣) \\ & (٦س ص٣ + ٢ع٢) دس + ٩س٢ ص٢ دص \\ & (٢، ٠، ١) \end{aligned} \right\}$$

$$(14) \quad \left. \begin{aligned} & + (٤س ع + ١) د ع \\ & (-٢، ١، ١ -) \\ & (ص ع + ١) دس + (س ع + ١) دص \\ & (٣، ٠، ٤) \end{aligned} \right\}$$

$$+ (س ص + ١) د ع$$

في ص ، ع . نفاضل ذلك بالنسبة الى ص ونقارن بما في (٢٠ - ١٨)
 فينتج

$$ق(ص، ص، ع) = ٢ص جاس + ج(ص، ع)$$

$$= ٢ص جاس + ع^٢_e \text{ فيكون ج(ص، ع) } = ع^٢_e$$

نكامل بالنسبة الى ص فينتج ج(ص، ع) = ص ع^٢_e + ك(ع) حيث ك

اقران في ع فقط . فينتج استنادا الى (٢١ - ١٨) ان :

$$ق(ص، ص، ع) = ٢ص جاس + ص ع^٢_e + ك(ع)$$

نفاضل بالنسبة الى ع مع ملاحظة (٢٠ - ١٨) فيكون :

$$ق(ص، ص، ع) = ٢ص ع^٢_e + ك(ع) = ٢ص ع^٢_e$$

اي ان ك(ع) = ٠ فتكون ك(ع) = ج حيث ج عدد ثابت

$$اذن ق(ص، ص، ع) = ٢ص جاس + ص ع^٢_e + ج يعطي اقترانا كامنا
 ق .$$

تمارين :

في التمارين ١ - ١٠ بين هل $\bar{v}$. و $\bar{v}$ مستقل عن المسار واذا كان كذلك
 فأوجد اقترانا ممكنا ق :

$$١) \bar{v}(ص، ص) = (٣س٢ ص + ٢) \bar{v} + (س٣ + ٤ص٣) \bar{v}$$

$$٢) \bar{v}(ص، ص) = (٦س٢ - ٢س٢ ص) \bar{v} + (٢س٢ ص + ٥) \bar{v}$$

$$٣) \bar{v}(س، ص) = e^١_s \bar{v} + (٣ - e^١_s جاس) \bar{v}$$

$$٤) \bar{v}(ص، ص) = (س٢ + ٢ص٢) \bar{v} - (ص٢ + س٢) \bar{v}$$

مثال ٢ : اثبت ان $\left. \begin{matrix} \text{ب} \\ \text{م} \end{matrix} \right\} \text{س}^2 \text{ص} \text{و} \text{س} + \text{س}^3 \text{ص}^2 \text{و} \text{ص} \text{ليس مستقلا عن المسار.}$

الحل: اذا جعلنا $m = s^2$ ، $n = 3s^2$ يكون

$${}^2_3\text{ص} = \frac{\partial \text{ن}}{\partial \text{س}}, {}^2_3\text{س} = \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}}$$

ولان $\frac{\partial \mu}{\partial v} \neq - \frac{\partial n}{\partial s}$ فليس التكامل مستقلا عن المسار (انظر

(1A - 1A

في كثير من التطبيقات نجد من الامور الجوهرية ان نبحث عن اقتران كامن ، ق
لحل متجه محافظ ق في المثال ٢ عينا ق في حقل ذي بعدين ، وفي حل المثال
التالي خطوات يمكن ان تتبع في مسائل الفضاء ذي الابعاد الثلاثة .

مثال ۳: اذا كان $Q = (S, V, E)$ = ص^۲ جتا س هـ + (۲ ص جتا س +
 E^2 و + ۲ ص E^2 ر فائیت ان } ق . و س مستقل عن المسار وأوجد
 اقترانا كامنا ممكننا ق للاقتران ق^م

الحل : يكون التكامل مستقلا عن المسار اذا وجد اقتران Q في S ، V ، E ،
اشتقاقي ، حيث $\nabla Q = (S, V, E)$ $\Rightarrow Q = (S, V, E)$
اي بحيث يكون :

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق س} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) = \text{ص}^2 \text{جناس} \\ \text{ق ص} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) = \text{ص}^2 \text{جا س} + \text{ع}^2 \\ \text{ق ع} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) = \text{ص}^2 \text{ع} \end{array} \right\} (18-20)$$

فاذا كاملنا ق (س ، ص ، ع) جزئيا بالنسبة الى س ينتج

(۱۸-۲۱) ق (س، ص، ع) = ص^۲ جاس + ج (ص، ع) حیث ج اقتراں ما

$$(١٨-١٨) \text{ اذا كان } \frac{\partial}{\partial \text{ص}} \neq \frac{\partial}{\partial \text{ن}} \text{ كان التكامل الخطي في } (١٨-١٦)$$

غير مستقل عن المسار.

$$\text{مثال ١ : اذا كان } \bar{C} = (\text{ص} , \text{س}) = (٢ \text{ ص} + ٣ \text{ س}) + \bar{D} = (٣ \text{ ص} + ٤ \text{ س})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{فأثبت ان } \bar{C} \cdot \bar{D} \text{ مستقل عن المسار وأوجد قيمة} \\ (٣, ٢) \\ (١, ٠) \end{array} \right\} \bar{C} \cdot \bar{D}$$

الحل : حسب (١٨-١٥) أو (١٨-١٦) يكون التكامل مستقلاً عن المسار اذا وجد هنالك اقتران ممكن ق حيث :

$$(١٨-١٩) \text{ ق } \bar{C} = (\text{ص} , \text{س}) = ٢ \text{ ص} + ٣ \text{ س} \text{ و } \bar{D} = (\text{ص} , \text{س}) = ٣ \text{ ص} + ٤ \text{ س} \\ + \text{ فاذا كاملنا ق } \bar{C} = (\text{ص} , \text{س}) \text{ جزئياً بالنسبة الى س ينتج :}$$

ق (ص , س) = ٢ ص + ٣ س + ك (ص) حيث ك اقتران في ص فقط . نفاضل هذا بالنسبة الى ص ونقارن بمعادلة (١٨-١٩) فينتج ما يلي : ق ص = (ص , س) = ٣ ص + ٤ س + ك (ص) = ٣ ص + ٤ س + ٤
فينتج ان ك (ص) = ٤ اي ان ك (ص) = ٤ ص + ج حيث ج ثابت ما فيكون

$$\left. \begin{array}{l} (٣, ٢) \\ (١, ٠) \end{array} \right\} \bar{C} \cdot \bar{D} = (٢ \text{ ص} + ٣ \text{ س}) + (٣ \text{ ص} + ٤ \text{ س})$$

$$= \left. \begin{array}{l} (٣, ٢) \\ (١, ٠) \end{array} \right\} \bar{C} \cdot \bar{D} = (٢ \text{ ص} + ٣ \text{ س} + ٣ \text{ ص} + ٤ \text{ س})$$

$$\left. \begin{array}{l} (٣, ٢) \\ (١, ٠) \end{array} \right\} \bar{C} \cdot \bar{D} = \left[\begin{array}{l} ٢ \text{ ص} + ٣ \text{ س} + ٣ \text{ ص} + ٤ \text{ س} \\ (١, ٠) \end{array} \right]$$

$$= (٤ + ٥٤ + ١٢) - ٤ = ٦٦$$

ومعنى (١٨ - ١٧) بلغة حقول القوى المحافظة يتضمن ان الشغل الذي يبذل باتباع اي مسار م من $\mathcal{M}$ الى ب هو الفرق بين الجهدين في $\mathcal{M}$ ، ب . ينتج من ذلك انه اذا كان م منحنيًا مغلقًا ، اي اذا كان $\mathcal{M} = \mathcal{B}$ كان الشغل المبذول في قطع م كاملة صفرا .

ويمكن ان نثبت ان عكس هذا صحيح ، اي انه اذا كان $\int_C \vec{Q} \cdot d\vec{r}$ يساوي صفرا لكل منحني مغلق م محدد تحديدا مناسبًا كان التكامل الخطي مستقلا عن المسار وكان الحقل محافظا .

وهذه الحقائق لها اهمية كبيرة في التطبيقات لان كثيرا من الحقول المتجهة التي نصادفها في الطبيعة (كحقول التربيع العكسي) انما هي محافظة . وبعبارة فزيائية اذا دار جسم حول منحني مغلق في حقل قوة محافظ ولم تقع خسارة في طاقته بسبب الاحتكاك كان الشغل الذي يبذله صفرا . وهذه هي نتيجة لقانون حفظ الطاقة .

لنفرض ان $\vec{Q}$ حقل متجه محافظ فيه ق اقتران ممكن اي ان $\vec{Q} = \nabla \phi$. فاذا كانت $\mathcal{M}$ ($\mathcal{S}_1$ ، $\mathcal{S}_2$) نقطة ما الجهد فيها صفر وكانت ب ($\mathcal{S}$ ، $\mathcal{V}$) اي نقطة اخرى ، عندئذ كما في (١٨ - ١٧) يكون $\int_{\mathcal{M}} \vec{Q} \cdot d\vec{r} = \phi(\mathcal{S}) - \phi(\mathcal{S}_1) = \phi(\mathcal{S}) - \phi(\mathcal{S}_2)$. وهذا يدل على ان الجهد عند اي نقطة ب يساوي الشغل الذي يبذل في المضي من اي نقطة الجهد فيها صفر الى ب . وهذا يماثل الوصف التقليدي الفيزيائي لطاقة الوضع الكامنة (الممكنة) بانها الطاقة التي تتوافر في الجسم بسبب وضعه .

اذا كانت هنالك مشتقة اولى متصلة لكل من م ، ن وكان التكامل الخطي في (١٨ - ١٦) مستقلا عن المسار كان

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathcal{S}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathcal{S} \partial \mathcal{V}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathcal{V} \partial \mathcal{S}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathcal{V}}$$

من ذلك ينتج انه

للقاريء . ولكن يحسن ان نعيد صياغة (١٨ — ١٥) برموز تخلو من المتجهات وذلك كما يلي :

(١٨ — ١٦) نظرية : يكون التكامل الخطي

$$\int_P \left[m (s, v) ds + n (s, v) dv \right]$$

مستقلا عن مساره اذا وفقط اذا كان هنالك اقتران ما اشتقاقي ق حيث .

$$n = \frac{\partial q}{\partial v}, \quad m = \frac{\partial q}{\partial s}$$

فاذا امكن ايجاد هذا الاقتران ق المشار اليه في (١٨ — ١٦) يكون

$$dq = \frac{\partial q}{\partial s} ds + \frac{\partial q}{\partial v} dv = m (s, v) ds + n (s, v) dv$$

$$+ n (s, v) dv$$

ومما تقدم يمكننا ان نكتب

$$\int_{(s_1, v_1)}^{(s_2, v_2)} \left[m (s, v) ds + n (s, v) dv \right] \quad (١٧-١٨)$$

$$= \int_{(s_1, v_1)}^{(s_2, v_2)} dq$$

$$= q (s_2, v_2) - q (s_1, v_1)$$

حيث (s_1, v_1) و (s_2, v_2) هي احداثيات النقطتين P ، B على الترتيب . وهذه الصيغة تطابق النظرية الاساسية للتفاضل والتكامل

(٣١ — ٥)

وبالعكس اذا كان هنالك اقتران اشتقافي $ق$ حيث $ق = (س، ص)$ $\nabla ق$
 (س، ص) يكون

$م (س، ص) = ق (س، ص)$ ، $ن (س، ص) = ق (س، ص)$ ،
 (ص)

ينتج انه اذا كان $م (س_1، ص_1)$ ، $(س_2، ص_2)$ في ط يكون :

$$[ق. و. ر] = ق (س، ص) + ق (س، ص) + ق (س، ص)$$

حيث $م$ اي مسار من $م$ الى $ب$. فاذا كان $م$ ممهدا ومعرفا بمعادلات وسيطة
 مثل $س = ج (ت)$ ، $ص = ح (ت)$ ، $ت_1 \geq ت \geq ت_2$ نعوض في
 المكامل استنادا الى (١٦-٢٣) فينتج

$$[ق. و. ر] = ق (س، ص) + ق (س، ص) + ق (س، ص)$$

$$[ق (س، ص) + ق (س، ص) + ق (س، ص)] = ق (س، ص) + ق (س، ص) + ق (س، ص)$$

ح (ت) و ت

$$= ق (س_2، ص_2) - ق (س_1، ص_1)$$

$$= ق (س_2، ص_2) - ق (س_1، ص_1)$$

فالتكامل الخطي اذن يعتمد فقط على احداثيات $م$ ، $ب$ وليس على المسار $م$.
 وهذا البرهان يمكن توسيعه ليشمل المنحنيات الممهدة القطع وذلك بتجزئة $م$
 الى عدد محدود من القطع الممهدة . والنظرية (١٨-١٥) يمكن توسيعها
 حتى تشمل تكاملات خطية في ثلاثة ابعاد . ونترك برهان ذلك تمرينا

نكتب الان $ق = م(ص، س) + ن(ص، س) + و(ص، س)$ ولأن
 $و = 0$ على $م$ ينتج

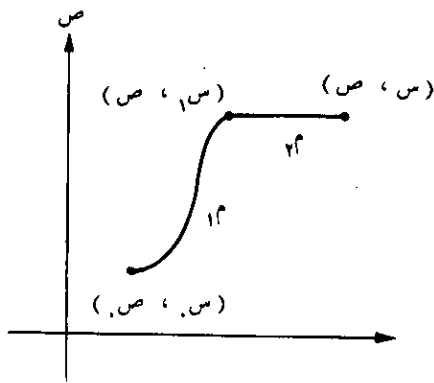
$$\frac{\partial}{\partial س} ق(ص، س) = \frac{\partial}{\partial س} م(ص، س) + \frac{\partial}{\partial س} ن(ص، س)$$

ولأن $ص$ لا يتغير في هذا التفاضل الجزئي يمكن ان نعتبر ان المكامل يحتوي على

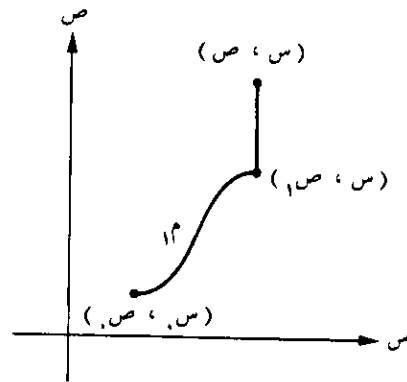
متغير واحد هو $س$ فنطبق (٥ - ٣٣) ونحصل على $\frac{\partial}{\partial س} ق(ص، س)$

$$= م(ص، س)$$

وبالمثل اذا اخترنا المسار المبين بالشكل ١٨ - ٨ ب وفاضلنا بالنسبة الى $ص$ نجد
 أن



(أ)



(ب)

الشكل ١٨ - ٨

$$\frac{\partial}{\partial ص} ق(ص، س) = ن(ص، س)$$

وهذا يثبت أن $ق = م(ص، س) + ن(ص، س)$. وكما في البند ١ نسمي
 ق بالاقتران الممكن للاقتران $ق$ ونسمي $ق(ص، س)$ بالجهد عند النقطة
 $(ص، س)$.

فيها من $\mathcal{P}$ الى $\mathcal{B}$ فان التكامل الخطي $\int_{\mathcal{P}} \bar{Q} \cdot d\mathcal{P}$. و $\bar{Q}$ يكون مستقلا عن مساره اذا وفقط اذا كان $\bar{Q} = (S, V) = \nabla \bar{Q}$ (س، ص) لاقتران ما $\bar{Q}$ قابل للاشتقاق .

البرهان : لنفرض ان التكامل مستقل عن مساره . فاذا كانت (س، ص) نقطة ثابتة في ط فلنعرف $\bar{Q}$ كما يلي :

$$\bar{Q} = (S, V) = \int_{\mathcal{P}} \bar{Q} \cdot d\mathcal{P} \quad (S, V)$$

حيث (س، ص) اي نقطة في ط . فلان التكامل مستقل عن مساره فان $\bar{Q}$ يعتمد فقط على س، ص وليس على المسار م من (س، ص) الى (س، ص) . خذ دائرة في ط مركزها (س، ص) ولتكن (س₁، ص₁) نقطة داخل هذه الدائرة فيها س₁ ≠ س . وليكن م₁ مسارا ما من (س، ص) الى (س₁، ص₁) ، م₁ هي القطعة الأفقية من (س₁، ص₁) الى (س، ص) (س، ص) كما في الشكل ١٨-٨ . فيمكن اذن ان نكتب :

$$\bar{Q} = (S, V) = \int_{\mathcal{P}} \bar{Q} \cdot d\mathcal{P} + \int_{\mathcal{P}_1} \bar{Q} \cdot d\mathcal{P}_1$$

$$= \int_{\mathcal{P}} \bar{Q} \cdot d\mathcal{P} + \int_{\mathcal{P}_1} \bar{Q} \cdot d\mathcal{P}_1$$

$$(S, V) = \int_{\mathcal{P}} \bar{Q} \cdot d\mathcal{P} + \int_{\mathcal{P}_1} \bar{Q} \cdot d\mathcal{P}_1$$

فلان التكامل الاول لا يعتمد على س يكون

$$\frac{\partial}{\partial S} \bar{Q} = (S, V) = \frac{\partial}{\partial S} \int_{\mathcal{P}} \bar{Q} \cdot d\mathcal{P} + 0 = \frac{\partial}{\partial S} \int_{\mathcal{P}} \bar{Q} \cdot d\mathcal{P}$$

(٢٣) النقطة (س ، ص ، ع) في فضاء ذي ثلاثة ابعاد تؤثر عليها قوة $\vec{C}$ (س ، ص ، ع) ،
 $\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \vec{C}_3$. أوجد الشغل الذي تبذله $\vec{C}$ (س ، ص ، ع) عندما تتحرك نقطة تأثيرها على المنحنى $s = n$ ، $v = n^2$ ، $c = n^3$ ، من
 (٠ ، ٠ ، ٠) الى (٢ ، ٤ ، ٨) .

(٢٤) حل التمرين ٢٣ اذا كان $\vec{C}$ (س ، ص ، ع) $\vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \vec{C}_3$ و $\vec{C}_1 = z$
 (٢٥) سلك رفيع متغير الكثافة على هيئة المنحنى m في المستوى $s = v$. عرف عزمي
 قصوره الذاتي $\vec{C}_1$ ، $\vec{C}_2$ بالنسبة الى محوري s ، v . أوجد هذين العزمين
 للسلك المذكور في التمرين ١٦ .

(٢٦) أوجد عزمي القصور الذاتي $\vec{C}_1$ ، $\vec{C}_2$ ، $\vec{C}_3$ للسلك المبين بالتمرين ١٥ .
 (٢٧) سلك متغير الكثافة على هيئة منحن في الفضاء . عرف عزم قصوره الذاتي بالنسبة
 للمحاور s ، v ، c .

(٢٨) أوجد عزم القصور الذاتي بالنسبة الى المحور للسلك المذكور في التمرين ١٨ (انظر
 ايضا التمرين ٢٧) .

٣ — استقلال التكامل الخطي عن مساره :

يقال للمنحنى الممهد القطع الذي يصل بين نقطتين P ، B انه المسار من P الى
 B . وسندرس الان شروطا اذ توافرت فان التكامل الخطي لا يعتمد على المسار الذي
 نتخاذه بمعنى انه اذا كانت P ، B نقطتين عشوائيتين فان قيمة التكامل من P الى B هي
 نفسها مهما اختلف المسار الذي يتبع وسنستخرج نتائج تسري على التكامل الخطي في
 بعدين . اما في الابعاد الثلاثة فالبراهين مماثلة وسنحذفها وسنعتبر من الان ان كل منطقة
 قيد الدرس انما هي متواصلة بمعنى ان اي نقطتين في المنطقة يمكن ان يصل بينهما منحن
 ممهد القطع يقع كله في المنطقة . وفي هذا البند سنعتبر ايضا ان لكل نقطة P في منطقة
 مستوية τ دائرة مركزها P وتقع كلها في τ فالمنطقة التي على هذا النحو تسمى منطقة
 مفتوحة . والنظرية التالية تؤدي الى النتيجة الاساسية وهي انه اذا كان الاقتران المتجه $\vec{C}$
 متصلا على τ فان التكامل الخطي $\int_P^Q \vec{C} \cdot d\vec{r}$ يكون مستقلا عن المسار اذا وفقط اذا
 كان $\vec{C}$ محافظا .

(١٨ - ١٥) نظرية : ليكن $\vec{C}$ (س ، ص) = m (س ، ص) $\vec{h} + n$ (س ،
 v) متصلا في المنطقة τ . فاذا كانت P ، B نقطتين في τ وكان m مسارا

(١٤) أوجد قيمة $\int (س ص + ع) د$ وعلما بان $م$ هو الحلزوني $س = م جتا ت$ ،

$$ص = م جات ، ع = ب ت ، . \geq ت \geq ٢$$

(١٥) وضع سلك في مستوى احداثي بحيث اتخذ شكل المكافيء $ص = ٤ - س^٢$ من $(٠، ٢)$ الى $(٠، ٠)$. أوجد كتلة السلك ومركز الكتلة اذا كانت كثافته في النقطة $(س، ص)$ تتناسب طرديا مع بعد النقطة عن محور $ص$.

(١٦) سلك رفيع في مستوى افقي له شكل المنحنى $ص = \sqrt{١ - س^٢}$ من $(٠، ١)$ الى $(١، ٠)$. أوجد كتلته ومركزها اذا علم ان كثافته في $(س، ص)$ تتناسب طرديا مع البعد عن محور $س$.

(١٧) وسع تعريف الكتلة ومركز الكتلة للسلك الرقيق حتى يشمل ثلاثة ابعاد .

(١٨) سلك ذو كثافة منتظمة انحنى على نحو يطابق الحلزوني $س = م جتا ن$ ، $ص = م جان$ ، $ع = ب ن$ ، حيث $٣ \geq ن \geq ٠$. أوجد كتلة السلك ومركزها (انظر التمرين ١٧) .

(١٩) اذا كان $ق = (س، ص)$ $= س ص^٢ هـ + س^٢ ص و$ فأوجد قيمة $\int ق . د$ على طول المنحنيات المذكورة في (م) الى (د) من التمرين ٧ .

(٢٠) اذا كان $ق = (س، ص)$ $= (٢ س + ص) هـ + (س + ٢ ص) و$ فأوجد قيمة $ق . د$ على المنحنيات المذكورة في (م) الى (د) من التمرين ٨ .

(٢١) النقطة $(س، ص)$ في مستوى احداثي تؤثر عليها قوة معرفة بالصيغة

$$ق = (س، ص) = \frac{س}{\sqrt{٣}} حيث \vec{ر} = س هـ + ص و . اوجد الشغل الذي$$

تبذله $ق$ عندما تتحرك نقطة تأثيرها على النصف العلوي للدائرة $س^٢ + ص^٢ =$

$$٢٢ من (٠، م -) الى (٠، م) .$$

(٢٢) النقطة $(س، ص)$ في مستوى احداثي تؤثر عليها قوة معرفة كما يلي :

$$ق = (س، ص) = (س^٢ + ص^٢) هـ + س ص و . اوجد الشغل الذي$$

تبذله $ق$ عندما تتحرك نقطة تأثيرها على منحنى $ص = س^٢$ من

$$(٠، ٠) الى (٠، ٤) .$$

(ج) م قطعة خطية من (٢ ، ١) الى (٢ ، -٢) ، (٨ ، ٨) .

(د) م منحنى ص = ٢ س + ٢ من (٢ ، ١) الى (٢ ، -٢) ، (٨ ، ٨) .

(٩) ما قيمة $\int_C (س + ع + ص) دس + (ع + ص) دص + س د ع$ اذا اعطي م بالمعادلات

$$س = ع ، ع = ص ، ع = ٢ س ، ٠ \leq ت \leq ١ .$$

(١٠) ما قيمة $\int_C (ص د س + س د ع + ع د ص + س د ع + ع د ص + ص د س)$ اذا اعطي م بالمعادلات س = جان ،

$$ص = ٢ جان ، ع = جان^٢ ، ٠ \leq ن \leq \frac{\pi}{٢}$$

(٢ ، ٣ ، ٤)

(١١) أوجد قيمة $\int_C (س + ع + ص) دس + (س - ص + ع) دص + (ع + ص + س) د ع$ (٠ ، ٠ ، ٠)

د ص + (٢ س + ص - ع) د ع لكل من المنحنيات التالية من (٠ ، ٠ ، ٠) الى (٢ ، ٣ ، ٤) .

(أ) يتكون م من ثلاث قطع خطية اولها توازي محور س والثانية توازي محور ص والثالثة توازي محور ع

(ب) يتكون م من ثلاث قطع خطية اولها توازي محور ع والثانية توازي محور س والثالثة توازي محور ص .

(ج) يتكون م من قطعة خطية واحدة .

(٤ - ، ٥ ، ٢)

(١٢) أوجد قيمة $\int_C (س - ص) دس + (ص - ع) دص + (ع - س) د ع$ (١ ، -٢ ، ٣)

حيث المنحنى م من (١ ، -٢ ، ٣) الى (٤ - ، ٥ ، ٢) على غرار ما ذكر في (أ) و (ب) و (ج) في التمرين ١١ .

(١٣) أوجد قيمة $\int_C (س ص ع + ع و و + و و و)$ من (٠ ، ٠ ، ٠) الى (١ ، ٢ ، ٣) .

(٢) v (س ، ص) = س ص^{٥/٢} ، س = $\frac{1}{4}$ ت ، ص = ت^{٥/٢} ، $t \geq 1$

(٣) ما قيمة $\int_0^6$ س^٢ ص د س + س ص د ص حيث م هو منحني ص =

س^٣ + ١ من (٠ ، ١ -) الى (٢ ، ١) ؟

(٤) ما قيمة $\int_0^4$ ص د س + (س + ص) د ص حيث م هو منحني ص = س^٢ +

س من (٠ ، ٠) الى (٢ ، ٨) ؟

(٥) ما قيمة $\int_0^4$ (س - ص) د س + س د ص حيث م هو منحني ص^٢ = س من

(٢ ، ٤ -) الى (٢ ، ٤) ؟

(٦) ما قيمة $\int_0^6$ س ص د س + س^٢ ص^٣ د ص حيث م هو منحني س = ص^٣ من

(٠ ، ٠) الى (١ ، ١) ؟

(٧) ما قيمة $\int_0^4$ س ص د س + (س + ص) د ص لكل ما يلي :

(أ) م تتكون من قطعتين خطيتين احدهما من (٠ ، ٠) الى (٠ ، ١) والـ
الثانية من (٠ ، ١) الى (٣ ، ١) .

(ب) م تتكون من قطعتين خطيتين احدهما من (٠ ، ٠) الى (٣ ، ٠) والـ
الثانية من (٣ ، ٠) الى (٣ ، ١) .

(ج) م قطعة خطية واحدة من (٠ ، ٠) الى (٣ ، ١) .

(د) م قطعة من قطع مكافئ ص = س^٣ من (٠ ، ٠) الى (٣ ، ١) .

(٨) ما قيمة $\int_0^8$ (س^٢ + ص^٢) د س + س د ص لكل مما يلي :

(أ) م قطعتان خطيتان من (٢ ، ١) الى (٨ ، ١) ومن (٨ ، ١) الى

(٨ ، ٢ -) .

(ب) م قطعتان خطيتان من (٢ ، ١) الى (٢ ، ٢ -) ومن (٢ ، ٢ -) الى

(٨ ، ٢ -) .

مثال ٦ : اذا اعطي حقل قوة تربيعية عكسية بالصيغة $\bar{Q} (س، ص، ع) =$

$$\frac{ك}{\bar{Q}} \text{ فأوجد الشغل الذي تبذله } \bar{Q} \text{ عندما تتحرك نقطة تأثيرها على محاور}$$

من ١ (٠، ٠، ١) الى ب (٠، ٠، ٢)

الحل : لتكن ج تمثل القطعة الخطية ، فلأن :

$$\bar{Q} (س، ص، ع) = \frac{ك}{\frac{1}{2}(س^2 + ص^2 + ع^2)}$$

$$+ ع \bar{Q}$$

ينتج من (١٨-١٤) ان :

$$\text{شه} = \int_{ج} \bar{Q} \cdot د \bar{Q} = \int_{ج} \frac{ك}{\frac{1}{2}(س^2 + ص^2 + ع^2)}$$

$$(س د س + ص د ص + ع د ع)$$

ولأن ج تعرف وسيطيا بالمعادلات $س = ت$ ، $ص = ٠$ ، $ع = ٠$ حيث $١ \geq ت \geq ٢$ نعوض في التكامل السابق ونبسط العبارة فينتج :

$$\text{شه} = \int_1^2 \frac{ك}{\frac{1}{2}(ت^2)} \cdot د ت = \frac{ك}{ت} \cdot د ت = \frac{ك}{ت} \cdot ٢ د ت = \frac{ك}{٢} \cdot \frac{٢}{٣} (ت^3)$$

وحدات شه تعتمد على وحدات المسافة و $|\bar{Q}| (س، ص، ع)$

تمارين :

في التمرينين ١ ، ٢ جد قيم التكاملات (١٨-٦) و (١٨-٩) و (١٨-١٠) اذا عرف م وسيطيا بالمعادلات المعطاة :

$$(١) \quad ٥ (س، ص) = س^3 + ص^3 ، س = ٣ ت ، ص = ت^3 ، ٠ \leq ت \leq ١$$

حيث $s = ج (ت)$ ، $v = ح (ت)$ ، $e = خ (ت)$ يكون $ز (ت)$ هو متجه الموضع للنقطة $ط (س ، ص ، ع)$ على م. فإذا كان $ط$ يدل على طول القوس مقيساً على طول م ، فكما في البند ٤ من الفصل ١٥ يكون متجه الوحدة $\gamma (ط)$ الذي يمس م عند النقطة ن هو

$$\bar{p} = \bar{p}_t + \bar{p}_s + \bar{p}_v = \frac{p_t}{p} + \frac{p_s}{p} + \frac{p_v}{p}$$

وتكون مركبة قَ المماسة عند ن هي :

$$\frac{\text{ق (س، ص، ع)}}{\text{ط}} = \text{م (س، ص، ع)} \quad \frac{\text{س}}{\text{ط}}$$

$$\frac{\text{ن (س، ص، ع)}}{\text{ط}} + \text{ل (س، ص، ع)} = \frac{\text{ع}}{\text{ط}} + \frac{\text{ص}}{\text{ط}}$$

فالصيغة (١٨-١١) يمكن ان تكتب على النحو:

(۱۸-۱۳) $\left[\bar{v} \text{ (س، ص، ع) } . \bar{y} \text{ (ط) } \right] = \text{ش}$

اي ان الشغل الذي يبذل عندما تتحرك نقطة تأثير القوة Q (س ، ص ، ع) على طول م يساوي التكامل الخطي لمركبة Q العمودية على طول م . وقد نخصر

ق (س، ص، ع) الى ق وتختصر ٧ (ط) الى ٧ ونكتب
 وِر = س هـ + ص و + ع ز = ٧ و ط

ففي هذه الحالة يتحول (١٨-١١) و (١٨-١٢) الى الصيغة :

(۱۸-۱۴) $\int_C \bar{q} \cdot \bar{\gamma} \, ds = \int_C q \cdot \bar{\gamma} \, ds$

وَممكن استعمال الصيغة ذاتها بدل (١٨-١٢)

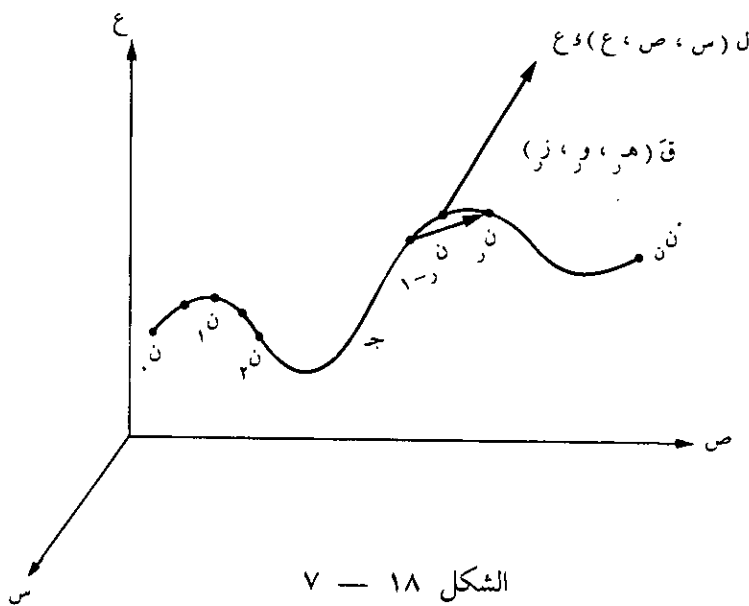
وبديهي ان نعتبر ان $\bar{e}$ و $\bar{r}$ يمثل الشغل الذي يبذل لتحريك نقطة تأثير e على المتجه m للمنحنى $\bar{r}$ وان اشارة التكامل تمثل نهاية مجموع الشغل .

والشغل شه الذي تبذله قوة قَ على طول م هو حسب التعريف

$$\text{شه} = \frac{\text{نـها}}{\text{||ه||}} \quad \Delta \text{ شـر}$$

فالشغل شه يعطيه اذن التكامل الخطي :

$$(11-18) \quad \text{شه} = \int_m (س، ص، ع) دس + ن (س، ص، ع) دص +$$



الشكل ١٨ — ٧

ومثل هذا يقع في المستوى ذي البعدين . فاذا اعطي حقل القوة بالصيغة
 $قَ (س، ص) = م (س، ص) هـ + ن (س، ص) و$
 وكان م منحنيًا محدودًا بقطع ممهدة فالشغل المبذول عندما تتحرك نقطة تأثير قَ
 (س، ص) على طول م يعطي بالصيغة :

$$(12-18) \quad \text{شه} = \int_m (س، ص) دس + ن (س، ص) دص$$

ومن الممتع المفيد تفسير (١١-١٨) بلغة المتجهات : فاذا جعلنا

$$\vec{r} = (ت) = س \vec{هـ} + ص \vec{و} + ع \vec{ز}$$

مثال ٥ : ما قيمة $\left[\begin{matrix} \text{ص ع و س} + \text{س ع و ص} + \text{س ص و ع} \end{matrix} \right]_{\text{م}}$ حيث م هو المنحنى

التكميبي الملوي

$$\text{س} = \text{ت} , \text{ص} = \text{ت}^2 , \text{ع} = \text{ت}^3 , 0 \leq \text{ت} \leq 2$$

الحل : بتعويض قيم س ، ص ، ع وملاحظة ان و س = و ت ، و ص = و ت² ، و ت = و ت³ ينتج

$$\left[\begin{matrix} \text{ت}^3 + \text{ت}^2 + \text{ت} \end{matrix} \right]_{\text{م}} = \left[\begin{matrix} \text{ت}^3 + \text{ت}^2 + \text{ت} \end{matrix} \right]_{\text{ت}^2} = 64 =$$

ومن اهم التطبيقات الفزيائية للتكامل الخطي ما يتعلق بحقول القوى . فلنفرض انه يؤثر على النقطة (س ، ص ، ع) قوة معرفة بالحقل المتجه :
 $\vec{Q} = (س ، ص ، ع) = م(س ، ص ، ع) + ن(ع ، ص ، س) + و(ع ، ص ، و)$
 ل (س ، ص ، ع) $\vec{r}$

حيث م ، ن ، ل اقترانات متصلة في مجال مناسب . والمطلوب ان نجد الشغل الذي يبذل عندما تتحرك نقطة تأثير $\vec{Q}$ (س ، ص ، ع) على منحنى م حيث م معرفة وسيطيا بالمعادلات

$$\text{س} = ج(ت) , \text{ص} = ح(ت) , \text{ع} = خ(ت) , ٢ \leq ت \leq ٦ .$$

تبدأ بتجزئة م كما في الشكل ١٨ - ٧ حيث لكل ر يكون للنقطتين ن_ر ، ط_ر

الاحداثيات (س_ر ، ص_ر ، ع_ر) ، (ي_ر ، ف_ر ، ش_ر) على التوالي . فاذا

كان Δ صغيرا يكون الشغل الذي تبذله $\vec{Q}$ (س ، ص ، ع) على طول

القوس ن_{ر-١} ن_ر يساوي على وجه التقريب للشغل الذي تبذله القوة الثابتة $\vec{Q}$

(ي_ر ، ف_ر ، ش_ر) عندما تتحرك نقطة تأثيرها على ن_{ر-١} ن_ر واذا كان

$$\Delta \text{س}_\text{ر} = \text{س}_\text{ر} - \text{س}_\text{ر-١} , \Delta \text{ص}_\text{ر} = \text{ص}_\text{ر} - \text{ص}_\text{ر-١} , \Delta \text{ع}_\text{ر} = \text{ع}_\text{ر} - \text{ع}_\text{ر-١}$$

يكون ن_{ر-١} ن_ر يناظر المتجه $\Delta \text{س}_\text{ر} \vec{i} + \Delta \text{ص}_\text{ر} \vec{j} + \Delta \text{ع}_\text{ر} \vec{k}$ في

مجم_٣ فن (١٤ - ٢٦) يكون

$$\Delta \text{ش}_\text{ر} = \vec{Q} \cdot (ي_\text{ر} \vec{i} + ف_\text{ر} \vec{j} + ش_\text{ر} \vec{k}) = (\Delta \text{س}_\text{ر} \vec{i} + \Delta \text{ص}_\text{ر} \vec{j} + \Delta \text{ع}_\text{ر} \vec{k}) \cdot (ي_\text{ر} \vec{i} + ف_\text{ر} \vec{j} + ش_\text{ر} \vec{k})$$

$$= م(ي_\text{ر} \Delta \text{س}_\text{ر} + ف_\text{ر} \Delta \text{ص}_\text{ر} + ش_\text{ر} \Delta \text{ع}_\text{ر}) + ن(ي_\text{ر} \Delta \text{ف}_\text{ر} + ف_\text{ر} \Delta \text{ع}_\text{ر} + ش_\text{ر} \Delta \text{س}_\text{ر}) + ل(ي_\text{ر} \Delta \text{ع}_\text{ر} + ف_\text{ر} \Delta \text{س}_\text{ر} + ش_\text{ر} \Delta \text{ف}_\text{ر})$$

$$= \Delta \text{ع}_\text{ر} (ي_\text{ر} \text{ش}_\text{ر} + ف_\text{ر} \text{ش}_\text{ر} + ش_\text{ر} \text{ش}_\text{ر})$$

س = ج (ت) ، ص = ح (ت) ، ع = خ (ت)
 حيث الاقترانات ج ، ح ، خ ممهدة على [پ ، ب] ، فالتكاملات الخطية
 بابعاد ثلاثة تعرف كما تعرف الاقترانات ذات البعدين . ولكن بدل ان نستعمل
 (س_ر ، ص_ر) و (ي_ر ، ف_ر) للدلالة على ن_ر ، ط_ر على م (انظر الشكل
 ١٨ - ٤) نستعمل (س_ر ، ص_ر ، ع_ر) و (ي_ر ، ف_ر ، ش_ر) على التوالي .
 وبديل (١٨ - ٦) نستعمل هنا

$$\left[\begin{array}{c} \text{ق (س ، ص ، ع) و = نهـ} \\ \text{ق (ي ، ف ، ش)} \end{array} \right]_{\text{ر}} \quad \Delta ||$$

و^Δ

ونجد قيمة هذا التكامل باستعمال الصيغة

$$\left[\begin{array}{c} \text{ق (ج (ت) ، ح (ت) ، خ (ت))} \\ \text{پ} \end{array} \right]$$

$$\sqrt{\text{ج (ت) (ت) + ح (ت) (ت) + خ (ت) (ت) و}$$

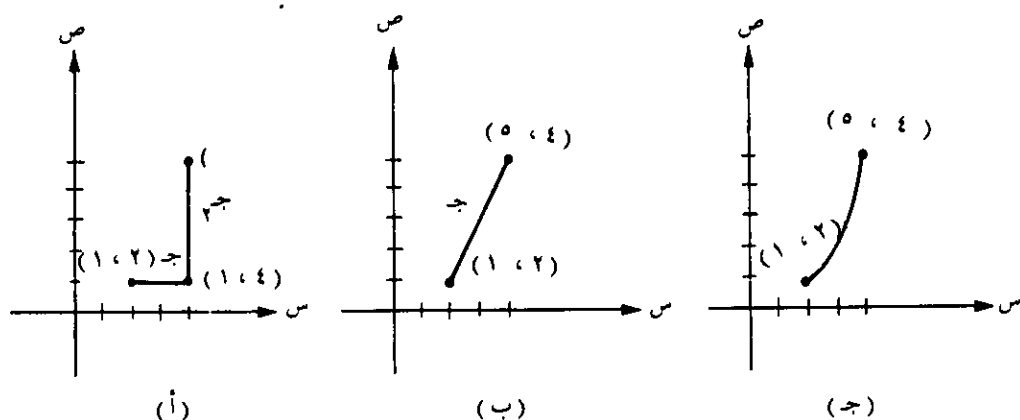
وبالاضافة الى التكاملات الخطية بالنسبة الى س ، ص هنالك تكامل خطي
 بالنسبة الى ع ، في حالة الابعاد الثلاثة ويعطى بالصيغة

$$\left[\begin{array}{c} \text{ق (س ، ص ، ع) و = نهـ} \\ \text{ق (ي ، ف ، ش) ع} \end{array} \right]_{\text{ر}} \quad \Delta ||$$

حيث $\Delta \text{ ع} = \text{ع} - \text{ع}_1$

وكما في حالة ذوات البعدين ترد هذه التكاملات الخطية عادة بالصيغة
 م (س ، ص ، ع) و س + ن (س ، ص ، ع) و ص + ل (س ،
 ص ، ع) و ع حيث م ، ن ، ل اقترانات في س ، ص ، ع متصلة على طول
 منطقة تحوى م . واذا اعطى م بمعادلات وسيطة تحسب قيمة هذا التكامل
 الخطي بتعويض قيم س ، ص ، ع كما في حالة ذوات البعدين .

(ج) منحنى مـ قطعة من قطع مكافئ (انظر الشكل ١٨ - ٦ ج) فلان
 $و س = ٣$ و $ت = ٢$ ، و $ص = ٤$ و $٢ - ت = ٢$ و $١ - ت = ١$ فالتكامل يساوي



الشكل ١٨ - ٦

$$\int_1^{5/3} (٢ - ت) (١ - ت) (٣ - ت) \times و ت + (١ - ت) (٣ - ت) \times و ت + (١ - ت) (٣ - ت) \times و ت$$

(٦ - ت) و ت ونترك للقارئ ان يبين ان القيمة المطلوبة هي ٥٨ .
وهناك طريقة اخرى لحل هذا القسم وذلك باستعمال المعادلة $ص = \frac{١}{٣} (س)^٢$
(١ - ت) ، باحداثيات متعامدة وهي معادلة قطع مكافئ ، $٢ \leq س \leq ٤$. وهنا
يمكن ان نستعمل التكامل البسيط التالي :

$$\int_2^4 (س - ٢) (١ - \frac{١}{٣} س) \times و س = \int_2^4 (س - ٢) (١ - \frac{١}{٣} س) \times و س + س - ٢$$

$$\frac{٢}{٣} (س) و س = ٥٨$$

في المثال السابق وجدنا ثلاث قيم مختلفة للتكامل الخطي على طول ثلاثة
منحنيات مختلفة ولكنها كلها توصل من (١ ، ٢) الى (٥ ، ٤) . وفي البند ٣
سندرس تكاملات خطية تكون ثابتة القيمة بين النقطتين P ، ب مهما اختلفت
طرق الوصول من احدهما الى الاخرى . فهذه التكاملات مستقلة عن المسار
اذا اعطى المنحنى مـ في ثلاثة ابعاد بالمعادلات الوسيطة :

فالتكامل الخطي على طول $\mathcal{M}$ نعبر عنه كمجموع تكاملين خطيين احدهما على طول $\mathcal{M}_1$ والثاني على طول $\mathcal{M}_2$ فعلى $\mathcal{M}_1$ لدينا $z = 0$ ، $z = s$ و $z = t$ فيكون

$$\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right]$$

وعلى مَن لدينا و س = ٠ ، و ص = و ت فيكون

$$٦٤ = \int_1^0 \left[\begin{matrix} ١٦ = ١٦ + ٠ \\ ١ \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \text{س ص و س} + \text{س}^2 \text{ و ص} \\ ١ \end{matrix} \right]$$

فالتكامل الخطي على طول م يساوي $6 + 64$ اي ٧٠

(ب) منحني مخطط في الشكل ١٨ - ٦ ب ولان معادلة م بالاحداثيات المتعامدة هي $v = 2s - 3$ حيث $2 \geq s \geq 4$ ، يمكن ان نكتب

$$\left[\begin{matrix} \text{س ۱ ص ۱} + \text{س ۲ ص ۲} \\ \text{س ۳ ص ۳} + \text{س ۴ ص ۴} \\ \text{س ۵ ص ۵} + \text{س ۶ ص ۶} \\ \text{س ۷ ص ۷} + \text{س ۸ ص ۸} \\ \text{س ۹ ص ۹} + \text{س ۱۰ ص ۱۰} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \text{س ۱ ص ۱} + \text{س ۲ ص ۲} \\ \text{س ۳ ص ۳} + \text{س ۴ ص ۴} \\ \text{س ۵ ص ۵} + \text{س ۶ ص ۶} \\ \text{س ۷ ص ۷} + \text{س ۸ ص ۸} \\ \text{س ۹ ص ۹} + \text{س ۱۰ ص ۱۰} \end{matrix} \right]$$

$$= \left. \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} (4s^2 - 3s) \text{ و } s$$

$$07 \frac{2}{3} = \frac{140}{3} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{س} \text{ ص}^2 \text{ و} \text{ س} \\ \text{س} \text{ (س}^4 \text{ و} \text{ س} \end{array} \right] = 3/32$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{س} \text{ ص}^2 \text{ و} \text{ ص} \\ \text{س} \text{ (س}^4 \text{ س}^2 \text{ و} \text{ س} \end{array} \right] = 7/256$$

ونصادف التكاملات الخطية في التطبيقات على صيغة مجموع كالتالي :

$$\left[\begin{array}{c} \text{ك} \text{ (س ، ص) و} \text{ س} \\ \text{ن} \text{ (س ، ص) و} \text{ ن} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{ن} \text{ (س ، ص) و} \text{ ن} \\ \text{ك} \text{ (س ، ص) و} \text{ س} \end{array} \right]$$

حيث م ، ن اقترانان متصلان في المجال الذي يحوي م . فيختصر هذا المجموع عادة الى :

$$\left[\begin{array}{c} \text{م} \text{ (س ، ص) و} \text{ س} + \text{ن} \text{ (س ، ص) و} \text{ ص} \end{array} \right]$$

فاذا اعطى م وسيطيا بمعادلتين س = ج (ت) ، ص = ح (ت) حيث
 $\rho \geq 1$ س يمكن إيجاد قيمة التكامل بالتعويض عن س ، ص ، و س ،
 و ص كما سبق

مثال ٤ : أوجد قيمة $\left[\begin{array}{c} \text{س} \text{ ص}^2 \text{ و} \text{ س} + \text{س}^2 \text{ و} \text{ ص} \end{array} \right]$ لكل من المنحنيات التالية :

(١) م يتكون من قطعتين خطيتين من (١ ، ٢) الى (١ ، ٤) ومن (١ ، ٤) الى (٥ ، ٤)

(ب) م قطعة خطية من (١ ، ٢) الى (٥ ، ٤)

(ج) م لها المعادلتان الوسيطيتان س = ٣ - ت ، ص = ٣ - ت^٢ -
 ٢ ، ت ≥ ١ ، ت ≥ ٣/٥

الحل : (١) اذا قسمنا م الى جزأين م_١ ، م_٢ كما في شكل ١٨-٦ (أ)
 فالمعادلات الوسيطية لهذين الجزأين هي :

فيكون

$$p \cdot 0,8 \approx p \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{p \cdot \pi \cdot \frac{1}{4}}{2p \cdot \frac{1}{2}} = \frac{z_{س}}{ك} = ص$$

ولانه واضح ان $س = 0$ نقول ان مركز الكتلة على محور ص وهو تقريبا على $\frac{4}{5}$ المسافة من محور س الى قمة الدائرة .

ويمكن الحصول على نوعين آخرين من التكاملات الخطية باستعمال Δ س ر ، Δ ص ر بدلا من Δ و ر في (١٨ - ٦) . وهما تكاملا في الخطيان على م بالنسبة الى س ، ص . فمن التعريف ينتج .

$$(١٨ - ٩) \int_M (س ، ص) د س = \int_M \frac{1}{\|\Delta\|} (ي ر ، ف ر) د س ر$$

$$(١٨ - ١٠) \int_M (س ، ص) د ص = \int_M \frac{1}{\|\Delta\|} (ي ر ، ف ر) د ص ر$$

واذا شئنا تحديد طرفي م نكتب التكاملين كما يلي :

$$\int_M (س ، ص) د س ، \int_M (س ، ص) د ص$$

واذا اعطي م بمعادلتين وسيطيتين $س = ج (ت) ، ص = ح (ت)$ حيث $م \geq ت \geq ب$ فيمكن ايجاد قيمتي التكاملين بتعويض $ج (ت) ، ح (ت)$ بدلا من س ، ص على التوالي ، وطبعاً نجعل $د س = ج'(ت) د ت ، د ص = ح'(ت) د ت$ ، ونتخذ م ، و ب طرفين للتكامل .

مثال ٣ : ما قيمة (١٨ - ٨) و (١٨ - ٩) اذا كان $ه (س ، ص) = س ص^2$ وكان م قوسا في القطع المكافيء $ص = س^2$ من $پ (٠ ، ٠)$ الى $ب (٢ ، ٤)$ ،

(٤)

وكما في (١٧ - ٢٢) يعطى مركز الكتلة (س ، ص) لهذا السلك بالمعادلتين

$$\frac{ز\text{س}}{ك} = \bar{ص} , \quad \frac{ز\text{ص}}{ك} = \bar{س}$$

وكذلك عزوم القصور الذاتي تعرف بطريقة مماثلة (انظر التمرين ٢٥)

مثال ٢ : حني سلك رفيع فصار على هيئة نصف دائرة قطرها ٢ م فاذا علم ان كثافته عند اي نقطة ن تتناسب طرديا مع بعدها عن القطر . أوجد مركز ثقل السلك

الحل : نأخذ نظام إحداثيات يجعل السلك هو النصف العلوي من دائرة نصف قطرها م ومركزها نقطة الاصل . فتكون معادلتا م الوسيطيتان :

$$س = م جتا ن , ص = م جا ن , . ن \geq \pi$$

والكثافة حسب الفرض اقتران ق يعرف بالمعادلة ق (س ، ص) = ك ص حيث ك عدد ثابت . فكتلة السلك هي :

$$\int_{\pi}^0 \left[ك ص و = ك م جا ن \sqrt{٢} + ٢ م جتا ن و ن \right]$$

$$= \int_{\pi}^0 \left[ك م (جا ن) . م و ن - ك ٢ م جتا ن و ن \right]$$

وحسب (١٨ - ٨) : $ز\text{س} = \int_{\pi}^0 ص ك ص و = \int_{\pi}^0 ك ٢ م جا ن و ن$

$$= \int_{\pi}^0 ك ٢ م \frac{١ - جتا ن}{٢} و ن$$

$$= ك ٢ م \left[\frac{١}{٢} ن - \frac{١}{٤} جا ن \right]$$

$$= \frac{١}{٢} \pi ك ٢ م$$

ويمكن ان نثبت خصائص للتكامل الخطي تشبه تلك التي حصلنا عليها للتكامل المحدد في الفصل الخامس فمثلا يمكن ان نثبت ان عكس اتجاه التكامل يعكس اشارته وان تكامل مجموع اقترانين يساوي مجموع تكامليهما ، وهكذا .

وللحصول على تفسير هندسي للصيغة (١٨ - ٦) نفرض ان ق (س ، ص) على طول د وننظر في المنحنى والمعادلة $E = C (S, V)$ في نظام ذي ثلاثة احداثيات متعامدة . فكما يظهر بالشكل ١٨ - ٥ يكون ق (ى ، ف) Δ و هو المساحة السطحية لشريحة قاعدتها N_1 ن في مستوى س ص وارتفاعها ق (ى ، ف) . ونهاية مجموع هذه الحدود هي مساحة جزء من اسطوانة دليلها م ورواسمها توازي محور ع ، وهذا الجزء يقع بين محور س ص والمنحنى و .

ونصادف تطبيقا فريائيا للتكامل الخطي (١٨ - ٦) عندما يكون المنحنى مثل سلك رقيق ذي كثافة متغيرة . فاذا مثلنا السلك بالمنحنى م في الشكل ١٨ - ٤ وكانت الكثافة في النقطة (س ، ص) هي ق (س ، ص) يكون ق (ى ، ف) Δ و هو بالتقريب الكتلة Δ ك لذلك الجزء من السلك الواقع بين N_1 ، ن ، ويكون المجموع :

$$\sum_r \Delta K_r = \sum_r C (Y_r, F_r) \Delta$$

هو بالتقريب الكتلة الكلية للسلك ، ولايجادها نبحت عن نهاية هذا المجموع فيكون :

$$K = \int_C C (S, V) dS$$

والعزم Z_s ، Z_v للسلك حول كل من محوري س ، ص يعرفان على نحو مماثل تعريف عزوم المستطيل في (١٧ - ٢٠) ، (١٧ - ٢١) ، اي ان

$$(٧-١٨) \quad \left[\begin{array}{c} \text{ق (س ، ص) و} \\ \text{ق (ج (ت) ، ح (ت))} \end{array} \right] = \sqrt{(\text{ج (ت)})^2 + (\text{ح (ت)})^2} \cdot \text{و ت}$$

اي اننا نستعمل (١٨ - ٤) للتعويض عن س ، ص ونعوض عن و وبالعبارة التي تحتوي على اشارة الجذر وهذه العبارة الجذرية تنتج عن طول القوس الذي تقدم في الفصل ١٣ (انظر (١٣ - ٢٠)). ويجدر بالملاحظة انه اذا كان م فترة ما على محور س كان Δ و $\Delta = \text{س}$ وكان كل $\text{ف} = \text{ص}$ وتحويل (١٨ - ٦) الى تكامل محدود من النوع الذي شرحناه في الفصل الخامس . ويمكن توسيع التعريف (١٨ - ٦) حتى يشمل منحنيات أكثر تعقيدا . وبالتخصيص لنفرض ان المنحنى م ممهد قطعة قطعة (piecewise smooth) بمعنى انه يمكن ان يعبر عنه باتحاد عدد محدود من المنحنيات م_١ ، م_٢ ، ... ، م_{١٠٠٠} ، من كل منها من النوع المشار اليه في (١٨ - ٤) حيث يكون الطرف الاخير م_{١٠٠٠} من م_١ هو الطرف الاول م_١ من م_٢ ، لكل $\text{ر} = ١ ، ٢ ، \dots ، ١٠٠٠$ ، ن - ١ . ففي هذه الحالة يعرف التكامل الخطي للاقتران ق_١ على طول م_١ على انه مجموع التكاملات الخطية على منحنياته الجزئية اي قطعه .

مثال ١ : أوجد قيمة $\int_{\text{م}} \text{س ص}^2 \text{و} \text{و حيث م تعبر عنه المعادلتان الوسيطيتان}$

$$\text{س} = \text{جتا ن} ، \text{ص} = \text{جان} ، ٠ \leq \text{ن} \leq ٢/\pi$$

الحل : المنحنى م هو من دائرة الوحدة التي مركزها نقطة الاصل ذلك الجزء الواقع في الربع الاول . فنطبق (١٨ - ٧) فيكون

$$\begin{aligned} \int_{\text{م}} \text{س ص}^2 \text{و} \text{و} &= \int_0^{2/\pi} \left[\text{جتا ن} \cdot \text{جا}^2 \text{ن} \cdot \sqrt{\text{جا}^2 \text{ن} + \text{جتا}^2 \text{ن}} \right] \text{و} \text{و} \text{ن} \\ &= \int_0^{2/\pi} \text{جا}^2 \text{ن} \cdot \text{جتا ن} \cdot \text{و} \text{و} \text{ن} \\ &= \int_0^{2/\pi} \frac{1}{3} \text{جا}^3 \text{ن} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

و (س_ر ، ص_ر) نقطة على مـ تقابل ت_ر . ليكن Δ س_ر = س_ر - س_{ر-١} ،
 Δ ص_ر = ص_ر - ص_{ر-١} ، وليكن Δ و هو طول القوس $\overline{ن_{ر-١} ن_{ر}}$ في المقدار
 $||\Delta||$ في تجزئة مـ هو حسب التعريف أكبر الاجزاء Δ و . فنختار الان في كل
قوس $\overline{ن_{ر-١} ن_{ر}}$ نقطة ط_ر (ي_ر ، ف_ر) كما في الشكل ١٨ - ٤ ولكل ر
نجد قيمة ق عند (ي_ر ، ف_ر) ، ونضرب هذا العدد بالمقدار Δ و فيتكون
المجموع :

$$(٥-١٨) \quad \sum_{r=1}^n (ي_r , ف_r) \Delta \text{ و } \Delta$$

وكما في (٥ - ١٥) اذا كان لهذا المجموع نهاية ل عند ما ن $\rightarrow \infty$ والمقياس
 $||\Delta|| \rightarrow 0$ وهذه النهاية مستقلة عن تجزئة [پ ، ب] وعن النقطة ط_ر
نقول ان ل هي التكامل الخطي للاقتراح على طول مـ من ن_م الى ن_ب ، ونرمز
له بالرمز

$$(٦-١٨) \quad \int_p^b (س , ص) د و = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_r (ي_r , ف_r) \Delta$$

واذا شئنا تحديد الطرفين پ ، ب للمنحنى مـ نكتب بدلا من (٦ - ١٨) :

$$\int_p^b (س , ص) د و$$

وفي هذه الحالة يبقى واضحا في الذهن ان المنحنى المقصود هو مـ ، الا في
حالات خاصة سزاها يكون فيها للتكامل الخطي قيمة ثابتة مهما كان الخط
الواصل من پ الى ب . ويمكن ان نثبت انه اذا كان ق متصلا على و كانت
النهاية في (٦ - ١٨) موجودة وكانت هي نفسها مهما تكن المعادلات الوسيطة
التي تدل على مـ . اصف الى ذلك ان قيمة التكامل تكون :

نها ق (س ، ص ، ع) = ع

(س ، ص ، ع) ← (س ، ص ، ع)

اعط تعريفاً لهذه النهاية بدلالة δ ، ϵ

ما تفسرها الهندسي ؟

٢٢ . اذا كان ق كما في (١٨ - ١) فعرف فكرة الاتصال عند (س ، ص ، ع) .
على نحو يشبه (١٥ - ٤) . ما التفسير الهندسي للاقتزان المتجه المتصل ؟

٢ — التكاملات الخطيئة :

ب ان مفهوم التكامل الخطي انما هو توسيع طبيعي لفكرة التكامل المحدد
 (س) و (س) الذي عرفناه في الفصل الخامس . ولنذكر اننا عندئذ بدأنا
 بتجزئة الفترة [١ ، ٢] الى ن من الفترات الجزئية اطوالها Δ_1 ، Δ_2 ، ... ، Δ_n
 س ثم اخترنا عددا ماع في كل فترة جزئية ووجدنا نهاية المجموع الريماني $\sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot \xi_i$ (ع)
 Δ_i س عندما تقترب كل Δ_i من الصفر . ومثل هذا يمكن ان يتبع مع الاقترانات التي
 تشمل عدة متغيرات . فمثلا اذا كان ق (س ، ص) معرفا على منحنى مستو محدود م
 يمكن ان نبدأ بتجزئة م الى ن من الأقواس اطوالها Δ_1 ، Δ_2 ، ... ، Δ_n ونأخذ
 نقطة (ي ، ف) في كل قوس ونبحث عن نهاية المجموع $\sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot f(\xi_i)$ (ي ، ف) و
 عندما يقترب كل Δ_i من الصفر .

ومثل هذه الخطوات يمكن اتباعها عندما يكون الاقتران ذا ثلاثة ابعاد معرفا على منحنى
 فضائي . ولتعد هذه الخطوات على نحو اكثر تحديدا :
 خذ منحنيا مستويا م معرفا بالمعادلتين الوسيطيتين :

$$(١٨ - ٤) \quad \begin{cases} \text{س} = \text{ج} (\text{ت}) , \\ \text{ص} = \text{ح} (\text{ت}) , \end{cases} \quad \text{ب} \geq \text{ت} \geq \text{ا}$$

حيث الاقترانان ج ، ح ممهدان في الفترة [١ ، ٢] ولنأخذ ق (س ، ص)
 حيث ق متصل في المنطقة د التي تحوى م ولتكن η ، θ نقطتين في م
 يحددهما الوسيطان η ، θ على التوالي ، والاتجاه الموجب على م هو الذي تتزايد
 فيه قيمة ت ولنجزئ الفترة [١ ، ٢] بأخذ $\eta = \text{ت} > \text{ا} > \text{ب} > \text{ت} > \text{ا}$.
 $\eta > \text{ا} > \text{ب} = \text{ت}$. وهذا يقضي الى تجزئة م الى اقواس Δ_1 ، Δ_2 ، ... ، Δ_n وحيث

تمارين :

في كل من التمارين ١ - ١٠ ارسم عددا من المتجهات ق (س ، ص ، ع) تبين نماذج من متجهات الحقل ق

- (١) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص}) = \text{س} \vec{h} - \text{ص} \vec{w}$
- (٢) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص}) = -\text{س} \vec{h} + \text{ص} \vec{w}$
- (٣) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص}) = 2\text{س} \vec{h} + 3\text{ص} \vec{w}$
- (٤) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص}) = 3\vec{h} + \text{ص} \vec{w}$
- (٥) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص}) = (2\text{س} + \text{ص})^{1/2} (\text{س} \vec{h} + \text{ص} \vec{w})$
- (٦) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) = \text{س} \vec{h} + \text{ع} \vec{z}$
- (٧) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) = -\text{س} \vec{h} - \text{ص} \vec{w} - \text{ع} \vec{z}$
- (٨) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) = \text{س} \vec{h} + \text{ص} \vec{w} + \text{ع} \vec{z}$
- (٩) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) = \vec{h} + \vec{w} + \vec{z}$
- (١٠) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) = 2\vec{z}$
- (١١) اذا كان ق هو الحقل المتجه في المثال ٢ فاثبت ان $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع})$

$$\Delta = \left(\frac{\vec{c}}{r} \right) \text{ حيث } r = |\vec{r}|$$

(١٢) أوجد اقترانا كامنا للحقل المتجه المعروف في (١٨-٣) .
في كل من التمارين ١٣ - ١٠ أوجد حقلًا متجهًا محافظًا يكون له الجهد المعطى

- (١٣) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) = \text{س}^2 - 3\text{ص}^2 + 4\text{ع}^2$
- (١٤) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) = \text{جا} (\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2)$
- (١٥) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) = \text{س}^2 \vec{e} + \text{ص} \vec{ج} + \text{ع} \vec{ا}$
- (١٦) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) = \text{ل} \text{ط} \text{س} \text{ص} \text{ع}$
- (١٧) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص}) = \text{قو} \text{ظا} (\text{س} \text{ص})$
- (١٨) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص}) = \text{ص}^2 - \text{س}^2 \vec{e}$
- (١٩) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) = \frac{1}{r} (\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2)$
- (٢٠) $\vec{c} = (\text{س} , \text{ص}) = \text{س} + \text{ص}$
- (٢١) اذا كان ق كما في (١٨-١) فعرّف ما يلي على نحو يطابق (١٥-٣) .

حيث ج ثابت الجاذبية ، $\vec{r}$ هو متجه الموضع للنقطة ن .
ونصادف الحقول التربيعية العكسية ايضا في دراسة النظرية الكهربائية . ومن
انواع الحقول المتجهة الهامة ما نحصل عليه بدراسة مدرج
(gradient) الاقتران القياسي ذي البعدين او الثلاثة . مثلا : اذا

كان $\vec{r} = (x, y, z)$ ينتج من (١٦-٣٦) ان
 $\Delta \vec{r} = \nabla^2 \vec{r} = (\nabla^2 x, \nabla^2 y, \nabla^2 z) = (-\frac{1}{r^3}, -\frac{1}{r^3}, -\frac{1}{r^3})$
(س ، ص ، ع) $\vec{r}$ هو حقل متجه . ونعرف مما درسناه في الفصل ١٦ ان
اتجاه $\Delta \vec{r}$ عند اي نقطة ن يعامد السطح المستوي عند ن وان مقدار $\Delta \vec{r}$ س يعادل
ذروة سرعة تغير $\vec{r}$ عند ن . واذا كان حقل متجه $\vec{r}$ هو مدرج حقل قياسي ،
اي اذا كان

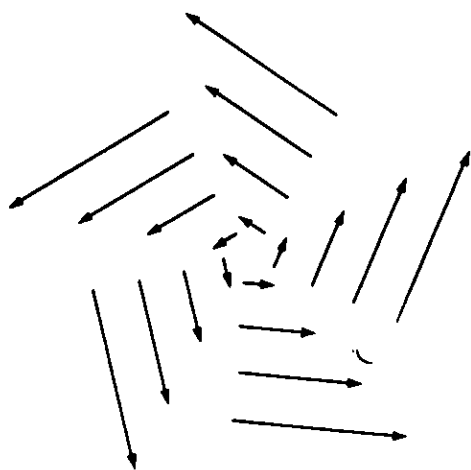
$\vec{r} = (x, y, z)$ $\nabla \cdot \vec{r} = (\nabla_x x + \nabla_y y + \nabla_z z) = 3$
حقلا متجهيا محافظا (conservative) ويسمى ق (س ، ص ، ع)
الجهد (potential) عند ن ، ويسمى ق الاقتران الكامن أو الممكن
للمتجه . وحقول التربيع العكسي حقول محافظة . فاذا كان $\vec{r}$ هو الحقل
الذي تقدم ذكره في المثال ٢ كان

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad \nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$$

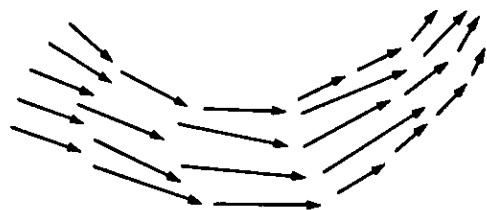
$$\text{حيث } r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

ونترك للقارئ برهان ذلك . (انظر التمرين ١١) . وسندرس المزيد عن الحقول
المحافظة في الصفحات القادمة في هذا الفصل .

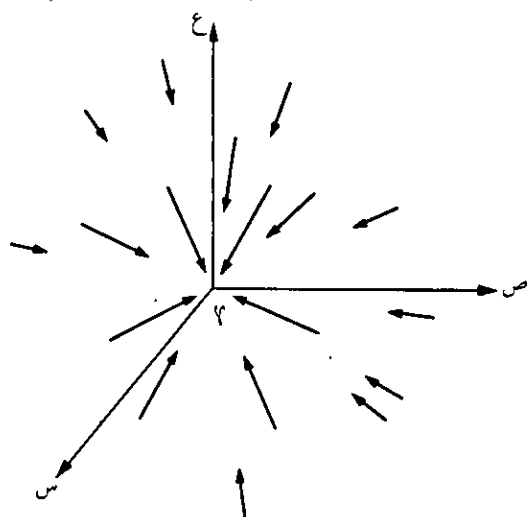
فاذا عرف الحقل المتجه $\vec{r}$ بالتعريف (١٨-١) أو (١٨-٢) امكن ان
نعرف النهايات ، والاتصال والمشتقات الجزئية والتكاملات المضاعفة وذلك
باستعمال مركبات $\vec{r} = (x, y, z)$ على غرار ما صنعنا باقترانات القيم
الموجبة في الفصل ١٥ . فثلا اذا اردنا ان نفاضل او نكامل ق (س ، ص ،
ع) فاننا نفاضل المركبات او نكاملها واحدة واحدة . فنستنتج النظريات
المعروفة كان نقول ان $\vec{r}$ يكون متصلا اذا فقط اذا كانت مركباته م ، ن ، ك
متصلة . وهكذا .



الشكل ١٨ - ١



الشكل ١٨ - ٢



الشكل ١٨ - ٣

وكثيرا ما نقابل في التطبيقات حقول التربيع العكسي (المبينة بالمثال ٢). فاذا وضعنا في نقطة الاصل جسيماً كتلته k فان قوة الجذب التي يبذلها على جسيم اخر كتلته k في النقطة N (س، ص، ع) تعطى بالصيغة :

$$\vec{r} \frac{kk}{r^3} = (س، ص، ع) \quad (١٨-٣)$$

$|\bar{r}| = \sqrt{s^2 + v^2} = | (s, v) |$
 فقدارة $\bar{r}$ (س، ص) يساوي نصف قطر هذه الدائرة . يتبع ان المتجهات $\bar{r}$
 (س، ص) لها مظهر حقل متجه كالمبين بالشكل ١٨ - ١ حيث المركز هو
 نقطة الدوران .

مثال ٢ : اذا كان $\bar{r} = s\bar{h} + v\bar{w} + e\bar{z}$ متجه موضع للنقطة ك (س، ص، ع)،

ع) فالحقل $\bar{q}$ حيث $\bar{q} = (e, v, s)$ $\frac{ج}{|\bar{r}|^3} = \bar{r}$ ، ج عدد قياسي،

$\bar{r} \neq \bar{0}$ ، يسمى حقلًا ترييعيًا عكسيًا

(inverse square field) . صف $\bar{q}$ اذا كان ج > .

الحل : اذا عوضنا $\bar{r} = s\bar{h} + v\bar{w} + e\bar{z}$ ينتج :

$$\bar{r} = (e, v, s) = \frac{ج}{\sqrt[3]{(e^2 + v^2 + s^2)}} (e, v, s)$$

$(\bar{w} + e\bar{z})$

فاسهل من ذلك ان نحلل متجهات الحقل استنادا الى الصيغة المعطاة . فادام
 $\bar{q} = (e, v, s)$ هو مضاعف قياسي سالب للمتجه $\bar{r}$ فاتجاه $\bar{q}$ (س، ص،
 ع) نحو المركز

ولأن $|\bar{q}| = (e, v, s) = |\bar{r}| \frac{ج}{|\bar{r}|^3} = \frac{ج}{|\bar{r}|^2}$ يكون مقدار

$\bar{q}$ (س، ص، ع) متناسبا عكسيا مع مربع البعد بين المركز والنقطة (س،
 ص، ع) . وهذا يعني انه كلما ابتعدت ك (س، ص، ع) عن نقطة
 الاصل يتناقص طول المتجه .

والشكل ١٨ - ٣ يصور نماذج من هذه المتجهات .

الميكانيكا والكهرباء . وفي الامثلة التي اشرنا اليها يظهر ان المتجه غير مرتبط بالزمن . ومثل هذه المتجهات تسمى حقولا متجهة مستقرة (Steady Vector fields) وهي النوع الوحيد الذي سندرسه في هذا

الفصل

فاذا استعملنا نظام احداثيات متعامدة نعبر عن المتجه الذي يناظر النقطة ك (س ، ص ، ع) بالرمز $\vec{r}$ (س ، ص ، ع) ، ولان مركبات هذا المتجه تعتمد على احداثيات ك نكتب

(١٨-١) $\vec{r} = (س ، ص ، ع) = م (س ، ص ، ع) + ن (س ، ص ، ع) + ل (س ، ص ، ع)$ حيث م ، ن ، ل اقترانات في س ، ص ، ع وكل معادلة من هذا القبيل تعين حقلا متجها . ينتج من ذلك ان الحقل المتجه يمكن ان يعرف بانه اقتران متجه $\vec{r}$ بمجاله مجموعة جزئية من ح $\times$ ح $\times$ ح ومداه مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$. فان كان المجال منطقة مستوية وكان المدى مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ فتلك حالة خاصة يكون عندها حقل متجه ذو بعدين يعرف كما يلي :

(١٨-٢) $\vec{r} = (س ، ص) = م (س ، ص) + ن (س ، ص) + ق (س ، ص)$ حيث م ، ن اقترانان في س ، ص . وقد وجدنا من المناسب ان نستعمل عبارتي الحقل المتجه والاقتران المتجه كمترادفتين، اما الاقترانات التي عالجناها في الفصل ١٦ حيث ربطنا كل نقطة ك بعدد فتلك اقترانات قياسية (Scalar)

مثال ١ : صف الحقل المتجه $\vec{r}$ حيث $\vec{r} = (س ، ص) = -ص \vec{e}_1 + س \vec{e}_2$ و

الحل : اذا كان $\vec{r} = س \vec{e}_1 + ص \vec{e}_2$ هو متجه الموضع للنقطة ك (س ، ص) يكون :

$\vec{r} = (س ، ص) = س \vec{e}_1 + ص \vec{e}_2$ فيكون $\vec{r}$ عموديا على متجه الموضع فهو مماس لدائرة نصف قطرها $|\vec{r}|$ ومركزها نقطة الاصل . اصف الى ذلك ان :

الفصل الثامن عشر

موضوعات في حساب المتجهات

للمفاهيم التي سنعالجها في هذا الفصل تطبيقات عدة في العلوم الطبيعية . فسنبحث في الحقول ونتعرف على التكاملات الخطية ثم ننتقل الى نظريات التقييم ونبحث في شروط استقلال المسار ، وبعد ذلك نبرهن نظرية غرين Green's Theorem مطبقة على المناطق المستوية الابتدائية . وهذه النظرية الهامة ستمكننا من الربط ما بين التكاملات الخطية والتكاملات الثنائية . وبعدها نلتفت الى تباعد الحقل المتجه والى الجعدة (curl) فنتعرف على التكامل السطحي ثم نهي الفصل باثنتين من النظريات الرئيسية في حساب المتجهات : نظرية التباعد ونظرية ستوك (Stoke's Theorem)

١ — الحقول المتجهة :

في كثير من التطبيقات يرافق كل نقطة ك في منطقة ما متجه فريد ، نقطة ابتدائه ك . وما يجتمع من كل هذه المتجهات يسمى حقلا متجها (Vector field) وما في شكل ١٨ - ١ مثل على حقل متجه تصنعه طارة تدور حول نقطة ثابتة ، فكل نقطة على الطارة يقابلها متجه سرعة . والحقل المتجه الذي من هذا النوع يسمى حقل سرعة . ومن امثلة حقول السرعة ما يصنعه جريان الماء وهبوب الريح . ويمثل الشكل ١٨ - ٢ الحقول المتجهة التي تنجم عن جزئيات سائل تجري في جدول . وفي شكل كهذا انما يظهر بعض متجهات الحقل . ومن المهم ان نذكر ان كل نقطة في المنطقة التي هي قيد الدراسة ترتبط بمتجه . ومن الحقول المتجهة الشائعة حقول القوة التي نقابلها في دراسة

(٢٦) ضع التكامل الثلاثي لعزم القصور الذاتي بالنسبة للمحور العيني ع لجسم محدود بالمخططين $ع = ٩س + ٢ص$ ، $ع = ٩$ اذا كانت الكثافة عند النقطة ب (س ، ص ، ع) تتناسب عكسيا مع مربع المسافة من النقطة (٠ ، ٠ ، ١) الى ب .

(٢٧) ضع التكامل لعزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور الصادات لجسم محدود بالمخططات $س - ٢ص + ٢ع = ١$ ، $ص = ٠$ ، $ع = ٤$ اذا كانت الكثافة عند النقطة ب (س ، ص ، ع) تتناسب طرديا مع المسافة من محور الصادات الى ب .

(٢٨) جسم متجانس محدود بالمخططات $ع = ٩ - س - ٢ص$ ، $س + ٢ص = ٤$ ، $ع = ٠$ استعمل الاحداثيات الاسطوانية لايجاد ما يلي :

١ — الكتلة ب — مركز الثقل

ج — عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحور العيني ع .

(٢٩) جسم كروي نصف قطره ١ . استعمل الاحداثيات الكروية لايجاد الكتلة اذا كانت الكثافة عند النقطة ب تتناسب طرديا مع المسافة من المركز الى ب .

(٣٠) أوجد مساحة الجزء من المخروط $ع = (س + ٢ص) \frac{1}{2}$ الواقع بداخل الاسطوانة

$$س + ٢ص = ٤ س .$$

(١٧) صفيحة تتخذ شكل المنطقة الواقعة داخل المخطط نق = ٢ + حام وخارج المخطط نق = ١ . أوجد الكتلة اذا كانت الكثافة عند النقطة ب (نق ، م) تتناسب عكسيا مع المسافة من القطب الى ب .

(١٨) أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمحور القطبي والمخططات نق = م ، نق = ٢ من م = ٠ الى م = لط ٢ .

(١٩) استعمل الاحداثيات القطبية لحساب

$$\sqrt[2]{\frac{2s^2 + 2s^2 + 2s^2}{2s - 2p}} \quad \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right]$$

(٢٠) أوجد زس ، زس ، وكذلك ز للصفحة المحدودة بالمخططين ص = س^٢ ، ص = س^٣ اذا كانت الكثافة عند النقطة ب (س ، ص) تتناسب طرديا مع المسافة من محور الصادات الى ب .

(٢١) صفيحة منتظمة تتخذ شكل المثلث القائم الذي اطوال اضلاعه p ، ب ، $\sqrt{2p + 2b}$.

أوجد عزم القصور الذاتي ونصف القطر الدوراني بالنسبة لمستقيم على طول الضلع الذي طوله p .

(٢٢) صفيحة تتخذ شكل المنطقة المحصورة بين دائرتين متحدي المركز نصف قطرهما p ، جـ حيث p > جـ . فاذا كانت الكثافة عند أي نقطة ب تتناسب طرديا مع المسافة من المركز الى ب ، فاستعمل الاحداثيات القطبية لايجاد عزم القصور الذاتي بالنسبة للمستقيم المار بالمركز .

(٢٣) أوجد حجم الجسم الواقع تحت المخطط ع = س ص^٢ وفوق المستطيل الذي رؤوسه (٠، ١، ١) ، (٠، ١، ٢) ، (٠، ٣، ١) ، (٠، ٣، ٢) .

(٢٤) فسربست طرق $\left[\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right]$ ق (س ، ص ، ع) ح بوصفه تكاملا تكراريا على

فرض ان ي محدود بالمخططين ص = س^٢ + ع^٢ ، ص = ع^٢ (٢٥) استعمل التكامل الثلاثي لايجاد الحجم ومركز الثقل للجسم المحدود بالمخططات ع = س^٢ ، ع = ع^٢ ، ص = ص^٢ ، ص = ع + ع^٢ .

باعتباره تكاملا تكراريا اذا كانت م منطقة محدودة بمخططات المعادلات المعطاة .

$$(7) \quad s^2 - s^2 = s^2, \quad s = s^2$$

$$(8) \quad s^2 - s^2 = s^2, \quad s = s^2, \quad s = s^2$$

$$(9) \quad s^2 = s^2 + s, \quad s^2 = s^2 - s$$

$$(10) \quad s = s^2 + s^2, \quad s = s^2 = s^3$$

في كل من التمارين ١١ - ١٤ يمثل التكامل مساحة المنطقة م في المستوى س ص صف م .

$$(11) \quad \begin{bmatrix} s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 \end{bmatrix}$$

$$(12) \quad \begin{bmatrix} s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 \end{bmatrix}$$

$$(13) \quad \begin{bmatrix} s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 \end{bmatrix}$$

$$(14) \quad \begin{bmatrix} s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} s^2 & s^2 \\ s^2 & s^2 \end{bmatrix}$$

في التمرينين ١٥ ، ١٦ أوجد الكتلة ومركز الثقل للصفحة التي تتخذ شكل المنطقة المحدودة بمخططات المعادلات المعطاة ، ولها الكثافات المعطاة .

(١٥) ص = س ، ص = س ، ص = س ، ص = س ، الكثافة عند النقطة ب (س ، ص) تناسب طرديا مع المسافة من محور الصادات الى ب .

(١٦) ص = س ، ص = س ، ص = س ، الكثافة عند النقطة ب (س ، ص) تناسب طرديا مع المسافة من المستقيم الذي معادلته س = ١ الى ب .

- (١٤) التكاملات الثلاثية في الاحداثيات الاسطوانية والكروية
(١٥) مساحة السطح .

كتايبة :

احسب كلا من التكاملات التالية في التمارين ١-٦

$$(١) \int_0^1 \int_{1-s}^0 \int_{1+s}^{s^3} (s^2 - 2\text{ص}) \, ds \, ds \, ds$$

$$(٢) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\text{لط ص}} \frac{1}{\text{ص}} \, ds \, ds \, ds$$

$$(٣) \int_0^1 \int_0^{1+r} \int_0^{r^2+r} r \, dr \, ds \, d\theta$$

$$(٤) \int_0^1 \int_0^{2\text{ع}} \int_0^{\text{ع}} (s + \text{ع}) \, ds \, ds \, ds$$

$$(٥) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\text{ص}} s \, ds \, ds \, ds$$

$$(٦) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\text{جتا } \phi} \text{ك} \, ds \, ds \, ds$$

في كل من التمارين من ٧-١٠ وضح $\int \int \int$ ق (س، ص) د ف

٦ (أوجد مساحة السطح لذلك الجزء من الاسطوانة ص^٢ + ع^٢ = ٢٨ الواقع داخل الاسطوانة س^٢ + ص^٢ = ٢٨ .

٧ (أوجد مساحة السطح لذلك الجزء من المكافئ ع = س^٢ + ص^٢ المقطوع بالمستوى ع = ١ .

٨ (اذا كانت م منطقة مثلثة في المستوى س ص رؤوسها (٠، ٠، ٠) ، (٠، ٢، ٠) ، (٠، ٢، ٢) ، فما مساحة ذلك الجزء من المخطط ع = ص^٢ الواقع فوق م .

٩ (أوجد مساحة سطح ذلك الجزء من المخطط ع = س ص الواقع داخل الاسطوانة س^٢ + ص^٢ = ٤ .

١٠ (أوجد مساحة سطح ذلك الجزء من المخطط ع = س^٢ - ص^٢ الواقع في الثمن الاول وبداخل الاسطوانة س^٢ + ص^٢ = ١ .

١٠ — تمارين مراجعة :

شفوية :

عرف أو ناقش كلا مما يلي :

- ١ (التجزئات الداخلية
- ٢ (مجاميع ربمان
- ٣ (التكامل الثنائي
- ٤ (التكامل التكراري
- ٥ (حساب التكامل الثنائي
- ٦ (المساحات والحجوم باستعمال التكامل الثنائي
- ٧ (مركز الثقل أو الكتلة للصفحة المستوية
- ٨ (عزوم القصور الذاتي للصفحة المستوية
- ٩ (نصف قطر الدوران
- ١٠ (التكاملات الثنائية في الاحداثيات القطبية
- ١١ (التكامل الثلاثي
- ١٢ (حساب التكاملات الثلاثية
- ١٣ (تطبيقات التكاملات الثلاثية

مثال ٢ : أوجد مساحة سطح ذلك الجزء من المخطط ع = ٩ - س - ص فوق المستوى س ص أو عليه .

الحل : المخطط مرسوم في الشكل ١٦ - ٥ . فباستعمال (١٧ - ٥٢) نجد :

$$F = \int_0^1 \sqrt{1 + 4s^2 + 4s} ds$$

حيث م منطقة في المستوى س ص محدودة بالدائرة س^٢ + ص^٢ = ٩ . فإذا استعملنا الاحداثيات القطبية لحساب التكامل الثاني ، يكون :

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 4r^2) r dr$$

وبالباقي متروك للقارئ لاثبات ان $F = \frac{3}{2} \pi - \frac{3}{2}$

تمارين :

(١) أوجد مساحة السطح لذلك الجزء من المخطط ع = ص + $\frac{س^2}{٩}$ الواقع فوق المنطقة

المربعة في المستوى س ص التي رؤوسها (٠ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ١) ، (٠ ، ١ ، ١) ، (٠ ، ١ ، ٠) .

(٢) أوجد مساحة المنطقة من المستوى ع = ص + ١ الواقعة داخل الاسطوانة س^٢ + ص^٢ = ١ .

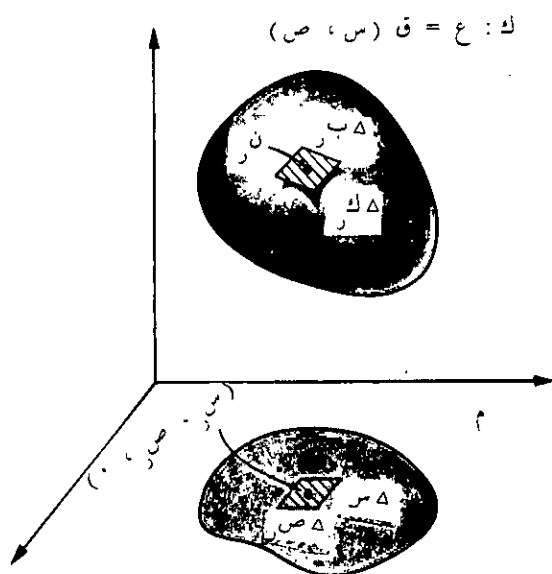
(٣) أوجد مساحة المنطقة من المستوى $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٣} = ١$ المقطوعة بالاسطوانة س^٢ + ص^٢ = ١ ، حيث م ، ب ، ج ، و قيم موجبة .

(٤) ضع صيغة التكامل لايجاد مساحة السطح لذلك الجزء من الكرة س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٤ الواقع فوق المنطقة المربعة في المستوى س ص التي رؤوسها

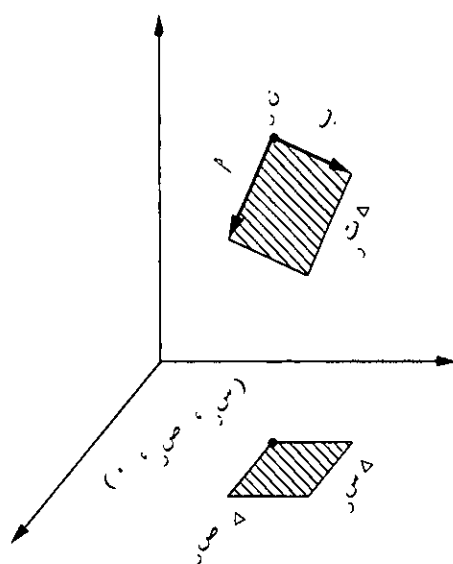
(٠ ، ١ ، ١) ، (٠ ، ١ ، ٠) ، (٠ ، ١ ، -١) ، (٠ ، ١ ، -١) ، (٠ ، -١ ، -١) ، (٠ ، -١ ، ٠) ، (٠ ، -١ ، ١) ، (٠ ، -١ ، ١)

(٥) أوجد مساحة السطح لذلك الجزء من الكرة س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٢ الواقع داخل الاسطوانة س^٢ + ص^٢ = ١ صفرأ .

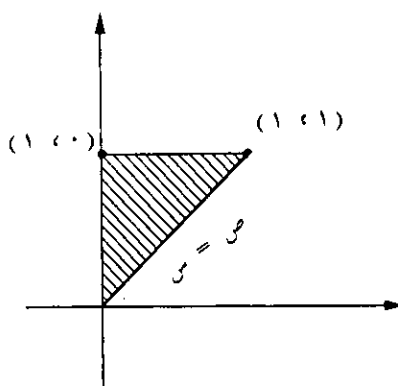
$$12 / \left(\frac{3}{2} 10 - \frac{3}{2} 14 \right) = \left| \frac{3}{2} (4 \text{ ص} + 10) \right| \frac{1}{12} =$$



الشكل ١٧ — ٤٢



الشكل ١٧ — ٤٣



الشكل ١٧ — ٤٤

ينتج أن :

$$(١٧-٥٠) | \bar{A} \times \bar{B} | = ق س (س ر ، ص ر) \Delta س ر \Delta ص ر - ق ص (س ر - ص ر) \Delta ص ر \Delta س ر \Delta و + ق ص \Delta س ر \Delta ص ر \Delta ز وبالتالي فان .$$

$$(ت ر) = | \bar{A} \times \bar{B} | =$$

$$\sqrt{((ق س (س ر ، ص ر))^2 + (ق ص (س ر ، ص ر))^2 + ١ \Delta س ر \Delta ص ر}$$

حيث أن $\Delta س ر \Delta ص ر = \Delta ف$. فاذا اخذنا نهاية مجموع $\Delta ت ر$ كما في (١٧-٤٨) وطبقنا تعريف التكامل الثنائي ، نحصل على

$$(١٧-٥٢) ف =$$

$$\int_M \sqrt{((ق س (س ، ص))^2 + (ق ص (س ، ص))^2 + ١} د س د ص .$$

وهذه الصيغة يمكن استعمالها ايضا اذا كان ق (س ، ص) ≥ ٠ على م .

مثال ١ : اذا كانت م منطقة مثلثة في المستوى س ص رؤوسها (٠ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ١ ، ٠) ، (٠ ، ١ ، ١) . فم مساحة سطح ذلك الجزء من المخطط $ع = ٣ س + ص^٢$ الواقع فوق م .

الحل : المنطقة م محدودة بالمخططات ص = س ، س = ٠ ، ص = ١ (انظر الشكل (١٧-٤٤)) ، فليكن ق (س ، ص) = $٣ س + ص^٢$ ، وبتطبيق (١٧-٥٢) ينتج :

$$ف = \int_M \sqrt{١ + ٢(ص) + ٩} د س د ص$$

$$= \int_0^1 \int_0^ص \sqrt{١ + ٢(ص) + ٩} د س د ص$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{١}{٣} (٢ ص + ١٠) \right]_{س=0}^{س=ص} د ص = \int_0^1 \frac{١}{٣} (٢ ص + ١٠) د ص$$

للمخطط مواز للمستوى س ص . والمطلوب الان هو تعريف المساحة ف للمنطقة ك ،
وايجاد صيغة يمكن استعمالها لحساب ف .

نفرض أن ج = { م } هي تجزئة داخلية للمنطقة م ، حيث أن ابعاد المستطيل م_ر
هي Δ س_ر ، Δ ص_ر . نختار النقطة (س_ر ، ص_ر ، ٠) في كل م_ر . ولتكن ن_ر
(س_ر ، ص_ر) ، ق (س_ر ، ص_ر) هي النقطة المقابلة على ك . ثم لنأخذ السطح
المماس للمخطط ك عند ن_ر ، ولنفرض أن Δ ت_ر ، Δ ك_ر هما مساحتا المنطقتين على المستوى
المماس وعلى م على التوالي ، الناتجتين من اسقاط م عموديا الى الاعلى (لاحظ الشكل
(١٧ - ٤٢)) . فاذا كانت || ج || صغيرة فإن Δ ت_ر تقرب للمساحة Δ ك_ر ، وان Δ
ت_ر هي تقرب للمساحة ف على ك . وبما أن هذا التقريب يجب ان يتحسن عندما تجعل
|| ج || صغيرة ، فاننا نعرف ف بما يلي :

$$(١٧ - ٤٨) \quad \text{ف} = \lim_{||ج|| \rightarrow 0} \sum_r \Delta \text{ ت}_r$$

وليجاد صيغة تكامل للمتغير ف نختار (س_ر ، ص_ر ، ٠) وهو ركن م
الاقرب لنقطة الاصل . فنفرض أن $\vec{P}$ ، $\vec{B}$ هما متجهان بنقطة بدائية ن_ر
(س_ر ، ص_ر ، ق (س_ر ، ص_ر) بمسان تقاطع ك مع ص = ص_ر ، س
= س_ر على التوالي . فكما يظهر في الشكل ١٧ - ٤٣ ، وباستخدام التفسيرات
الهندسية للمشتقات الجزئية المعطاة في البند ٣ من الفصل ١٧ ، فان ميل
المستقيم الذي يعينه كل من $\vec{P}$ ، $\vec{B}$ في هذه المستويات هو ق_س
(س_ر ، ص_ر) ، ق_ص (س_ر ، ص_ر) على التوالي ومن ذلك ينتج أن

$$(١٧ - ٤٩) \quad \vec{P} = \Delta \text{ س}_r \vec{ه} + \text{ق}_س (\text{س}_r + \text{ص}_r) \Delta \text{ س}_r \vec{ز} \\ \vec{B} = \Delta \text{ س}_r \vec{و} + \text{ق}_ص (\text{س}_r ، \text{ص}_r) \Delta \text{ ص}_r \vec{ز} \\ \text{والمساحة } \Delta \text{ ت}_r \text{ لمتوازي الاضلاع الذي يكونه } \vec{P} ، \vec{B} \text{ هي} \\ | \vec{P} \times \vec{B} | . \text{ ولان}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{ه} & \vec{و} & \vec{ز} \\ \Delta \text{ س}_r & 0 & \text{ق}_س (\text{س}_r ، \text{ص}_r) \Delta \text{ س}_r \\ 0 & \Delta \text{ ص}_r & \text{ق}_ص (\text{س}_r ، \text{ص}_r) \Delta \text{ ص}_r \end{vmatrix} = | \vec{P} \times \vec{B} |$$

ب (س ، ص ، ع) تتناسب طرديا مع المسافة من المستوى س ص الى النقطة ب .

(١١) أوجد الكتلة ومركز الكتلة لنصف كرة اذا كانت الكثافة عند النقطة ب تتناسب طرديا مع المسافة من مركز القاعدة الى ب .

(١٢) أعد حل تمرين ٢ .

(١٣) أوجد عزم القصور الذاتي حول محور الكرة في التمرين ١١ .

(١٤) أوجد عزم القصور الذاتي بالنسبة لقطر قاعدة نصف كرة بحجمة متجانسة قطرها ٢ ؟

(١٥) أوجد حجم الجسم الواقع فوق المخروط $E^2 = S^2 + V^2$ ، وداخل الكرة $S^2 + V^2 + E^2 = 4$.

(١٦) أوجد حجم الجسم الواقع خارج المخروط $E^2 = S^2 + V^2$ وداخل الكرة $S^2 + V^2 + E^2 = 1$.

(١٧) أوجد كتلة الجسم الواقع خارج الكرة $L = 1$ وداخل الكرة $L = 2$ اذا كانت الكثافة عند النقطة ب تتناسب طرديا مع مربع المسافة من مركز الكرة الى ب .

(١٨) مجسم كروي مجوف منتظم نصف قطره الداخلي ١ ونصف قطره الخارجي ب . أوجد عزم القصور الذاتي بالنسبة لمستقيم مار بمركزه .

(١٩) اثبت (١٧ - ٤٦) باعتبار أن y عبارة عن متوازي مستطيلات

(٢٠) اكتب (٢٧ - ٤٧) على شكل نهاية مجموع ثلاثي .

٩ — المساحة السطحية :

في الفصل ١٣ اشتققنا صيغا لمساحة سطح دوراني ، (انظر ١٣ - ٢٧) ، (١٣ - ٣٠) . وسناقش الان طريقة لايجاد مساحات سطوح كالموضحة في الشكل ١٧ - ٥ . نفرض ان Q (س ، ص) $\leq$. صفر في المنطقة M والمستوى س ص وان للاقتزان Q مشتقة أول جزئية متصلة على M ، ولتكن K تمثل جزءا من مخطط Q مسقطه على المستوى س ص هو M . ولتبسيط البحث سوف نفترض انه لا يوجد متجه عمودي

$$\text{تأريـن : } \overline{ع} = \frac{\overline{ك} \text{ ص}}{ح} = \frac{3}{8} \text{ پ } (1 + \text{جنا ج})$$

استعمل الاحداثيات الاسطوانية في التمارين ١ - ١٠

$$(1) \text{ أوجد الحجم والمركز للجسم المحدود بمخططات } ع = \text{س}^2 + \text{ص}^2, \text{ س}^2 + \text{ص}^2 = 4$$

$$(2) \text{ أوجد الحجم ومركز الكتلة للجسم المحدود بالمحططات } \text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{ع}^2 = 0, \text{ س}^2 + \text{ص}^2 = 4$$

$$(3) \text{ أوجد عزم القصور الذاتي لاسطوانة دائرية متجانسة قائمة ارتفاعها ل ونصف قطر قاعدتها پ بالنسبة لكل مما يلي :}$$

پ — محور الاسطوانة ب — قطر لقاعدتها

$$(4) \text{ جسم متجانس محدود بمخططات } ع = \text{ر}, \text{ ر}^2 = \text{أوجد ما يلي :}$$

$$(5) \text{ جسم كروي نصف قطره پ وكثافته في النقطة ب تتناسب طرديا مع بعد النقطة ب عن مستقيم م ثابت يمر بمركز الجسم . أوجد كتلة الجسم .}$$

$$(6) \text{ أوجد كتلة جسم مخروطي محدد بمخططات } ع = \text{ر}, \text{ ر}^2 = 4 \text{ اذا كانت الكثافة عند النقطة ب تتناسب طرديا مع بعد النقطة ب عن المحور العيني .}$$

$$(7) \text{ أوجد عزم القصور الذاتي للجسم المذكور في التمرين ٥ حول المستقيم م . ما نصف القطر الدوراني ؟}$$

$$(8) \text{ أوجد عزم القصور الذاتي للجسم المذكور في التمرين ٦ حول المحور العيني . ما نصف القطر الدوراني ؟}$$

$$(9) \text{ اذا كانت } \{ (ع, ص, س) : 1 \geq ع \geq 5 - \text{س}^2 - \text{ص}^2, \text{ س}^2 + \text{ص}^2 \leq 1 \} \text{ وكانت الكثافة عند النقطة ب } (ع, ص, س) \text{ تتناسب طرديا مع بعدها عن المستوى } \text{س} \text{ ص أوجد الكتلة ومركز الكتلة للمنطقة } \{ \}$$

$$(10) \text{ أوجد الكتلة ومركز الكتلة للجسم الواقع داخل الاسطوانة } \text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{ع}^2 = 0 \text{ والكرة } \text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 = 4, \text{ اذا كانت الكثافة عند النقطة ب } (ع, ص, س) \text{ تتناسب طرديا مع المسافة من المستوى } \text{س} \text{ ص الى النقطة ب .}$$

$$\left[\begin{array}{c} \pi^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \theta$$

$$\left[\begin{array}{c} \pi^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \theta$$

$$\left[\begin{array}{c} \pi^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \theta$$

$$\left[\begin{array}{c} \pi^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \theta$$

وبالتماثل فان مركز الكتلة يقع على المحور العيني . واذا كان (س ، ص ، ع)
الاحداثيات الديكارتية للنقطة فانه باستخدام (١٤ - ٤١) فان ع =
ل جتا ϕ ومنه

$$ص = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = ع$$

$$\left[\begin{array}{c} \pi^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \theta$$

$$\left[\begin{array}{c} \pi^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \theta$$

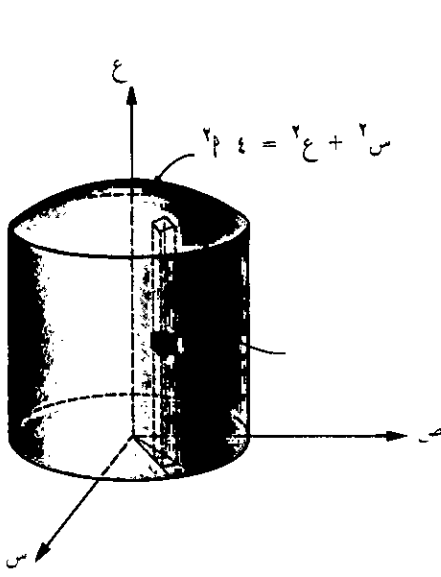
$$\left[\begin{array}{c} \pi^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \theta$$

فاذن مركز الكتلة في الاحداثيات الديكارتية هو (٠ ، ٠ ، ع) حيث

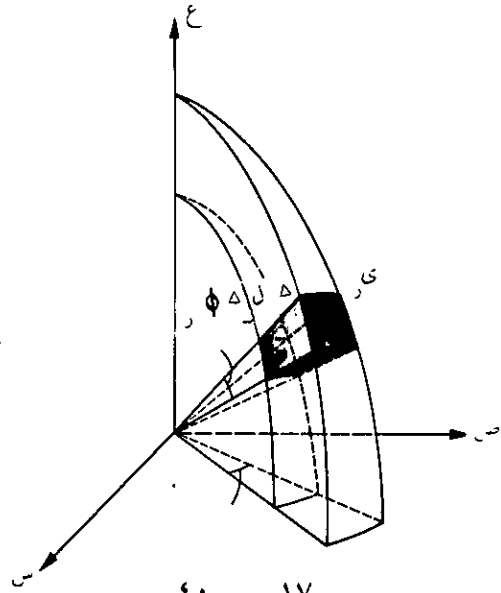
الكروية على مناطق أكثر تعقيدا باستعمال التجزئات الداخلية . ففي هذه الحالة لابد من تعديل حدود التكامل في (١٧ - ٤٧) لتوضح بشكل أكثر ملاءمة .

مثال ٢ : أوجد الحجم ومركز الكتلة للمنطقة المحدودة من أعلى بالكرة $\rho = l$ ومن أسفل بالمخروط $\phi = \phi_0$ حيث $\phi_0 > \frac{\pi}{2}$.

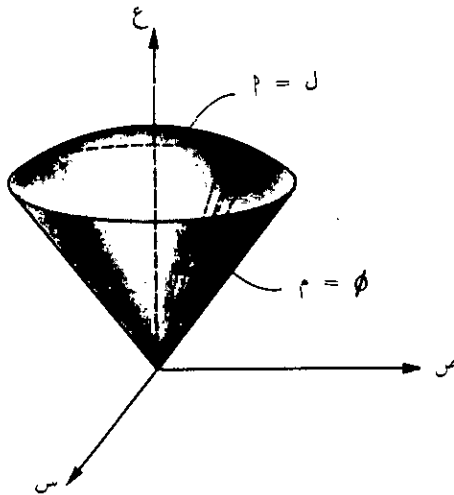
الحل : المنطقة موضحة في الشكل ١٧ - ٤١ . والحجم يحس يعطى كما يلي :



الشكل ١٧ - ٣٩



١٧ - ٤٠



الشكل ١٧ - ٤١

$$\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$\theta \leq \sqrt{\frac{y_p - y}{y_p}} \quad y_p \quad \left[\frac{\pi y}{y_p} \right] \frac{y}{y_p} =$$

$$\frac{\pi \cdot 70}{7} = 0.55 (0.55 \cdot 70) \cdot \frac{\pi}{7} =$$

كذلك يمكن تعريف التكاملات الثلاثية في الاحداثيات الكروية . نفرض أن الاقتران ق للمتغيرات ل ، θ ، ϕ متصل في منطقة على شكل : $U = \{ (L, \theta, \phi) : L \geq 0, \theta \geq 0, \phi \geq 0 \}$. فنجزئ المنطقة U الى مناطق جزئية $U_1, U_2, \dots, U_n$ لها نفس شكل U بواسطة المخططات $L = L_i, \theta = \theta_i, \phi = \phi_i$. لاحظ أن المنطقة U_i مرسومة في الشكل ١٧ - ٤٠ . يبقى اثبات أن Δ هو حجم ΔU_i ، وهذا متروك للطلاب كتمرين . فيكون

(١٧-٤٦) Δ حر = ل^٢ جا ϕ ر Δ ل^٢ ر ϕ ر Δ ل^٢ ر ϕ ر θ

حيث أن (ل^٢ ، θ ، ϕ ر) أي نقطة في المنطقة ي^٢ وان الزيادة هي الموضحة في الشكل ١٧ - ٤٠ . فإذا كان التكامل الثلاثي للاقتراح على المنطقة معرفا كنهاية المجموع بالطريقة العادية ، فإنه من الممكن اثبات أن :

$$= \chi^2(\phi, \theta, L) \quad \text{ق} \quad \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right] (4V-1V)$$

ق (ل، θ، ϕ) ل^۲ جا ϕ ل ϕ س θ س

وهناك خمس ترتيبات أخرى ممكنة للتكامل ، ويمكن استخدام الاحداثيات

ر^٢ + ع^٢ = ٢٢ ٤ ، وفوق المستوى س ص . أوجد مركز الكتلة وعزم القصور الذاتي زع اذا كانت الكثافة عند النقطة ب تتناسب طرديا مع المسافة من المستوى س ص الى ب .

الحل : المنطقة مرسومة في الشكل (١٧ - ٣٩) مع العمود الذي يمثّل المجموع الاول في اتجاه المحور العيني ع . وبما أن الكثافة عند النقطة ب (ر ، θ ، ع) معطاة بالصيغة جع حيث ج قيمة ما (ثابتة) . فان الكتلة ك يمكن ايجادها بتطبيق (١٧ - ٤٥) حيث ق (س ، م ، ع) = جع وهكذا :

$$\text{جع ر و غ و س و } \theta = \left[\sqrt{2r - 2p} \right] \left[\pi^2 \right] \left[\frac{1}{4} \right]$$

$$\text{س و س و } \theta = \left[\sqrt{2r - 2p} \right] \left[\pi^2 \right] \left[\frac{1}{4} \right] =$$

$$\text{س و س و } \theta = \left[\sqrt{2r - 2p} \right] \left[\pi^2 \right] \left[\frac{1}{4} \right] =$$

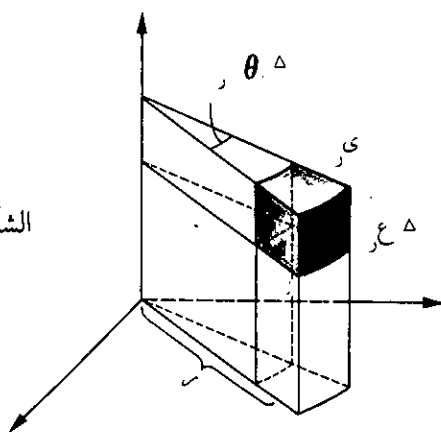
$$\text{س و س و } \theta = \left[\sqrt{2r - 2p} \right] \left[\pi^2 \right] \left[\frac{1}{4} \right] =$$

$$\frac{\pi^2 \sqrt{2r - 2p}}{4} = \theta \left[\pi^2 \right] \left[\frac{1}{8} \right] =$$

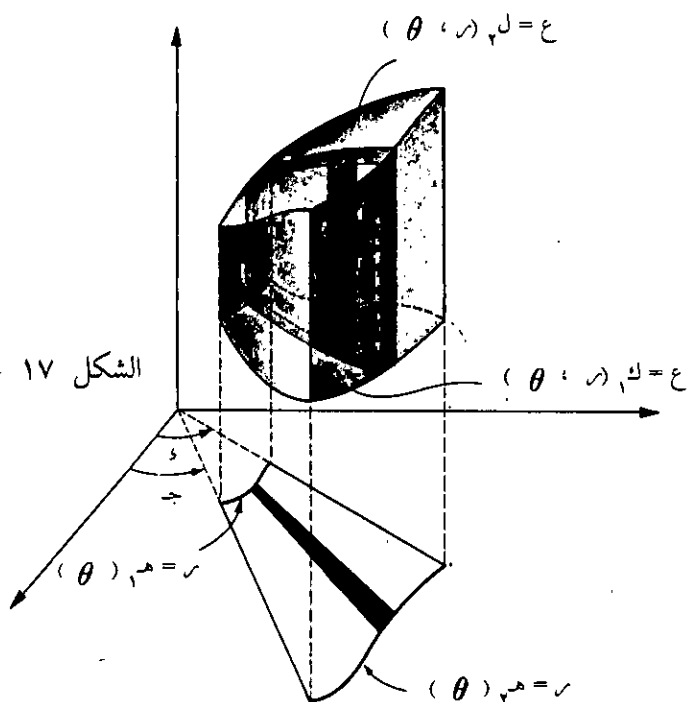
ولايجاد زع نستخدم (١٧ - ٤٣) والاحداثيات الاسطوانية فنحصل على :

فنا بعملية الجمع على المنطقة θ كما هو موضح في الشكل ١٧ - ٣٨ . اخيرا نترك θ تتغير من θ الى $\theta + \Delta\theta$ لكي تغطي المنطقة θ .

الشكل ١٧ - ٣٧



الشكل ١٧ - ٣٨



مثال ١ : بحسم له شكل المنطقة θ الواقعة داخل الاسطوانة $r = R$ في الكرة

$$[[[\text{ق} (\text{ر} , \theta , \text{ع}) \text{ح}]]] =$$

$$[[[\text{ب} \text{ج} \text{ك}]]] \text{ق} (\text{ر} , \theta , \text{ع}) \text{س} \text{د} \theta \text{ع} .$$

وهناك خمسة ترتيبات أخرى لمثل هذا التكامل التكراري .

ويمكن تعريف التكاملات الثلاثية في الاحداثيات الاسطوانية في مناطق أكثر تعقيدا باستخدام تجزئات داخلية . مثال ذلك يمكن اثبات انه اذا كانت م منطقة قطبية من النوع المذكور في البند ٥ ، واذا كانت

$$\text{ق} = \{ (\text{ر} , \theta , \text{ع}) : (\text{ر} , \theta) \text{ك} , \text{ع} \text{د} \theta \text{ع} \} \\ \geq \text{ع} \geq \text{ك} (\text{س} , \theta)$$

حيث ان الاقترانين ك_١ ، ك_٢ لهما مشتقتان اوليتان جزئيتان متصلتان في النقطة ق ، فان :

$$[[[\text{ق} (\text{س} , \theta , \text{ع}) \text{ح}]]] =$$

$$[[[\text{ع} \text{د} \theta \text{ع}]]] \text{ق} (\text{س} , \theta , \text{ع}) \text{ك} (\text{ر} , \theta)$$

وبالتحديد ، اذا كانت ع من النوع الموضح في الشكل ١٧ - ٢١ فان

$$(١٧ - ٤٥) [[[\text{ق} (\text{ر} , \theta , \text{ع}) \text{ح}]]] =$$

$$[[[\text{ب} \text{ج} \text{ك}]]] \text{ق} (\text{ر} , \theta , \text{ع}) \text{س} \text{د} \theta \text{ع} .$$

والتكامل التكراري في (١٧ - ٤٥) يمكن تفسيره على انه نهاية لمجموع ثلاثي يؤخذ فيه المجموع الاول على طول عمود المنطقة الجزئية ر من السطح السفلي ع = ك_١ (ر ، θ) الى السطح العلوي (حيث ع = ك_٢ (ر ، θ)) . لاحظ الشكل (١٧ - ٣٨) . أما المجموع الثاني فيمتد الى سطر هذه الاعمدة ، حيث م تترك مثبتة ، أما ر فيتغير . ففي هذه المرحلة نكون قد

(١٥) الهرم المتجانس المحدود بالمستويات الاحداثية والمخطط

$$\frac{س}{م} + \frac{ص}{ب} + \frac{ع}{ج} = ١ ، حيث م ، ب ، ج$$

اعداد حقيقية موجبة .

$$(١٦) \text{ الجسم المنتظم المحدود بالجسم البيضوي } \frac{س}{٢م} + \frac{ص}{٢ب} + \frac{ع}{٢ج} = ١$$

٨ — التكاملات الثلاثية في الاحداثيات الاسطوانية والكروية :

قد توضع التكاملات الثلاثية احيانا بدلالة الاحداثيات الاسطوانية . واسهل الحالات عندما يكون هنالك اقتران بدلالة $ر$ ، $م$ ، $ع$ متصل في منطقة مثل $ي =$

$\{ (ر، ع) : م \geq ر \geq ب ، ج \geq ٠ \geq د ، ك \geq ع \geq ل \}$
تبدأ أولاً بتقسيم $ي$ الى مناطق جزئية $ي_١$ ، $ي_٢$ ، $ي_٣$ ، $ي_٤$ ، لها نفس الشكل وذلك باستعمال مخططات المعادلات $ر = م$ ، $ر = ٠$ ، $ج = ر$ ، $ع = ك$ ، حيث $م$ ، $ج$ ، $ك$ اعداد في الفترات $[م ، ب]$ ، $[ج ، د]$ ، $[ك ، ل]$ على التوالي . فالمنطقة $ي$ من هذه المناطق الجزئية مرسومة في الشكل ١٧-٣٧ ، موضحة عليها $\Delta س_ر$ ، $\Delta ع_ر$ ، $\Delta ٠_ر$ حيث $س_ر$ هو متوسط نصف قطر القاعدة $ي_ر$.
والحجم $ح_ر$ للمنطقة $ي_ر$ هو حاصل ضرب مساحة القاعدة $م_ر$ ، $د_ر$ ، $٠_ر$ في الارتفاع $\Delta ع_ر$. وهكذا يكون

$\Delta ح_ر = م_ر د_ر ٠_ر \Delta ع_ر$
واذا كانت $(م_ر ، د_ر ، ٠_ر)$ أي نقطة في $ي$ فان التكامل الثلاثي للاقتران $ق$ على $ي$ هو

$$||| ق (م ، د ، ٠) دح = \int \int \int \frac{ق(م ، د ، ٠)}{||ج||} دح دد د٠ \Delta ع_ر$$

حيث $||ج||$ هي طول أكبر قطر لجميع $ي_ر$. ويمكن اثبات أن

- (١) التمرين (١٤) في البند ٣
- (٢) التمرين (١٥) في البند ٣
- (٣) التمرين (١٢) في البند ٦
- (٤) التمرين (١٣) في البند ٦ .
- (٥) جسم مكعب طول ضلعه ٢ ، وكثافته في النقطة ب تتناسب طردياً مع مربع المسافة من النقطة ب الى مركز المكعب . أوجد مركز كتلته .
- (٦) افرض أن γ هرم ثلاثي محدود بالمستوى ٢ س + ٥ ص + ع = ١٠ . أوجد مركز الكتلة اذا كانت الكثافة في النقطة ب (س ، ص ، ع) تتناسب طردياً مع المسافة من المستوى س ع الى ب .
- (٧) افرض أن γ هو الجسم المحاط بالمكافئ س = ص = س = ص + ٤ ع + ٢ والمستوى س = ٤ . فاذا كانت الكثافة في النقطة (س ، ص ، ع) هي ث (س ، ص ، ع) = س + ٢ ع ، فضع التكاملات اللازمة ليجاد مركز الكتلة .
- (٨) افرض أن γ هو الجسم المحدود بالزائدي ص = ٢ - س + ٢ ع = ١ والمستوى ص = ٢ ، فاذا كانت الكثافة في النقطة (س ، ص ، ع) هي ث (س ، ص ، ع) = س + ٢ ع + ٢ ص ، فضع التكاملات اللازمة ليجاد مركز الكتلة .
- (٩) أوجد عزم القصور الذاتي بالنسبة لمستقيم مارباحدى حواف مكعب متجانس حجمه ٣٢ . ما هو نصف القطر الدوراني ؟
- (١٠) أوجد عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحور العيني للهرم الجسم الموصوف في التمرين (٦) . ما هو نصف القطر الدوراني ؟
- في كل من التمارين (١١ - ١٦) ضع تكاملات عزوم القصور الذاتي بالنسبة للمحور العيني للمجسمات المعطاة .
- (١١) الجسم المحدود بالمخطط ع = ٣٦ - ٤ س - ٩ ص + ٢ ، ص = ٠ ، ث (س ، ص ، ع) = ع
- (١٢) الاسطوانة المحدودة بالمخطط ٤ س + ٢ ص = ٢ ، ع = ٠ ، ع = ج ، ث (س ، ص ، ع) = ١ + ع .
- (١٣) كرة نصف قطرها ٢ ومركزها في نقطة الاصل ، ث (س ، ص ، ع) = س + ٢ ص + ٢ ع .

من المستقيبات $s = \pm \frac{v}{2} -$ فاذا رمزنا لثابت الكثافة بالرمز j ، فانه باستعمال (١٧ - ٤٤)

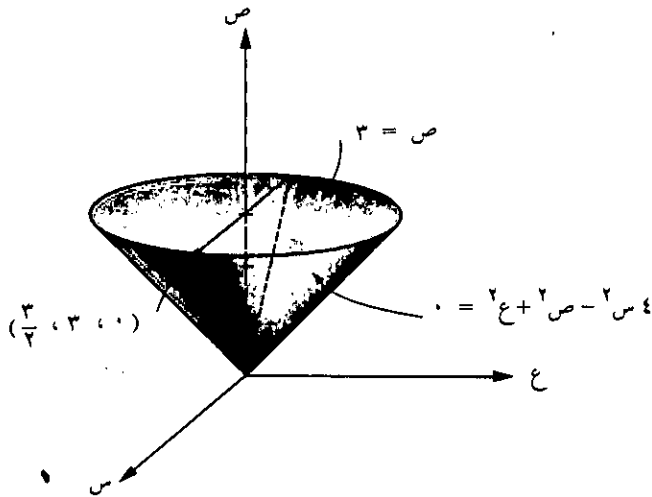
$$z = \left[\frac{v}{2} \right] \left[\frac{v}{2} - \sqrt{\frac{v^2}{4} - s^2} \right] = \left[\frac{v}{2} \right] \left[\frac{v}{2} - \sqrt{\frac{v^2}{4} - s^2} \right] \quad (s^2 + e^2) \quad j \quad z$$

كذلك بإمكاننا إيجاد z بضرب عزم القصور الذاتي لذلك الجزء من الجسم الواقع في الثمن الاول في e . أي

$$z = \left[\frac{v}{2} \right] \left[\frac{v}{2} - \sqrt{\frac{v^2}{4} - s^2} \right] (s^2 + e^2) \quad j \quad z \quad s \quad e \quad v$$

تمارين :

في كل من التمارين ١ - ٤ عد للتمارين المشار اليها لوضع التكاملات المطلوبة لإيجاد مراكز الكتلة للأجسام الموصوفة .



الشكل ١٧ - ٣٦

$$= ٢ \text{ ج هـ } ٢ \left[\frac{٢}{٣} + \sqrt{٢س - ٢٢} \right] \sqrt{٢س - ٢٢}$$

$$= ٢ \text{ ج هـ } ٢ \left[\frac{١}{٣} + \sqrt{٢س - ٢٢} \right] \sqrt{٢س - ٢٢}$$

والتكامل الاخير يمكن حسابه بالتعويض المثلثي أو جدول التكاملات .
والجواب هو

$$\text{نع} = \frac{\text{ج هـ } ٢ \pi}{٤}$$

واذا كان و هو نصف القطر الدوراني فان و = $\frac{\text{نع}}{\text{ع}}$ ، وباستعمال قيمة ع

الناجمة من المثال (١) نحصل على

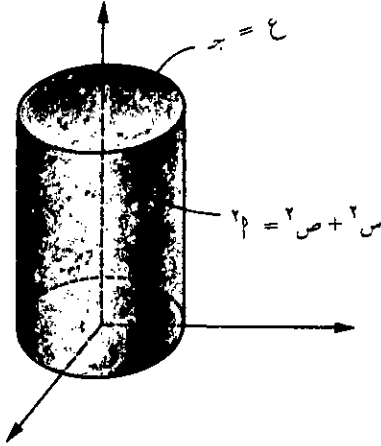
$$\frac{٢٢}{٢} = \frac{٢}{\text{ج هـ } ٢ \pi} = \frac{\text{ج هـ } ٢ \pi}{٤} = ٢س$$

اذن و = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ و و . ٢ أي ان نصف قطر الدوران هو بعد من محور

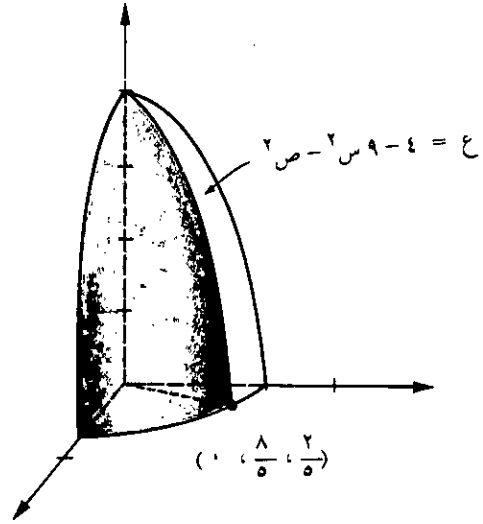
السطوانة يعادل $\frac{٧}{١٠}$ نصف قطر الاسطوانة تقريبا .

مثال ٤ : مجسم متجانس يتخذ شكل المنطقة المحدودة بالمخططين و س - و ص + ع = ٢ ، ص = ٣ ، ضع التكامل الثلاثي لايحاد عزم القصور الذاتي بالنسبة لمحور الصادات .

الحل : المنطقة هي عبارة عن جزء من التكامل البيضوي المخروطي وهي مرسومة في الشكل ١٧ - ٣٦ . لاحظ أن تقاطع المخروط مع المستوى س ص هو زوج



الشكل ١٧ - ٣٤



الشكل ١٧ - ٣٥

وإذا كان للجسم كتلة مقدارها κ وعزم قصور ذاتي ز بالنسبة لمستقيم ما فإن نصف القطر الدوراني ، حسب التعريف ، هو العدد $ز = \kappa و$. وهذه الصيغة تؤكد أن نصف القطر الدوراني هو المسافة عن المستقيم الذي عليه يمكن أن تتركز الكتلة بدون تغيير عزم القصور الذاتي للجسم .

مثال ٣ : أوجد عزم القصور الذاتي ونصف القطر الدوراني بالنسبة لمستقيم التماثل للمجسم الموجود في المثال (١) .

الحل : المجسم مرسوم في الشكل ١٧ - ٣٤ حيث $ث (س ، ص ، ع) = ع$. فباستعمال (١٧ - ٣٤) والتماثل نجد أن

$$نح = ٤ \left[\frac{١}{٢} \sqrt{س^٢ - ص^٢} (س^٢ + ص^٢) + ج ع و ص و س \right]$$

$$= ٤ \left[\frac{١}{٢} \sqrt{س^٢ - ص^٢} (س^٢ + ص^٢) + \frac{٢}{٢} و ص و س \right]$$

$$(\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2) \frac{1}{4} \text{ و ع و س و ص}.$$

— ۳۴۳ —

$$= \frac{24}{3} \left[\sqrt{2p} - 2s \right]$$

$$= \frac{24}{3} \left(\frac{2p}{4} \right) = \frac{24}{3} \pi = 8\pi$$

وأخيرا باستعمال (١٧-٤٢) ينتج

$$\bar{e} = \frac{2}{2} = \frac{2}{2} \pi = \frac{2}{2} \pi = \pi$$

وبذلك فإن مركز الكتلة يقع على محور الاسطوانة ويبعد عن القاعدة السفلى $\frac{2}{3}$ المسافة بين القاعدتين .

وفي المثال التالي سوف نكتفي بوضع التكاملات اللازمة للحل دون أن نحسب قيمتها .

مثال ٢ : جسم له شكل المنطقة الواقعة في الثمن الاول المحدودة بالمخططات ٤-ع = ٩س + ٢ص ، ص = ٤س ، ع = ٠ ، ص = ٠ ، فإذا كانت الكثافة في النقطة ب (س ، ص ، ع) تتناسب طرديا مع المسافة من نقطة الاصل الى النقطة ب ، ضع التكاملات اللازمة لايجاد س .

الحل : المنطقة المطلوبة موضحة في الشكل ١٧-٣٥ ، فحسب الفرض تكون الكثافة في (س ، ص ، ع) هي ث (س ، ص ، ع) = ج (س + ٢ص + ٢ع) ، حيث ج عدد ما ، فباستعمال (١٧-٤٠) ، (١٧-٤١) نجد ، ك ، ك ص ع كما يلي :

$$= \frac{1}{4} \left[\sqrt{2p} - 2s \right] \left[\frac{2}{3} \pi \right]$$

س و ص .

الحل : اذا استحدثنا نظاما احداثيا كما في الشكل (١٧ - ٣٤) فان الجسم يكون محدودا بالمخططات $ص^2 + س^2 = ٢٠$ ، $ع = ٠$ ، $ع = ج$. ومن الفرض يمكن أن نعتبر أن الكثافة في النقطة (س ، ص ، ع) هي $ث (س ، ص ، ع) = م$ ، حيث $م$ عدد ما . فن الطبيعي ان يكون المركز على المحور العيني ، وبالتالي فيكوني ايجاد

$$\overline{ع} = \frac{\overline{س} \overline{ص}}{\overline{ع}} ، \text{ ثم نأخذ بعين الاعتبار صيغة ث وتمائل الجسم ، ونحسب}$$

$\overline{ع}$ ، $\overline{س} \overline{ص}$ لجزء الجسم الواقع في الثمن الاول ثم نضرب في ٤ .
فباستعمال (١٧ - ٤٠) يكون

$$ز = ٤ \left[\begin{array}{c} ٢٠ \\ \sqrt{٢٠ - ٢٠} \\ ٢٠ \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} ٢٠ \\ \sqrt{٢٠ - ٢٠} \\ ٢٠ \end{array} \right] م ع د ع د ص د س .$$

$$٤ م = \left[\begin{array}{c} ٢٠ \\ \sqrt{٢٠ - ٢٠} \\ ٢٠ \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} ٢٠ \\ \sqrt{٢٠ - ٢٠} \\ ٢٠ \end{array} \right] \frac{ج}{٢} د ص د س$$

$$٤ م ج = \left[\begin{array}{c} ٢٠ \\ \sqrt{٢٠ - ٢٠} \\ ٢٠ \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} ٢٠ \\ \sqrt{٢٠ - ٢٠} \\ ٢٠ \end{array} \right] د س = ٢ م ج \left(\frac{٢٠ \pi}{٤} \right) = \frac{٢٠ ٢ ج \pi م}{٢}$$

ثم باستعمال (١٧ - ٤١) $\overline{س} \overline{ص} = ٤ \left[\begin{array}{c} ٢٠ \\ \sqrt{٢٠ - ٢٠} \\ ٢٠ \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} ٢٠ \\ \sqrt{٢٠ - ٢٠} \\ ٢٠ \end{array} \right] ع (م ع) د ع د ص د س$

$$٤ م = \left[\begin{array}{c} ٢٠ \\ \sqrt{٢٠ - ٢٠} \\ ٢٠ \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} ٢٠ \\ \sqrt{٢٠ - ٢٠} \\ ٢٠ \end{array} \right] \frac{ج}{٣} د ص د س .$$

التوالي . وباستخدام الطرق العادية بما فيها نهايات المجاميع ، سنصل الى تعريف لعزوم الاجسام بالنسبة لمستويات الاحداثيات كما يلي :

$$(١٧-٤١) \quad \begin{matrix} \text{ع} \text{ ث} \\ \text{س} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{ع} \\ \text{ص} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{ح} \\ \text{ك} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{ص} \text{ ث} \\ \text{س} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{ع} \\ \text{ص} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{ح} \\ \text{ك} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{س} \text{ ث} \\ \text{س} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{ع} \\ \text{ص} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{ح} \\ \text{ك} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{matrix}$$

مثلاً اذا كان { ي } تجزئة للمنطقة ي وكان ت جزء من مجسم يقابل ي ، فان كتلة ت يمكن تقريبها الى ث (سر ، ع) ح حيث (سر ، صر ، ع) نقطة في ي وعزم ت بالنسبة للمستوى س ص يمكن تقريبه الى ع ث (سر ، صر ، ع) ح. ويجمع هذه العزوم وأخذ النهاية سنصل الى التكامل الاول (١٧-٤١) . والحالات الاخرى يمكن استنتاجها بطرق مشابهة .

أما مركز الكتلة فهي النقطة (س ، ص ، ع) حيث

$$(١٧-٤٢) \quad \begin{matrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{ع} \\ \text{ك} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{ع} \\ \text{ك} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{matrix}$$

واذا كانت ي متجانسة فان الاقتران ث يكون ثابتاً ولذلك يحذف في (١٧-٤٢) . وبالتالي فان مركز كتلة الأجسام المنتظمة يعتمد فقط على شكل ي . وكما هو الحال في بعدين ، فان النقطة المائلة للأجسام الهندسية تسمى مركز كتلة الجسم

مثال ١ : جسم يتخذ شكل الاسطوانة الدائرية القائمة بقاعدة نصف قطرها p ، وارتفاعها ج. أوجد مركز الكتلة اذا كانت الكثافة عند النقطة ب تتناسب طردياً مع بعد النقطة عن احدى القاعدتين .

(١٦) $ع = س^٢ + ص^٢$ ، $ص = ع + ٢$.
كل من التكاملات التكرارية في التمارين ١٧ - ٢٠ تمثل حجم منطقة ما ،
صف هذه المنطقة .

$$(١٧) \begin{bmatrix} ٢ \\ س \\ س^٢ \\ س+ص \\ ع \\ ص \\ ص \\ س \end{bmatrix}$$

$$(١٨) \begin{bmatrix} ١ \\ س \\ س^٣ \\ س \\ ص \\ ع \\ ص \\ ص \end{bmatrix}$$

$$(١٩) \begin{bmatrix} ٢ \\ س \\ ع \\ ع-ص \\ ع-ص \\ ع-ص \\ ع-ص \\ ع-ص \end{bmatrix}$$

$$(٢٠) \begin{bmatrix} ٤ \\ ع \\ ع-ص \\ ع-ص \\ ع-ص \\ ع-ص \\ ع-ص \\ ع-ص \end{bmatrix}$$

(٢١) عرف نهاية مجاميع ريمان لاقتران ذي ثلاثة متغيرات (لاحظ (١٧ - ١٢))
(٢٢) عرف (١٧ - ٣٩) .

٧ — تطبيقات التكاملات الثلاثية :

إذا اتخذ الجسم شكل المنطقة $ى$ ذات الأبعاد الثلاثة ، وكانت كثافته في النقطة
(س ، ص ، ع) هي $ث(س ، ص ، ع)$ حيث $ث$ متصل في $ى$ ، فإن الكتلة كما في
(١٧ - ١٩) تعطي بما يلي :

$$(١٩ - ٤٠) \quad \int \int \int_{ى} ث(س ، ص ، ع) دح = ك$$

وإذا وجد جسم ذو كتلة $ك$ في النقطة (س ، ص ، ع) فإن العزوم بالنسبة
للمستويات $س ص$ ، $س ع$ ، $ص ع$ تعرف بـ $ع ك$ ، $ص ك$ ، $س ك$ على

أوجد التكاملات التالية في التمارين ٣-٦

(۳) $\left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right]$ س س ص ع س

(٤) $\left\{ \begin{array}{c} {}^2e \\ {}^2e \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{c} s-e \\ s+e \end{array} \right\}$ ع و ص و س و ع

(۵) $\left[\begin{matrix} s^+ \\ s^- \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} s^+ \\ s^- \end{matrix} \right]$ $s^+ s^+$
 $2s^+ 2s^+ 2s^+ 2s^+ 2s^+ 2s^+ 2s^+ 2s^+ 2s^+ 2s^+$

(٦) $\left[\begin{smallmatrix} ٣ \\ ٣ \\ ٣ \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} ٣ \\ ٣ \\ ٣ \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} ٣ \\ ٣ \\ ٣ \end{smallmatrix} \right]$ (٢ س + ٣ ص + ٤ ع) (٢ س + ٣ ص + ٤ ع)

٢ في التمارين ٧-١٠ ضع $[[[$ ق (س، ص، ع) ح على شكل

تكمّل تكراري بست طرق مختلفة ، حيث ي محدودة بمخططات المعادلات المعطاة .

(٧) س + ٢ ص + ٣ ع = ٦ ، س = ٠ ، ص = ٠ ، ع = ٠

٨) $٢ = ع$ ، $٠ = ع$ ، $٩ = ٢ص + ٢س$

١٩ = ع ، ٢٤ - ٩ = ع ، ٣٩ = ع ، ٢٤ - ٢٤ = ع ، ٢٤ = ع

$$.36 = 2\text{ع} + 9\text{ص} + 16\text{س} \quad (10)$$

في التمارين ١١ - ١٦ استعمل التكامل الثلاثي لإيجاد حجم المنطقة المحدودة

مخططات المعادلات المعطاة .

$$(11) \quad \epsilon = \epsilon + s^2, \quad \epsilon = \epsilon + s, \quad \epsilon = \epsilon, \quad \epsilon = \epsilon$$

$$. \xi = {}^2\varepsilon + {}^2\varsigma, \xi = {}^2\varsigma \quad (12)$$

(۱۳) ص = ع - ۲ ، ص = ع ، س + ع = ز ، س = س

(۱۴) ع = ۴ ص ۲ ، ع = ۲ ، س = ۲ ، س = ۰

(۱۵) ص^۲ع^۲ = ۱ ، ص + س + ع = ۲ ، س = ۰

الحل : بالعودة الى الشكل ١٧ - ٣٠ (٢) فان التكامل الاول بالنسبة الى س يماثل المجموع على طول سطر متوازي مستطيلات ممتد من المستوى ص ع ، (س = ٠) ، الى الاسطوانة س = $\sqrt{ص}$ ، والمنطقة م في المستوى ص = ع محدودة بالمحور الصادي والعيني وكذلك بالمستقيم ع + ص = ٤ . وبالتالي

$$ح = \int_0^4 \int_{\sqrt{ص}}^{٤-ص} ١ \, ds \, dv = ٤.$$

ويحذر بالقارئ أن يثبت أن قيمة هذا التكامل هي $\frac{١٢٨}{١٥}$. وإذا اخذنا التكامل الثاني الى ع بدلا من ص فان التكامل التكراري هو

$$ح = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{ص}} ١ \, ds \, dv = ٤.$$

وليس صعبا أن يعمم تعريف التكاملات المتعددة الى اقترانات ذات أي عدد من المتغيرات . وفي التمرين ٢٢ على الطالب ان يعرف

$$(١٧-٣٩) \quad \int \int \int \int_Q f(x, y, z, w) \, dx \, dy \, dz \, dw$$

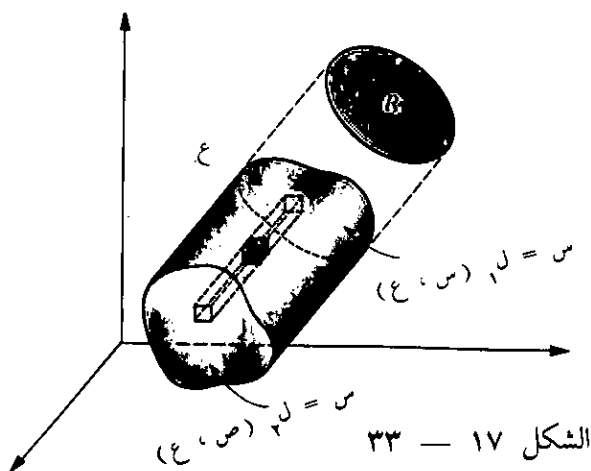
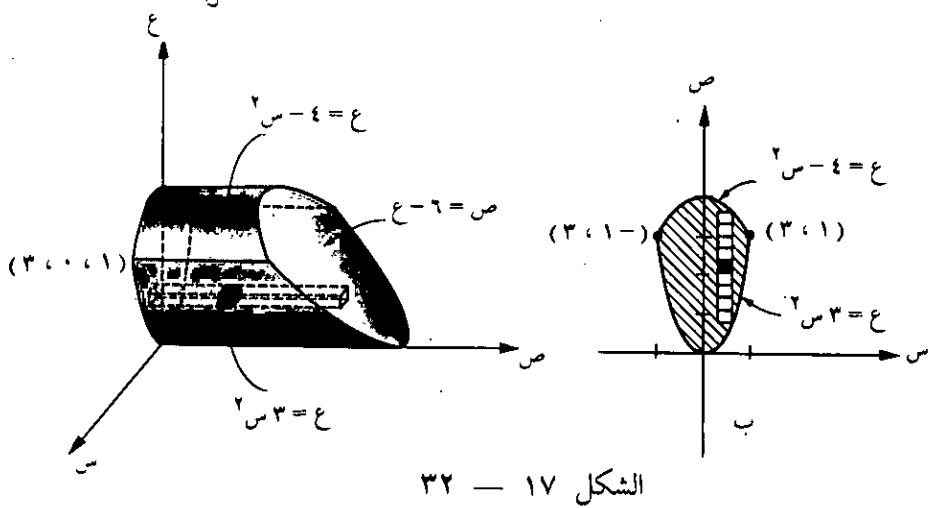
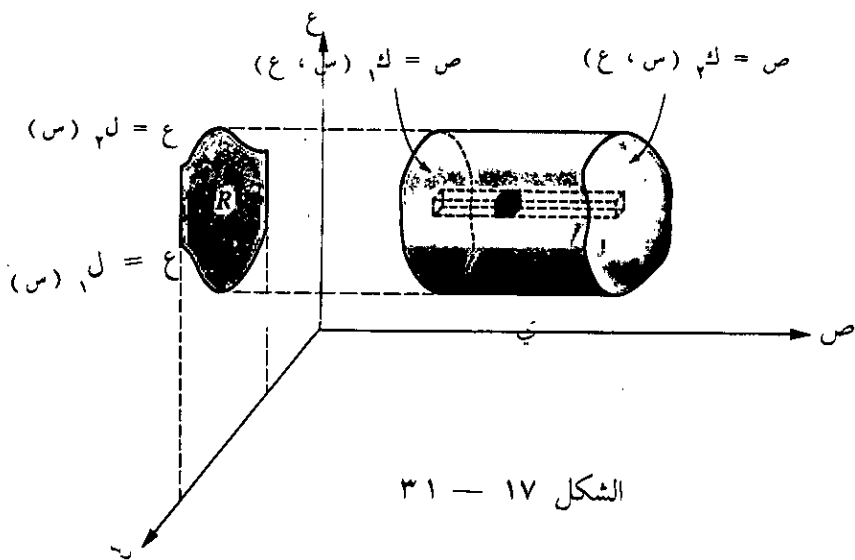
$$Q = \{(x, y, z, w) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}$$

تمارين :

(١) احسب تكامل المثال (١) باستعمال خمس ترتيبات للتكامل غير ذلك المستعمل في الحل .

$$(٢) \text{ اذا كانت } f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ احسب } \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\text{فأوجد } \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \text{ بست طرق مختلفة}$$



[illegible]

$$(6-E) \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} =$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{304}{15} = \left[\frac{(16 - 20) \text{ س} + (4 \text{ س})}{1} \right] =$$

وإذا استعملنا ترتيباً آخر للتكامل ، نجد من الضروري استعمال تكاملات ثلاثية .
 متعددة (لماذا) .

اخيرا ، اذا كانت γ منطقة من النوع الموضح في الشكل ١٧ - ٣٣ حيث أن الاقترانين L_1 ، L_2 لها مشتقتان اوليتان متصلتان في منطقة M ملائمة في المستوى $ص ع$ ، فإن :

۱۱۱ ق (س، ص، ع) ح =

ق (س، ص، ع) ف

وفي التكامل الثنائي التكراري الأخير ، يمكن استبدال z في العبارة z و v أو z و v ع .

مثال ٥ : أعد المثال (٣) بالمكاملة أولاً بالنسبة للمتغير س .

ولمناطق معينة يمكن حساب التكامل الثلاثي بواسطة التكامل الثلاثي التكراري الذي فيه قد يكون التكامل الاول بالنسبة الى ص أو س ، وهكذا لنفرض أن

$\text{ى} = \{(س، ص، ع) : \text{س} \geq \text{ب}، \text{ب} \geq \text{هـ}، \text{هـ} (س) \geq \text{ع} \geq \text{ل}، \text{ل} (س)، \text{ك}، (س، ع) \geq \text{ص} \geq \text{ك}، \text{ك} (س، ع)\}$
 حيث ان الاقترانات المعطاة ذات سلوك عدليل لا شذوذ فيه .
 ان مخطط مثل هذه المنطقة موضح في الشكل (١٧ - ٣١) . وفي هذه الحالة يمكن اثبات أن

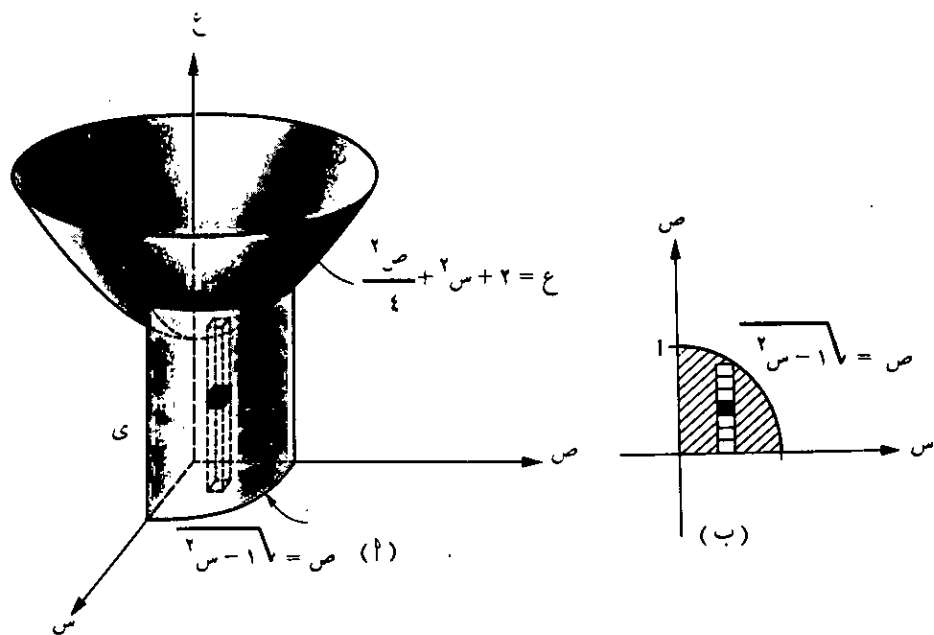
$$(١٧ - ٣١) \quad \left[\int \int \int_{\text{ى}} \text{ق} (س، ص، ع) \text{ دح} = \right.$$

$$\left. \int \int \int_{\text{ب}} \text{ل}، \text{ل} (س) \text{ دك} \int \int_{\text{ق}} (س، ص، ع) \text{ دص دع دس} \right.$$

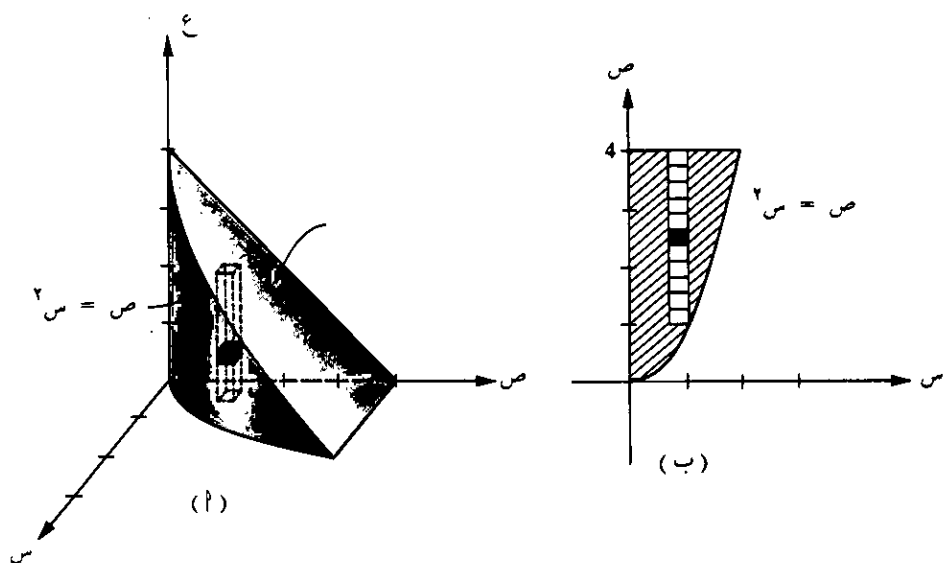
هذا التكامل التكراري يجب اعتباره كنهاية المجموع الثلاثي الذي نحصل عليه أولاً بأخذ المجموع على متوازي المستطيلات في اتجاه محور الصادات من السطح الايسر (حيث $\text{ص} = \text{ك}، (س، ع)$ الى السطح الايمن (حيث $\text{ص} = \text{ك}، (س، ع)$)) ، كما هو موضح في الشكل ١٧ - ٣١ . والتكامل الثنائي الناتج يمكن حسابه عندئذ عن المنطقة م في المستوى س ع .

مثال ٤ : أوجد حجم المنطقة سى المحدودة بالمخططات $\text{ع} = \text{س}^٣، \text{ع} = \text{س}^٢، \text{ص} = ٠، \text{ع} - \text{ص} = ٦$.

الحل : كما هو مبين في الشكل ١٧ - ٣٢ (ب) ، تقع سى تحت الاسطوانة $\text{ع} = \text{س}^٢$ وفوق الاسطوانة $\text{ع} = \text{س}^٣$ الى اليمين من المستوى س ع والى اليسار من المستوى $\text{ص} + \text{ع} = ٦$. ولذلك تكون سى منطقة من النوع الموضح في الشكل ١٧ - ٣١ حيث $\text{ك}، (س، ع) = ٠، \text{ك}، (س، ع) = ٦ - \text{ع}$. والمنطقة م في المستوى س ع مرسومة في الشكل ١٧ - ٣٢ ب . فبتطبيق (١٧ - ٣٨) ينتج أن



الشكل ١٧ — ٢٩



الشكل ١٧ — ٣٠

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

تمثل حجم المنطقة في الموضح في الشكل (١٧ - ٢٩) (١).

مثال ٣ : أوجد حجم الجسم في الثمن الاول المحدود بالمستوى $z = 4$ والاسطوانة $z = 2$ ومستويين $z = 2$ ، $z = 4$.

الحل : الجسم موضح في الشكل (١٧ - ٣٠) مع العمود الممثل للمجموع الاول في اتجاه z . لاحظ ان العمود يمتد من $z = 0$ الى $z = 4$. والمنطقة M في المستوى $z = 2$ موضحة في القسم (ب) من نفس الشكل مع الشريحة المائلة للتكامل الاول (من التكامل الثاني) بالنسبة الى z . فبتطبيق (١٧ - ٣٦) حيث $Q = (z, y, x)$ نجد أن

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= 8 - \frac{4}{3} + \frac{1}{10} = \frac{128}{15}$$

واذا استعملنا (١٧ - ٣٧) فان الشريحة الموضحة في الشكل

(١٧ - ٣٠) ستكون أفقية وبالتالي فان

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وعلى الطالب اثبات ان هذا التكامل يساوي $\frac{128}{15}$

منطقة في الثمن الاول محدودة بالمستويات الاحداثية والمخططين

$$ع - ٢ = ٢س + \frac{٢ص}{٤} ، ١ = ٢ص + ٢س$$

الحل : كما هو موضح في الشكل ١٧ - ٢٩ (١) تقع ى تحت مخطط المكافئ

$$ع = ٢ + ٢س + \frac{٢ص}{٤} \text{ وفوق المخطط } ع = ٠ \text{ (مستوى س ص) . والمنطقة م}$$

في المستوى س ص محدودة بالمحاور الاحداثية والمخطط ص = $\sqrt{١ - ٢س}$

وكذلك يتضح من نفس الشكل أن العمود الذي يمثل المجموع الاول من

متوازيات المستطيلات ذات الحجم $\Delta ع م \Delta$ ص Δ س Δ في اتجاهات المحور

العيني ع . وبما أن العمود يمتد من المستوى س ص (حيث ع = ٠) الى الجسم

المكافئ فان النهاية السفلى في اشارة التكامل الداخلي في (١٧ - ٣٦) هي

$$\text{صفر . وكذلك فإن النهاية العليا هي } ٢ + ٢س + \frac{٢ص}{٤} \text{ واما التكاملان الثاني}$$

والثالث فهما مأخوذان على المنطقة م (لاحظ الشكل ١٧ - ٢٩ (ب) .

وبالتالي فان التكامل في (١٧ - ٣٦) يتخذ الشكل

$$\int_0^1 \left[٢ + ٢س + \frac{٢ص}{٤} - \sqrt{١ - ٢س} \right] دس$$

واذا كان ق (س ، ص ، ع) = ١ في المنطقة ى ، فان التكامل الثلاثي على

ى يكتب على شكل $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{١ - ٢س}} \int_0^{٢ + ٢س + \frac{٢ص}{٤}} د ع د ص د س$ ومن المثال ٢

ينتج أن قيمة التكامل

وبالتحديد اذا كانت م من النوع الموجود في الشكل ١٧ - ١ (٢) فان

$$(١٧-٣٦) \left[\begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \right] \text{ح} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ل} \\ \text{ك} \\ \text{م} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \right] \text{ح} =$$

حيث أن الرمز في الطرف الايسر يسمى التكامل (الثلاثي) التكراري ، ويمكن حسابه بواسطة التكاملات الجزئية للاقتزان ق (س ، ص ، ع) حسب الترتيب ع ، ص ، س مع تعويض النهايات الموضحة بالطريقة المعتادة . وبطريقة مشابهة اذا كانت م من النوع الموجود في الشكل ١٧ - ١ (ب) فان

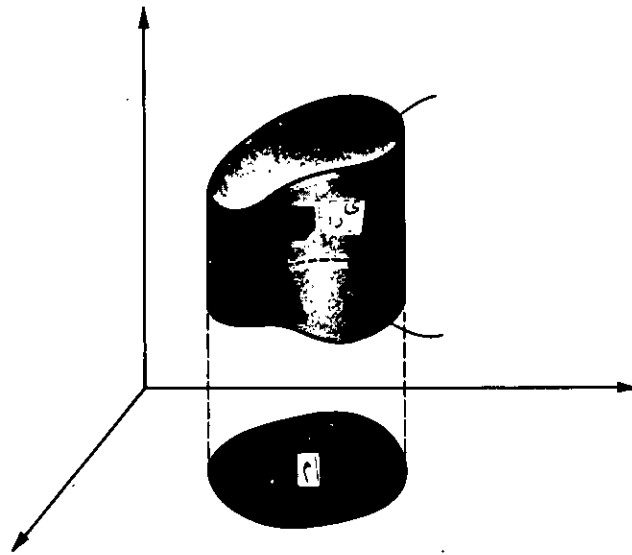
$$(١٧-٣٧) \left[\begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \right] \text{ح} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{د} \\ \text{هـ} \\ \text{ك} \\ \text{م} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \right] \text{ح} =$$

ومن المفيد اعتبار التكامل التكراري (١٧ - ٣٦) او (١٧ - ٣٧) كنهاية لمجموع ثلاثي حدوده على شكل ق (هـ ، و ، ن) ع ر ص ر د سر ، حيث نجمع أولا عموديا باتجاه محور الصادات من السطح السفلي (بمعادلة ع = ك (س ، ص)) إلى السطح العلوي (بمعادلة ع = ك (س ، ص)) ، والتكامل الثنائي الناتج يحسب بعدئذ على المنطقة م باستعمال الطرق التي ناقشناها في البند ٢ .

مثال ٢ : عبر عن $\left[\begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \right] \text{ح}$ كتكامل تكراري حيث ي هي

حيث أن الاقترانين $\mathcal{K}$ ، $\mathcal{L}$ لها مشتقتان اوليتان جزئيتان متصلتان في المنطقة $\mathcal{M}$. فهندسيا تقع $\mathcal{Y}$ بين المخططين $\mathcal{E} = \mathcal{K}$ ($\mathcal{S}$ ، $\mathcal{V}$) ، $\mathcal{E} = \mathcal{L}$ ($\mathcal{S}$ ، $\mathcal{V}$) . وفوق أو تحت المنطقة $\mathcal{M}$. واذا جزئت $\mathcal{Y}$ الى مناطق جزئية بمستويات موازية للاحداثيات الثلاثة ، فان متوازيات المستطيلات الناتجة $\mathcal{Y}_1$ ، $\mathcal{Y}_2$ ، $\mathcal{Y}_3$ ، التي تقع كليا في داخل المنطقة $\mathcal{Y}$ ، تكون التجزئة الداخلية $\mathcal{J}$ للمنطقة $\mathcal{Y}$ ، والمخطط المبين في الشكل (١٧ - ٢٨) يرينا منطقة $\mathcal{Y}$ من النوع المذكور والمنطقة الجزئية $\mathcal{Y}$ للتجزئة الداخلية . اما مجموع ريمان للاقتران $\mathcal{Q}$ في $\mathcal{J}$ فهو أي مجموع على شكل (١٧ - ٤٤) حيث ان ($\mathcal{H}_r$ ، $\mathcal{W}_r$ ، $\mathcal{N}_r$) نقطة عشوائية في $\mathcal{Y}_r$. والتكامل الثلاثي للاقتران $\mathcal{Q}$ في $\mathcal{Y}$ هو ايضا معرف كالتالية (١٧ - ٣٤) . ويمكن بيان انه اذا كان $\mathcal{Q}$ متصلا في $\mathcal{Y}$ فان :



الشكل (١٧ - ٢٨)

$$\begin{aligned}
 & \text{(١٧ - ٣٥)} \quad \mathcal{Y} \quad \mathcal{Q}(\mathcal{S}, \mathcal{V}, \mathcal{E}) = \mathcal{H} \\
 & \quad \mathcal{Y} \quad \mathcal{Q}(\mathcal{S}, \mathcal{V}, \mathcal{E}) = \mathcal{H} \\
 & \quad \mathcal{Y} \quad \mathcal{Q}(\mathcal{S}, \mathcal{V}, \mathcal{E}) = \mathcal{H} \\
 & \quad \mathcal{Y} \quad \mathcal{Q}(\mathcal{S}, \mathcal{V}, \mathcal{E}) = \mathcal{H}
 \end{aligned}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{ق} \\ \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \right] \text{و ج} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ل} \\ \text{د} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{و} \\ \text{ص} \\ \text{د} \end{array} \right] \text{ع}$$

مثال ١ :

$$\text{احسب } \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \right] \text{و ح حيث}$$

$$\text{ي} = \{ (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) : 1 - \text{س} \geq 1 , 3 \geq \text{ص} \geq 0 , 3 \geq \text{ع} \geq 2 \} .$$

الحل :

$$= \left[\begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ل} \\ \text{د} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{و} \\ \text{ص} \\ \text{د} \end{array} \right] \text{ع}$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ل} \\ \text{د} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{و} \\ \text{ص} \\ \text{د} \end{array} \right] \text{ع}$$

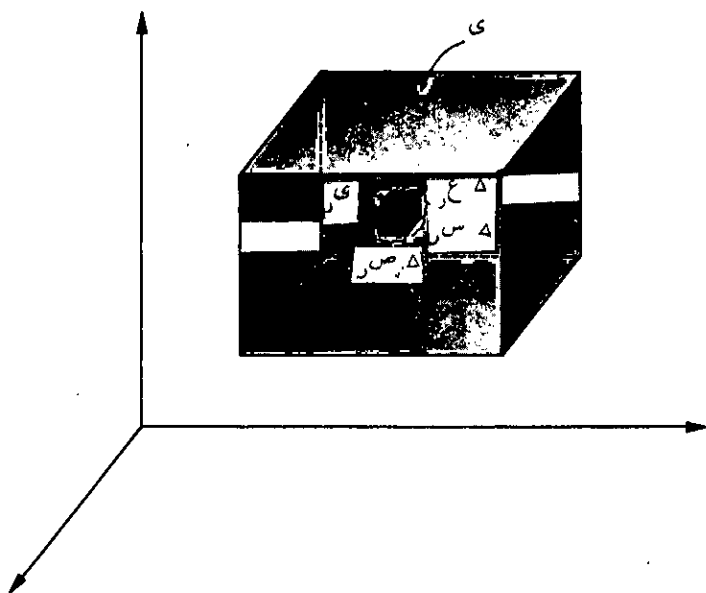
$$= \left[\begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ل} \\ \text{د} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{و} \\ \text{ص} \\ \text{د} \end{array} \right] \text{ع}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ل} \\ \text{د} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{و} \\ \text{ص} \\ \text{د} \end{array} \right] \text{ع}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{ب} \\ \text{ل} \\ \text{د} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \text{و} \\ \text{ص} \\ \text{د} \end{array} \right] \text{ع} = 2040$$

ويمكن تعريف التكاملات الثلاثية في مناطق غير تلك المحددة بمتوازيات المستطيلات افرض ، على سبيل المثال ، أن م هي منطقة في المستوى س ص يمكن تجزئتها لمناطق جزئية من الانواع المبينة بالشكل (١٧ - ١) وان ي منطقة ذات ابعاد ثلاثة معرفة بما يلي :

$$\text{ي} = \{ (\text{س} , \text{ص} , \text{ع}) : \text{س} , \text{ص} \geq \text{م} , \text{ك} , (\text{س} , \text{ص}) \geq \text{ع} \} .$$



الشكل ١٧ - ٢٧

$$(١٧-٣٤) \quad \begin{bmatrix} \text{ع} \\ \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \text{ ق (س، ص، ع) د ح = نها} \quad \text{|| ح || ٠-١١}$$

$$\begin{bmatrix} \text{ع} \\ \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \text{ ق (هر، ور، نر) ح}$$

بالاضافة الى ذلك يمكن اثبات ان

$$\begin{bmatrix} \text{ع} \\ \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \text{ ق (س، ص، ع) د ح} = \begin{bmatrix} \text{ع} \\ \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \text{ ق (س، ص، ع) د ح} \quad \text{|| ع || ٠-١١}$$

حيث أن التكامل التكراري في الطرف الأيسر يعني ان التكامل الاول بالنسبة للمتغير س (ص، ع ثابتان) والثاني بالنسبة للمتغير ص (ع ثابتة) والثالث بالنسبة للمتغير ع. وهنالك خمس تكاملات اخرى مساوية للتكامل الثلاثي للاقتران ق على متوازي المستطيلات ي. فمثلاً اذا كاملنا حسب الترتيب ص، ع، س فان

$$(15) \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) \end{array} \right] \sqrt{3} \sqrt{3} \sqrt{3}$$

$$(16) \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{3} \sqrt{3} \sqrt{3} \end{array} \right] \sqrt{3} \sqrt{3} \sqrt{3}$$

(17) جد حجم الجزء الذي يقع داخل الكرة $2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 25$ وخارج الاسطوانة $2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 9$

(18) جد حجم الجسم المقطوع من الناقصي $2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 16$ بالاسطوانة $2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 1$

(19) جد حجم الجسم المحدد ببيان ع = ر ، وبيان الاسطوانة ر = 2 جتا هـ .
(20) جد حجم الجسم المحدد ببيان المكافيء ع = 4ر² والاسطوانة ر = 3 جا هـ ، والمستوى ع = صفرا .

٦ — التكاملات الثلاثية :

من الممكن ان نعرف التكاملات الثلاثية للاقتران ق ذي المتغيرات الثلاثية س ، ص ، ع بطريقة مشابهة لتلك المستعملة في البند ٢ للاقتران ذي المتغيرين . وأسهل حالة عندما يكون الاقتران ق متصلا في منطقة مثل :

ي = { (س ، ص ، ع) : $\mu \geq س \geq ب ، ج \geq ص \geq ٥$ }
م $\geq ع \geq ل$. فاذا جزئت ي الى مناطق جزئية ي_١ ، ي_٢ ، ... ي_ن بمستويات موازية لمستويات الاحداثيات الثلاثة ، فان المجموعة { ي_١ : ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن } تسمى التجزئة ج للمنطقة ي . والمقياس || ج || للتجزئة هو أطول أكبر قطر لجميع ي_١ . وكما هو موضح في الشكل (١٧ - ٢٧) اذا كانت $\Delta س$ ، $\Delta ص$ ، $\Delta ع$ ، فان الحجم $\Delta ح$ للمنطقة الجزئية ي_١ هو حاصل الضرب

$$(17-23) \quad \sum_{i=1}^n (هـ_١ ، و_١ ، ن_١) \Delta ح$$

يسمى مجموع ريمان للاقتران ق وحسب التجزئة ج . ومبدأ النهاية لمثل هذه الجاميع يعرف بطريقة مشابهة لتلك المعطاة في (١٧ - ٢) للاقتران ذي المتغيرين . واذا وجدت النهاية فانها تسمى التكامل الثلاثي للاقتران ق في المنطقة ي ويشار اليها بالتكامل التالي :

٥ (منطقة محدودة ببيان الاقتران $r = ٢$ جتا θ ، والكثافة في أي نقطة (r, θ) تتناسب طرديا مع بعدها عن القطب .

٦ (منطقة محددة بحلقة واحدة من $r = ٢$ جتا θ من $\theta = \frac{\pi}{٤}$ الى θ

$= \frac{\pi}{٤}$ ، والكثافة في أي نقطة (r, θ) تتناسب عكسيا مع بعدها عن القطب .

٧ (المنطقة الواقعة داخل بيان الاقتران $r = ٣$ جا θ ، وخارج بيان الاقتران $r = ١$ + جا θ ، والكثافة في أي نقطة تتناسب عكسيا مع بعدها عن القطب .

٨ (داخل بيان الاقتران $r = ٤$ جتا θ ، وخارج بيان الاقتران $r = ٢$ ، والكثافة في أي نقطة تتناسب طرديا مع بعدها عن المحور القطبي .

٩ (جد عزم القصور الذاتي القطبي لصفحة منتظمة لها شكل المنطقة المحددة ببيان المعادلة $r = ٢$ جا θ .

(١٠) صفحة على شكل المنطقة $M = \{(r, \theta) : ٢ \leq r \leq ١, \theta \leq \pi - ١\}$ ، أوجد عزم القصور الذاتي القطبي .

(١١) جد عزم القصور الذاتي ونصف قطر دائرة الدوران لصفحة دائرية نصف قطرها p حول أحد الخطوط التي تمر بالمركز .

(١٢) أوجد عزم القصور الذاتي ونصف قطر دائرة الدوران لصفحة دائرية نصف قطرها p حول أحد الخطوط الماسة .

جد التكاملات التالية في التمارين ١٣ - ١٦ بتحويلها الى الاحداثيات القطبية.

$$(١٣) \int_0^{\frac{\pi}{٢}} \int_{\frac{p}{\sqrt{٢}} \cos \theta}^{\frac{p}{\sqrt{٢}} \sin \theta} (٢ \cos^2 \theta + ٢ \sin^2 \theta) r dr d\theta$$

$$(١٤) \int_0^{\frac{\pi}{٢}} \int_{\frac{p}{\sqrt{٢}} \cos \theta}^{\frac{p}{\sqrt{٢}} \sin \theta} (٢ \cos^2 \theta + ٢ \sin^2 \theta) r dr d\theta$$

ان المنطقة م في المستوى س ص محددة بالمحاور الاحداثية وبربع الدائرة س = ٢ . كما في الشكل ١٧ - ٢٦ (ب) بالاضافة الى شريط على شكل وتر من مناطق التجزئة الداخلية . فباستعمال ما ناقشناه سابقا مع العلم أن ق (ر) ، $\theta = 4 - r^2$ نحصل على

$$C = \int_0^2 \int_{\sqrt{4-r^2}}^2 (4 - r^2) r dr d\theta = \int_0^2 \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{\sqrt{4-r^2}}^2 d\theta$$

$$= \int_0^2 \left(2(4 - r^2) - \frac{1}{4}(4 - r^2)^2 \right) d\theta = \int_0^2 \left(8 - 2r^2 - \frac{1}{4}(16 - 8r^2 + r^4) \right) d\theta$$

$$= \int_0^2 \left(8 - 2r^2 - 4 + 2r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right) d\theta = \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{4}r^4 \right) d\theta$$

فباستعمال الاحداثيات الديكارتية فان نفس المسألة تعطينا التكامل الثنائي

$$C = \int_0^2 \int_{\sqrt{4-r^2}}^2 (4 - r^2) r dr d\theta = \int_0^2 \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{\sqrt{4-r^2}}^2 d\theta$$

و ص د س .

وبعد حساب التكامل الاخير يقتنع القارئ بفائدة استعمال الاحداثيات الاسطوانية (أو القطبية) في بعض المسائل .

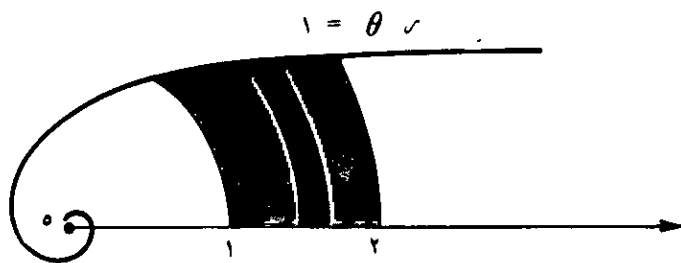
تمارين :

في التمارين ١ - ٤ استخدم التكامل الثنائي لايجاد مساحة المناطق التالية :

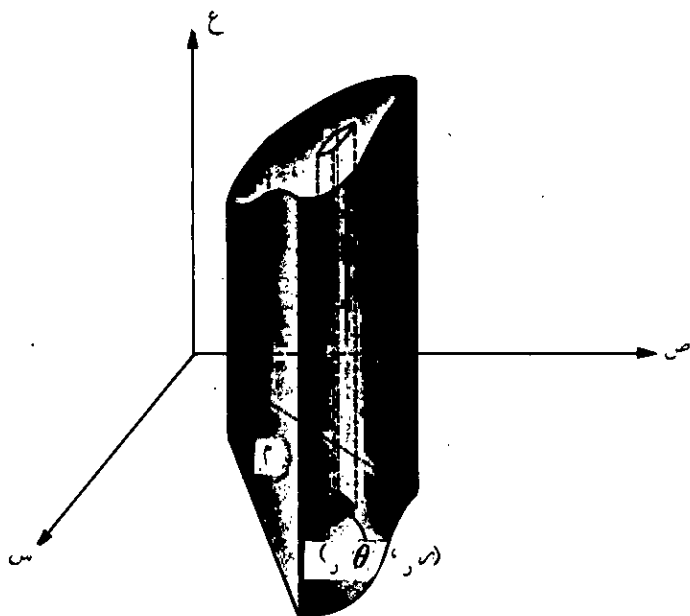
- (١) حلقة واحدة من $r^2 = 9$ ح $r = 2$ ، θ .
- (٢) حلقة واحد من $r = 2$ ح $r = 2$ ، θ .
- (٣) داخل بيان الاقتران $r = 2 - 2$ ح $r = 2$ ، θ وخارج بيان الاقتران $r = 3$.
- (٤) منطقة محددة ببيان الاقتران $r = 3 + 2$ ح $r = 2$ ، θ .

جد الكتلة والمركز لصفحة على شكل المنطقة المذكورة في التمارين ٥ - ٨

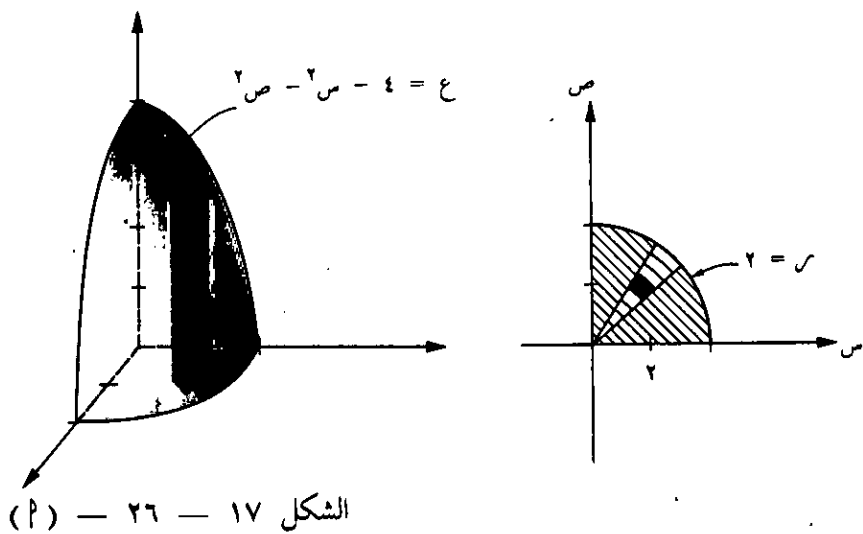
والكثافة المعطاة :—



الشكل ١٧ - ٢٤



الشكل ١٧ - ٢٥



الشكل ١٧ - ٢٦ - (P)

$$r = \theta = 1 \text{ من } \theta = 1 \text{ الى } \theta = 2.$$

الحل : ان مخطط المنطقة ومعها مناطق أولية قطبية موضح في الشكل ١٧ - ٢٤ .
وحسب الفرض فان الكثافة في أي نقطة (ر ، θ) تساوي مقدارا ثابتا ج .
وباستعمال (١٧ - ٢٥) بالاضافة الى الملاحظات السابقة نحصل على :

$$Z = \left[\begin{matrix} (س^2 + ص^2) \theta \\ (س، ص) \end{matrix} \right] \frac{1}{r} = \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right] r$$

ج ر و θ و ر .

$$= \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right] r \theta = \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right] r \theta = \frac{1}{r} = \frac{7}{2}$$

واذا كان ق (ر ، θ) $\leq$ صفر في المنطقة القطبية م ، فان التكامل الثاني

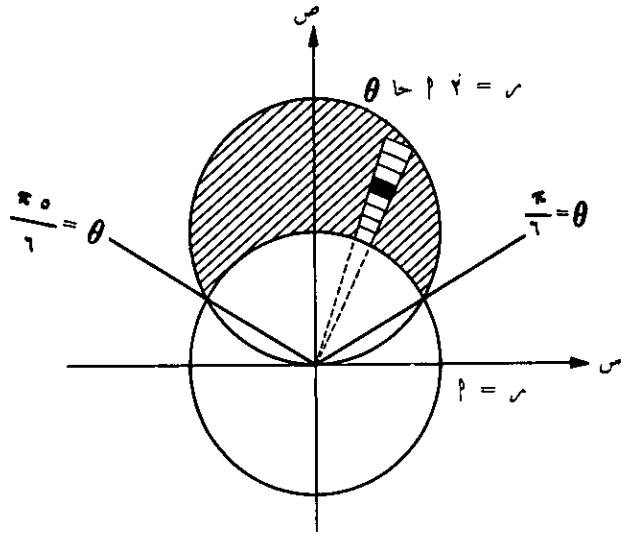
$$\left[\begin{matrix} ق (ر ، \theta) \\ \theta \end{matrix} \right] \text{ و ف في (١٧ - ٢٩) يمكن اعتباره حجم جسم}$$

بطريقة مشابهة للعلاقتين (١٧ - ٥) ، (١٧ - ١٨) في الاحداثيات الديكارية . والفرق الرئيسي في الوضع الحالي هو اعتبار ب بيان الاقتران ع = ق (ر ، θ) بالاحداثيات الاسطوانية . ان الجسم يقع تحت البيان ب وفوق المنطقة م . فاذا استعملنا التجزئة الداخلية القطبية للمنطقة م فان ق (ر ، θ) $\Delta_r \Delta_\theta$ في (١٧ - ٢٩) عبارة عن حجم منشور ارتفاعه ق (ر ، θ) ومساحة قاعدته $\Delta_r \Delta_\theta$ كما هو موضح في الشكل ١٧ - ٢٥ . وان نهاية مجموع هذه العبارات يساوي الحجم المطلوب .

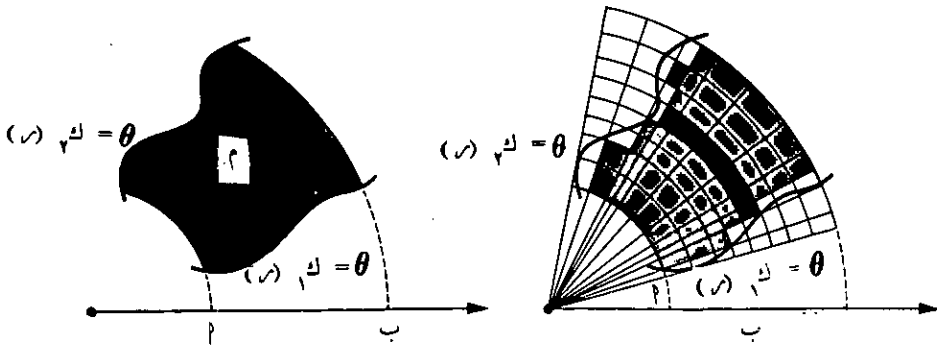
مثال ٤ : جد حجم الجسم المحدد بمستوى س ص والجسم المكافيء ع = $4 - س^2 - ص^2$

الحل : ان مخطط الجزء الواقع في الثمن الاول من الجسم موضح في الشكل (١٧ - ٢٦) وباستعمال التماثل يكفي ايجاد حجم هذا الجزء ثم نضربه في ٤ . فاذا استحدثنا الاحداثيات الاسطوانية فان معادلة المكافيء هي ع = $4 - س^2$.

ويمكن تفسير التكامل التكراري في (١٧ - ٣٢) بأنه نهاية مجموع تكامل
ثنائي . وفي هذه الحالة أولا نبقى r ثابتة ، ثم نأخذ المجموع باتجاه قوس دائري كما
هو موضح في الجزء الغامق من المنطقة المظلمة في الشكل ١٧ - ٢٣ (ب) .
وثانيا نمسح المنطقة م بان نجمع الحدود التي تقابل المناطق التي تقابل المناطق التي
على شكل حلقة .



الشكل ١٧ - ٢٢



الشكل ١٧ - ٢٣ (أ)

الشكل ١٧ - ٢٣ (ب)

مثال ٣ : جد عزم القصور الذاتي القطبي لصفحة على شكل المنطقة الصغرى المحددة
بالمحور القطبي وبياني الأفترانين $r = 1$ ، $r = 2$ ، ويجزء من اللولبي

$$\left[\left(\frac{\pi^0}{\gamma} - \sqrt[3]{\gamma} \right) \right] p \text{ ج} = \frac{\pi^0}{\gamma} \left[\theta - \theta \text{ جتا} \right] p \text{ ج} =$$

$$\left[\left(\frac{\pi}{\gamma} - \sqrt[3]{\gamma} \right) - \right]$$

$$\left[\frac{\pi^2}{3} - \sqrt[3]{\gamma^2} \right] p \text{ ج} =$$

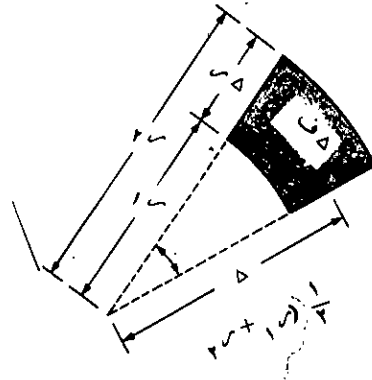
ومن الممكن وتحت شروط مناسبة ان نحول تكاملا تكراريا بدلالة الاحداثيات الديكارتية الى تكامل ثنائي بدلالة الاحداثيات القطبية فأولا نعوض θ جتا θ ، θ س جا θ بدلا من s ، v على الترتيب . وثانيا نعوض θ و θ (أور θ و θ) بدلا من v و s (أور s و v) ثم تبديل حدود التكامل بدلالة الاحداثيات القطبية . فعلى سبيل المثال العلاقة (١٧ - ٢٤) لعزم القصور الذاتي لصفحة كالتى في الشكل ١٧ - ٢١ (٢) حول محور الصادات (أو المحور القطبي) يعطي كما يلي :

$$(١٧ - ٣١) \text{ زس} = \int_{\theta}^{\theta} \int_{\theta}^{\theta} \left[\theta \text{ جتا} \theta \right]^2 \left(\theta \text{ جتا} \theta \right) \left(\theta \text{ جا} \theta \right) \left(\theta \right) \theta \text{ و} \theta$$

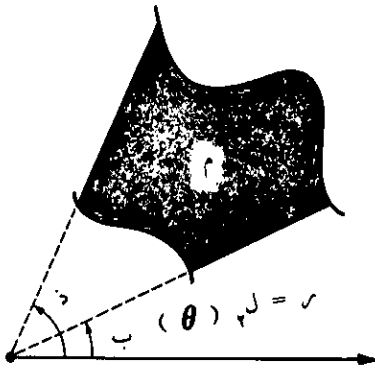
حيث θ (س ، ص) هي الكثافة عند النقطة (س ، ص) . خذ مثلا الصفحة التي في المثال (١) ، فان (١٧ - ٣١) يتخذ الشكل

$$\theta \text{ و} \theta \left(\frac{\gamma}{r} \right) \theta \text{ جتا} \theta \left[\frac{\pi^0}{\gamma} - \frac{\pi}{\gamma} \right] p \text{ ج} =$$

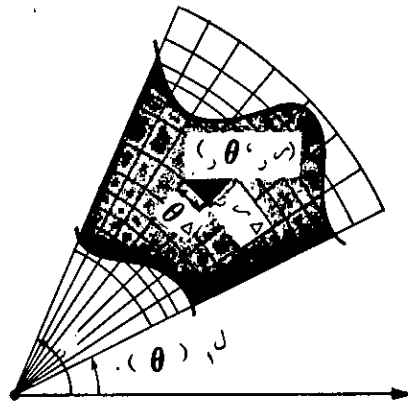
وكمثال ثان خذ ما يلي :



الشكل ١٧ - ٢٠



الشكل ١٧ - ٢١



الشكل ١٧ - ٢١ ب

$$\text{اذن } \int_0^{\theta} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r}{\theta} \right)^{\frac{\pi}{2}} \right] d\theta = \int_0^{\theta} \left(\frac{r}{\theta} \right)^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\int_0^{\theta} \left(\frac{r}{\theta} \right)^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \int_0^{\theta} \left(\frac{r}{\theta} \right)^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

والتكامل الاخير يمكن ايجاده كما يلي :

$$(17-30) \int_0^1 \int_0^1 q(s, \theta) ds =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 q(r, h) dr ds \quad (17-30)$$

ومن المهم ملاحظة ان التكامل الايسر هو $q(s, \theta)$ ، وهذا لأن Δ r تساوي $r_r \Delta r$.

ومن المفيد أحيانا ان نعتبر التكامل التكراري في (17-30) عبارة عن نهاية مجموع ثنائي على نحو ما صنعنا في الاحداثيات الديكارتية في نهاية البند الثاني . فهنا نبقى θ ثابتة ، ثم نأخذ المجموع باتجاه احدى المناطق التي على شكل وتر كما في الشكل 17-21 (ب) من بيان الاقتران L الى بيان الاقتران L ثم نأخذ المجموع الثاني ليمسح المنطقة بتغيير θ من B الى D . فبدلي ان التكامل التكراري يتضمن هذا المسح وفي نفس الوقت يعطي نهايته عندما تقترب θ من الصفر .

واذا كان $q(r, \theta) = 1$ على طول المنطقة ، فان التكامل في (17-30) يساوي مساحة المنطقة M ، وهذا ايضا يمكن استنتاجه من الفصل الثالث عشر حيث انه بعد أن تكامل جزئيا بالنسبة للمتغير r فاننا نحصل على العلاقة (13-14) .

مثال 1 : جد كتلة صفيحة على شكل المنطقة M الواقعة خارج بيان الاقتران $r = p$ ، وداخل بيان الاقتران $r = 2p$ جا θ اذا كانت الكثافة تتناسب عكسيا مع البعد عن القطب .

الحل : مخطط المنطقة ظاهر في الشكل 17-22 بالاضافة الى شريحة لمناطق أولية قطبية تمتد من أحد حدود المنطقة M الى الحد الآخر . والكثافة $q(r, \theta)$ ،

θ في أي نقطة (r, θ) تساوي $\frac{1}{r}$ ، حيث θ عدد حقيقي .

مثل هذه المنطقة تسمى منطقة قطبية أولية

فاذا كانت θ هي الزاوية بالقياس

Elementary Polar Region

الدائري المحصورة بين الشعاعين وكان $\Delta r = r_2 - r_1$ فان مساحة المنطقة Δ ف تعطي بالعلاقة

$$\Delta f = \frac{1}{2} r_2^2 \theta - \frac{1}{2} r_1^2 \theta$$

وهذه العلاقة يمكن كتابتها على شكل :

$$\Delta f = \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) \theta = \frac{1}{2} (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) \theta$$

فاذا سمينا معدل نصفي القطرين $\bar{r}$ وهو $\frac{r_2 + r_1}{2}$ ، فان

$$\Delta f = \theta \Delta \bar{r} \quad (17-28)$$

والان نأخذ منطقة من النوع الموضح في الشكل ١٧-٢١ (ب) ، محددة

بشعاعين يصنعان زاويتين موجبتين ب ، ذ مع المحور القطبي وبياني إقترانين

قطبيين

$= l_1(\theta)$ ، $= l_2(\theta)$ ، حيث l_1 ، l_2 إقترانان ممهدان ، l_1

$(\theta) \leq l_2(\theta)$ لكل θ في الفترة [ب ، ذ] فاذا جزأنا المنطقة م

بواسطة أقواس واشعة كما في الشكل ١٧-٢١ فان مجموع المناطق م_١ ، م_٢ ،

..... من التي تقع تماما داخل المنطقة م تسمى تجزئة داخلية قطبية

للمنطقة م . وان المقياس ||ج|| للتجزئة ج هو طول أطول قطر للمناطق م_١ .

حيث $\bar{r}$ هو معدل القطر ، فحسب (١٧-٢٨) ان المساحة Δf للمنطقة

م تساوي $\Delta \bar{r} \theta$. فاذا كان ق إقترانا متصلا بدلالة المتغيرين

القطبيين س ، θ فيمكن البرهنة على أن :

$$(17-29) \quad \sum_{i=1}^n f(\theta_i, r_i) \leq f(\theta, \bar{r}) \quad \text{حيث } \theta_i \in [\theta, \theta + \Delta\theta]$$

$$= \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} f(\theta, \bar{r}) d\theta$$

(٣) ص = س^٢ ، ص = ٤ ، الكثافة في نقطة ما تتناسب تناسباً طردياً مع بعدها عن محور الصادات .

(٤) ص = س^٣ ، ص = ٢ س ، الكثافة في نقطة ما تتناسب طردياً مع بعدها عن محور السينات .

(٥) ص = e^{-s} ، ص = ٠ ، س = -١ ، س = ١ ، ث (س ، ص) = / س ص /

(٦) ص = حاس ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = π ، ث (س ، ص) = ص

(٧) س = ص^٢ ، ص - س = ٢ ، ص = -٢ ، ص = ٣ ، ث (س ، ص) = ١

(٨) ص = س ، ص = ٣ س ، س + ص = ٤ ، ث (س ، ص) = ٢

(٩) جد زس ، زص ، ز٢ للمنطقة في التمرين الاول

(١٠) جد زس ، زص ، ز٢ للمنطقة في التمرين الثاني .

(١١) جد زس ، زص ، ز٢ للمنطقة في التمرين الثالث .

(١٢) جد زس ، زص ، ز٢ للمنطقة في التمرين الرابع .

(١٣) صفيحة على شكل مربع طول ضلعه ρ . جد عزم القصور الذاتي حول

(ρ) احد الجوانب (ب) القطر (ج) مركز الكتلة .

(١٤) صفيحة على شكل مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ρ . جد عزم القصور الذاتي

حول

(ρ) احد ارتفاعات المثلث (ب) احد الجوانب (ج) احد الرؤوس .

(١٥) جد نصف قطر دائرة الدوران في (ρ) من السؤال ١٣ .

(١٦) جد نصف قطر دائرة الدوران في (ρ) من السؤال ١٤ .

(١٧) جد عزم القصور الذاتي ونصف قطر دائرة الدوران لصفيحة على شكل قرص

دائري نصف قطره ρ حول خط يقع على قطر الدائرة .

(١٨) صفيحة على شكل مثلث قائم متساوي الساقين ، فاذا كانت الكثافة أي نقطة

تناسب طردياً مع مربع بعدها عن الرأس الذي يقابل الوتر ، فجد عزم القصور

ونصف قطر دائرة الدوران حول أحد الساقين (أنظر المثال (١)) .

٥ — التكاملات الثنائية بالاحداثيات القطبية :

خذ منطقة في مستوى له احداثيات قطبية كما في الشكل ١٧ - ٢٠ محددة بقوسي

دائرتين نصف قطريهما ρ_1 ، ρ_2 ومركزهما القطب ، وبشعاعين صادريين من المركز .

إذا كان عزم القصور الذاتي لصفحة كتلتها $\leq$ هما $زس$ ، $زص$ فإن نصف قطر دوران الصفحة حول محور السينات (يسمى $ص$) ، ونصف قطر دورانها حول محور الصادات (يسمى $س$) يعرفان على الشكل التالي :

(١٧-٢٧) $ص^2 ع = زس$ ، $س^2 ع = زص$.
وهاتان العلاقتان تبينان انه يمكن ان نعتبر أن النقطة (س ، ص) بتمركز فيها كل الكتلة بدون تغيير عزم القصور الذاتي حول المحورين الاحداثيين .

مثال ٤ : جد نصف القطر الدوراني حول محور السينات بالنسبة للصفحة المبينة في المثال ٣ .

الحل : في المثال (٣) نجد ان $زس = \frac{٤ ب ٥٠}{١٥}$ ، وكتلة الصفحة تساوي

$$\left[\frac{٢ - ٢٠}{٢٠} \sqrt{٢٠ - ٢٠} \right] \left[\frac{٢ - ٢٠}{٢٠} \sqrt{٢٠ - ٢٠} \right] = \frac{٤ ب ٥٠}{١٥}$$

وبإمكان القاريء ان يثبت أن $\frac{٢ ب ٢٠}{٣} = \frac{٤ ب ٥٠}{١٥}$ ، وبتطبيق (١٧-٢٧)

نحصل على

$$\frac{\sqrt{\frac{٢٠ - ٢٠}{٢٠}}}{٥} = \frac{\sqrt{\frac{١٥ / ٥٠}{٣ / ٢٠}}}{٥} = \frac{\sqrt{\frac{٤ ب ٥٠}{٣ ب ٢٠}}}{٥} = \frac{\sqrt{\frac{١٠ ب ٢٠}{٣ ب ٢٠}}}{٥} =$$

تمارين :

في كل من التمارين ١-٨ جد الكتلة والمركز للصفحة التي لها شكل المنطقة المحددة ببيانات المعادلات المعطاة ولها الكثافة المعطاة .

- (١) $ص = \sqrt{٣س}$ ، $س = ٩$ ، $ص = ٠$ ، ث (س ، ص) = $س + ص$.
- (٢) $ص = \sqrt{٣س}$ ، $س = ٨$ ، $ص = ٠$ ، ث (س ، ص) = $ص^٢$.

$$Z_s = \left[\frac{P}{M} \right] \sqrt{s^2 - 2P} \quad \left[\frac{P}{M} \right] \sqrt{s^2 - 2P} = B \quad \left[\frac{P}{M} \right] \sqrt{s^2 - 2P} = B$$

$$\frac{B}{4} \left[\frac{P}{M} \right] = (P - 2P^2 + s^2 + s^4) \quad \left[\frac{P}{M} \right] =$$

$$\text{وبإكمال التكامل الأخير نحصل على } Z_s = \frac{B}{15}$$

ان عزم القصور الذاتي مهم في المسائل التي تحتوي على دوران جسم حول محور ثابت . فعلى سبيل المثال افرض أن اطارا يدور حول محوره ، فإذا كان هناك جزيء كتلته k على الاطار على مسافة مقدارها P من محور الدوران (انظر الشكل ١٥ - ٩) فان عزم القصور الذاتي لذلك الجزيء حول المحور يساوي kP^2 . وإذا كانت السرعة الدائرية تساوي ω فان سرعة الجزيء غاي المسافة المقطوعة في وحدة الزمن ، تساوي $P\omega$. وحسب تعريف طاقة الحركة للجزيء فان هذه الطاقة تساوي طاقة الحركة $\frac{1}{2} k \omega^2 P^2$ ، وبالتالي فان

$$(17-26) \quad \text{طاقة الحركة} = \frac{1}{2} k \omega^2 P^2 = \frac{1}{2} Z \omega^2$$

فإذا اعتبرنا الاطار قرصا منبسطا ثم طبقنا فكرة نهاية المجموع فاننا نستنتج علاقة مشابهة بالنسبة للاطار بكامله . وهذه العلاقة يمكن تعميمها على الصفائح التي ليست على شكل نصف دائرة . ان طاقة حركة جسم يدور تعرف المهندسين الفيزيائي كم الشغل اللازم حتى يقف الجسم ، وبما ان العلاقة (١٧ - ٢٦) تعني أن طاقة الحركة لصفحة تدور تناسب طرديا مع عزم القصور الذاتي فانه كلما ازداد عزم القصور الذاتي كلما ازداد الشغل اللازم لاييقاف حركة الدوران ، هذا مع بقاء ω ثابتة .

زس حول محور السينات ، بان نعوض $و_r$ بدلا من $و_r$ في (١٧ - ٢٠) لذلك نستنتج ان

$$(١٧ - ٢٣) \text{ زس} = \sum_{r=1}^n \frac{1}{\|ج\|} \cdot \Delta(و_r, ه_r) \cdot ف_r$$

$$= \left[\begin{matrix} ص^2 ث (س، ص) و ف \end{matrix} \right]_m$$

وبطريقة مشابهة ، فان عزم القصور الذاتي زص للصفحة حول محور الصادات يساوي

$$(١٧ - ٢٤) \text{ زص} = \sum_{r=1}^n \frac{1}{\|ج\|} \cdot \Delta(و_r, ه_r) \cdot ه_r$$

$$= \left[\begin{matrix} س^2 ث (س، ص) و ف \end{matrix} \right]_m$$

واذا ضربنا $ث (و_r, ه_r)$ بمربع بعد $(و_r, ه_r)$ عن نقطة الاصل ، أي $ه_r^2 + و_r^2$ نحصل على $ث (و_r, ه_r)$ $(ه_r^2 + و_r^2)$ ، ثم اذا اخذنا نهاية مجموع الحدود فانتا نحصل على عزم القصور الذاتي ز حول نقطة الاصل ، لهذا فان

$$(١٧ - ٢٥) \text{ زم} = \text{زس} + \text{زص}$$

مثال ٣ : صفحة على شكل نصف دائرة كما في الشكل ١٧ - ١٩ (ب) ، فاذا كانت الكثافة في أي نقطة تتناسب طرديا مع بعدها عن القطر ج و ، فجد عزم الصفحة حول الخط ج و .

الحل : اذا استخدمنا نظاما احداثيا كما في الشكل ١٧ - ١٩ (ب) فان الكتلة في النقطة (س ، ص) تساوي $ث (س، ص) = ب ص$ ، وباستعمال (١٧ - ٢٣) ينتج أن عزم القصور الذاتي المطلوب يساوي

وباستعمال (۱۷-۲۱) نحصل على

$$\begin{bmatrix} \text{س} & \text{ب} & \text{س} \\ \text{و} & \text{ف} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س}^2 & \text{و} & \text{س} \\ \text{و} & \text{و} & \text{و} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\text{ب } ٥١٢}{٧} = \text{ص } (٦٤ - \text{ص } ٦) = \left[\frac{\text{ص } ٣}{\text{ص } ٢} \right] \text{ب } =$$

ونتيجة لذلك فان مركز الكتلة هو النقطة $(\frac{20}{7}, 0)$.

وإذا كان هناك ن من الجزئيات كتلها K_1 ، K_2 ، ... ، K_n في النقاط
(s_1 ، v_1) ، (s_2 ، v_2) ، ... ، (s_n ، v_n) على
الترتيب ، فقد عرف عزم هذا النظام حول محور السينات والصادات في
(١٠-١١) كما يلي :

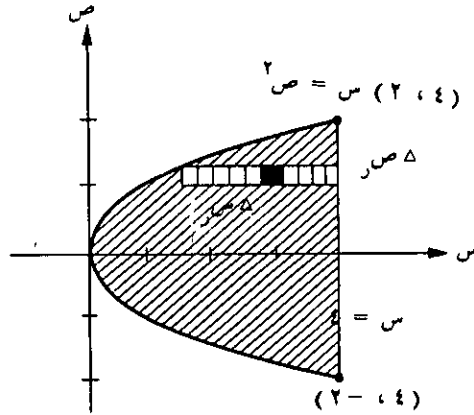
$$\sum_r s_r k_r = k_v, \quad \sum_r v_r k_r = s$$

وتسمى كل من هاتين القيمتين أيضا بالعزم الأول للنظام حول المحور
الاحداثي ، وإذا استعملنا مربعات الأبعاد عن المحورين الاحداثيين فاننا نحصل
على العزم الثاني ، أي عزم القصور الذاتي Moments of Inertia I_{xx} ،
لنظام م حول محوري السينات والصادات على الترتيب ، ويعرفان كما
يلي :

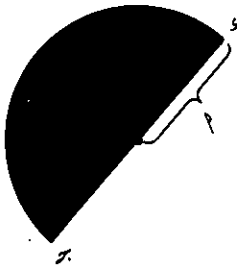
$$\sum_{r=1}^n \text{ص}^2_{r, r} = \text{ص}^2_{r, r}, \quad \sum_{r=1}^n \text{س}^2_{r, r} = \text{س}^2_{r, r}$$

ويمكننا ان نعمم هذا على الصفائح باستعمال فكرة النهايات المستعملة في التكامل الثنائي فمثلا خذ صفيحة من النوع الذي ذكرناه في بداية هذا البند انظر الشكل ١٧ - ٣ ، فاذا كانت الكثافة في النقطة (س ، ص) تساوي ث (س ، ص) حيث ث اقتران متصل ، فن الطبيعي ان نعرف عزم القصور

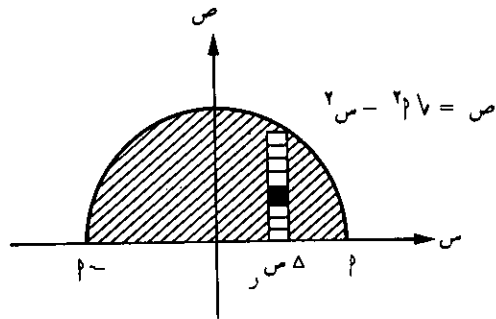
الحل : إن مخطط المنطقة موضح في الشكل ١٧-١٨ حيث بالفرض ث
 (س ، ص) = ب س نستنتج من تعريف ث ومن تناظر المنطقة أن مركز
 الكتلة يقع على محور السينات ، أي ان ص = صفراً . فنستعمل (١٧-١٩)
 ومن ثم نكامل اولاً بالنسبة للمتغير س كما هو موضح في الشريحة في الشكل
 ١٧-١٨ .



الشكل ١٧ - ١٨



الشكل ١٧ - ١٩



الشكل ١٧ - ١٩ ب

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{2s}} s \, ds \right] ds = \int_0^2 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2s}} ds = \int_0^2 \frac{s^2}{2} ds = \frac{s^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2s}} ds = \int_0^2 \frac{s^2}{2} ds = \frac{s^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$= \frac{128}{6}$$

$$\text{كء} = \text{نها} \quad \sum_r \text{ب} (ه^2_r + و^2_r) \Delta \text{ف} \quad ||\text{ع}||$$

$$= \left[\text{ب} (س^2 + ص^2) \text{ف} \right] = \left[\text{ب} (س^2 + ص^2) \right] \text{ف} = \left[\text{ب} \left(\frac{ص^2}{3} + س^2 \right) \right] \text{ف} = \text{ب} (س^2 + \frac{ص^2}{3}) \text{ف}$$

$$+ \frac{(س - 1)^3}{3} \text{ف}$$

ويمكن للقارئ أن يثبت أن التكامل الأخير يساوي $\frac{\text{ب}^4}{6}$ وبالمثل باستعمال

(١٧ - ٢١) فإن

$$\text{كء} = \text{نها} \quad \sum_r \text{ه} \text{ب} (ه^2_r + و^2_r) \Delta \text{ف} \quad ||\text{ع}||$$

$$= \left[\text{س} \text{ب} (س^2 + ص^2) \text{ف} \right] = \left[\text{س} \text{ب} (س^2 + ص^2) \right] \text{ف} = \left[\text{س} \text{ب} \left(\frac{ص^2}{3} + س^2 \right) \right] \text{ف} = \text{س} \text{ب} (س^2 + \frac{ص^2}{3}) \text{ف}$$

وص و س وبالإمكان اثبات أن التكامل يساوي $\frac{\text{ب}^5}{15}$.

ومن (٧ - ٢٢) نستنتج أن

$$\frac{2}{5} = \frac{\text{ب}^5 / 15}{\text{ب}^4 / 6} = \frac{\text{س}}{\text{ب}}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{\text{ب}}{\text{س}} \quad \text{فإن ص} = \frac{2}{5} \text{ب}$$

مثال ٢ : صفوحة على شكل المنطقة م في المستوى س ص ، المحددة بالبيانين س = ص^٢ ، س = ٤ ، جد مركز الكتلة اذا كانت الكثافة في أي نقطة عليها تتناسب طرديا مع بعد النقطة عن محور الصادات .

وبالمثل فان عزم ب حول محور الصادات على الشكل التالي :

$$(١٧-٢١) \quad \frac{K}{S} = \frac{K}{S} \quad \text{هـ ر ث (هـ ر، و) } \Delta \text{ ف ر } = \frac{K}{S} \quad \text{س}$$

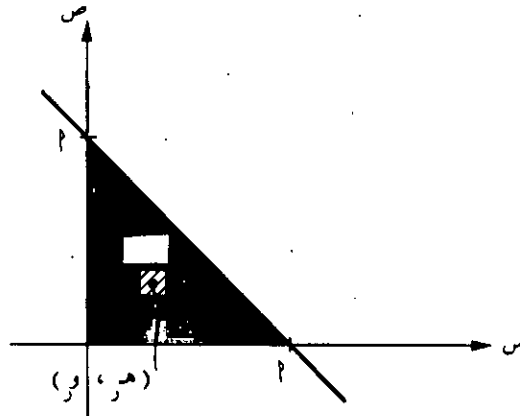
ث (س، ص) و ف

والمعتاد فان مركز كتلة الصفيحة هو النقطة (س، ص) حيث أن :

$$(١٧-٢٢) \quad \frac{K}{S} = \frac{K}{S} \quad \text{س} \quad \frac{K}{S} = \frac{K}{S} \quad \text{ص}$$

مثال ١ : صفيحة على شكل مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين طول ساقه يساوي ٢. أوجد مركز الكتلة اذا كانت الكثافة في اي نقطة تتناسب طرديا مع مربع المسافة بين هذه النقطة ورأس المثلث الذي يقابل الوتر.

الحل : من المناسب استحداث نظام ديكارتي كما في الشكل ١٧-١٧ حيث رأس المثلث المقابل للوتر هو نقطة الاصل ووتر المثلث على الخط المستقيم $S + V = 2$ وبين في الشكل منطقة مستطيلة هي منطقة جزئية في تجزئة داخلية ، M ، وان النقطة (هـ ر، و) موجودة في هذه المنطقة المستطيلة ، ولهذا فان الكثافة في النقطة (س، ص) تعطي بالعلاقة ث (س، ص) = ب (س) + ص (ص) لثابت معين ب . وبتطبيق (١٧-١٩) ، (١٧-١٤) فان



الشكل ١٧ - ١٧

$$(22) \quad \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \sqrt{s^2 + s^2} \\ \frac{1}{4} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{s^2 + s^2} \\ \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

٤ — العزوم ومركز الكتلة :

في الفصل العاشر نقوش العزم ومركز الكتلة لصفحة منتظمة ، والان سوف نستخدم التكامل الثنائي لنعمم ذلك على صفائح ذات كثافة متغيرة .

خذ صفحة ب على شكل المنطقة المبينة في الشكل ١٧ - ٣ . وافرض ان كثافة

المساحة في النقطة (س ، ص) أي الكثافة لكل وحدة مساحة تعطي بالعلاقة
ث (س ، ص) . حيث ث اقتران متصل في المنطقة م . ولتكن ج = {م} تجزئة
داخلية للمنطقة م ، فتكون (هر ، ور) نقطة في المنطقة م ، ولتكن ب جزءاً من
الصفحة ب يناظر م . وبما إن ث اقتران متصل فان أي تغير بسيط في النقطة (س ،
ص) يحدث تغيراً صغيراً في الكثافة ث (س ، ص) ، وبعبارة أخرى ان ث تقريبا
ثابت في المنطقة م . ولهذا فاذا كان ج || يساوي صفراً تقريبا فان كتلة ب ر هي
بالتقريب ث (هر ، ور) Δ فر ، حيث فر تساوي م .

ولهذا فان ج ث (هر ، ور) Δ فر تساوي تقريبا كتلة ب . وان الكتلة للصفحة
ب تعرف بانها نهاية المجموع عندما ج || ← الصفر . لذلك فان

$$(17-19) \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta} \theta(h_r, w_r) \Delta f_r = \int_M \theta(h_r, w_r) \Delta f_r \quad \text{ث (س ، ص)}$$

(ص ، و ف

فاذا كانت كتلة ب متمركزة في النقطة (هر ، ور) فكما في الفصل العاشر فان
عزم ب حول محور السينات يساوي فر ث (هر ، ور) Δ فر وان عزم
الصفحة ب حول محور السينات يعرف بانه نهاية مجموع على الشكل التالي .

$$(17-20) \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta} \theta(h_r, w_r) \Delta f_r = \int_M \theta(h_r, w_r) \Delta f_r$$

$$\int_M \theta(h_r, w_r) \Delta f_r \quad \text{ص ث (س ، ص) و ف}$$