صقوف

منشورات مجمع اللغة العربية الأردني

حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية

تأليف

ايرل و. سووكوفسكي

الجزء الأول

ترجم هذا الكتاب وطبع بنفقة مجمع اللغة العربية الأردني
في نطاق مشروعه لتعريب التعليم العلمي الجامعي

ترجمة الاساتذة التالية اسماؤهم (من قسم الرياضيات في الجامعة الاردنية)

الاستاذ الدكتور احمد سعيدان — **الدكتور احمد علاونه**
الدكتور محمد عرفات النتشة — **الدكتور وليد ديب**
الدكتور ديب حسين — **الدكتور حسن العزة**

أشرف على الترجمة وراجعها الدكتور احمد سعيدان

(حقوق الطبع والترجمة محفوظة لمجمع اللغة العربية الأردني)

١٩٧٩

Calculus

With Analytic Geometry

Earl W. Swokowski

المحتويـات

	الصفحة
مقدمة : ما هو حساب التفاضل والتكامل	
الفصل الأول : متطلبات التفاضل والتكامل	١ – ٦٠
١ — الاعداد الحقيقية	١
٢ — الأنظمة الاحداثية ذات البعدين	١١
٣ — المستقيمات	٢٣
٤ — الاقتران	٣٣
٥ — تركيب الاقترانات	٤٤
٦ — الاقترانات المتعاكسة	٥٠
٧ — تمارين مراجعة	٥٧
الفصل الثاني : نهايات الاقترانات	٦١ – ١٤٨
١ — مقدمـــة	٦١
٢ — تعريف النهاية	٧١
٣ — نظريات على النهايات	٨٠
٤ — النهايات من طرف واحد	٩٧
٥ — الاقترانات المتصلة	١٠٤
٦ — النهايات عند اللانهاية	١١٨
٧ — الاقترانات اللامتناهية	١٢٨
٨ — تمارين مراجعة	١٤٥

الفصل الثالث : المشتقات التفاضلية ١٤٩ – ٢٢١

١ — مقدمـــة ١٤٩

٢ — تعريف المشتقة ١٥٧

٣ — قواعد ايجاد المشتقات ١٦٨

٤ — الزيادات والتفاضلات ١٨٣

٥ — قاعدة السلسلة ١٩١

٦ — التفاضل الضمني ٢٠١

٧ — مشتقات الاقترانات الجبرية ٢١٠

٨ — المشتقات ذات الرتب العليا ٢١٤

٩ — تمارين مراجعة ٢١٧

الفصل الرابع : تطبيقات على المشتقة التفاضلية ٢٢٣ – ٣٠٠

١ — المماسات والأعمدة ٢٢٣

٢ — القمم المحلية ٢٢٨

٣ — نظرية رول ونظرية القيمة الوسطى ٢٣٧

٤ — الاختبار بالمشتقه الأولى ٢٤٢

٥ — التحدب والتقعر بالمشتقة الثانية ٢٥١

٦ — تطبيقات على القيم العظمى والصغرى ٢٦١

٧ — السرعة والتسارع ٢٧٠

٨ — سرعات التغير المترابطة ٢٧٥

٩ — مسائل اقتصادية ٢٨٤

١٠ — اصل المشتقة ٢٨٩

١١ — تمارين مراجعة ٢٩٧

الفصل الخامس : التكامل المحدود ٣٠١ – ٣٦٤

١ — المساحة ٣٠١

٢ — تعريف التكامل المحدود ٣١٣

٣ — خصائص التكامل المحدود ٣٢٢

٤ — نظرية القيمة الوسطى للتكامل المحدود ٣٢٨

٥ — النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل ٣٣٢

٦ ـــ التكامل غير المحدود وتغير المتغيرات ٣٤١
٧ ـــ التكامل العددي ٣٥١
٨ ـــ تمارين مراجعة ٣٦١

الفصل السادس : تطبيقات على التكامل المحدود ٣٦٥ – ٤٢٦
١ ـــ المساحة ٣٦٥
٢ ـــ الحجوم الدورانية ٣٧٦
٣ ـــ الحجوم بطريقة القشرة الاسطوانية ٣٨٦
٤ ـــ الحجوم بطريقة الشرائح ٣٩١
٥ ـــ الشغل ٣٩٦
٦ ـــ قوة ضغط السائل ٤٠٤
٧ ـــ طول القوس ٤٠٨
٨ ـــ تطبيقات اخرى ٤١٥
٩ ـــ تمارين مراجعة ٤٢٤

الفصل السابع : موضوعات في الهندسة التحليلية ٤٢٧ – ٤٦٤
١ ـــ القطوع المخروطية ٤٢٧
٢ ـــ القطع المكافيء ٤٢٩
٣ ـــ القطع الناقص ٤٣٧
٤ ـــ القطع الزائد ٤٤٤
٥ ـــ نقل المحاور ٤٥١
٦ ـــ تدوير المحاور ٤٥٧
٧ ـــ تمارين مراجعة ٤٦٢

الفصل الثامن : الاقترانات الأسية والاقترانات اللوغرتمية ٤٦٥ – ٥٢٩
١ ـــ مقدمة ـــ الأقتران الأسي إس ٤٦٥
٢ ـــ الاقتران اللوغرتمي الطبيعي (لط = ln) ٤٧٢
٣ ـــ الاقتران الأسي الطبيعي ٤٨٢
٤ ـــ التفاضل والتكامل ٤٩٢

٥ — الاقترانات الأسية والاقترانات اللوغرتمية العامة ٥٠١
٦ — قوانين التكاثر والتلاشي ٥٠٩
٧ — مشتقات الاقترانات المتعاكسة ٥١٨
٨ — تمارين مراجعة ٥٢٥

الفصل التاسع : اقترانات اخرى غير جبرية ٥٣١ – ٥٩٣

١ — نهايات الاقترانات المثلثية ٥٣١
٢ — مشتقات الاقترانات المثلثية ٥٣٨
٣ — تكاملات الاقترانات المثلثية ٥٤٩
٤ — الاقترانات المثلثية العكسية ٥٥٨
٥ — تفاضلات الاقترانات المثلثية العكسية وتكاملاتها ٥٦٦
٦ — الاقترانات الزائدية ٥٧٧
٧ — الاقترانات الزائدية العكسية ٥٨٣
٨ — تمارين مراجعة ٥٨٩

الفصل العاشر : طرق اخرى في التكامل وتطبيقات عليه ٥٩٥ – ٦٥٩

١ — التكامل بالأجزاء ٥٩٥
٢ — التكاملات المثلثية ٦٠٢
٣ — التعويض المثلثي ٦١٠
٤ — الكسور الجزئية ٦١٨
٥ — العبارات التربيعية ٦٢٨
٦ — تعويضات مختلفة ٦٣١
٧ — العزم ومركز الثقل للمناطق المستوية ٦٣٧
٨ — مراكز ثقل الاجسام الدورانية ٦٤٧
٩ — تمارين مراجعة ٦٥٤

الفصل الحادي عشر : الصيغ غير المعينة ٦٦١ – ٧١١

التكاملات المعتلة وقانون تايلور
١ — الصيغ غير المعينة $\div$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ٦٦١

٢ — صيغ اخرى غير معينة ٦٧٤
٣ — التكاملات التي حدودها لا نهائية ٦٨٠
٤ — التكاملات التي اقترانها المكامل لا نهائي ٦٨٨
٥ — صيغة تيلور ٦٩٤
٦ — طريقة نيوتن ٧٠٣
٧ — اسئلة مراجعة ٧٠٨

الفصل الثاني عشر المتسلسلات اللانهائية ٧١٣ – ٨٠٢

١ — المتسلسلات اللانهائية ٧١٣
٢ — المتسلسلات اللانهائية ، التقاربية والتباعدية ٧٢٥
٣ — المتسلسلات الموجبة الحدود ٧٣٦
٤ — المتسلسلات المتناوبة ٧٥١
٥ — التقارب المطلق ٧٥٨
٦ — متسلسلات القوى ٧٦٦
٧ — تفاضل وتكامل متسلسلات القوى ٧٧٥
٨ — متسلسلات تيلور وماكملان ٧٨٠
٩ — متسلسلات ذات الحدين ٧٩٠
١٠ — تمارين مراجعة ٧٩٧

الملحق الأول : الاستنتاج الرياضي ٨٠٣
الملحق الثاني : نظريات على النهايات والتكاملات ٨١٠
الملحلق الثالث : الاقترانات المثلثية ٨٢٥
الملحق الرابع : الجداول ٨٣٣
الملحق الخامس : قواعد هندسية ٨٣٧
قاموس المصطلحات ٨٣٩

مقدمـة المؤلف

أغلب الطلاب يدرسون التفاضل والتكامل ليستعملوهما في حقول غير الرياضيات . فهم يحتاجون الى معلومات تبين لهم أهمية الموضوع ، وتدلهم متى يستعملونه وكيف . ولقد جعلت هذا نصب عيني اثناء وضعي لهذا الكتاب . فمثلاً قبل عرض اي مفهوم هام ، تجدني اقدم له بمسائل تستدعي الحاجة اليه ، ثم بعد ان يكتمل العرض ، ألحقه بعدد من الأمثلة الفيزيائية والرياضية ، التي تستند حلولها عليه . وانه لمن الأمور الصعبة جذب اهتمام الطلاب الى موضوع ما ، قبل البدء فيه .

ولتوضيح منهجي اضرب مثلاً مفهوم النهايات ، فقد أثرت الاهتمام به عن طريق ثلاث مسائل عملية : واحدة فيزيائية ، وواحدة كميائية ، والأخرى رياضية . ثم اعقبت ذلك بمعالجة بدهية لفكرة النهاية تستند الى امثلة عددية . ثم في بند لاحق قدمت التعريف للنهاية مشيراً الى ما تقدم من أمثلة . تلا ذلك توكيد للتعريف يستند الى رسمين بيانيين . وبعد فإني لا ارى ان يصرف الطلبة فصلاً كاملاً يرددون فيه عبارات مثل « اقرب فأقرب » ، ولا ارى ان تغشى على بصائرهم افكار إيسيلون ودلتا . لهذا تأتي في هذا الكتاب مبادىء النهايات عن طريق الأمثلة ، اما البراهين المعقدة فترد في الملحق حيث يمكن ان يرجع اليها من قبيل القراءة الخارجية فتناقش في حينها او تؤجل الى وقت لاحق . ومثل هذا النهج اتبع مع مفاهيم المشتقة التفاضلية والتكامل المحدود وغيرهما من المفاهيم الهامة .

ولقد جعلت همي ، بالأضافة الى اقامة توازن سوي بين المنطق الرصين والبداهة الفطرية ، ان أضع كتاباً يفهمه طلاب السنة الأولى الجامعية ، ففي كل بند من بنود الكتاب تجد اهتماماً بالدقة والوضوح ومحاولة جادة لأقامة جسر يسهل عبور الطالب الى حساب التفاضل والتكامل من المرحلة التي تسبقه .

وفي الكتاب ما يغطي مادة التفاضل والتكامل التي جرت العادة على تدريسها ، وان جدول المحتويات ليبين كيف تدرجنا في ذلك . فالفصول الستة الأولى تشمل ما يمكن ان يتخذ مادة الفصل الدراسي الأول ، لطلبة يحتاجون الى معلومات أولية عن النهايات والمشتقات والتفاضل المحدود للعبارات الجبرية . والفصول السابع حتى الثاني عشر تشمل مادة الفصل الدراسي الثاني ، على ان الفصل الثاني عشر ، عن المتواليات اللامتناهية ، يمكن تأجيله الى الفصل الدراسي الثالث ، ويعطي بدلاً عنه الفصل الثالث عشر عن المنحنيات والاحداثيات القطبية ، وبعض الفصل الرابع عشر عن المتجهات اما باقي الكتاب فيضم ما يعتبر في العادة مادة الفصل الدراسي الثالث . الا ان الفصل الثامن عشر من حساب المتجهات قد يبدو غريبا في هذه المرحلة الدراسية فبعض المدرسين يرون ان يدرسوه ، وبعضهم يرون تأجيله . ولهذا جعل في أواخر الكتاب حيث يمكن حذفه دون ان يؤثر ذلك في تدريس غيره من الفصول . وهذا ينطبق على الفصل التاسع عشر عن المعادلات التفاضلية .

ولقد بذل اهتمام كبير في تأليف مجموعات التمارين ، ففي الكتاب حوالي ٤٠٠٠ تمرين ، وهذا يكفي لتشغيل اوسع الطلاب قدرة وأكثرهم سرعة . وبعض هذه التمارين للتدريب المباشر ، فيستحسن ان يجربها كل طالب ، وبعضها من مستوى أعلى ، والغاية منها تحدي مقدرة اقوى الطلاب . وينتهي كل فصل من فصول الكتاب بتمارين مراجعة تشمل المفاهيم الرئيسية والتمارين الهامة . وهذه من نوع التمارين التي ترد في الفصل وقد يفيد الطالب اذا عالجها اثناء استعداده للأمتحان .

(ينهي المؤلف مقدمته بتقديم الشكر لمن ساعده في اعداد الكتاب وطباعته)

مقدمـة المترجمين

لقد جعل المؤلف لكتابه مقدمة قصيرة ، ولو شئنا ان نصنع مثل ما صنع لاكتفينا بالقول : ان هذا كتاب في حساب التفاضل والتكامل ، قمنا بترجمته لطلبة السنتين الأولى والثانية في الجامعات العربية ، فهو اذن كتاب لنوعين من الطلبة : الرياضيين قبيل دخولهم ميدان التخصص ، يعدهم ليقيموا تخصصهم على أساس متين ، وطلبة الهندسة والعلوم المهنية أو الفيزياء وامثالها من العلوم التجريبية ، يزودهم بما يحتاجون اليه من معرفة رياضية اساسية .

ولكن يبقى كلام لابد منه يتعلق بالترجمة ، فنحن حين اقدمنا على هذه الخطوة كان في نيتنا ان نقدم للقاريء العربي كتاباً ينسجم مع ما نجد في المكتبات العربية من كتب من هذا المستوى ، مترجمة عن هذه اللغة او تلك ، مما تطرحه في الاسواق اقطار شقيقة او اقطار اجنبية . فلما عدنا الى هذه الكتب الفيناها تترجم الشروح والمصطلحات وتبقي العبارات الرياضية والقوانين والمعادلات بالحروف اللاتينية ، حتى انها قد تصور هذه العبارات تصويراً من الأصل . واليك نمطاً من هذا الذي نصف ، نتناوله لاعلى التعيين ودون انتقاء .

« لكي توجد دالة ضمنية $y = f(x, y)$ تتحدد بالمعادلة $F(x, y, y) = O$ وتأخذ القيمة y_o عندما تكون $x = x_o$ ، $y = y_o$ ، يكفي ان تتحقق المساواة $F(x_o, y_o, y_o) = O$ "

نرجو ان يلاحظ القاريء ان كل هذه المتساويات تقرأ من اليسار الى اليمين .

فلو نحن آثرنا الراحة لنسجنا على هذا المنوال فترجمنا الشروح ونسخنا العبارات الرياضية ، وكفى الله المؤمنين القتال .

لقد كان ثمة دوافع دفعتنا اول الأمر للسير في هذا السبيل : اليس هو بعينه ما يفعله كل محاضر يحاضر بالعربية ، ويرجع سامعيه الى مرجع اجنبي ، اذ لا تتوافر لديهم مراجع عربية ؟ اليس هو بعينه ما نصنعه نحن انفسنا إذ ندرس بالانكليزية ، حين نجد طلابنا لا يفهمون ما نقول ، فنطعم الدرس بعبارات عربية ؟

ولكن دوافع أقوى جعلتنا نعود من حيث بدأنا فنتنكب ذلك السبيل . لقد تذكرنا اننا في هذه المرحلة انما نتعامل مع طلاب كانوا قبل اسابيع قليلة في المدارس الثانوية يدرسون الرياضيات بالعربية ، وان جل ما ندرسهم إياه في السنة الأولى من حياتهم الجامعية انما هو تركيز وبلورة وتطوير لمفاهيم سبق لهم ان درسوها بالعربية ، ثم ان قلة منهم سيتخصصون فيما بعد في الرياضيات فيتعاملون مع لغتها ورموزها ، اما الباقون فسيوزعون على تخصصات اخرى وقد لا يحدون حاجة الى الرياضيات في مقبل حياتهم الا قليلاً ، فمثل هؤلاء يصيبهم التراوح المستمر بين اليمين واليسار ، اذ يقرأون المعادلات الرياضية على مثل ما تقدم ، بدوار يضر ولا ينفع ، وقد ينسيهم ما سبق ان تعلموه فضلاً عما قد يحدثه لديهم من التباس وارتباك ونفور . لهذا عقدنا العزم على ان نجعل رياضيات هذه المرحلة من ناحية العرض استمراراً للرياضيات التوجيهية ، بلغة عربية ورموز عربية ، لا يتخللها سوى رموز أجنبية قليلة هي ذات صفة عالمية ، وهي تتزايد كلما تقدم الطالب في دراسته ، واهم هذه الرمور π . e . ε . δ . $\mathfrak{d}$. Δ .

ولكن الحروف اللاتينية فيها تناظر كثيراً ما يستغله الرياضيون في مثل a ، α ، A ومثل b . B . β . فلا يجاد مثل هذا التناظر في العربية وجدنا الاّ بدّ لنا من استغلال اشكال الحروف العربية استغلالاً نرجو ان يحظى برضى زملائنا المدرسين ، وهذا جدول بأشكال الحروف التي نوصي باستعمالها موزعة في مجموعات تعطي التناظر المطلوب .

أ ، ا ، ﺃ . ﺍ

ب ، ت ، ث

حـ ، ج ، ﺟ

ح ، ﺣ . ﺟ

خ ، غ . ڠ

د ، ذ . ڈ . ڈ

ر ، ز ، ژ

س ، سـ ، سه . سـه

ش ، شـ ، شه . شـه

ص ، صه . صـه

ض ، ضه . ضـه

ط ، ظ

ع . عـ . ڠ . عـ

غ . غـ . ڠ . غـ

ف . ق . ڤ

ك ، كـ . ڪ . ل

م ، مـ ، ن ، ڼ . ڼـ

هـ ، ﻫ ، و ، ى ، ي

اما المصطلحات الرياضية فلم نجد فيها صعوبة ، ذلك ان معظمها في هذه المرحلة معرب ومستعمل في مدارسنا الثانوية . وقليلة هي المصطلحات التي اضطررنا الى وضع الفاظ جديدة لها ، وقليلة جداً هي التي رأينا ان نخالف فيها الاجماع العام لأسباب لا تخفى على المتخصصين ، وفي آخر الكتاب يجد القاريء ثبتاً بالمصطلحات الواردة فيه . وقد اشير في الثبت الى المصطلحات التي استحدثناها وتلك التي نحونا فيها غير النحو الشائع .

ولا يفوتنا ان نزجي الشكر الى مجمع اللغة العربية الأردني الذي كلفنا بهذه المهمة وما فتيء يشجعنا على المضي فيها ويذلل لنا ما نلاقي من صعاب .

وبعد فقد بذلنا اقصى الجهد وانا لنرجو ان نكون قد وفقنا في تعبيد طريق سيمر عليه من بعدنا كثيرون .

المترجمون

عمان في ١٩٧٨/١٠/١٤

تمهيـــد

ما هو حساب التفاضل والتكامل (Calculus)

ابتكر حساب التفاضل والتكامل في القرن السابع عشر ليكون اداة لحل المسائل التي تشتمل على حركة . ذلك ان طرق الهندسة والجبر والمثلثات تسري على الاجسام التي تسير بسرعة ثابتة ، في حين ان الطرق التي يقدمها التفاضل والتكامل تلزم لدراسة مدارات الكواكب وحساب مسارات الصواريخ وتحديد طريق جزيء مشحون في حقل الكترومغناطيسي . انها بايجاز تتناول كل أنواع الحركة .

ولبحث حركة الاجسام لابد من البدء بتعريف ما نعنيه بالسرعة وبالتسارع ، فعلى نحو تقريبي نقول : أن السرعة هي مقياس لمعدل تغير المسافة المقطوعة مع الزمن ، وان التسارع هو مقياس معدل تغير السرعة مع الزمن .

والسرعة قد يعتريها تغير كبير كالذي يجري لفرس السباق او لمركبة الفضاء عند عودتها الى جو الارض . فلكي نعطي المعنى الدقيق لفكرتي السرعة والتسارع لابد من استعمال واحد من المفاهيم الأساسية في التفاضل والتكامل ، ذلك هو مفهوم المشتقة التفاضلية . (derivative)

ولقد وضع حساب التفاضل والتكامل ليساعد في حل المسائل الفيزيائية ، الا أنه يطبق في حقول أخرى كثيرة ومن أسباب استعماله الواسع أن المشتقة تفيد في دراسة معدل التغير الذي يعتري أشياء أخرى كثيرة عدا الحركة ، فالكيماوي مثلا قد يلجأ الى المشتقة من أجل أن يعرف ما يحدث نتيجة العديد من التفاعلات الكيماوية ، والبيولوجي قد يستعملها

لدراسة معدل تزايد البكتيريا في حقل تجاربه . والمهندس الكهربائي يستعمل المشتقة لتحديد تغير التيار في الدورة الكهربائية . ولقد استعملها الاقتصاديون في مسائل الربح والخسارة .

وتستعمل المشتقة أيضا من اجل ايجاد مماسات المنحنيات . وهذا أمر ذو أهمية هندسية خاصة . فضلا عن أن لفكرة خطوط التماس أهمية كبرى في المسائل الفيزيائية . فاذا سارت نقطة على منحن فان خط التماس يدل على اتجاه حركتها في نطاق جزء صغير من المنحني ، وبذا يدل خط التماس على الموضع التقريبي للنقطة .

وباستعمال المشتقات تعالج مسائل كثيرة تتعلق بالقيم العظمى والصغرى ، واليك أمثلة على مسائل نموذجية تجيب عنها المشتقة : على أي زاوية تطلق القذيفة حتى تصل الى أبعد مدى ؟ اذا أريد صنع علبة من الصفيح تسع جالونا واحدا من السائل فبأي المقاييس تصنع العلبة بحيث تستهلك أقل ما يمكن من الصفيح ؟ عند أي نقطة بين مصدري ضوء يكون الضوء أشد ما يمكن ؟ كيف تحصل الشركة على أكبر دخل ممكن ؟ كيف يقلل المصنع الى أصغر حد ممكن تكاليف صنع سلعة معينة ؟

ومن المفاهيم الأساسية في التفاضل والتكامل المفهوم المسمى بالتكامل المحدود . وهذا ايضا له تطبيقات واسعة في العلوم . فالفيزيائي يستعمله لايجاد الشغل الذي يبذل لشدّ السلك أو ضغطه ، والمهندس يستعمله لايجاد مركز الكتلة أو مقدار القصور الذاتي لجسم معين ، والبيولوجي يستعمله لقياس جريان الدم في الشريان ، والاقتصادي يستعمله لتحديد مقدار الانخفاض في قيمة أجهزته . أما الرياضيون فيستعملون التكامل لمحدود لحساب مساحات السطوح وحجوم الاجسام واطوال الخطوط وما الى ذلك .

كل هذه المسائل التي ذكرناها وكثير غيرها ستعالج بالتفصيل في ثنايا هذا الكتاب .

ان مجالات تطبيق التفاضل والتكامل ليس لها حد ، ولعلك يا قارئي ستستطيع في المستقبل أن تكتشف مجالا جديداً لتطبيق هذا الموضوع الرياضي الهام .

وتعرف المشتقة والتكامل المحدود من خلال فكرة الاقتراب من نهاية أو غاية ما ، ومفهوم النهاية هو الفكرة الاولية التي تفرق حساب التفاضل والتكامل عن فروع

الرياضيات الابتدائية . ولقد اكتشف العلاقة بين المشتقة والتكامل سير اسحاق نيوتن (١٦٤٢ — ١٧٢٧) وجتفرد ولهلم لايبنتز (١٦٤٦ — ١٧١٦) . ولهذا السبب ، فضلا عن انجازاتهما الاخرى في هذا الميدان ، ينسب اليهما فضل ابتكار التفاضل والتكامل . ولكن رياضيين آخرين أضافوا الى الموضوع ابتكارات قيمة .

ان الكلمات السابقة لم تجب عن سؤالنا : ما هو حساب التفاضل والتكامل ؟ ذلك ان ليس هنالك جواب بسيط عن هذا السؤال . فقد يوصف التفاضل والتكامل بأنه الدراسة التي تنصب على النهايات والمشتقات والتكاملات . ولكن هذا الكلام لا يعني شيئاً ان لم نعرف هذه الاصطلاحات ونحن انما جئنا بأمثلة قليلة تبين ما يمكن أن نحققه عن طريق المشتقة والتكامل ، ولكننا لم نفسر معنى أي منهما وان تعريفهما لمن الاهداف الرئيسية للأجزاء الاولى من هذا الكتاب .

الفصل الاول

متطلبات التفاضل والتكامل

يحوي هذا الفصل موضوعات لابدّ منها لدراسة التفاضل والتكامل : فبعد مراجعة سريعة للاعداد الحقيقية والأنظمة الاحداثية والرسوم البيانية ذات البعدين ، نركز اهتمامنا على واحد من أهم المفاهيم الرياضية ، ذلك هو مفهوم الاقتران (function)

١ — الاعداد الحقيقية

تستعمل **الاعداد الحقيقية** بكثرة في دروس الرياضيات التي تسبق التفاضل والتكامل ، للجمع والطرح والضرب والقسمة والرفع للقوى واستخراج الجذور ، وما الى ذلك .

وفي هذا الفصل سنستعمل الحروف أ ، ب ، جـ ، ... للاشارة الى اعداد حقيقية الا اذا ذكرنا ما يخالف ذلك .

نحصل على **الاعداد الصحيحة الموجبة** ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... باضافة الواحد مرة بعد مرة . وعبارة **الاعداد الصحيحة** تشمل جميع الاعداد الصحيحة ، الموجبة منها والسالبة ومعها الصفر ، وهو عدد حقيقي .

والعدد النسبي (او المنطق rational) هو عدد حقيقي يمكن ان يعبر عنه بالرمز أ/ب . حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب ≠ صفراً .

والاعداد الحقيقية التي ليست نسبية تسمى اعدادا **لا نسبية** (irrational) فنسبة محيط الدائرة الى قطرها عدد لا نسبي ، وهو عدد حقيقي نرمز له بالرمز π ونكتب $\pi \simeq 3{,}1416$ لنشير الى أن π **تساوي تقريبا** 3.1416 .

ومن الامثلة الاخرى الشائعة على الاعداد اللانسبية العدد الاصم $\sqrt{2}$ ، وهنالك اعداد حقيقية يمكن ان تحول الى كسور عشرية غير منتهية ، فمثلا $2310/7434$ يحول بالقسمة الطويلة الى $3{,}21818\ldots\ldots$ حيث يتكرر الرقمان ١ ، ٨ بلا نهاية ، فالاعداد النسبية يمكن دائماً تحويلها الى كسور عشرية منتهية أو متكررة . أما الاعداد غير النسبية فتحول الى كسور عشرية لا تنتهي ولا تتكرر .

ومن الاعداد الحقيقية الهامة **الاعداد الحقيقية الموجبة** التي لها الصفتان التاليتان :

١ . اذا كان $أ$ ، $ب$ موجبين كان كل من $أ + ب$ ، $أ\ ب$ موجبا .

٢ . اذا كان $أ \neq 0$ كان $أ$ أو $-أ$ موجبا (وليس كلاهما)

والاعداد الحقيقية التي ليست موجبة وليست صفرا هي **اعداد سالبة** . أما الصفر فهو العدد الحقيقي الوحيد الذي لا هو موجب ولا هو سالب .

ونكتب $أ > ب$ أو $ب < أ$ ، ونقول أن $أ$ **أكبر من** $ب$ أو أن $ب$ **أقل من** $أ$ وذلك اذا ، وفقط اذا كان $أ - ب$ موجبا . وكذلك يكون $أ > 0$ اذا وفقط إذا كان $أ$ موجباً ، ويكون $أ < 0$ اذا وفقط اذا كان $أ$ سالبا . والان نستطيع أن نبرهن على القواعد التالية :

١ . اذا كان $أ > ب$ ، $ب > جـ$ كان $أ > جـ$

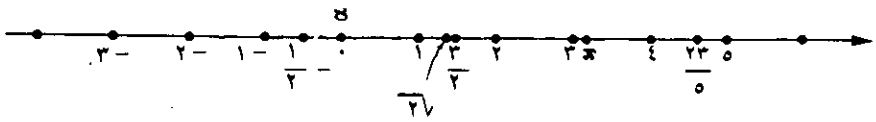
٢ . اذا كان $أ > ب$ كان $أ + جـ > ب + جـ$

٣ . اذا كان $أ > ب$ ، $جـ > 0$ كان $أ\ جـ > ب\ جـ$

٤ . اذا كان $أ > ب$ ، $جـ < 0$ كان $أ\ جـ < ب\ جـ$

ويمكن استنتاج قواعد مماثلة للعلاقة « أقل من » . والرمز $أ \geqslant ب$ يقرأ $أ$ أكبر من أو يساوي $ب$ ويعني أن $أ > ب$ أو $أ = ب$. والرمز $أ < ب < جـ$ يعني أن $أ < ب$ ، $ب < جـ$ وفي هذه الحالة نقول أن $ب$ بين $أ$ ، $جـ$. ويمثل ما تقدم نفسر الرموز $أ \geqslant ب$ ، $أ < ب \leqslant جـ$ ، $أ \geqslant ب < جـ$ ، $أ \geqslant ب \leqslant جـ$ وما اليها . وثمة صفة اخرى تتمتع بها الاعداد الحقيقية هي صفة **التمام** وسندرس هذه الصفة في الفصل ١٢ .

وتمثل الاعداد الحقيقية بنقاط على خط مستقيم ، فتختار نقطة ما ، لا على التعيين ، نجعلها نقطة الابتداء أو الاصل ، ولنسمها ٥ ، ونعتبرها تمثل الصفر ، أما النقاط التي تمثل الاعداد الصحيحة فتعين بأخذ قطع خطية متساوية ومتتالية على جانبي ٥ كما في الشكل ١ – ١ . واما الاعداد النسبية مثل ٢٣/٥ ، – ١/٢ ، الخ ، فنحصل عليها بتقسيم القطع الخطية الى اجزاء . وبعض الاعداد اللانسبية مثل $\sqrt{٢}$ يمكن ان نحصل على ما يمثلها بعملية هندسية .



الشكل ١ — ١

ويمكن ان نثبت ان كل نقطة على خط الاعداد لا تمثل عددا نسبيا انما تمثل عددا لا نسبيا . والعدد الذي تمثله نقطة د يسمى احداثي د كما يسمى الخط المستقيم كله بالمستقيم الاحداثي . والاتجاه الموجب عليه يبينه السهم وهو الاتجاه الذي عليه تتزايد الاحداثيات . والاتجاه السالب هو الذي عليه تتناقص . ويظهر بوضوح على الشكل ١ – ١ . انه اذا كان أ ، ب احداثيي النقطتين أَ ، بَ على التوالي يكون أ < ب اذا وفقط اذا كان أَ الى يسار بَ .

ولا يجاز الشروح يجب ان نستعمل لغة المجموعات sets ورموزها . ويمكن ان نعتبر أن المجموعة هي جمع من اشياء قيد الدراسة ، فهذه الاشياء هي عناصر المجموعة . وفي هذا الكتاب سنستعمل الرمز ج ليدل على الاعداد الحقيقية ، والرمز ط ليدل على الاعداد الصحيحة الموجبة ، صـ ليدل على الاعداد الصحيحة عامة . واذا كانت سـ مجموعة فان أ ∈ سـ يعني أن أ عنصر في سـ ، أما أ ∉ سـ فيعني أن أ ليس عنصرا في سـ . واذا كان كل عنصر في سـ هو ايضا عنصر في المجموعة ج نقول ان سـ مجموعة فرعية (أو جزئية) من ج ونكتب سـ ⊆ ج أو ج ⊇ سـ وتكون المجموعتان سـ و ج متساويتين فنكتب سـ = ج اذا كانت سـ و ج تتكونان من ذات العناصر . والرمز سـ ≠ ج تعني أن سـ لا يساوي ج .

واذا كانت عناصر المجموعة سـ لها صفة مشتركة نكتب سـ = { س : ... }

ونضع داخل الحاصرتين ما يدل على تلك الصفة بالنسبة الى العنصر العشوائي س ، مثلا { س : س > ٣ } تعني مجموعة كل الاعداد الحقيقية التي تزيد عن ٣ .

والمجموعة الخالية $\emptyset$ يمكن أن يعبر عنها على النحو $\emptyset$ = { س : س ≠ س } وهي تختلف عن جميع المجموعات الاخرى من حيث انها لا تحوى أي عنصر . فمثلا اذا كان س عددا حقيقيا فان { س : $س^{٢}$ < ٠ } = $\emptyset$

واذا كان $سه$ ، ج مجموعتين فان اتحادهما $سه \cup ج$ وتقاطعهما $سه \cap ج$ يعرفان على النحو التالي :

$سه \cup ج$ = { س : س ∈ $سه$ أو س ∈ ج }

$سه \cap ج$ = { س : س ∈ $سه$ و س ∈ ج }

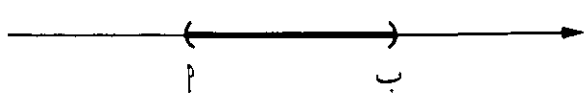
وهكذا يتكون الاتحاد من العناصر التي في $سه$ أو ج او في كليهما ، ويتكون التقاطع من العناصر المشتركة فيهما .

واذا كان $سه \cap ج = \emptyset$ نقول ان $سه$ و ج منفصلان (disjoint)

وللمجموعة ج مجموعات فرعية هامة ، وهي تسمى فترات (intervals) فاذا كان أ < ب نستعمل الرمز (أ ، ب) احيانا للدلالة على مجموعة الاعداد الحقيقية الواقعة بين أ ، ب .

أي ان (أ ، ب) = { س : أ < س < ب }

وتسمى المجموعة (أ ، ب) فترة مفتوحة (open interval) . ويعرف الرسم البياني لمجموعة الاعداد الحقيقية ج بانه نقط الخط الاحداثي للمجموعة ج التي تمثل اعداد هذه المجموعة . فيكون الرسم البياني للفترة المفتوحة (أ ، ب) هو مجموعة نقط هذا الخط الواقعة بين (أ ، ب) كما يظهر في الشكل ١ — ٢ .



الشكل ١ — ٢

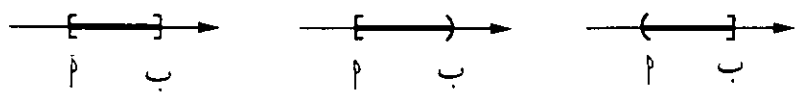
ويدل القوسان في الشكل على أن النقطتين أ ، ب ليستا في الفترة . فاذا شئنا ان نشملهما فيها استعملنا الحاصرتين [ ] ، وهذا يفضي الى الفترة المغلقة [أ ، ب] والى الفترتين نصف المفتوحتين [أ ، ب) و (أ ، ب] . وتعرف هذه الفترات كما يلي :

$$[أ ، ب] = \{س : أ \leqslant س \leqslant ب\}$$
$$[أ ، ب) = \{س : أ \leqslant س < ب\}$$
$$(أ ، ب] = \{س : أ < س \leqslant ب\}$$

وفي الشكل ١ — ٣ تجد الرسوم البيانية لهذه الفترات الثلاث.

وفيما يلي من بحثنا عن الفترات سنعتبر ان أ ≠ ب الا اذا ذكر غير ذلك . وقد تكون الفترة لا متناهية مثل $(أ ، \infty) = \{س : س > أ\}$

$$[أ . \infty) = \{س : س \geqslant أ\}$$
$$(-\infty ، أ) = \{س : س < أ\}$$
$$(-\infty ، أ] = \{س : س \leqslant أ\}$$
$$(-\infty ، \infty) = ح$$



الشكل ١ — ٣

والرمز ∞ هو رمز اللانهاية ، وهو مجرد رمز فلا ينبغي ان يعتبر عددا حقيقيا . وقد نستعمل حرفا ليرمز الى اي عدد حقيقي ، وفي هذه الحالة نسميه متغير (variable) فاذا اعطي ف ، ق ، ك بدلالة متغير ما ، س ، فان عبارات مثل ف ≠ ق ، ف ≠ ق ≠ س . تسمى متباينات (inequalities)

ومن الامثلة على المتباينات ٤ س − ٣ < ٢ س + ٥ .

فاذا كنا عندما نضع أ بدل س في المتباينة نحصل على جملة صحيحة ، نقول أن أ هي أحد حلول هذه المتباينة . ومجموعة هذه الحلول هي مجموعة حل المتباينة . ولحل

المتباينة ينبغي ايجاد مجموعة حلها . وتسمى المتباينتان متكافئتين اذا كانت لها مجموعة حل واحدة . والطريقة المعيارية لحل المتباينة هي تحويلها الى سلسلة من المتباينات المتكافئة تنتهي بواحدة مجموعة حلها واضحة .

مثال ١ : حل المتباينة $- ٥ < (٤ - ٣س) / ٢ < ١$

الحـل : كل من المتبينات التالية تكافيء المتباينة المعطاة .

$$- ١٠ < ٤ - ٣س < ٢$$

$$- ١٤ < - ٣س < - ٢$$

$$\frac{١٤}{٣} > س > \frac{٢}{٣}$$

فمجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $(\frac{٢}{٣}، \frac{١٤}{٣})$

مثل ٢ : حل $س^{٢} - ٧س + ١٠ > ٠$

الحل : يمكن ان نكتب هذه المتباينة على النحو التالي :

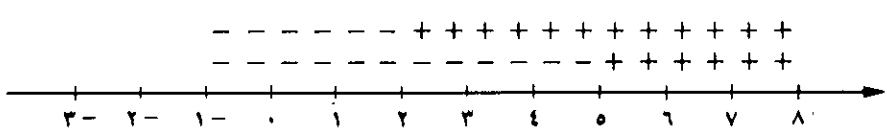
$$(س - ٥)(س - ٢) > ٠$$

فيكون س حلا اذا وفقط اذا كان س – ٥ ، س – ٢ كلاهما موجبين أو كلاهما سالبين . ويبين الشكل ١ — ٤ إشارتي هذين العاملين في الحالات المختلفة . فيكون العاملان موجبين اذا كان س في الفترة $(٥ ، \infty)$ ويكونان سالبين اذا كان س في الفتـرة $(- \infty ، ٢)$. فمجموعة الحل هي $(- \infty ، ٢) \cup (٥ ، \infty)$

وتعرف القيمة المطلقة (absolute value) $|أ|$ للعدد الحقيقي أ كما يلي :

١ . اذا كان $أ > ٠$ فان $|أ| = أ$

٢ . اذا كان $أ < ٠$ فان $|أ| = - أ$



الشكل ١ — ٤

ينتج ان القيمة المطلقة لاي عدد غير الصفر هي كمية موجبة.واليك هذه الامثلة :

بما ان ٣ ، ٢ − $\sqrt{٢}$ ، .ليست سالبة ينتج من (١) ان

$|٣| = ٣$ ، $|٢ - \sqrt{٢}| = ٢ - \sqrt{٢}$ ، $|٠| = ٠$

والعددان − ٣ ، $\sqrt{٢}$ − ٣ سالبان فيكون

$|-٣| = ٣$ ، $|\sqrt{٢} - ٣| = -\sqrt{٢} + ٣$

ويمكن ان نثبت انه اذا كان أ ، ب أي عددين حقيقيين يكون :

(١ − ١) $|أ| = |-أ|$

$|أ ب| = |أ| \ |ب|$

$-|أ| \leq أ \leq |أ|$

ويمكن ان نثبت ايضا انه اذا كان ب اي عدد حقيقي موجب يكون

$|أ| < ب$ اذا وفقط اذا كان $-ب < أ < ب$

(١ − ٢) $|أ| < ب$ اذا وفقط اذا كان $أ > ب$ أو $أ < -ب$

$|أ| = ب$ اذا ، وفقط اذا ، كان $أ = ب$ أو $أ = -ب$

ينتج من (١ − ٢) انه اذا كان ب موجبا فان $|أ| \leq ب$ تعني أن $-ب \leq أ \leq ب$ وهذا المبدأ يستعمل في اثبات الحقيقة التالية .

المتباينة المثلثية اذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فان

(١ − ٣) $|أ + ب| \leq |أ| + |ب|$

البرهـــان : نستنتج من (١ − ١) أن − $|أ| \leq أ \leq |أ|$ وان − $|ب| \leq ب \leq |ب|$

فاذا اضفنا الاطراف المتناظرة ينتج ان

$-(|أ| + |ب|) \leq أ + ب \leq |أ| + |ب|$

ومن الملاحظة السابقة ينتج ان $|أ + ب| \leq |أ| + |ب|$

ومن اهم المتباينات التي نقابلها في التفاضل والتكامل تلك التي تضم قيما مطلقة ، مما سنبينه في المثال التالي :

مثـال ٣ : حل المتباينة | س − ٣ | < ٠,١

الحـل : استنادا الى (١ − ٢) نجد ان المتباينة تكافيء

− ١ , ٠ < س − ٣ < ١ , ٠

فيكون − او. + ٣ < (س − ٣) + ٣ < او. + ٣

اي ان ٢,٩ < س < ٣,١

فمجموعة الحل هي الفترة المفتوحة (٢,٩ ، ٣,١)

مثـال ٤ : حل | ٢س − ٧ | > ٣

الحـل : استنادا الى (١ − ٢) تكون مجموعة الحل هي اتحاد مجموعتي الحل للمتباينتين

٢ س − ٧ > ٣ . ٢ س − ٧ < − ٣ فالمتباينة الاولى تكافيء ٢ س > ١٠ أي

س > ٥ ، والثانية تكافيء ٢ س < ٤ أي س < ٢ فتكون مجموعة الحل للمتباينة

| ٢ س − ٧ | > ٣ هي (− ∞ ، ٢) U (٥ ، ∞)

اذا كان أ ، ب احداثيي النقطتين أَ ، بَ على التوالي على الخط الاحداثي وكان ل (أ ، ب) يرمز الى طول القطعة أَ بَ فان هذا الطول يعرف كما يلي :

(١ − ٤) ل (أ ، ب) = | ب − أ |

ويسمى هذا الطول المسافة من أ الى ب ولأن | ب − أ | = | أ − ب |

ينتج ان ل (أ ، ب) = ل (بَ ، أ) ، لاحظ ان المسافة بين نقطة الاصل

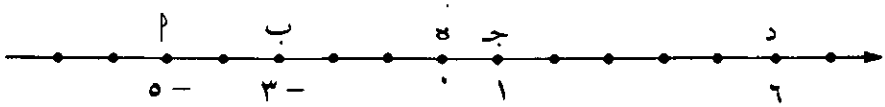
ه والنقطة أ هي القيمة المطلقة للعدد أ .

ل (ه ، أ) = | أ − ٠ | = أ

مثـال ٥ : اذا كانت احداثيات أ ، ب ، جـ ، د هي على التوالي

− ٥ ، − ٣ ، ١ ، ٦ فأوجد ل (أ ، ب) ، ل (جـ ، ب) ، ل (ه ، أ) ، ل (جـ ، د)

الحـل : تظهر مواقع هذه النقط بالشكل ١ − ٥ فبناء على (١ − ٤) يكون



الشكل ١ — ٥

ل (أ ، ب) = | − ٣ − (− ٥) | = | − ٣ + ٥ | = | ٢ | = ٢

ل (جـ ، ب) = | − ٣ − ١ | = | − ٤ | = ٤

ل (٨ ، أ) = | − ٥ − ٠ | = | − ٥ | = ٥

ل (جـ ، د) = | ٦ − ١ | = | ٥ | = ٥

تمارين

١ . قارن بين العددين في كل مما يلي بأن تضع بينهما بدل الفاصلة > أو< أو =

(أ) − ٢ ، − ٥ (ب) − ٢ ، ٥

(جـ) ٦ − ١ ، ٢ + ٣ (د) $\frac{٢}{٣}$ ، ٠,٦٦

(هـ) ٢ ، $\sqrt{٤}$ (و) π ، ٧/٢٢

٢ . أجر نفس المقارنة السابقة على الازواج التالية :

(أ) − ٣ . ٠ (ب) − ٨ ، − ٣

(جـ) ٨ ، − ٣ (د) $\frac{٣}{٤} - \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{١٥}$

(هـ) $\sqrt{٢}$ ، ١,٤ (و) $\frac{٣٠٥٣}{١١١٠}$ ، ٣,٦٥١٣

٣ . اكتب قيمة كل مما يلي بدون اشارة القيمة المطلقة :

(أ) | ٢ − ٥ | (ب) | − ٥ | + | − ٢ |

(جـ) | ٥ | + | − ٢ | (د) | − ٥ | − | − ٢ |

(هـ) | π − $\frac{٢٢}{٧}$ | (و) | ٢ − ٢ | − ٢ |

(ز) | $\frac{١}{٢}$ − ٠,٥ | (ح) | (− ٣)^{٢} |

٤ . اكتب قيمة كل مما يأتي بدون اشارة القيمة المطلقة :

(أ) | ٤ − ٨ | (ب) | ٣ − π |

(جـ) | − ٤ | − | − ٨ | (د) | − ٤ + ٨ |

(هـ) | ٣ |^{٢} (و) | ٢ − $\sqrt{٤}$ |

(ز) | − ٠,٦٧ | (ح) − | − ٣ |

٥ . اذا كانت أ ، ب . جـ نقاطا على مستقيم احداثي ، وكانت احداثياتها على التوالي – ٥ ، – ١ ، ٧ فأوجد المسافات التالية :

(أ) ل (أ ، ب)

(جـ) ل (جـ ، ب)

(ب) ل (ب ، جـ)

(د) ل (أ ، جـ)

٦ . اعد التمرين ٥ السابق اذا كانت احداثيات أ ، ب ، جـ هي ٢ ، ٨ ، ٣ على التوالي .

حل المتباينات في التمارين ٧ – ٢٨ وضع تخطيطا لمجموعة الحل

٧ . ٣س + ٢ > ٥س – ٨

٨ . – ٢ + ٧س < ٣س – ١٠

٩ . ١٢ ≤ ٥س – ٣ < – ٧

١٠ . ٥ > ٢ – ٩س > – ٤

١١ . – ١ < $\frac{٣ - ٧س}{٤}$ ≤ ٦

١٢ . ٠ ≤ ٤س – ١ ≤ ٢

١٣ . $\frac{٥}{٧ - ٢س}$ > ٠

١٤ . $\frac{٤}{س^{٢} + ٩}$ > ٠

١٥ . |س – ١٠| < ٠,٣

١٦ . $\left|\frac{٢س + ٣}{٥}\right|$ < ٢

١٧ . $\left|\frac{٧ - ٣س}{٢}\right|$ ≤ ١

١٨ . $|\ ٣ - ١١س\ | \leqslant ٤١$

١٩ . $|\ ٢٥س - ٨\ | > ٧$

٢٠ . $|٢س + ١| > ٠$

٢١ . $٣س^{٢} + ٥س - ٢ > ٠$

٢٢ . $٢س^{٢} - ٩س + ٧ < ٠$

٢٣ . $٢س^{٢} + ٩س + ٤ \leqslant ٠$

٢٤ . $س^{٢} - ١٠س \geqslant ٢٠٠$

٢٥ . $١ / س^{٢} < ١٠٠$

٢٦ . $٥ + \sqrt{س} < ١$

٢٧ . $\dfrac{٣س + ٢}{٢س - ٧} \geqslant ٠$

٢٨ . $\dfrac{٣}{س - ٩} < \dfrac{٢}{س + ٢}$

٢٩ . اثبت أن $|\ أ - ب\ | \leqslant |\ أ\ | - |\ ب\ |$.

ملاحظة : اكتب $|\ أ\ | = |\ (أ - ب) + ب\ |$ ثم طبق القاعدة (١ – ٣)

٣٠ . اذا كان ع اي عدد صحيح موجب وكانت $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، ... ، $أ_{ع}$ فأثبت أن $|\ أ_{١} + أ_{٢} + ... + أ_{ع}\ | \leqslant |\ أ_{١}\ | + |\ أ_{٢}\ | + ... + |\ أ_{ع}\ |$

(ملاحظة . من (١ – ٣) ينتج ان

$$|\ أ_{١} + أ_{٢} + ... + أ_{ع}\ | \leqslant |\ أ_{١}\ | + |\ أ_{٢} + ... + أ_{ع}\ |$$

٢ — الانظمة الاحداثية ذات البعدين

يتكون الزوج المرتب (ordered pair) (أ ، ب) من عنصرين أ ، ب ، يسمى احدهما العنصر الاول ، ويسمى الآخر العنصر الثاني : ويستعمل الرمز (أ ، ب) ليدل على الزوج المرتب الذي عنصره الاول أ وعنصره الثاني ب .

ويعتبر الزوجان المرتبان (أ ، ب) و (جـ ، د) متساويين ، ونكتبهما (أ ، ب) = (جـ ، د) اذا وفقط اذا كان أ = جـ ، ب = د . وللأزواج المرتبة استعمالات كثيرة ،

وقد استعملناها في البند السابق للتعبير عن الفترات المفتوحة . وفي هذا الفصل سنمثل بها نقاطا في المستوى . ومع انها تستعمل في مناسبات مختلفة الا ان هذا لا ينجم عنه اي لبس فان سياق الكلام سيبين دائماً هل الرمز (أ ، ب) يمثل فترة ام نقطة ام فكرة رياضية اخرى .

واذا كان مـ ، ج مجموعتين فان كافة الازواج المرتبة (م ، جـ) التي تتكون من جميع عناصر مـ و ج تسمى مجموعة حاصل ضرب (product set) مـ و ج وتكتب مـ × ج فيكون :

$$(١-٥) \quad \text{مـ} \times \text{ج} = \{(\text{م} ، \text{جـ}) : \text{م} \in \text{مـ} ، \text{جـ} \in \text{ج}\}$$

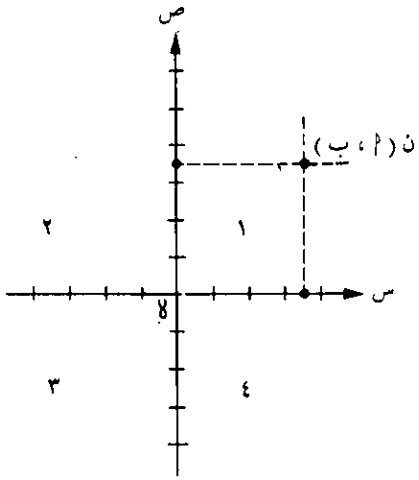
وليس ضروريا أن تكون المجموعتان مـ و ج مختلفتين . وسنحتاج في كثير من الحالات الى النظر في مجموعات فرعية للمجموعة ج × ج

وفي دراسة الاشكال المستوية نستعمل نظام الاحداثيين المتعامدين (rectangular coordinates) أو (الديكارتيين* (Cartesian) باتخاذ خطي احداثيات متعامدين يتقاطعان في نقطة ٥ . وقد جرت العادة ان يعتبر احد الخطين افقيا ، اتجاهه الموجب الى اليمين ، وان يعتبر الثاني رأسيا واتجاهه الموجب الى اعلى ، وتسمى نقطة التقاطع ٥ بنقطة الاصل . وقد جرت العادة ان يسمى المحور الافقي محور س وان يسمى المحور الرأسي محور ص ، أما المستوى فيسمى مستوى س ص أو المستوى الاحداثي . غير اننا في بعض التطبيقات قد نغير هذه التسمية ، فاذا كنا بصدد دراسة م ، ن مثلا ، (اعني المسافة والزمن) ، قد نسميها محوري م ، ن .

والمحوران الاحداثيان يقسمان المستوى الى اربعة ارباع تسمى الاول والثاني والثالث والرابع كما يظهر الشكل ١ – ٦

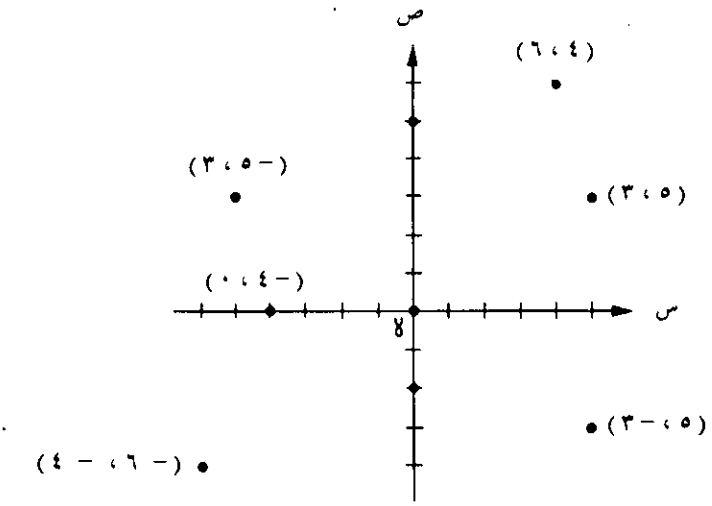
---

* نسبة الى رينيه ديكارت . الرياضي الفرنسي (١٥٩٦ — ١٦٥٠) الذي كان من اوائل من استعملوا هذا النظام .



الشكل ١ — ٦

ولكل نقطة في مستوى س ص زوج مرتب فريد من الاحداثيات الحقيقية . فاذا رسمنا من النقطة خطا رأسيا وخطا افقيا يقطعان محوري س ، ص في نقطتين احداثياهما أ ، ب على التوالي (انظر الشكل ١ – ٧) فاننا نخصص للنقطة ن الزوج المرتب (أ ، ب) ونسمي أ الاحداثي السيني للنقطة ونسمي ب الاحداثي الصادي ، ونقول أن احداثيي النقطة هما (أ ، ب) . وبالعكس ان كل زوج مرتب من الاعداد الحقيقية مثل (أ ، ب) يحدد نقطة فريدة ن في مستوى س ص احداثياها أ ، ب وبالتحديد ان النقطة ن هي نقطة تقاطع خطين يعامدان محوري س ، ص في نقطتين احداثياهما أ ، ب على التوالي . وعندما نشير الى النقطة (أ ، ب) نعني النقطة التي احداثيها السيني أ واحداثيها الصادي ب . ونستعمل الرمز ن (أ ، ب) لنشير الى النقطة التي احداثياها أ ، ب . ووضع النقطة ن (أ ، ب) يعني تعيين نقطة ن في المستوى س ص احداثياها (أ ، ب) ونمثلها بنقطة توضع في الموضع المناسب كما يتبين في الشكل ١ – ٧ .



الشكل ١ — ٧

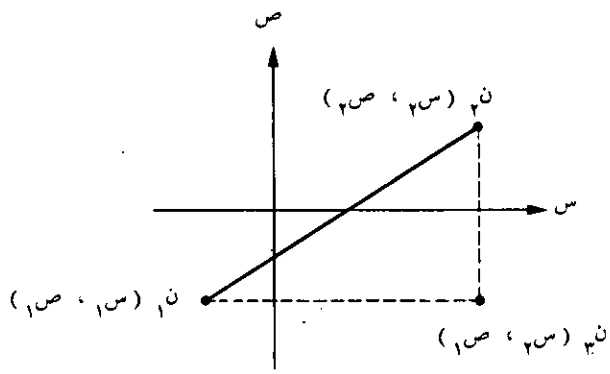
(**١ — ٦**) واليك قانونا لايجاد المسافة م (ن$_{١}$ ، ن$_{٢}$) بين نقطتين ن$_{١}$ ، ن$_{٢}$ في المستوى الاحداثي :

قانون المسافة : المسافة بين النقطتين ن$_{١}$ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) و ن$_{٢}$ (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) في المستوى الاحداثي يعطيها القانون (١ — ٦) التالي :

$$ل\ (ن_{١} ، ن_{٢}) = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$$

البرهـــان : اذا كان س$_{١}$ ≠ س$_{٢}$ ، ص$_{١}$ ≠ ص$_{٢}$ فان النقاط ن$_{١}$ ، ن$_{٢}$ و ن$_{٣}$ (س$_{٢}$ ، ص$_{١}$) هي ، كما في شكل ١ — ٨ ، رؤوس مثلث قائم .

فحسب نظرية فيثاغورس يكون



الشكل ١ — ٨

$[ل(ن_1 ، ن_2)]^2 = [ل(ن_1 ، ن_3)]^2 + [ل(ن_3 ، ن_2)]^2$.

ولان $ل(ن_1 ، ن_3) = |س_2 - س_1|$ ، $ل(ن_3 ، ن_1) = |ص_2 - ص_1|$ ينتج القانون المطلوب .

واذا كان $ص_1 = ص_2$ تقع النقطتان $ن_1$ ، $ن_2$ على خط افقي واحد ويكون $ل(ن_1 ، ن_2) = |س_2 - س_1| = \sqrt{(س_2 - س_1)^2}$

وبالمثل اذا كان $س_1 = س_2$ تقع النقطتان على خط رأسي واحدويكون $ل(ن_1 ، ن_2) = |ص_2 - ص_1| = \sqrt{(ص_2 - ص_1)^2}$

وهاتان حالتان خاصتان من قانون المسافة

ورغم اننا رجعنا الى الشكل ١ – ٨ في برهان هذا القانون ، فان المبدأ الذي استعمل في البرهان لا يعتمد على موضعي النقطتين $ن_1$ ، $ن_2$.

مثـال ١ : اثبت ان المثلث الذي رؤوسه أ (– ١ ، – ٣) ، ب (٦ ، ١) ، جـ (٢ ، ٥) هو مثلث قائم ، واوجد مساحته .

الحـــل : من قانون المسافة :

$ل(أ ، ب) = \sqrt{(-١-٦)^2 + (-٣-١)^2} = \sqrt{٤٩ + ١٦} = \sqrt{٦٥}$

$ل(ب ، جـ) = \sqrt{(٦-٢)^2 + (١+٥)^2} = \sqrt{١٦ + ٣٦} = \sqrt{٥٢}$

$ل(أ ، جـ) = \sqrt{(-١-٢)^2 + (٥+٣)^2} = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$

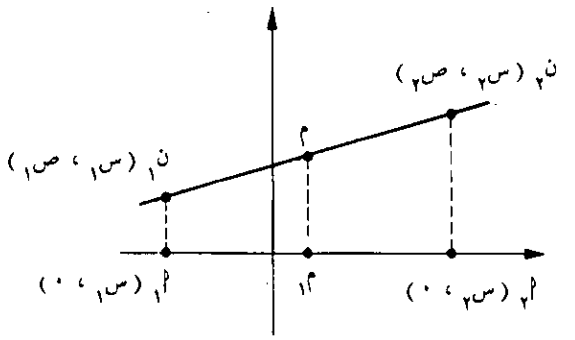
فيكون $[ل(أ ، ب)]^2 = [ل(ب ، جـ)]^2 + [ل(أ ، جـ)]^2$

أي ان المثلث قائم ووتره أ ب فمساحته $\frac{١}{٢} \sqrt{٥٢} \sqrt{١٣} = ١٣$ وحدة مربعة .

ومن السهل ايجاد قانون يعطي **منتصف القطعة الخطية** :

لتكن $ن_1 (س_1 ، ص_1)$ ، $ن_2 (س_2 ، ص_2)$ نقطتين في المستوى الاحداثي ولتكن م منتصف القطعة الخطية $ن_1 ن_2$. خذ المسقطين

$أ_1 (س_1 ، ٠)$ و $أ_2 (س_2 ، ٠)$ للنقطتين $ن_1$ ، $ن_2$ على التوالي ، على محور س ، كما في الشكل ١ – ٩



الشكل ١ — ٩

فعلى اعتبار أن س١ < س٢ يكون الاحداثي السيني لمنتصف م١ م٢ هو س١ + (س٢ − س١) / ٢ أي (س١ + س٢) / ٢ ، ومن الهندسة المستوية ينتج ايضا ان الاحداثي السيني للنقطة م هو (س١ + س٢) / ٢ وهذا يصح ايضا اذا كان س٢ < س١ . فاذا كان س١ = س٢ يظل الاحداثي السيني للنقطة م هو س١ = س٢ = (س١ + س٢) / ٢ .

وبالمثل نثبت ان الاحداثي الصادي للنقطة م هو (ص١ + ص٢) / ٢ . وهذا يثبت القانون التالي :

(١ − ٧) **قانون المنتصف** : منتصف القطعة الخطية الواصلة من ن١ (س١ ، ص١) الى ن٢ (س٢ ، ص٢) هو :

$$\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} \ ، \ \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$

مثـال ٢ : أوجد منتصف القطعة الخطية الواصلة من ن١ (− ٢ ، ٣) الى ن٢ (٤ ، − ٢) .

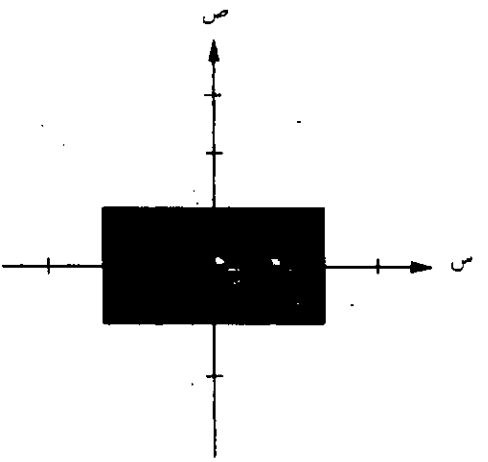
الحـــل : من (١ — ٧) ينتج أن احداثيي المنتصف هما

$$\left(\frac{-٢ + ٤}{٢} \ . \ \frac{٣ + (-٢)}{٢} \right)$$ أي (١ ، ١ / ٢) .

ان أي مجموعة من ازواج مرتبة من الاعداد الحقيقية هي مجموعة فرعية ع من مجموعة حاصل الضرب ح × ح ، ولذا نعتبر أن النقطة ن (س ، ص) في المستوى الاحداثي تناظر الزوج المرتب (س ، ص) في ع. ونسمي مجموعة جميع نقاط المستوى الاحداثي التي تناظر الازواج المرتبة في ع ببيان ع أو رسمها البياني أو مخططها

مثـال ٣ . صف مخطط ع = { (س ، ص) : |س| ≤ ٢ ، |ص| ≤ ١ }

الحـــل : من (١ – ٢) نجد ان المتباينتين تكافئان ٢ ≤ س ≤ – ٢ ، ١ ≤ ص ≤ – ١ فيكون مخطط ع يتألف من جميع نقاط المنطقة المستطيلة المبينة بالشكل ١ – ١٠ سواء تلك النقاط التي تقع داخل المنطقة أو على حوافها .



الشكل ١ — ١٠

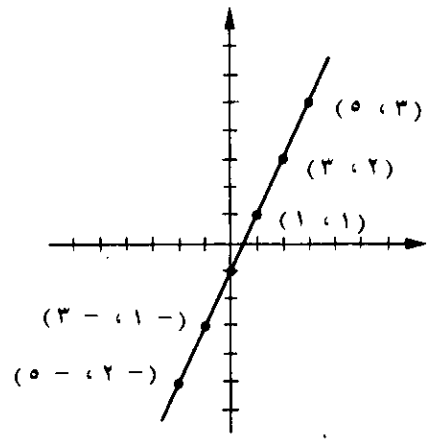
فالبيان في المثال ٣ يتألف من منطقة (region) في المستوى ، وتتألف البيانات عادة من خطوط مستقيمة أو دوائر أو منحنيات إخرى . وعند تحديد مخطط اي مجموعة فرعية من ح × ح نضع عادة نقاطا ن (س ، ص) حيث (س ، ص) ∈ ع حتى تظهر لنا معالم المخطط وعندها نضع رسما ممهدا يصل بين النقاط المناسبة. وهذا ما يسمى بتخطيط (sketching) الرسم البياني للمتغير ع

مثـال ٤ : أرسم مخطط ع = { (س ، ص) : ص = ٢ س − ١ }

الحـــل : من المناسب أن نضع الاحداثيات (س ، ص) في جدول كالتالي نضع فيه مقابل كل س قيمة ص المناظرة وهي تساوي ٢ س − ١

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣
ص	−٥	−٣	−١	١	٣	٥

وتحديد مواقع هذه النقاط يبين انها تقع على خط مستقيم . فترسم المخطط كما في الشكل ١ − ١١ .



الشكل ١ — ١١

يسمى الاحداثي السيني للنقطة التي عندها يقطع المنحنى محور س بالمقطع السيني (X-intercept) ويسمى الاحداثي الصادي للنقطة التي عندها يقطع المنحنى محور ص بالمقطع الصادي (Y-intercept) . ففي المثال ٤ كان المقطع السيني ١/٢ والصادي − ١ .

وقد يستحيل أن نضع كل البيان ، ففي المثال ٤ إن س قد تتخذ أي قيمة تشاء مهما تكن كبيرة ، ومع ذلك نعتبر أن خطا كالمبين بالشكل ١ − ١١ هو الرسم البياني المطلوب أو مخطط له (Sketch) ، اذ نعتبر أن المخطط انما هو طريقة تساعد على تخيل البيان ، اما البيان نفسه فلا ينتهي كما ينتهي المخطط الذي يبين منه ما يكفي ليدل على ما يبقى منه .

وتعين المجموعة ع في المثال ٤ بالمعادلة ص = ٢ س − ١ اذ اننا اذا اعطينا س أي قيمة فاننا نجد قيمة ص التي تجعل (س ، ص) ∈ ع .

واذا اعطينا أي معادلة في س ، ص فان الزوج المرتب (أ ، ب) يكون حلا لها اذا كان التعويض عن س بالمقدار أ وعن ص بالمقدار ب يفضي الى تعادل . فمثلا (٢ ، ٣) حل للمعادلة ص = ٢ س − ١ لان تعويض س = ٢ ، ص = ٣ يفضي الى ٣ = ٤ − ١ . ومجموعة الحل هي كافة هذه الحلول فهي مجموعة فرعية من ح × ح

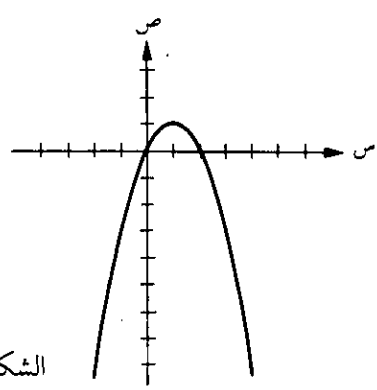
وتكون المعادلتان في س ، ص متكافئتين اذا كانت لهما مجموعة حل واحدة . وبيان المعادلة هو نفسه بيان مجموعة حلها. ورسم المعادلة يعني ان نخطط الرسم البياني لمجموعة حلها . وهكذا فان رسم المعادلة ص = ٢ س − ١ هو نفسه الرسم البياني للمجموعة ع في المثال ٤ .

مثـال ٥ : أرسم المعادلة ص = ٢ س − س^{٢}

الحـــل : اذا وضعنا جدولا بنقاط (س ، ص) على المخطط المطلوب نحصل على ما يلي :

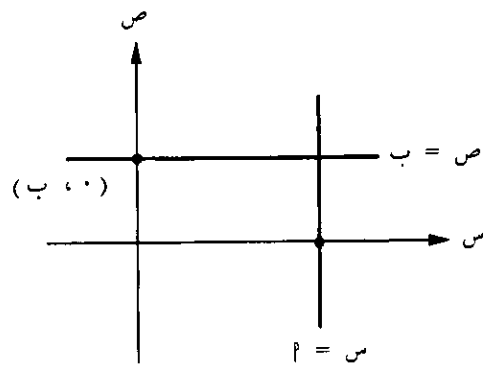
س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص	−٨	−٣	٠	١	٠	−٣	−٨

فالرسم المطلوب كما في الشكل ١ — ١٢ .



الشكل ١ — ١٢

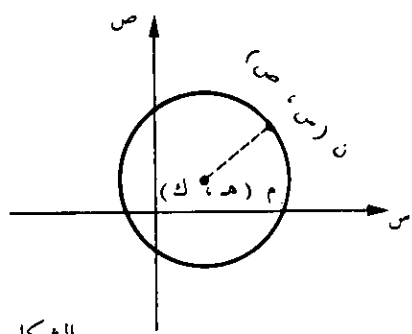
ويمكن أن نعتبر المعادلة ص = ب حيث ب عدد حقيقي مكافئة للمعادلة ص = ٠ × س + ب أي انها معادلة في س ، ص فمجموعة حلها تشتمل على كل الازواج المرتبة (س ، ب) حيث تتخذ س أي قيمة وتبقى ب ثابتة . ينتج ان بيان المعادلة ص = ب هو خط مستقيم يوازي محور س ومقطعه الصادي ب . وبالمثل نقول أن بيان المعادلة س = أ خط يوازي محور ص ومقطعه السيني أ . والشكل ١ — ١٣ يبين هذين الخطين .



الشكل ١ — ١٣

واذا كانت م (هـ ، ك) نقطة في المستوى الاحداثي فان الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها نق تعرف بانها نقط المستوى التي تبعد عن م بمقدار نق . ويظهر من الشكل ١ — ١٤ أن النقطة ن (س ، ص) تقع على الدائرة اذا وفقط اذا كان ل (م ، ن) = نق أي اذا كان

$$\sqrt{(س - هـ)^{٢} + (ص - ك)^{٢}} = \text{نق حسب قانون المسافة}$$



الشكل ١ — ١٤

(١ – ٨) والمعادلة المكافئة هي (س – هـ)^{٢} + (ص – ك)^{٢} = نق^{٢} ، نق> ٠.

وتسمى هذه المعادلة **بالمعادلة المعيارية** للدائرة التي مركزها م (هـ ، ك) ، فاذا كانت هـ = ٠ ، ك = ٠ تصبح المعادلة س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها نق . واذا كان نق = ١ تسمى هذه الدائرة دائرة الوحدة (Unit circle)

مثال ٦ : أوجد معادلة الدائرة التي مركزها م (– ٢ ، ٣) وتمر بالنقطة د (٤ ، ٥)

الحل بما أن د تقع على الدائرة يكون نق هو ل (م ، د)

فمن قانون المسافة يكون

$$\text{نق} = \sqrt{(-٢ - ٤)^{٢} + (٣ - ٥)^{٢}} = \sqrt{٣٦ + ٤} = \sqrt{٤٠}$$

وباستعمال (١ — ٨) حيث هـ = – ٢ ، ك = ٣ ينتج ان

$$(س + ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٤٠$$

أو $$س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ٦ص - ٢٧ = ٠$$

(١ – ٩) واذا ربعنا في (١ — ٨) واختصرنا نحصل على معادلة من النوع

$$س^{٢} + ص^{٢} + أس + ب ص + جـ = ٠$$

وبالعكس اذا اعطينا (١ — ٩) أمكن أن نكمل التربيع ونحصل على معادلة من النوع (س – هـ)^{٢} + (ص – ك)^{٢} = ل

حيث هـ ، ك ، ل ∈ ح ، فاذا كان ل> . كان الرسم البياني دائرة مركزها (هـ ، ك) ونصف قطرها نق =$\sqrt{\text{ل}}$. واذا كان ل = ٠ فالحل الوحيد للمعادلة هو (هـ ، ك) أي ان بيان هذه المعادلة هو نقطة وحيدة . واذا كان ل< ٠ كانت مجموعة الحل خالية وليس هنالك رسم . وهذا يعني أن بيان (١ — ٩) هو دائرة أو نقطة أو المجموعة الخالية .

مثال ٧ : أوجد المركز ونصف القطر للدائرة التي معادلتها

$$س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٦ص - ٣ = ٠$$

الحل : نبدأ بترتيب حدود المعادلة على النحو التالي

$$(س^{٢} - ٤س) + (ص^{٢} + ٦ص) = ٣$$

ثم نكمل المربعين باضافة الاعداد المناسبة داخل الاقواس . وبالطبع كي تنتج معادلة مكافئة يجب ان نزيد الاعداد لطرفي المعادلة بالتساوي . وهذا يفضي الى المعادلة

$(س^{٢} - ٤س + ٤) + (ص^{٢} + ٦ص + ٩) = ٣ + ٤ + ٩$

أي $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ١٦$

ومن (١ — ٨) ينتج أن المركز هو (٢ ، − ٣) وان نصف القطر هو ٤

تمارين :

في التمارين ١ — ٦ أوجد (١) المسافة ل (أ ، ب) بين النقطتين أ ، ب (٢) منتصف القطعة أ ب .

١ . أ (٦ ، − ٢) ، ب (٢ ، ١)

٢ . أ (− ٤ ، − ١) ، ب (٢ ، ٣)

٣ . أ (٠ ، − ٧) ، ب (− ١ ، − ٢)

٤ . أ (٤ ، ٥) ، ب (٤ ، − ٤)

٥ . أ (− ٣ ، − ٢) ، ب (− ٨ ، − ٢)

٦ . أ (١١ ، − ٧) ، ب (− ٩ ، ٠)

في التمرينين ٧ ، ٨ أثبت أن المثلث أ ب جـ قائم وأوجد مساحته

٧ . أ (− ٣ز ٤) . ب (٢ ، − ١) ، جـ (٩ ، ٦)

٨ . أ (٧ ، ٢) ، ب (− ٤ ، ٠) ، جـ (٤ ، ٦)

في التمارين ٩ − ١٤ صف مخطط ع

٩ . ع = { (س ، ص) : س = − ٥ }

١٠ . ع = { (س ، ص) : ص = − س }

١١ . ع = { (س ، ص) : ص = س }

١٢ . ع = { (س ، ص) : ص > س }

١٣ . ع = { (س ، ص) : س ص > ٠ }

١٤ . ع = { (س ، ص) : | س | ≥ أ ، ص ≤ أ }

أرسم بيانات المعادلات ١٥ — ٢٠

١٥ . ص = س^{٢} + ١

١٦ . ص = ١ − س^{٢}

١٧ . ص^{٢} = س + ١

١٨ . ص^{٢} = ١ − س

١٩ . س^{٢} = ص^{٢}

٢٠ . ٣س + ٢ص = ٦

في كل من التمارين ٢١ — ٢٤ أوجد معادلة الدائرة التي تحقق الشروط المعطاة

٢١ . المركز م (٤ ، ٥) وتمر بالنقطة ن (١ ، ١)

٢٢ . المركز م (− ٨ ، ٥) وتمس محور س

٢٣ . طرفا احد اقطارها أ (٢ ، ٥) ، ب (٦ ، − ٤)

٢٤ . تحيط بالمثلث القائم في التمرين ٧ . (ملاحظة : مركز الدائرة هو منتصف الوتر)

في كل من التمارين ٢٥ — ٣٠ أوجد مركز الدائرة ونصف قطرها

٢٥ . س^{٢} + ص^{٢} + ٤س − ٦ص + ٤ = ٠

٢٦ . س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س + ٢ص + ٢٢ = ٠

٢٧ . س^{٢} + ص^{٢} + ٦س = ٠

٢٨ . س^{٢} + ص^{٢} + س − ص − ١ = ٠

٢٩ . ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} − س + ص − ٣ = ٠

٣٠ . ٩س^{٢} + ٩ص^{٢} − ٦س + ١٢ص − ٣١ = ٠

٣ — المستقيمات (Lines)

نعتبر أن كل المستقيمات التي ندرسها تقع في مستوى احداثي محدد . والمفهوم التالي من المفاهيم الأساسية في دراسة المستقيمات :

(١ − ١٠) تعريف الميل (Slope) : اذا كان ل مستقيما لا يوازي محور ص وكانت ن$_{١}$ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) . ن$_{٢}$ (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) نقطتين مختلفتين على ل فان ميل هذا المستقيم ، ولنسمه م ، يعرف كما يلي :

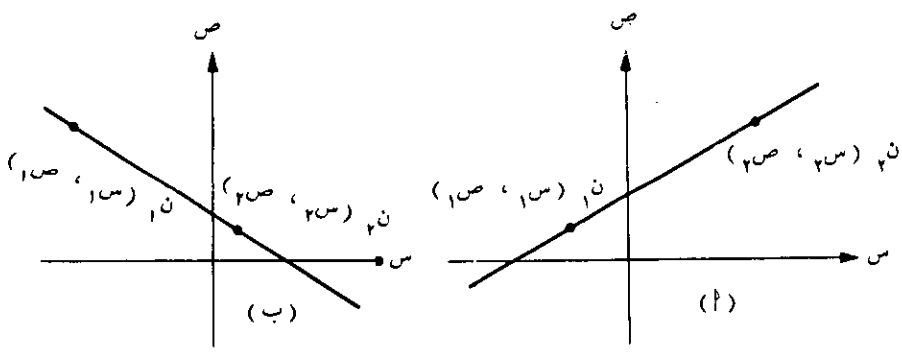
$$م = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$$

واذا كان ل موازيا لمحور ص فليس له ميل .

والبسط $ص_٢ - ص_١$ في قانون الميل يعطي مقدار التغير الرأسي في الاتجاه اثناء السير من $ن_١$ الى $ن_٢$ ، والمقام $س_٢ - س_١$ يعطي مقدار التغير الافقي . وفي تعيين ميل المستقيم لا يهم أي النقطتين نعتبرها $ن_١$ وايهما نعتبرها $ن_٢$ ، وذلك لان

$$\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢}$$

ولذا يمكن ان نعتبر اننا نختار النقطتين بحيث يكون $س_١ < س_٢$ كما في الشكل ١ – ١٥ . وفي هذه الحالة نجد ان $س_٢ - س_١ >$. فيكون الميل موجبا أو سالبا أو صفرا حسب كون $ص_٢ > ص_١$ أو $ص_٢ < ص_١$ أو $ص_٢ = ص_١$. ففي الشكل ١ – ١٥ ميل المستقيم (أ) موجب في حين أن ميل المستقيم (ب) سالب . ويكون الميل صفرا اذا كان المستقيم افقيا . فاذا كان الميل موجباً فان تزايد الاحداثيات السينية يرافقه تزايد في الاحداثيات الصادية ، وهنا نقول ان المستقيم صاعد . واذا كان الميل سالبا يرافق تزايد الاحداثيات السينية تناقص في الاحداثيات الصادية ونقول أن المستقيم نازل أو منحدر .

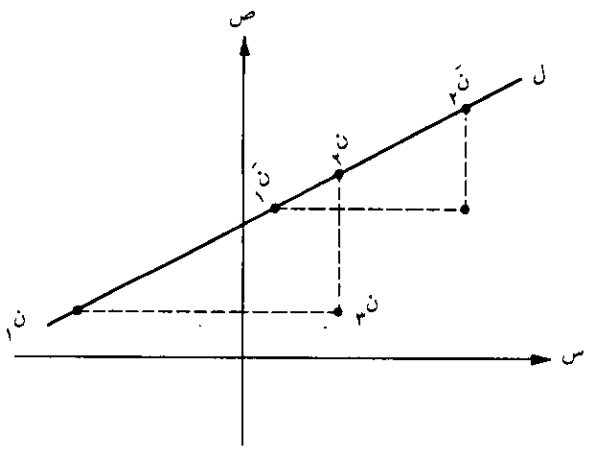


الشكل ١ — ١٥

وينبغي أن نلاحظ أن تعريف الميل لا يعتمد على النقطتين اللتين نختارهما على المستقيم اذ لو أخذنا نقطتين اخريين نَ١ (سَ١ ، صَ١) ، نَ٢ (سَ٢ ، صَ٢) ، كما في الشكل ١ — ١٦ فان المثلث الذي رؤوسه نَ١ ، نَ٢ ، نَ٣ (سَ٢ ، صَ١) يشابه المثلث الذي رؤوسه $ن_١$ ، $ن_٢$ ، $ن_٣$ ($س_٢$ ، $ص_١$)

ولان الاضلاع المتناظرة متناسبة ينتج ان .

$$\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{صَ_{٢} - صَ_{١}}{سَ_{٢} - سَ_{١}}$$



الشكل ١ — ١٦

مثـال ١ : أوجد ميل كل واحد من المستقيمات الواصلة بين ازواج النقاط التالية :

(أ) أ (– ١ ، ٤) و ب (٣ ، ٢)

(ب) أ (٦ ، ٢) و ب (٨ ، ٢)

(جـ) أ (٤ ، – ٢) و ب (٤ ، – ٤)

الحـــل : استنادا الى (١ – ١٠) نحصل على الحلول التالية :

(أ) م = (٢ – ٤) / (٣ – (– ١)) = – ٤/٢ = – ٢/١

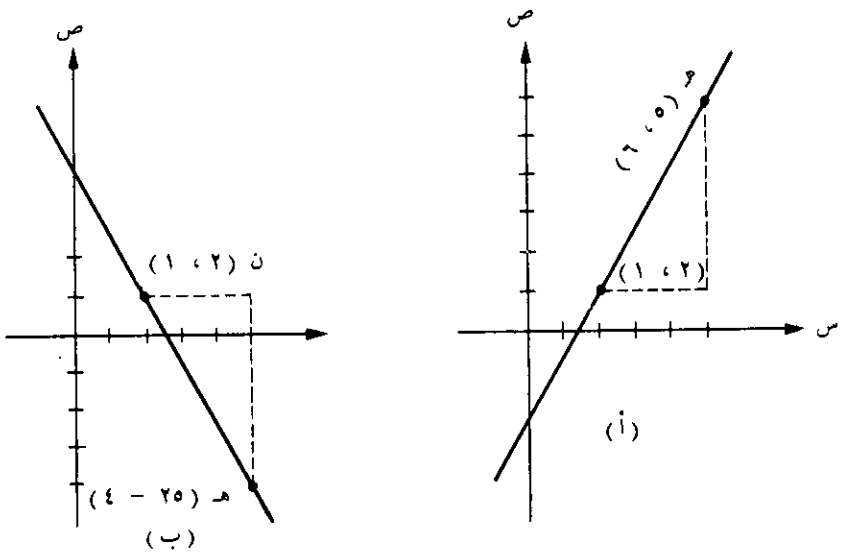
(ب) م = (٢ – ٢) / (– ٨ – ٦) = ٠ / – ١٤ = ٠

(جـ) ليس هنالك ميل لان المستقيم رأسي

مثـال ٢ : ارسم مستقيما من ن (٢ ، ١) بحيث يكون ميله (أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $-\frac{٥}{٣}$

الحـــل . اذا كانت ن (٢ ، ١) على المستقيم وكان ميله ٥ /٣ نستطيع ان نجد نقطة اخرى على المستقيم بان نبدأ من ن ونسير ٣ وحدات الى اليمين و ٥ وحدات الى

اعلى . فنصل الى النقطة هـ (٥ ، ٦) وهكذا يتحدد المستقيم انظر الشكل ١ — ١٧ . وكذلك اذا كان م = – ٥ / ٣ نبدأ من ن ونسير ٣ وحدات الى اليمين و ٥ وحدات الى اسفل فنصل الى هـ (٥ ، ٤) كما في الشكل ١ — ١٧ .



الشكل ١ — ١٧

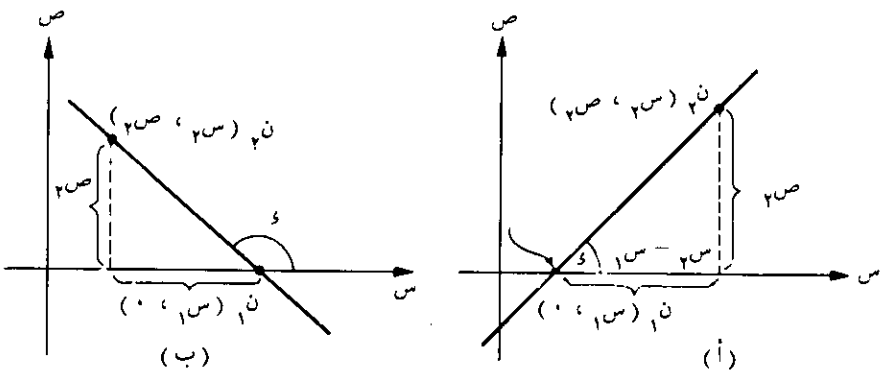
(١ – ١١) تعريف الانحراف (inclination) : اذا كان ل مستقيما لا يوازي محور س وكانت ن نقطة تقاطع ل مع هذا المحور فان انحراف ل هو اصغر زاوية ينبغي أن يدور بها محور س حول ن بعكس اتجاه عقرب الساعة حتى يتطابق مع ل ، وسنرمز لهذه الزاوية بالرمز ؤ . واذا كان ل يوازي محور س تكون ؤ صفرا واذا لم يكن ل افقيا يكون $0^\circ < ؤ < 180^\circ$ ، والمستقيم في الشكل ١ – ١٨ أ يمثل الحالة $0^\circ < ؤ < 90^\circ$.

وينتج من مبادىء الهندسة المستوية ان المستقيمين يكونان متوازيين اذا وفقط اذا تساوى انحرافاهماوبرهان ذلك يقتضي الالمام بالقوانين المتعلقة بظل الزاوية . وثمة مراجعة لهذه القوانين وقوانين المثلثات الاخرى في الملحق (٣) .

(١ – ١٢) نظريـــة : اذا كان ميل المستقيم م وانحرافه ؤ كان م = ظا ؤ

البرهان : اذا كان المستقيم افقيا يكون م = ٠ ، ؤ = ٠ ولان . = ظا فالنظرية تصح . واذا كان المستقبل يميل عن الخط الأفقي فليكن س$_1$ مقطعه السيني

ولنأخذ أي نقطة ن$_{٢}$ (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) عليه ، حيث ص$_{٢}$ > . فاذا كان س$_{١}$ < س$_{٢}$ ينتج من المثلث في الشكل ١ – ١٨ أ .



الشكل ١ — ١٨

$$(١-١٣)\quad \text{ظا ء} = \frac{\text{ص}_{٢}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \text{م}$$

واذا كان س$_{١}$ > س$_{٢}$ ينتج من شكل ١ – ١٨ ب

$$\text{ظا}\,(١٨٠^{\circ} - \text{ء}) = \frac{\text{ص}_{٢}}{\text{س}_{١} - \text{س}_{٢}}$$

ولان ظا (١٨٠° – ء) = ظا ء نحصل هنا ايضا على ١ – ١٣) . وهكذا يكمل البرهان .

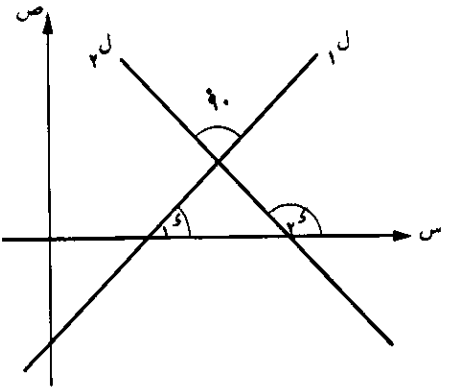
(١ – ١٤) **نتيجة** : اذا كان م$_{١}$ ، م$_{٢}$ ميلي مستقيمين فان المستقيمين يتوازيان اذا وفقط اذا كان م$_{١}$ = م$_{٢}$

البرهان : اذا كان انحرافا المستقيمين ء$_{١}$ ، ء$_{٢}$ فانهما يتوازيان اذا وفقط اذا كان ء$_{١}$ = ء$_{٢}$ أي ظا ء$_{١}$ = ظا ء$_{٢}$. وهذا يثبت المطلوب .

وفقط اذا كان م$_{١}$ م$_{٢}$ = – ١ .

(١ – ١٥) اذا كان م$_{١}$ ، م$_{٢}$ ميلي مستقيمين غير رأسيين فان المستقيمين يتعامدان اذا وفقط اذا كان م$_{١}$ م$_{٢}$ = – ١ .

البرهـــان : ليكن المستقيمان ل$_1$ ، ل$_2$ وليكن انحرافاهما ى$_1$ ، ى$_2$ على التوالي ، فاذا كان ل$_1$ ، ل$_2$ متعامدين يكون ى$_1$ ≠ ى$_2$ فلنعتبر ان ى$_2$ > ى$_1$ وليس في ذلك تخصيص للحالة العامة . وهذا يفضي الى وضع كالمبين بالشكل (١ – ١٩) فيكون ى$_2$ = ى$_1$ + ٩٠° (لماذا ؟) وينتج أن :



الشكل ١ — ١٩

$$\text{ظا ى}_2 = \text{ظا (ى}_1 + 90^\circ) = -\text{ظتا ى}_1 = -\frac{1}{\text{ظا ى}_1}$$

ومن (١ — ١٢) ينتج أن $م_2 = -\frac{1}{م_1}$ أي أن $م_1 م_2 = -1$

وبالعكس اذا كان $م_1 م_2 = -1$ كان احد الميلين موجبا ولاخر سالبا . فاذا اعتبرنا $م_1$ موجباً ، $م_2$ سالبا ينتج ان

∴ $0^\circ < ى_1 < 90^\circ$ ، $90^\circ < ى_2 < 180^\circ$.

والشرط $م_2 = -1 / م_1$ يتضمن ان ظا ى$_1$ = – ١ / ظا ى$_1$ = – ظتا ى$_1$ = ظا (ى$_1$ + ٩٠°) ولان ٠° < ى$_1$ < ٩٠° ينتج ان ٩٠° < ى$_1$ + ٩٠° < ١٨٠° ولذا يكون ى$_2$ = ى$_1$ + ٩٠° وينتج ان المستقيمين متعامدان

مثـال ٣ : اثبت أن المثلث الذي رؤوسه أ (− ١ ، − ٣) ، ب (٦ ، ١) ، جـ (٢ ، − ٥) قائم

الحـــل اذا كان $م_١$ هو ميل المستقيم الواصل بين ب ، جـ ، $م_٢$ هو ميل المستقيم الواصل بين أ ، جـ فمن (١ − ١٠) ينتج ان :

$$م_١ = \frac{١ - (-٥)}{٢ - ٦} = \frac{٣}{٢} \text{ ، } م_٢ = \frac{-٣ - (-٥)}{-١ - ٢} = -\frac{٢}{٣}$$

فلان $م_١ \, م_٢ = -١$ تكون زاوية جـ قائمة .

في المستقيمات الرأسية والأفقية تكون المعادلات من النوع س = أ ، ص = ب على التوالي ، ولنجد معادلة مستقيم ل ميله م ويمر بالنقطة ن$_١$ (س$_١$ ، ص$_١$) :

ان هنالك مستقيما واحدا يفي بهذين الشرطين . فاذا كانت ن (س ، ص) أي نقطة حيث س ≠ س$_١$ تكون ن على المستقيم اذا وفقط اذا كان ميل المستقيم ن$_١$ ن يساوي م ، أي اذا كان

$$م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$$

من ذلك ينتج ان :

(١ − ١٦) $ص - ص_١ = م (س - س_١)$

هي معادلة المستقيم ل . ونشير الى (١ — ١٦) **باسم صيغة النقطة والميل** (point-slope form)

مثـال ٤ : أوجد المستقيم المار بالنقطتين أ (١ ، ٧) ، ب (− ٣ ، ٢)

الحـــل : ميله م $= \frac{٢ - ٧}{-٣ - ١} = \frac{٥}{٤}$

فاذا عوضنا احداثيي أ في صيغة الميل والنقطة (١ — ١٦) ينتج :

ص − ٧ = (٥ / ٤) (س − ١)

وهذا يكافيء ٤ ص − ٢٨ = ٥ س − ٥ أي ٥ س − ٤ ص + ٢٣ = ٠

مثـال ٥ : أوجد معادلة العمود المنصف للقطعة الخطية الواصلة من أ (١ ، ٧) الى ب (− ٣ ، ٢) .

الحـــل : من (١ − ٧) نجد ان منتصف أ ب هو ن = (− ١ ، ٩ / ٢) ، ولان ميل أ ب هو ٥ / ٤ (انظر المثال ٤) ينتج من (١ − ١٥) ان ميل العمود المنصف هو $-\frac{٤}{٥}$. فباستعمال معادلة الميل والنقطة ينتج ان

ص − ٩ / ٢ = (− ٤ / ٥) (س + ١)

وبضرب الطرفين في ١٠ والاختصار ينتج ٨ س + ١٠ ص − ٢٧ = ٠

ويمكن ان تكتب معادلة (١ − ١٦) على النحو التالي :

ص = م س − م س$_{١}$ + ص$_{١}$

وهذا من النوع

(١ − ١٧) ص = م س + ب

حيث ب = − م س$_{١}$ والعدد الحقيقي ب هو المقطع الصادي للمستقيم ويمكن التحقق من ذلك بوضع س = ٠

ونسمي الصيغة (١ − ١٧) باسم **صيغة الميل والمقطع** لان المعادلة يظهر فيها الميل م والمقطع ب .

وبالعكس : ان ص − ب = م (س − ٠)

هي حسب (١ − ١٦) معادلة مستقيم ميله م ويمر بالنقطة (٠ ، ب)

ويظهر مما تقدم في هذا البند ان كل مستقيم هو خط بياني لمعادلة من النوع أ س + ب ص + جـ = ٠

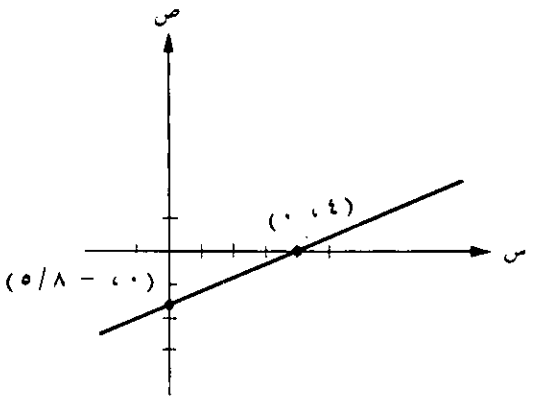
حيث لا يكون أ ، ب كلاهما صفرا . وبالعكس فان بيان اي معادلة خطية من هذا النوع هو خط مستقيم . لهذا كثيرا ما نقول ايجازا : الخط أ س + ب ص + جـ = ٠

وذلك بدل قولنا : الخط المستقيم الذي معادلته أ س + ب ص + جـ = ٠

مثـال ٦ : ضع بيانا للمعادلة ٢ س − ٥ ص = ٨

الحـــل : لان الخط المطلوب هو خط مستقيم يكفي ان تجد نقطتين على هذا الخط . فاذا وضعنا ص = ٠ في المعادلة المعطاة نحصل على المقطع السيني وهو ٤ ، واذا

وضعنا س = ٠ نحصل على المقطع الصادي وهو – ٨ / ٥ . وهذا يعطي المخطط المبين بالشكل (١ – ٢٠) .



الشكل ١ — ٢٠

وهنالك طريقة اخرى للرسم وهي ان نضع المعادلة على مثال صيغة الميل والمقطع ص = (٢ / ٥) س – (٨ / ٥) فنرسم خطا يمر بالنقطة (٠ ، – ٨ / ٥) وميله ٢ / ٥ .

مثـال ٧ : أوجد معادلة مستقيم يوازي المستقيم ٦ س + ٣ ص = ٤ ويمر بالنقطة (٥ ، ٧)

الحـــل : يمكن ان تكتب معادلة المستقيم المعطى على النحو ص = – ٢ س + ٤ / ٣ . وهذه هي صيغة الميل والمقطع المعطاة في (١ – ١٧) فالميل هو – ٢ ، ومن (١ – ١٤) ينتج ان ميل المستقيم المطلوب هو ايضا – ٢ . فباستعمال صيغة الميل والمقطع ينتج

ص + ٧ = – ٢ (س – ٥)

وهذا يكافيء ٢ س + ص – ٣ = ٠

تمارينـــن :

في التمارين ١ – ٤ عين النقطتين أ ، ب واحسب ميل المستقيم الواصل من أ الى ب .

١ . أ (– ٤ ، ٦) ، ب (– ١ ، ١٨)

٢ . أ (٦ ، − ٢) ، ب (− ٣ ، ٥)

٣ . أ (− ١ ، − ٣) ، ب (− ١ ، ٢)

٤ . أ (− ٣ ، ٤) ، ب (٢ ، ٤)

٥ . بين أن أ (− ٣ ، ١) ، ب (٥ ، ٣) ، جـ (٣ ، ١) ، د (− ٥ ، − ٢) هي رؤوس متوازي أضلاع .

٦ . بين ان أ (٢ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (أ ، − ٦) ، د (− ٦ ، ٢) هي رؤوس شبه منحرف .

٧ . بين أن النقاط التالية هي رؤوس مستطيل : أ (٦ ، ١٥) ، ب (١١ ، ١٢) ، جـ (− ١ ، − ٨) ، د (− ٦ ، − ٥)

٨ . بين أن النقاط أ (١ ، ٤) ، ب (٦ ، − ٤) ، جـ (− ١٥ ، − ٦) هي رؤوس مثلث قائم .

٩ . النقاط أ (− ١ ، − ٣) ، ب (٤ ، ٢) ، جـ (− ٧ ، ٥) هي ثلاثة رؤوس متتالية في متوازي اضلاع . أوجد الرأس الرابع .

١٠ . أ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، ب (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) ، جـ (س$_{٣}$ ، ص$_{٣}$) ، د (س$_{٤}$ ، ص$_{٤}$) هي رؤوس لشكل رباعي . أثبت أن القطع الخطية التي تصل بين منتصفات الاضلاع المتجاورة لهذا الشكل تكون متوازي اضلاع .

في التمارين ١١ — ٢٤ أوجد معادلة المستقيم الذي يحقق الشرطين المعطيين

١١ . يمر بالنقطة أ (٢ ، − ٦) وميله ١ / ٢

١٢ . ميله − ٣ ومقطعه الصادي ٥

١٣ . يمر بالنقطتين أ (− ٥ ، − ٧) ، ب (٣ ، − ٤)

١٤ . مقطعه السيني − ٤ ومقطعه الصادي ٨

١٥ . يمر بالنقطة أ (٨ ، − ٢) ومقطعه الصادي − ٣

١٦ . ميله ٦ ومقطعه السيني − ٢

١٧ . يمر بالنقطة أ (١٠ ، − ٦) ويوازي (١) محور ص ، (٢) محور س

١٨ يمر بالنقطة أ (− ٥ ، ١) ويعامد (١) محور ص ، (٢) محور س

١٩ . يمر بالنقطة أ (٧ ، − ٣) ويعامد المستقيم ٢س − ٥س = ٨

٢٠ . يمر بالنقطة أ (− ٣ / ٤ ، − ١ / ٢) ويوازي المستقيم س + ٣ص = ١

٢١ . أعطينا أ (٣ ، − ١) ، ب (− ٢ ، ٦) والمطلوب العمود المنصف للقطعة المستقيمة أ ب .

٢٢ . أوجد معادلة المستقيم الذي ينصف الربعين الثاني والرابع

٢٣ . أوجد معادلات أعمدة المثلث الذي رؤوسه أ (− ٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ٤) ، جـ (٣ ، − ٨) وأوجد النقطة التي تلتقي هذه الاعمدة فيها . (الاعمدة المقصودة هي النازلة من رؤوس المثلث على أضلاعه المقابلة لها) .

٢٤ . أوجد معادلات المستقيمات المتوسطة للمثلث المذكور في التمرين ٢٣ وأوجد نقطة تلاقيها .

في كل من التمارين ٢٥ — ٣٢ استعمل صيغة الميل والمقطع لايجاد ميل المستقيم ومقطعه الصادي ثم ضع رسمه البياني :

٢٥ . ٣س − ٤ص + ٨ = ٠

٢٦ . ٢ص − ٥س = ١

٢٧ . س + ٢ص = ٠

٢٨ . ٨س = ١ − ٤ص

٢٩ . ص = ٤

٣٠ . س + ٢ = $\frac{١}{٢}$ ص

٣١ . ٥س + ٤ص = ٢٠

٣٢ . ص = ٠

٣٣ . اذا كان م مستقيما مقطعاه من محوري س ، ص هما أ ، ب على التوالي وليس أي منهما صفرا فأثبت ان $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب}$ = ١ هي معادلة لهذا المستقيم .

٣٤ . اثبت أن (ص − ص$_{١}$) (س$_{٢}$ − س$_{١}$) = (ص$_{٢}$ − ص$_{١}$) (س − س$_{١}$) هي معادلة للمستقيم الواصل من ن$_{١}$ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) الى ن$_{٢}$ (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$)

٤ — الاقتران :

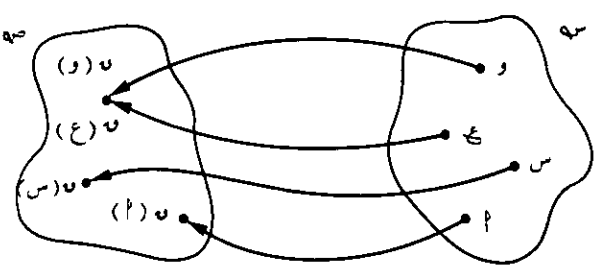
من أكثر المفاهيم الرياضية فائدة مفهوم الاقتران . ويمكن اعتبار الاقتران قاعدة أو مقابلة تقرن بكل عنصر من مجموعة ما سه عنصرا واحدا فقط من مجموعة اخرى صه . مثلا لتكن سه هي مجموعة كتبك ولتكن صه هي مجموعة الاعداد الصحيحة . فاذا قرنا كل كتاب بعدد صفحاته صار هنالك اقتران من سه الى صه . لاحظ أن هنالك عناصر في صه لا تقترن بعناصر في سه ، كالارقام السالبة مثلا ، اذ ان الكتب لا تحوى صفحات سالبة العدد .

مثلا آخر : ليكن سه و صه كل منهما هو مجموعة الاعداد الحقيقية ح . ولنقرن كل عدد س بمربعه س^{2} فنقرن ٣ بالعدد ٩ ونقرن $-\frac{٥}{٤}$ بالعدد ١٦/٢٥، ونقرن $\sqrt{٢}$ بالعدد ٢ ، وهكذا . وهذا يصنع اقترانا من ح الى ح ، والتعريف التالي يلخص ما سبق ويضيف مصطلحات جديدة .

(١ – ١٨) **تعريف الاقتران** : الاقتران ق من المجموعة سه الى المجموعة صه هو مقابلة تقرن بكل عنصر س من سه عنصرا وحيدا ص من صه . وفي هذه الحالة نقول ان العنصر ص هو صورة س (image) في الاقتران ق ونكتبها ق (س)

وتسمى المجموعة سه مجال الاقتران (domain) ، وتسمى مجموعة صور عناصر سه مدى الاقتران (range) . والرمز ق (س) الذي يستعمل للدلالة على العنصر الذي يقترن مع س يقرأ قاف س . وقد نتكلم عن ق (س) بانه قيمة ق عند س .

وتمثل الاقترانات بالتصوير أي بخطوط على النمط المبين بالشكل (١ – ٢١) . حيث تقول الاسهم ان العناصر ق (س) ، ق (و) ، ق (ع) ، ق (م) من صه تقترن بالعناصر س ، و ، ع ، م على التوالي من سه . ويمكن أن نتخيل طائفة من هذه الاسهم يقرن كل منها عنصرا من سه بعنصر محدد من صه . وقد رسمنا المجموعتين سه و صه منفصلتين الا انه قد يكون بينهما عناصر مشتركة . ونحن في الواقع كثيرا ما نأخذ سه و صه متساويين . ومن المهم ان نلاحظ ان لكل س ∈ سه صورة واحدة ق (س) ، إلا ان بعض العناصر مثل س ، و في الشكل (١ – ٢١) قد يكون لها صورة واحدة مشتركة .



الشكل ١ — ٢١

وقد يلتبس الامر على المبتدىء فلا يفرق بين ق ، ق (س) فليذكر ان ق تشير الى الاقتران وهذا ليس عنصرا من عناصر سه ولا من عناصر صه . أما ق (س) فهو عنصر من صه وهو العنصر الذي يقرنه الاقتران بالعنصر س .

مثال ١ : اذا كان ق اقترانا مجاله ج حيث ق (س) = س^{٢} لكل س في ج فأوجد ق (− ٦) ، ق ($\sqrt{٣}$) ، ق (أ + ب) حيث أ ، ب ∈ ج . ما مدى ق ؟

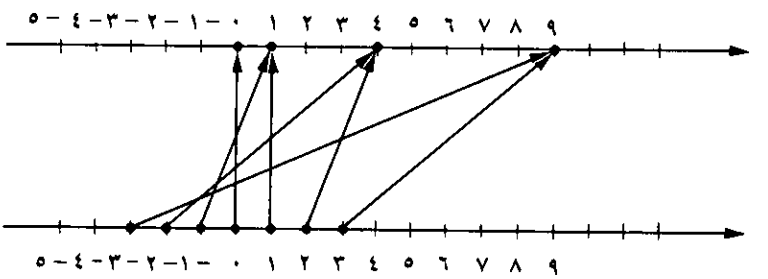
الحل : يمكن أن نجد قيم ق (أو صوره) بتعويض قيم س في المعادلة ق (س) = س^{٢} وهكذا يكون ق (− ٦) = (− ٦)^{٢} = ٣٦ ،
ق ($\sqrt{٣}$) = ($\sqrt{٣}$)^{٢} = ٣ ، ق (أ + ب) = (أ + ب)^{٢} .

واذا كان مـ مدى ق يكون

مـ = { ق (أ) : أ ∈ ج } = { أ^{٢} : أ ∈ ج }

ويتضح ان مدى ق هو الاعداد الحقيقية غير السالبة .

وقد نستعمل احدى العبارات الرمزية التالية للدلالة على أن ق اقتران من سه الى صه سه ⊆ صه ، ق : سه ← صه ، ق : س ← ق (س) .
وقد نعبر عن ذلك بقولنا : ق تأخذ سه الى صه ، أو س الى ق (س) . ففي المثال نجد ان ق تأخذ س الى س^{٢} فيمكن ان نكتب ق : س ← س^{٢} واذا كانت المجموعتان سه و صه في (١ − ١٨) فترتين أو أي مجموعتين من الاعداد الحقيقية فبدل أن نمثلها بالرسم بنقاط داخل منطقتين نستعمل احيانا خطي احداثيات خ ، خَ كما في الشكل (١ − ٢٢) حيث تظهر بعض صور الاقتران الوارد في المثال ١ .



الشكل ١ — ٢٢

ويعتبر الاقتران ق ، ف من سه الى صه متساويين اذا كان ق (س) = ف (س) لكل س في سه ، وفي هذه الحالة نكتب ق = ف فمثلا اذا كان ف (س) = $\frac{1}{2}$ (٢ س^{٢} − ٦) + ٣ وكان ق (س) = س^{٢} لكل س ∈ ح نقول أن ق = ف

ولكي نصف الاقتران ق يلزم ان نحدد الصورة ق (س) لكل عنصر س في مجال الاقتران . ومن الطرق الشائعة لذلك استعمال معادلة كما في المثال ١ . وهنا لا يهم أي حرف نستعمل للتعبير عن المتغير فقد تكتب ق (س) = س^{٢} أو ق (ل) = ل^{٢} أو ق (ن) = ن^{٢} أو غير ذلك .

وهذا صحيح لانه اذا كان ﻫ عنصرا في المجال فاننا نحصل على الصورة ﻫ^{٢} كائنا ما كان الرمز الذي نستعمله .

وكثيرة هي القوانين الرياضية والعلمية التي تتضمن اقترانات . فمثلا القانون م = π نق^{٢} لمساحة الدائرة يقرن بكل عدد صحيح موجب نق قيمة فريدة للرمز م ولذا فهو يعطي اقترانا د (نق) = π نق^{٢} .

وفي مثل م = ق (س) يرمز س الى أي عدد من اعداد المجال ويسمى **المتغير المستقل** ويرمز م الى عدد من اعداد المدى ويسمى **الدالة أو التابع** لان قيمته تتبع قيمة س . وعندما يرتبط متغيران بمثل هذه العلاقة نقول ان م هو **دالة** س فاذا سارت سيارة بسرعة ٥٠ ميلا / الساعة فان المسافة التي تقطعها في ن ساعات تعطي بالصيغة م = ٥٠ ن فنقول أن م هي دالة ن .

وقد رأينا ان عدة عناصر من المجال قد يكون لها صورة واحدة مشتركة فاذا كان هنالك اقتران ق من سه الى صه حيث لكل ﻫ ≠ ب في سه يكون ق (ﻫ) ≠ ق (ب) في صه نقول أن الاقتران هو اقتران واحد لواحد (أو تناظر واحد لواحد) (one-to-one correspondence) واذا كان مدى ق هو صه وكان ق اقتران واحد لواحد نقول أن بين سه و صه تناظر واحد لواحد . وفي هذه الحالة تكون كل نقطة في صه هي صورة لنقطة واحدة فقط في سه . وان التناظر بين الاعداد الحقيقية ونقاط الخط الاحداثي هو تناظر واحد لواحد .

مثـال ٢ :

أ) اذا كان ق (س) = س^{٣} + ١ لكل س في ج فأثبت ان ق هو تناظر واحد لواحد .

ب) اذا كان د (س) = س^{٢} لكل س في ج فأثبت ان د ليس واحدا لواحد .

الحـــل :

أ) اذا كان أ ≠ ب فان أ^{٣} ولذا أ^{٣} + ١ ≠ ب^{٣} + ١ أي أن ق (أ) ≠ ق (ب) ولذا فان ق هو تناظر واحد لواحد .

ب) ليس الاقتران د واحداً لواحد لان بعض نقط المجال تشترك بالصور فمثلا − ٢ ≠ ٢ ولكن د (− ٢) = د (٢)

واذا كان ق من سه الى سه وكان ق (س) = س لكل س ، أي أن كل عنصر س يناظر نفسه يسمى الاقتران **بالاقتران المحايد** في سه (identity function).

ويسمى الاقتران **بالاقتران الثابت** اذا كان ق (س) = ث لكل س في المجال ، حيث ثِ عدد ثابت . فاذا مثل الاقتران الثابت بمخطط كالمبين بالشكل (١ − ٢١) فان كل الاسهم الصادرة من سه تلتقي عند نقطة واحدة في صه

وقد يستعمل الاقتران ق من سه الى صه لتعيين مجموعة فرعية ج من حاصل الضرب سه × صه على النحو ج = { (س ، ص) : س ∈ سه ، ص = ق (س) } وعلى هذا تكون ج هي كل الازواج المرتبة التي يكون عنصرها الاول من سه وعنصرها الثاني صورة العنصر الاول . ويلاحظ أن لكل س زوجاً مرتباً واحداً فقط (س ، ص) في ج ، عنصره الاول هو س . وبالعكس اذا بدأنا بمجموعة فرعية من سه × صه حيث يظهر كل عنصر من سه مرة واحدة كعنصر أول في زوج مرتب فعندها يكون ج اقترانا من سه الى صه . وبالتحديد أن لكل س في سه زوجا مرتبا وحيدا (س ، ص) في ج .

فاذا جعلنا ص تناظر س نحصل على اقتران من سه الى صه

يتضح الآن ان العبارة (١ – ١٩) التالية يمكن اتخاذها تعريفا للاقتران ، لكن هذا النحو من معالجة الاقترانات سنغض النظر عنه في اصفحات القادمة

(١ – ١٩) تعريف آخر للاقتران :

الاقتران من سه الى صه هو مجموعة فرعية ج من سه × صه حيث يكون لكل س في سه زوج مرتب واحد (س ، ص) في ج فيه س عنصر أول

وفي الصفحات التالية حيثما تقول ان ق اقتران يكون المفروض ان المجال والمدى اعداد حقيقية . واذا عبرنا عن الاقتران بمعادلة ولم يعرف سه صراحة نعتبرانه مجموعة الاعداد الحقيقية التي يكون فيهاللمعادلة معنى . وتسمى مجموعة الاعداد في مثل هذه الحالة **بمجال الاقتران الضمني** . واذا كان س في المجال نقول ان الاقتران معرف عند س أو أن ق (س) موجود . واذا كانت ت فترة في المجال نقول ان ق معرف في هذه الفترة ت والعبارة ق غير معرف عند س تعني ان س ليست في مجال ق .

ويعرف الرسم البياني للاقتران ق بانه مجموعة كل النقط . (س ، ق (س)) في المستوى الاحداثي حيث يكون س في مجال الاقتران .

والرسوم البيانية كبيرة الفائدة في بيان سلوك الاقتران ق (س) أي ما يطرأ عليه ، مع تغير س . ويعرف بيان الاقتران ق ايضا بانه مجموعة كل النقاط ن (س ، ص) حيث ص = ق (س) . فبيان الاقتران ق هو ايضا بيان المعادلة ص = ق (س) ،واذا كانت ن (س ، ص) على منحنى ق تكون ص قيمة ق (س) في هذا الاقتران . وليلاحظ انه مادام هنالك قيمة وحيدة ق (س) لاي س في المجال فهنالك نقطة واحدة فقط على بيانه احداثيها السيني هو س .

مثـال ٣ : ارسم بيان الاقتران ق حيث ق (س) = ٢ س – ١

الحـــل : البيان المطلوب هو مجموعة النقاط (س ، ٢ س – ١) ولذا فهو يطابق ذلك المخطط الذي في المثال ٤ من البند ٢ (انظر الشكل (١ – ١١) ،لاحظ ايضا انه هو نفسه بيان المعادلة ص = ٢ س – ١ .

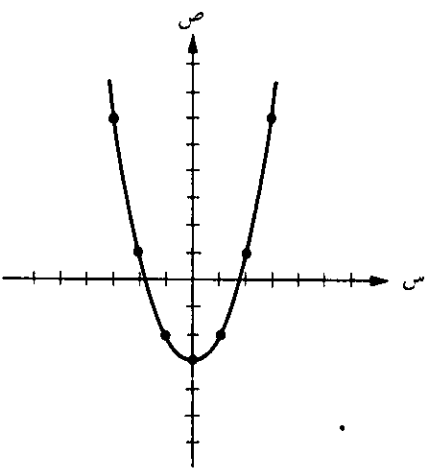
مثـال ٤ : الجدول التالي يعطي احداثيي نقط (س ، ق (س)) على خط بياني

س	− ٣	− ٢	− ١	٠	١	٢	٣	٤
ق (س)	٦	١	− ٢	− ٣	− ٢	١	٦	١٣

فاذا رسمنا هذه النقاط نجد انها تكون منحنى على النحو المبين بالشكل (١ − ٢٣) وهنا يكون مقطعا المنحنى من محور س حلي المعادلة

ق (س) = ٠

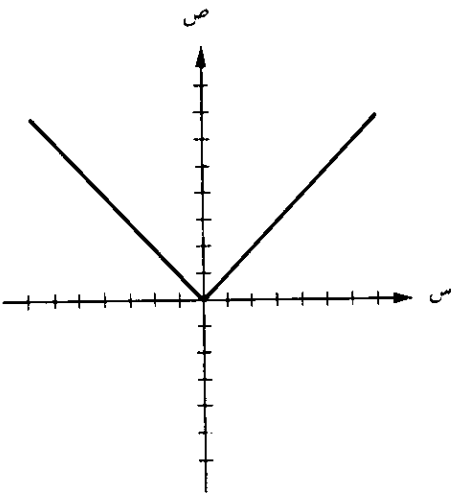
أي س^{٢} − ٣ = ٠ ولذا يسمى العددان ± $\sqrt{٣}$ صفري الاقتران ق .



الشكل ١ — ٢٣

مثـال ٥ : أرسم بيان ق حيث ق (س) = | س |

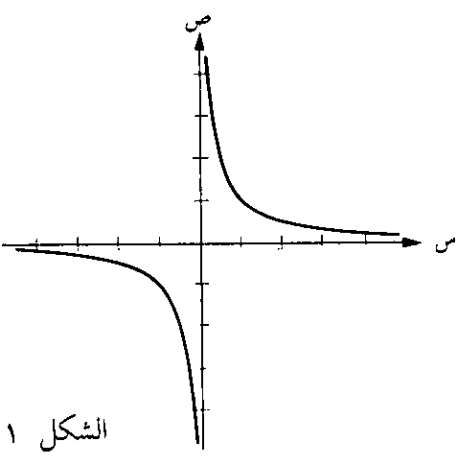
الحـــل : اذا كان ﻫ > ٠ كان ق (ﻫ) = ﻫ . فالنقطة (ﻫ ، ﻫ) على بيان الاقتران . وكذلك كل نقطة من النوع (− ﻫ ، ﻫ) ، حيث ﻫ < ٠ ، تقع على الخط . لماذا ؟ فالخط البياني المطلوب هو كما في الشكل (١ − ٢٤) .



الشكل ١ — ٢٤

مثـال ٦ : خطط بيان ق حيث ق (س) = ١ / س

مجال ق هو كل الاعداد الحقيقية عدا الصفر. واذا كان س موجبا كان ق (س) موجبا ، فلا يقع الخط البياني في الربع الرابع . وكذلك لا يقع في الربع الثاني لانه اذا كان س < ٠ يكون ق (س) < ٠ . واذا كان س قريبا من الصفر كان ١ / س كبيرا رقميا فاذا كبر س موجباً ينقص ١ / س ويقارب الصفر . وبالمثل اذا جعلنا س يتخذ قيما سالبة كبيرة رقميا فان ١ / س يقارب الصفر . فبملاحظة هذه الامور نحصل على المخطط المبين بالشكل (١ — ٢٥) .



الشكل ١ — ٢٥

مثـال ٧ : ارسم الاقتران الثابت

الحـــل : اذا كان ق (س) = ث حيث ث ∈ ح يكون بيان ق هو نفسه بيان المعادلة ص = ث فهو اذن مستقيم افقي مقطعه الصادي ث

مثـال ٨ : اذا كان س أي عدد حقيقي كان هنالك عددان صحيحان متتاليان ن ، ن + ١ حيث ن ≤ س < ن + ١ . فليكن ق اقترانا من ح الى ح معرفا كما يلي :

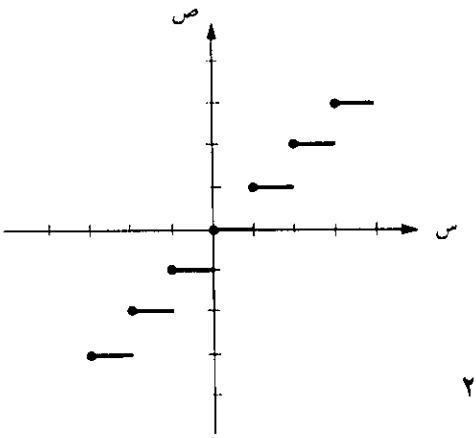
اذا كان س ∈ ح وكان ن ≤ س < ن + ١ ، كان ق (س) = س .

ارسم بيان الاقتران ق .

الحـــل : هذه قائمة بالاحداثيات السينية والصادية لنقاط على الخط البياني :

قيم س	ق (س)
٢ − ≤ س < ١ −	٢ −
١ − ≤ س < ١	١ −
٠ ≤ س < ١	٠
١ ≤ س < ٢	١
٢ ≤ س < ٣	٢

وبما ان ق يكون اشبه باقتران ثابت عندما يكون س بين قيمتين صحيحتين فان البيان يكون بين هذين الحدين افقيا . والشكل (١ - ٢٦) يظهر بعض المخطط المطلوب .



الشكل ١ — ٢٦

ويستعمل الرمز [س] للدلالة على أكبر عدد صحيح ≤ س . فمثلا [٦ , ١] = ١، [√٥] = ٢ ، [π] = ٣ ، [− ٣,٥] = − ٤ . فاذا استعملنا هذا الرمز نعبر عن الاقتران المبين في المثال ٨ بالعبارة ق (س) = [س] . ونشير الى هذا الاقتران باسم اقتران اكبر عدد صحيح .

تمارين :

١ . اذا كان ق (س) = س^{٣} + ٤ س − ٣ فأوجد ما يلي :

أ) ق (١)　　ب) ق (− ١)

جـ) ق (٠)　　د) ق (√٢)

٢ . حل الاسئلة المتقدمة اذا كان ق (س) = ٢ س^{٤} − ٣ س^{٢} + ٥

٣ . اذا كان ق (س) = ٣ س^{٢} − س + ٢ واذا كان أ ، هـ ∈ ح فأوجد ما يلي .

أ) ق (أ)

ب) ق (− أ)

جـ) − ق (أ)

د) ق (أ + هـ)

هـ) ق (أ) + ق (هـ)

و) ق $\frac{\text{(أ + هـ) − ق (أ)}}{\text{هـ}}$ ، هـ ≠ ٠

٤ . حل اسئلة التمرين ٣ اذا كان ق (س) = ١ / (س^{٢} + ١)

٥ . اذا كان ف (س) = ١ / (س^{٢} + ٤) فأوجد ما يلي :

أ) ف (١ / أ)　ب) ١ / ف (أ)　جـ) ف (أ^{٢})

د) [ف (أ)]^{٢} / هـ) ف √أ　و) √ف (أ)

٦ . حل تمرين ٥ اذا كان ف (س) = ١ / س

٧ . اذا كان ق (س) = √س + ٥ فما العدد الذي صورته ٤ ؟ على فرض ان أ > ، فما العدد الذي صورته أ ؟ ما مدى ق ؟

٨ . حل التمرين ٧ اذا كان ق (س) = $س^{٣}$ + ١

في كل من التمارين ٩ - ١٢ بين أي اقتران ق هو اقتران واحد لواحد

٩ . ق (س) = ٣س - ٨

١٠ . ق (س) = ٣ - $٧س^{٢}$

١١ . ق (س) = $٢س^{٢}$ + ٣س - ٤

١٢ . ق (س) = | س |

يعتبر الاقتران ق زوجيا اذا كان ق (أ) = ق (- أ) لكل أ في المجال

ويعتبر فرديا اذا كان ق (أ) = - ق (- أ) لكل أ . في كل من التمارين ١٣ - ١٨ ميز الاقترانات الزوجية من الفردية من الاقترانات التي لا هي زوجية ولا فردية .

١٣ . ق (س) = $س^{٣}$ - ٩س

١٤ . ق (س) = ١ - $٤س^{٢}$

١٥ . ق (س) = $٢س^{٤}$ - $٣س^{٢}$ - ١

١٦ . ق (س) = ٣

١٧ . ق (س) = $٤س^{٤}$ - ٢س + ٦

١٨ . ق (س) = $(س + ١)^{٢}$

في التمارين ١٩ - ٤٠ خطط الرسم البياني وبين مجال الاقتران ومداه

١٩ . ق (س) = ٤س + ٣

٢٠ . ق (س) = ٤س - ٣

٢١ . ق (س) = - ٣

٢٢ . ق (س) = ٣

٢٣ . ق (س) = ٤ - $س^{٢}$

٢٤ . ق (س) = - (٤ + $س^{٢}$)

٢٥ . ق (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

٢٦ . ق (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤}$

٢٧ . ق (س) = ١ / (س - ٤)

٢٨ . ق (س) = ١ / (٤ - س)

٢٩ . ق (س) = $١ / (س - ٤)^{٢}$

٣٠ . ق (س) = - $١ / (س - ٤)^{٢}$

٣١ . ق (س) = | س − ٤ |

٣٢ . ق (س) = | س | − ٤

٣٣ . ق (س) = س / | س |

٣٤ . ق (س) = س + | س |

٣٥ . ق (س) = $\sqrt{٤ - س}$

٣٦ . ق (س) = ٢ − $\sqrt{س}$

٣٧ . ق (س) = { −١ اذا كان س < ٠ ؛ ١ اذا كان س ≥ ٠ }

٣٨ . ق (س) = { ١ اذا كان س عدداً صحيحا . ؛ ٠ اذا لم يكن س صحيحا . }

٣٩ . ق (س) = { −٥ لكل س < −٥ ؛ س لكل −٥ ≤ س < ٥ ؛ ٥ لكل س ٥ }

٤٠ . ق (س) = { − س لكل س < ٠ ؛ ٢ لكل ٠ ≤ س < ١ ؛ $س^{٢}$ لكل س ≥ ١ }

٥ — تركيب الاقترانات :

كثيرا ما نجابه التفاضل والتكامل وتطبيقاتهما معرفة بدلالة حاصل الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة لعبارات مختلفة . وذلك مثل د (س) = $س^{٢}$ + ٥ س + ١ فهنا يمكن ان نعتبر ان د (س) هو حاصل جمع اقترانين أبسط هما ق ، ف نعرفهما كما يلي :

ق (س) = $س^{٢}$ ، ف (س) = ٥س + ١

فنعتبر ان الاقتران د هو مجموع الاقترانين ق ، ف . وعلى العموم اذا كان ق ، ف أي اقترانين وكان م تقاطع مجاليهما فان مجموع ق ، ف هو اقتران آخر د تعريفه :

د (س) = ق (س) + ف (س) ، س ∈ م

ويحسن ان نعبر عن د على النحو ق + ف . ولان ق ، ف اقترانان لا عددان فان

الاشارة + بينهما لا تعني جمع اعداد حقيقية ، انها انما تعني أن صورة س تحت الاقتران ق + ف هي ق (س) + ف (س) ، أي أن

(ق + ف) س = ق (س) + ف (س) ، لكل س ∈ م

وبالمثل يعرف ق − ف على النحو:

(ق − ف) س = ق (س) − ف (س) ، لكل س ∈ م

وبالمثل يعرف حاصل الضرب ق ف على النحو:

(ق ف) (س) = ق (س) . ف (س) ، س ∈ م

وخارج القسمة ق / ف على النحو:

(ق / ف) (س) = ق (س) / ف (س) ، س ∈ م ، ف (س) ≠ صفرا

مثال ١ : اذا كان ق (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ، ف (س) = ٣ س + ١ فأوجد حاصل الجمع والطرح والضرب للاقترانين ق ، ف وخارج قسمة ق على ف .

الحل : مجال ق هو الفترة المغلقة [− ٢ ، ٢] ومجال ف هو ح فينتج ان تقاطع المجالين هو [− ٢ ، ٢] . فالاقترانات المطلوبة هي :

(ق + ف) (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ + (٣س + ١) ، − ٢ ≤ س ≤ ٢

(ق − ف) (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ − (٣س + ١) ، − ٢ ≤ س ≤ ٢

(ق − ف) (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ (٣س + ١) ، − ٢ ≤ س ≤ ٢

(ق / ف) (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ / (٣ س + ١) ، − ٢ ≤ س ≤ ٢ ، س ≠ $-\frac{١}{٣}$

اذا كان ف اقتراناً ثابتاً حيث ف (س) = ث لكل س ، وكان ق اقترانا ما كان ث ق يمثل حاصل ضرب ق ، ف أي (ث ق) (س) لكل س في مجال ق . فمثلا اذا كان ق هو الاقتران المبين بالمثال ١ يكون .

(ث ق) (س) = ث $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ، − ٢ ≤ س ≤ ٢

(١ − ٢٠) ويكون الاقتران ق حدوديا (أو كثير الحدود polynomial اذا كان

ق (س) = $أ_{ن}$ $س^{ن}$ + $أ_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ + ... + $أ_{١}$ س + $أ_{٠}$ لكل س

حيث تكون المعاملات $أ_{ر}$ اعدادا والاسس اعداداً صحيحة غير سالبة . ويسمى الطرف الايسر في (١ − ٢٠) حدودية سينية (ذات معاملات

حقيقية) ويسمى كل من مقوماتها $أ_ر$ $س^{ر}$ حدا . وكثيرا ما نقول الحدودية ق (س) للدلالة على عبارة من هذا النوع . واذا كان $أ_ن \neq$ صفرا يسمى $أ_ن$ المعامل الاول او المقدم (leading coefficient) في ق (س) ونقول ان ق (أو ق (س)) من الدرجة ن . واذا كانت درجة الحدودية صفرا يكون ق (س) = جـ حيث جـ $\neq$ صفرا أي أن ق اقتران ثابت . واذا كان المعامل $أ_هـ$ صفرا نسقط $أ_هـ$ $س^{هـ}$ ونختصر العبارة (١ – ٢٠) . واذا كانت كل المعاملات اصفارا تسقط كلها وتبقى الحدودية صفرية نشير اليها برمز الصفر ولا نعطيها درجة . واذا كانت ق (س) حدودية من الدرجة ١ يكون ق (س) = $أ$ س + ب حيث $أ \neq$ صفرا ، ومن البند ٣ نستنتج ان رسمها البياني خط مستقيم ولذا نسميها بالاقتران الخطي (linear) . وكل حدودية من الدرجة ٢ يمكن ان تكتب على النحو :

ق (س) = $أ$ $س^{٢}$ + ب س + جـ

حيث $أ \neq$ ٠ وفي هذه الحالة نقول أن ق اقتران تربيعي (quadratic) ويسمى بيانه ، أي بيان المعادلة ص = $أ$ $س^{٢}$ + ب س + جـ بالقطع المكافيء (parabola) ، وشكله كالمبين بالشكلين ١ – ١٢ ، ١ – ٢٣ . واعلى (أو ادنى) نقطة على القطع المكافيء تسمى الرأس (vertex) . وسندرس القطع المكافيء بالتفصيل في الفصل السابع . والاقتران النسبي هو خارج قسمة اقترانين حدوديين . فيكون د نسبيا اذا كان

$$د (س) = \frac{ق (س)}{ف (س)} \text{ لكل س في المجال}$$

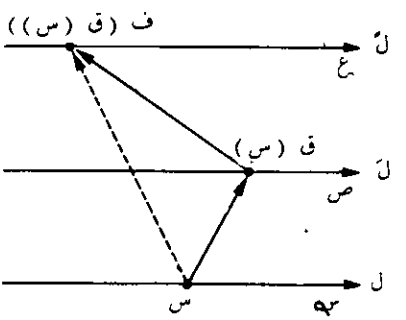
حيث ق (س) ، ف (س) حدوديان . ومجال الاقتران الحدودي هو كل ح اما مجال الاقتران النسبي فهو جميع الاعداد الحقيقية عدا اصفار المقام . ويعتبر الاقتران ق **جبريا** اذا امكن التعبير عنه على صيغة الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة أو الجذور لاقترانين حدوديين .

فمثلا اذا كان

$$ق (س) = ٥ س^{٤} - ٢ \sqrt[٣]{س} + \frac{س (س^{٢} + ٥)}{\sqrt{س^{٣} + \sqrt{س}}}$$

كان ق اقترانا جبريا . فاذا لم يكن الاقتران جبريا يسمى غير جبري أو متساميا (transcendental) والاقترانات المثلثية والاسية واللوغرتمية التي سندرسها فيما بعد في هذا الكتاب اقترانات غير جبرية .

وسننهي هذا البند بوصف طريقة اخرى لاشتراك اقترانين ق ، ف في ايجاد اقتران آخر . فلتكن سه و صه و ع مجموعات فرعية من ج وليكن ق اقترانا من سه الى صه و ف اقترانا من صه الى ع ، فيكون بالتمثيل بالاسهم س $\xrightarrow{ق}$ ص $\xrightarrow{ف}$ ع ، أي أن ق تأخذ سه الى صه . و ف تأخذ صه الى ع . ولنعتبر اقتراناً من س الى ع معرفاً بالطريقة العادية . فلكل س ∈ سه هنالك ق (س) في صه . ولان مجال ف هو ص يمكن ان نجد صورة ق (س) تحت تأثير ف . وهذا طبعاً عنصر من عناصر ع قد نكتبه بالصيغة ف (ق (س)) . فاذا ربطنا ف (ق (س)) بالمتغير س نحصل على اقتران من سه الى ع ونسمي هذا الاقتران بالاقتران المركب من ف ، ق . وهو مبين بالشكل ١ – ٢٧ حيث جعلنا س التي هي مجال ق على المستقيم الاحداثي ل ، وجعلنا ص التي هي مجال ف ومدى ق على المستقيم الاحداثي لَ ، وجعلنا مجال ف على المستقيم الاحداثي لّ . وتشير الاسهم الى الترابط القائم من سه الى ع . وقد تستعمل اشارة مثل ه لتدل على هذا الاقتران الجديد فنكتب ف ه ق . والتعريف التالي يلخص ما سبق :



الشكل ١ — ٢٧

(١ – ٢١) **تعريف الاقتران المركب** : اذا كان ق اقترانا من سه الى صه وكان ف اقترانا من صه الى ع كان الاقتران المركب ف ٥ ق اقترانا من سه الى ع يعرف كما يلي :

(ف ٥ ق) (س) = ف (ق (س)) لكل س في د سه

وفي الواقع لا يتحتم ان يكون مجال ف هوكل صه بل يكفي أن يحتوي على مدى ق وفي بعض الحالات قد تحصر س في مجموعة فرعية من سه هي ف (س) في مجال ف ، كما يتبين في المثال التالي :

مثـال ٢ : اذا كان ق (س) = س – ٢ ، ف (س) = ٥ س +√س فأوجد (ف ٥ ق) (س)

الحـل : من تعريف ف ق ، ق ، ف ينتج ان

(ف ٥ ق) (س) = ف (ق (س)) = ف (س – ٢)

= ٥ (س – ٢) + √س – ٢

= ٥س – ١٠ + √س – ٢

ومجال ق من س هو مجموعة كل الاعداد الحقيقية . ولكن النتيجة الاخيرة تدل على أن (ق ٥ ف) (س) لا يكون حقيقيا الا اذا كان س> ٢ فعند النظر في الاقتران ف ٥ ق يلزم أن نحصر س في الفترة [٢ ، ∞]

وفي (١ – ٢١) اذا كان سه صه = ع يمكن ان نجد ق (ف (س)) وفي هذه الحالة نجد اولا صورة س تحت تأثير ف ثم نخضع ف (س) للاقتران ق وهذا يفضي الى اقتران مركب من ع الى سه نعبر عنه بالرمز ق ٥ ف . فمن التعريف يكون (ق ٥ ف) (س) = ق (ف (س)) لكل س د ع

مثـال ٣ : اذا كان ق (س) = س^{٢} – ١ ، ف (س) = ٣س + ٥ فأوجد (ق ٥ ف) (س) ، (ف ٥ ق) (س) .

الحـل : من تعريف ق ٥ ف ، ف ، ق ينتج ما يلي :

(ق ٥ ف) (س) = ق (ف (س)) = ق (٣س + ٥)

= (٣س + ٥)^{٢} – ١

= ٩س^{٢} + ٣٠س + ٢٤

وبالمثل

$$(ف \circ ق)(س) = ف(ق(س)) = ف(س^2 - 1)$$
$$= 3(س^2 - 1) + 5$$
$$= 3س^2 + 2$$

من المثال ٣ نلاحظ ان ق (ف (س)) ، ف (ق (س)) ليسا متساويين
أي أن ق ∘ ف ≠ ف ∘ ق

تمارين :

في التمارين ١ – ٦ أوجد المجموع والفرق وحاصل الضرب للاقترانين ق ، ف واوجد ايضا خارج قسمة ق على ف .

١ . ق (س) = $3س^2$ ، ف (س) = $1 / (2س - 3)$

٢ . ق (س) = $\sqrt{س + 3}$ ، ف (س) = $\sqrt{س + 3}$

٣ . ق (س) = $س + 1 / س$ ، ف (س) = $س - 1 / س$

٤ . ق (س) = $س^3 + 3س$ ، ف (س) = $3س^2 + 1$

٥ . ق (س) = $2س^3 - س + 5$ ، ف (س) = $س^2 + س + 2$

٦ . ق (س) = $7س^4 + س^2 - 1$ ، ف (س) = $7س^4 - س^3 + 4س$

في التمارين ٧ – ١٤ أوجد (ق ∘ ف) (س) و (ف ∘ ق) (س)

٧ . ق (س) = $2س^2 + 5$ ، ف (س) = $4 - 7س$

٨ . ق (س) = $1 / (3س + 1)$ ، ف (س) = $2 / س^2$

٩ . ق (س) = $س^3$ ، ف (س) = $س + 1$

١٠ . ق (س) = $س^2 + 4$ ، ف (س) = $7س^2 + 1$

١١ . ق (س) = $3س^2 + 2$ ، ف (س) = $1 / (3س^2 + 2)$

١٢ . ق (س) = 7 ، ف (س) = 4

١٣ . ق (س) = $\sqrt{2س + 1}$ ، ف (س) = $س^2 + 1$

١٤ . ق (س) = $6س - 12$ ، ف (س) = $\frac{1}{6} س + 2$

١٥ . اذا كان ق (س) ، ف (س) حدوديتين من الدرجة ٥ في س ، فهل يتحتم أن يكون ق (س) + ف (س) من الدرجة ٥ ؟ أوضح جوابك .

١٦ . أثبت أن درجة حاصل ضرب حدوديتين ليست أي منهما صفرا تساوي مجموع درجتيهما .

١٧ . اثبت (١) أن حاصل ضرب اقترانين فرديين هو اقتران زوجي (٢) أن حاصل ضرب اقترانين زوجيين هو اقتران زوجي (٣) أن حاصل ضرب اقتران زوجي باقتران فردي هو اقتران فردي (راجع التمرين ١٣ في البند ٤ من اجل تعريف الاقترانين الزوجي والفردي)

١٨ . أي فروع التمرين ١٧ يبقى صحيحا اذا وضعنا كلمة « مجموع » بدل « حاصل ضرب »

١٩ . أثبت أن كل اقتران مجاله ج يمكن أن يكتب بصيغة مجموع اقترانين احدهما زوجي والآخر فردي .

٢٠ . أثبت ان هنالك عددا لا نهاية له من الاقترانات النسبية ق ، ف حيث ق + ف = ق ف .

٦ — الاقترانات المتعاكسة : (Inverse Functions)

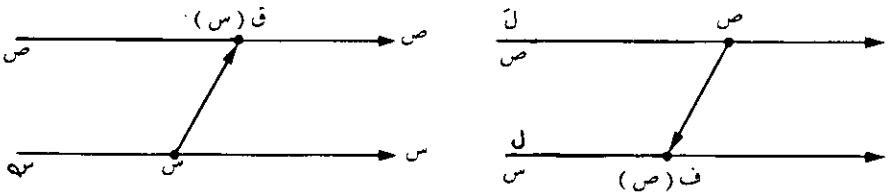
في المثال ٣ من البند السابق درسنا اقترانين ق ، ف حيث ق (ف (س)) ≠ ف (ق (س)) ولكن يحدث احيانا ان يتساوى هذان . ومن الحالات الهامة الحالة التي يتطابق فيها ق (ف (س)) و ف (ق (س)) ويساوي كل منهما س . وواضح أن ق ، ف يجب ان يكونا من نوع خاص حتى يحققا هذه الشروط وفيما يلي نبين كيف يتم ذلك .

ليكن ق اقتران واحد لواحد مجاله مه ومداه صه ،وهذا يقتضي أن يكون هنالك صيغة واحدة بها يكتب ص على النحو ق (س) حيث س ∈ مه . وعندها يمكن أن نعرف الاقتران ف من صه الى مه على النحو ف (ق (س)) = س لكل س ∈ مه وهذا يقتضي عكس الترابط الذي ينطوي عليه ق فاذا مثلنا ق هندسيا باسهم كما في الشكل ١ – ٢٨ أ يمثل ف عكس اتجاه الاسهم.ومن هذا نستنتج ان ف اقتران واحد لواحد مجاله صه ومداه مه ، حيث اذا كان ص ∈ صه يكون ف (ص) ∈ مه كما في الشكل ١ – ٢٨ ب . وايضا اذا كان ق(س) = ص يكون س = ف (ص) أي ان

ق (ف (ص)) = ص لكل ص ∈ صه . ولأن تغيير الاحرف ليس ذا بال يمكن ان نكتب :

ق (ف س)) = س لكل س ∈ صه

فالاقترانان ق ، ف متعاكسان ، وكل منهما عكس الآخر (أو معكوسه) ، حسب التعريف التالي للتعاكس .



الشكل ١ — ٢٨

(١ – ٢٢) **تعريف الاقترانات المتعاكسة** : اذا كان ق اقتران واحد لواحد مجاله سه ومداه صه فان الاقتران ف الذي مجاله صه ومداه سه يكون معاكسا للاقتران ق اذا كان :

ق (ف (س)) = س لكل س في صه

ف (ق (س)) = س لكل س في سه

واذا كان للاقتران ف اقتران معاكس ق ، فحسب (١ – ٢٢) يكن (ف ∘ ق) (س) = س أي ان ف ∘ ق هو الاقتران المحايد في سه . وبالمثل بما ان (ق ∘ ف) (س) = س لكل س ∈ صه فان ق ∘ ف هو الاقتران المحايد في صه . لهذا نستعمل احيانا الرمز ق$^{-1}$ للدلالة على معكوس الاقتران ق . فبدلالة هذا الرمز نكتب

(١ – ٢٣) ق$^{-1}$ (ق (س)) = س لكل س في سه

ق (ق$^{-1}$ (س)) = س لكل س في صه

ولا ينبغي ان يعتبر الرمز – ١ في ١ – ٢٢ اسا فهو انما يشير الى ان احد الاقترانين هو معكوس الاخر .

وقد نستعمل طريقة جبرية لايجاد الاقتران المعاكس لاقتران واحد لواحد وليكن ق الذي مجاله سه ومداه صه .

فاذا اخذنا أي س في سه فان صورته ص في صه يمكن أن نحصل عليها من المعادلة ص = ق (س) . فلكي نحصل على معكوسه ق$^{-1}$ نعكس هذه الخطوات وذلك أن نجد س بدلالة ص من المعادلة . فبما ان س ، ص تربطهما معادلة ص = ق (س) فاذا كان بالامكان ايجاد س بدلالة ص أمكن ان نجد الاقتران ق$^{-1}$. والمثال التالي يوضح ذلك .

مثـال ١ : اذا كان ق (س) = ٣ س − ٥ لكل س فأوجد الاقتران الذي يعاكس ق

الحـــل : لا يصعب ان نبين أن ق اقتران واحد لواحد ، مجاله ومداه ح ، واذن فان له نظيرا ف فاذا جعلنا ص = ٣ س − ٥ ثم وجدنا قيمة س منها ينتج س = (ص + ٥) / ٣ وهذا يعطينا اقترانا ف من صه الى سه بعكس الترابط الذي يتضمن ق . ولان بالامكان تغيير الحرف الذي يدل على المتغير المستقل يمكن ان نضع ص بدل س فنكتب ف (س) = (س + ٥) / ٣ .

ولكي نبين ان ف هو فعلا معكوس الاقتران ق ينبغي ان نبين ان الشرطين المبينين في (١ − ٢٢) يتحققان . فهنا :

$$\text{ق (ف (س)) } = \text{ق} \left(\frac{\text{س} + ٥}{٣} \right) = ٣ \left(\frac{\text{س} + ٥}{٣} \right) - ٥$$

$$= \text{س}$$

$$\text{وبالمثل ف (ق (س)) } = \text{ف (٣س − ٥) } = \frac{\text{٣س} - ٥ + ٥}{٣} = \text{س}$$

واذن فان (١ − ٢٤) يعرف الاقتران ف الذي يعاكس ق وباستعمال (١ − ٢٣) نكتب ق$^{-1}$ (س) = (س + ٥) / ٣

مثـال ٢ : أوجد معكوس الاقتران ق اذا كان المجال سه هو مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة وكان ق (س) = س^{٢} − ٣ لكل س ∈ سه

الحـــل : لقد حدد المجال بحيث يكون ق واحداً لواحد. ومدى ق هو { ص : ص ≥ − ٣ } . فاذا اخذنا المعادلة ص = س^{٢} − ٣ ، ثم وجدنا منها قيمة س نجد س = ± $\sqrt{ص + ٣}$. ولان س لا يكون سالبا نسقط س = − $\sqrt{ص + ٣}$ فنجد كما في المثال السابق :

ف (ص) = $\sqrt{ص + ٣}$

أو ما يكافئه : ف (س) = $\sqrt{س + ٣}$

ونرى الان كيف يتحقق شرطا (١ − ٢٢) :

ق (ف (س) = ق ($\sqrt{س + ٣}$) = ($\sqrt{س + ٣}$)^{٢} − ٣

= (س + ٣) − ٣ = س

وكذلك ف (ق (س)) = ف (س^{٢} − ٣) = $\sqrt{(س^{٢} - ٣) + ٣}$ = س

وهذا يثبت أن ف$^{-١}$ (س) = $\sqrt{س + ٣}$ لكل س ≥ − ٣

وهنالك علاقة طريفة بين بيان الاقتران ق وبيان معكوسه ق$^{-١}$ ، فللاحظ أولا أن ق يلقى صورة أ عند ب اذا وفقط اذا كان ق$^{-١}$ يلقي ب عند أ ، أي ان ب = ق (أ) تعني أن أ = ق$^{-١}$ (ب) .

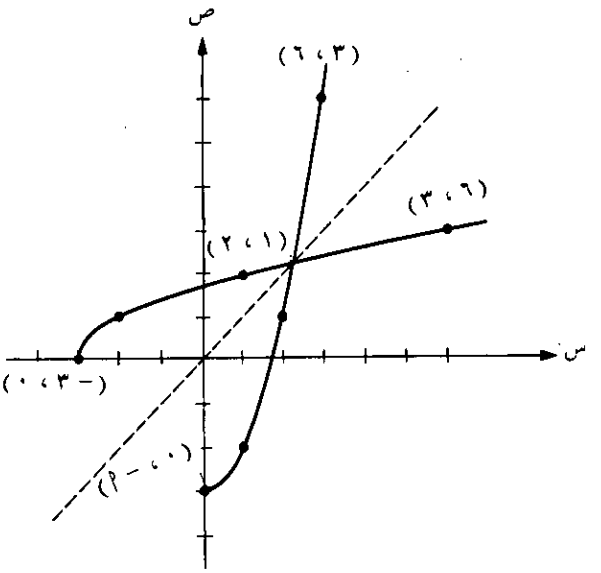
وهاتان المعادلتان تعنيان ان النقطة (أ ، ب) تقع على بيان الاقتران ق اذا وفقط اذا وقعت النقطة (ب ، أ) على بيان الاقتران ق$^{-١}$

مثلا في المثال ٢ رأينا ان ق ، ق$^{-١}$ اللذين عرفناهما على النحو ق (س) = س^{٢} − ٣ ، ق$^{-١}$ (س) = $\sqrt{س + ٣}$ اقترانان متعاكسان شريطة ان تحصر قيم س في نطاق معين. فمن النقاط التي تقع على ق النقاط (٠ ، − ٣) ، (١ ، − ٢) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٦) . والنقاط التي تناظرها على ق$^{-١}$ هي :

(− ٣ ، ٠) ، (− ٢ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٦ ، ٣) .

وفي الشكل ١ − ٢٩ تخطيط للاقترانين ق ، ق$^{-١}$ بالنسبة الى المستوى الاحداثي. فاذا طويت الورقة على الخط الذي معادلته ص = س (وهو الخط المنقط في الشكل) فان رسمي ق ، ق$^{-١}$ يتطابقان ، ويقال لمثل هذين الرسمين أن كلا منهما هو انعكاس للاخر في الخط الذي معادلته ص = س .

وهذه صفة مميزة للاقترانات ق التي لها معكوسات ق$^{-١}$.



الشكل ١ — ٢٩

تمارين :

في التمارين ١ – ٤ أثبت ان ق ، ف متعاكسان .

١ . ق (س) = ٩س + ٢ ، ف (س) = (١/٩) س – ٢ / ٩

٢ . ق (س) = $س^{٣}$ + ١ ، ف (س) = $\sqrt[٣]{س - ١}$

٣ . ق (س) = $\sqrt{٢س + ١}$ ، س ≥ – ١/٢ ، ف (س) = (١/٢) $س^{٢}$ – ١/٢ ، س ≤ ٠

٤ . ق (س) = ١ / (س – ١) ، س > ١ ، ف (س) = (١ + س) / س ، س > ٠

في التمارين ٥ – ١٤ أوجد معكوس الاقتران ق .

٥ . ق (س) = ٨ + ١١ س

٦ . ق (س) = ١ / (٨ + ١١س) ، س > – ٨ / ١١

٧ . ق (س) = ٦ – $س^{٢}$ ، ٠ ≤ س ≤ $\sqrt{٦}$

٨ . ق (س) = ٢ $س^{٣}$ – ٥

٩ . ق (س) = $\sqrt{٧س - ٢}$ ، س ≥ ٢/٧

١٠ . ق (س) = $\sqrt{١ - ٤س^{٢}}$ ، ٠ ≤ س < ١/٢

١١ . ق (س) = ٧ − ٣س^{٣}

١٢ . ق (س) = س

١٣ . ق (س) = (س^{٢} + ٨)^{٥}

١٤ . ق (س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ + ٢

١٥ . ضع على مستوى احداثي واحد مخططا لكل من ق ، ف المبينين بالتمرين ١ . ضع ايضا مخططا للاقترانين المبينين بالتمرين ٣ .

١٦ . اذا كان ق اقتران واحد لواحد مجاله سه ومداه صه فأثبت أن ق$^{-١}$ اقتران واحد لواحد مجاله صه ومداه سه

١٧ . أثبت ان الاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب يكون له اقتران معاكس اذا كان أ ≠ . هل للاقتران الثابت اقتران معاكس ؟ هل للاقتران المحايد معاكس ؟

١٨ . أثبت أن اقتران ق لا يمكن ان يكون له أكثر من معاكس واحد .

١٩ . اثبت ان ليس لكل اقتران حدودي اقتران معاكس .

٢٠ . اذا كان الاقتران ق له معاكس ق$^{-١}$ فأثبت ان ق$^{-١}$ له معاكس وان (ق$^{-١}$)$^{-١}$ = ق .

تمارين مراجعـــة :

شفهيـــة :

عرف ما يلي أو أشرحه .

١ . العدد أ أكبر من العدد ب

٢ . الخط الاحداثي

٣ . الفترة (المفتوحة ، المغلقة ، نصف المفتوحة ، اللامتناهية)

٤ . القيمة المطلقة للعدد الحقيقي

٥ . زوج مرتب

٦ . مجموعة حاصل الضرب

٧ . نظام احداثيات متعامدة في المستوى

٨ . الاحداثيان السيني والصادي للنقطة

٩ . قانون المسافة

١٠ . قانون المنتصف

١١ . الرسم البياني لمعادلة في س ، ص

١٢ . المعادلة المعيارية للدائرة

١٣ . ميل المستقيم

١٤ . انحراف المستقيم

١٥ . معادلة النقطة والميل

١٦ . معادلة الميل والمقطع

١٧ . الاقتران

١٨ . مجال الاقتران ومداه

١٩ . اقتران واحد لواحد

٢٠ . الاقتران الثابت

٢١ . بيان الاقتران

٢٢ . مجموع اقترانين ، الفرق بينهما ، وحاصل ضربهما ، وخارج قسمة احدهما على الآخر

٢٣ . اقتران حدودي

٢٤ . اقتران نسبي

٢٥ . اقتران مركب من اقترانين

٢٦ . معكوس الاقتران

كتابية :

حل المتباينات من ١ الى ٨ وضع تخطيطا لمجموعة الحل

١ . $٤ - ٣س > ٧ + ٢س$

٢ . $\frac{٧}{٢} < \frac{١ - ٤س}{٥} < \frac{٣}{٢}$

٣ . $(٢س - ٧) \geq ٠,٠١$

٤ . $|٦س - ٧| > ١$

٥ . $٢س^{٢} < ٥س - ٣$

٦ . $\frac{٢س^{٢} - ٣س - ٢٠}{س + ٣} < ٠$

٧ . $\frac{١}{٣س - ١} > \frac{٢}{س + ٥}$

٨ . $س^{٢} + ٤ \leq ٤س$

٩ . اعطينا النقاط أ (٢ ، ١) ، ب (− ١ ، ٤) ، جـ (− ٢ ، − ٣)
والمطلوب ان تجيب عما يلي :

(١) ما احداثيات منتصف أ ب

(٢) أثبت أن أ ، ب ، جـ رؤوس مثلث قائم ، أوجد مساحة هذا المثلث .

(٣) ما ميل المستقيم الواصل من ب الى جـ

ارسم بيانات للمعادلات في التمارين ١٠ – ١٣

١٠ . ٣س – ٥ص = ١٠

١١ . $س^{٢}$ + ص = ٤

١٢ . س = $ص^{٣}$

١٣ . | س + ص | = ١

ضع تخطيطا للمجموعة د في كل من التمارين ١٤ – ١٧

١٤ . د = { (س ، ص) : س > . }

١٥ . د = { (س ، ص) : ص > س }

١٦ . د = { س ، ص) : $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ < ١ }

١٧ . د = { س ، ص) : (س – ٤) > ١ ، (ص + ٣) > ٢ }

في التمارين ١٨ – ٢٠ أوجد معادلة الدائرة التي تحقق الشروط المعطاة

١٨ . مركزها جـ (٤ ، – ٧) وتمر بنقطة الاصل

٢٠ . تمر بالنقط أ (– ٢ ، ٣) ، ب (٤ ، ٣) ، جـ (– ٢ ، – ١)

٢١ . أوجد المركز ونصف القطر للدائرة التي معادلتها

$س^{٢}$ + $ص^{٢}$ – ١٠س + ١٤ – ٧ = ٠

اعطينا النقاط أ (– ٤ ، ٢) ، ب (٣ ، ٦) ، جـ (٢ ، – ٥) والمطلوب ايجاد المعادلات المبينة بالتمارين ٢٢ – ٢٦

٢٢ . معادلة المستقيم الذي يمر في ب ويوازي المستقيم أ جـ

٢٣ . معادلة المستقيم الذي يمر في ب ويعامد المستقيم أ جـ

٢٤ . المستقيم الذي يمر في جـ ومنتصف القطعة الخطية أ ب

٢٥ . المستقيم الذي يمر في أ ويوازي محور ص

٢٦ . المستقيم الذي يمر في جـ ويعامد المستقيم ٣س – ١٠ص + ٧ = ٠

في التمارين ٢٧ – ٣٠ أوجد مجال الاقتران ق على اعتبار أن ق (س) معرف كما يلي :

٢٧ . ق (س) = (٢ س – ٣) /($س^{٢}$ – س)

٢٨ . ق (س) = س $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$

٢٩ . ق (س) = ١ / $\sqrt{(س - ٧)(س - ٥)}$

٣٠ . ق (س) = ١ / $\sqrt{س}$ (س − ٢)

٣١ . اذا كان ق (س) − ١ / $\sqrt{س}$ + ١ فأوجد ما يلي

أ) ق (١)

ب) ق (٢)

جـ) ق (س)

د) ق ($\sqrt{٢}$ − ١)

هـ) ق (٠)

و) − ق (س)

ز) ق ($س^{٢}$)

ح) [ق (س)]^{٢}

في كل من التمارين ٣٢ − ٣٥ ضع الرسم البياني للاقتران ق

٣٢ . ق (س) = ١ − ٤ $س^{٢}$

٣٣ . ق (س) = ١٠٠

٣٤ . ق (س) = − ١ / (س + ١)

٣٥ . ق (س) = | س + ٥ |

في التمارين ٣٦ − ٣٨ أوجد (ق + ف) (س) ، (ق − ف) (س) (ق ف) (س) ، (ق/ف) (س) ، (ق ٥ف) (س) ، ف ٥ق) (س)

٣٦ . ق (س) = $س^{٢}$ + ٣س + ١ ، ف (س) = ٢س − ١

٣٧ . ق (س) = $س^{٢}$ + ٤ ، ف (س) = $\sqrt{٢س + ٥}$

٣٨ . ق (س) = ٥س + ٢ ، ف (س) = ١ / $س^{٢}$

في التمرينين ٣٩ ، ٤٠ أوجد معكوس الاقتران ق

٣٩ . ق (س) = ٥ − ٧ س

٤٠ . ق (س) = ٤ $س^{٢}$ + ٣ ، س ≤ ٠

الفصـــل الثانـــي

نهايات الاقترانات

ان مفهوم نهاية الاقتران هو أحد الافكار الاساسية التي تميز التفاضل والتكامل عن غيرهما من مواضيع الرياضيات كالجبر والهندسة . وننبه الطالب الى أن مفهوم النهاية لا يتم استيعابه بسهولة ، فالطالب المبتدىء عليه أن يدرس التعريف عدة مرات وينظر اليه من جوانب مختلفة حتى يصبح المعني واضحا لديه ، فالتعريف بالرغم من تعقيده لا يلبث أن يؤدي الى احساس بديهي بمعنى النهاية . لهذا جعلنا في البند الاول تعريفا غير دقيق ، واتينا بالتعريف الرياضي الدقيق لنهاية الاقتران في البند الثاني ثم جئنا في باقي الفصل بنظريات هامة ومفاهيم اخرى تتعلق بالنهايات .

١ — مقدمـــة

في التفاضل والتكامل وتطبيقاته كثيرا ما نهتم بقيم ق (س) للاقتران ق عندما تكون س قريبة جدا من عدد ما ﻫ ، ولكن لا تساويه . والواقع انه في حالات عديدة قد يكون العدد ﻫ خارج مجال الاقتران ق أي ان ق غير معرفة عند ﻫ . فهنا يمكننا طرح السؤال التالي .

عندما تقترب س من ﻫ (ولكن س ≠ ﻫ) هل تقترب ق (س) من قيمة ما ولتكن ل ؟ فاذا كان الجواب بالايجاب نقول ان نهاية الاقتران ق (س) عندما تقترب س من ﻫ تساوي ل ونكتب :

$$(٢-١)\quad \text{نهـــا}_{س \leftarrow م} \; ق\,(س) = ل$$

وتوضيحا للصيغة (٢ – ١) لنفترض أن أحد الفيزيائيين يرغب في قياس كمية ما عندما يكون ضغط الهواء صفرا . وبما انه لا يمكن تفريغ الهواء تماما في المختبر فمن الطبيعي أن نلجأ الى قياس الكمية عند ضغط صغير فأصغر ، فاذا وجد انه عندما يقترب الضغط من الصفر تقترب قياسات الكمية من عدد ما ، ل ، عندها يمكن اعتبار ل هي المقياس للكمية في الفراغ . واذا وجد ايضا ان هذه الكمية هي ق (س) تحت ضغط س باوند / انش^{٢} ، حيث ق هو اقتران ما يمكن التعبير عن نتيجة هذه التجربة كما يلي :

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \; ق\,(س) = ل .$$

لاحظ ان ضغط الهواء في هذه التجربة لا يمكن ان يساوي صفرا . وتجدر الاشارة الى ان اجهزة التفريغ الحديثة يمكنها تفريغ الهواء الى ضغط قريب جدا من الصفر . ويتبع الكيمائي خطوات مماثلة لقياس معامل التوصيل المكافيء لمحلول كلوريد الصوديوم في العمود الكهربائي . ويعرف معامل التوصيل ك للمحلول بالصيغة التالية :

$$ك = \frac{ب}{ر}$$

حيث ر هي مقاومة العمود ، ب مقدار ثابت يعتمد على العمود المستعمل . ومعامل التوصيل هو مقياس لقدرة المحلول على توصيل التيار الكهربائي . فعندما تكون المقاومة ر عالية يكون معامل التوصيل ك صغيرا . أما اذا كانت المقاومة ر صغيرة فيكون ك عالياً . واذا كان تركيز المحلول جـ من الجزيئات لكل لتر فان التوصيل المكافيء ى$_{جـ}$ يعرف كالآتي :

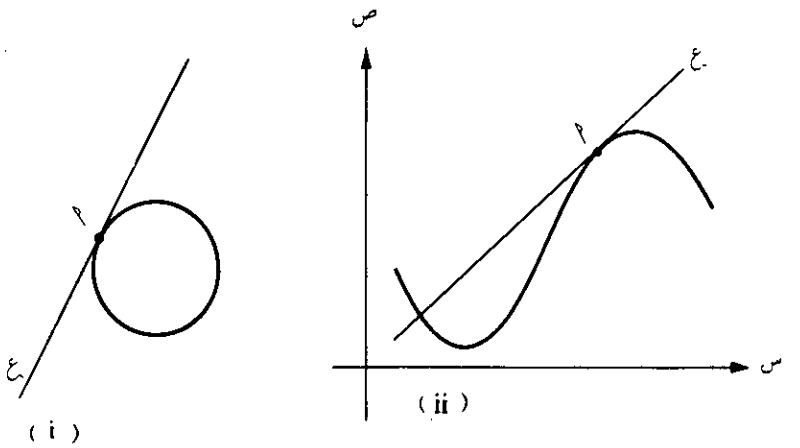
$$ى_{جـ} = \frac{ك}{جـ} = \frac{ب}{ر\,جـ}$$

ولمعرفة حركة الايونات في المحلول نحتاج الى دراسة قيم ىجـ في محلول مخفف جدا . وهذا يدفع الكيماوي الى فحص نهاية التوصيل ى للمحلول كما تعرفها المعادلة

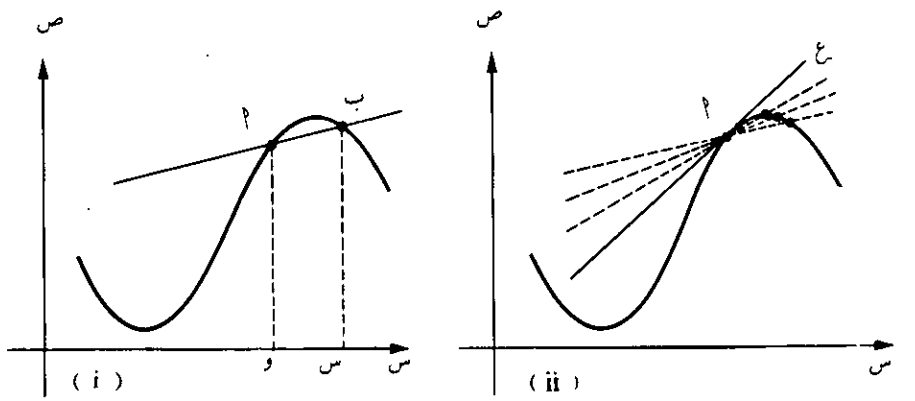
$$ى = \text{نهـــا}_{جـ \to .} \quad ىجـ$$

وتدعى هذه القيمة بالتوصيل المكافيء عند نهائية التخفيف . لاحظ هنا ايضا أنه لا يمكن أن نجعل جـ = ٠ اذ في هذه الحالة لا يتبقى شيء من كلوريد الصوديوم ويكون ىجـ غير موجود .

والآن سندرس مثالا رياضيا للصيغة (٢ – ١) . ففي الهندسة يعرّف المماس للدائرة عند نقطة أ بالخط المستقيم الذي يقطع الدائرة عند نقطة واحدة فقط كما هو واضح في شكل (٢ – ١) (i)
ان هذا التعريف لا يمكن تطبيقه على أي بيان اذ ان المماس قد يقطع البيان في عدة نقط كما يوضح الشكل (٢ – ١) (ii) . ولكي نعرّف المماس ع لبيان معادلة ما عند النقطة أ يكفي تحديد الميل م للمستقيم ع نظرا لأن هذا يكفي لتحديد المستقيم . ولايجاد م نختار اي نقطة اخرى ب تقع على البيان ونعتبر الخط المستقيم الواصل بين النقطتين أ ، ب كما هو موضح في الشكل (٢ – ٢) ، (i) . ثم ندرس ما يطرأ على هذا الخط كلما اقتربت النقطة ب من النقطة أ كما يتبين من الخطوط المنقطة في شكل (٢ – ٢) (ii) فيظهر انه اذا اقتربت ب من أ يقترب الميل م للخط المستقيم الواصل بين أ ، ب من ميل المستقيم ع . لهذا اذا اقتربت م من قيمة معينة عندما تقترب ب من أ تعتبر هذه القيمة هي الميل م للمستقيم ع . فاذا كانت و هي الاحداثي السيني للنقطة أ وكانت س هي الاحداثي السني للنقطة ب (انظر شكل (٢ – ٢) ، (i) فيي كثير من البيانات يمكن ان نستبدل بالعبارة « ب تقترب من أ » العبارة « س تقترب من و » ونحصل على الآتي :



الشكل ١ — ٢



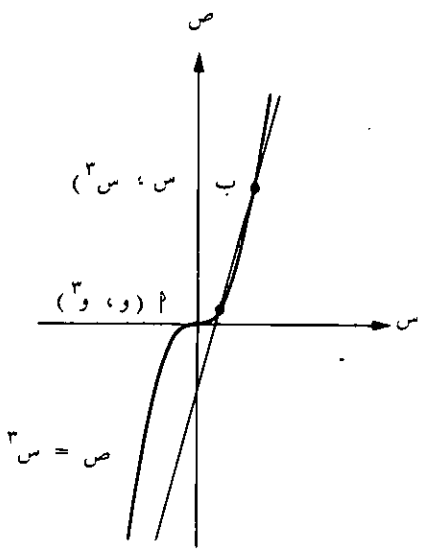
شكل ٢ — ٢

$$(٢-٢)\quad م_{أ} = \text{نهـــا}_{س \to و} \frac{ص_{ب} - ص_{أ}}{س_{ب} - س_{أ}}$$

ومن المهم ان نلاحظ ايضا ان س $\neq$ ٠ و خلال عملية تعيين النهاية .
اذ لو جعلنا س = وتصير أ = ب وعندها يكون $م_{أ ب}$ غير موجود

مثـال ١ : استعمل المعادلة (٢ – ٢) لايجاد ميل المماس للمنحني ص = س^{٣} عند النقطة م (و ، و^{٣}) ثم أوجد معادلة المماس لهذا المنحنى عند النقطة (٢ ، ٨) .

الحـــل : اذا كانت ب (س ، س^{٣}) اي نقطة تقع على المنحنى (انظر الشكل (٢ – ٣) فاستعمال (١ – ١٠) ينتج ان



الشكل ٢ — ٣

$$م_{م\,ب} = \frac{س^{٣} - و^{٣}}{س - و} = س^{٢} + وس + و^{٢}$$

ومن تطبيق (٢ – ٢) نحصل على ما يلي :

$$م = \underset{س \to و}{نهـــا}\ م_{م\,ب} = \underset{س \to و}{نهـــا}\ (س^{٢} + وس + و^{٢})$$

فعندما تقترب س من و تقترب $م_{م\,ب}$ من و^{٢} + و^{٢} + و^{٢} ونتيجة لذلك تكون م = ٣ و^{٢} . وحيث أن ميل المماس للمنحنى عند النقطة (٢ ، ٨) هي حالة

خاصة تكون فيها و = ٢ فيكون م = ٣ و^{٢} = ٣ (٢)^{٢} = ١٢ . وباستعمال (١ – ١٦) نرى ان معادلة المماس هي

ص – ٨ = ١٢ (س – ٢) أو

١٢ س – ص – ١٦ = ٠

لنعد الآن الى الصيغة العامة (٢ – ١) التي هي الاساس للامثلة السابقة وعليها يستند الكثير من التطبيقات الاخرى التي سنذكرها فيما بعد . انه يبدو ان الشرح المرافق لها تعوزه الدقة وذلك لغموض العبارات « يقترب من » و « قريب جدا » وامثالها . وهذا ما سنعالجه في البند القادم عندما نضع التعريف (٢ – ٦) . أما في الوقت الحاضر فسنواصل استعمال الطريقة البديهية،وكتوضيح سهل للصيغة (٢ – ١) افرض أن ق (س) = $\frac{١}{٢}$ (٣ س – ١) واعتبر و = ٤ . ومع أن العدد ٤ ينتمي الى مجال الاقتران ق سندرس اولا التغير في الاقتران ق (س) عندما تقترب س من ٤ (ولكن س ≠ ٤) . والقيم التالية تعطينا بعض المؤشرات لهذا التغير

ق (٣,٩) = ٥,٣٥	ق (٤,١) = ٥,٦٥
ق (٣,٩٩) = ٥,٤٨٥	ق (٤,٠١) = ٥,٥١٥
ق (٣,٩٩٩) = ٥,٤٩٨٥	ق (٤,٠٠١) = ٥,٥٥١٥
ق (٣,٩٩٩٩) = ٥,٤٩٩٨٥	ق (٤,٠٠٠١) = ٥,٥٠٠١٥
ق (٣,٩٩٩٩٩) = ٥,٤٩٩٩٨٥	ق (٤,٠٠٠٠١) = ٥,٥٠٠٠١٥

ويظهر انه عندما تقترب س من ٤ فان ق (س) تقترب من ٥,٥ ويمكننا تحقيق هذا ايضا بملاحظة انه عندما تقترب س من ٤ فان ٣ س – ١ تقترب من ١١ وبذلك تقترب $\frac{١}{٢}$ (٣ س – ١) من ٥,٥ ونتيجة لهذا نكتب

$$\text{نهـــا}_{س \to ٤} \quad \frac{١}{٢} (٣ س - ١) = ٥,٥$$

نلاحظ في هذا المثال انه يمكن أن نجعل س = ٤ ، فينتج أن ق (س) = ٥,٥ وسنرى في المثال التالي انه لا يمكن ايجاد ل في (٢ – ١) بالتعويض عن س بالقيمة أ في ق (س) .

مثـال ٢ :

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٩} \; ق\,(س) \text{ حيث } ق\,(س) = \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣}$$

الحـــل : ان الرقم ٩ لا ينتمي الى مجال الاقتران ق حيث ان ق (٩) = ٠ ÷ ٥ وهي قيمة لا معنى لها .ولكن بكتابة

$$ق\,(س) = \frac{(\sqrt{س} - ٣)\,(\sqrt{س} + ٣)}{\sqrt{س} - ٣}$$

نرى انه لجميع قيم س ما عدا س = ٩ يصبح الاقتران ق كالآتي:
ق (س) = $\sqrt{س}$ + ٣ .

فعندما تقترب س من ٩ (ولكن س ≠ ٩) فان ق (س) تقترب من $\sqrt{٩}$ + ٣ أي ٦ . وباستعمال الصيغة (٢ – ١) نحصل على :

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٩} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} = ٦$$

وهذا المثال يبين أن الاختصارات الجبرية احيانا تسهل ايجاد النهايات . وفي حالات اخرى نحتاج الى قدر من المهارة لنستطيع ان نعرف هل نهاية الاقتران موجودة أم لا ، وخاصة عند ايجاد نهايات الاقترانات المثلثية والاسية واللوغرتمية . وعلى سبيل المثال فاننا سنبرهن فيما بعد على أن

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{حـا س}}{س} = ١$$

ولا يمكن برهان هذه الحقيقة جبريا كما في المثال السابق .

مثـال ٣ :

$$\text{اذا كانت } ق(س) = \frac{٢س^{٢} - ٥س + ٢}{٥س^{٢} - ٧س - ٦}$$

فأوجد $\lim_{س \to ٢}$ ق (س) .

الحـــل : لاحظ ان العدد ٢ لا ينتمي الى مجال الاقتران ق لان ق (٢) = ٠ ÷ ٠

وبتحليل البسط والمقام ينتج ان

$$ق(س) = \frac{(س - ٢)(٢س - ١)}{(س - ٢)(٥س + ٣)}$$

وعندما تكون س ≠ ٢ فان قيم ق (س) هي

$$\frac{٢س - ١}{٥س + ٣}$$

وعندما تقترب س من ٢ (ولكن س ≠ ٢) فان ق (س) تقترب من

$\frac{٤ - ١}{١٠ + ٣}$ أو $\frac{٣}{١٣}$ وهكذا نحصل على الاتي :

$$\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^{٢} - ٥س + ٢}{٥س^{٢} - ٧س - ٦} = \frac{٣}{١٣}$$

والاقتران ق (س) المعرف بالصيغة ق (س) = $\frac{١}{س}$ يوضح انه عندما تقترب س من الصفر لا توجد للاقتران اية نهاية . فكلما اخذت س قيما قريبة من الصفر (ولكن س ≠ ٠) فان ق (س) تأخذ بالزيادة دون حد كما هو واضح في الشكل (١ - ٢٥) .

تمارين :

في التمارين من ١ – ١٠ اتبع الطريقة البديهية وأوجد الجواب بالتخمين.

١ . $\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - 4}{س - 2}$

٢ . $\lim_{س \to 25} \frac{\sqrt{س} - 5}{س - 25}$

٣ . $\lim_{س \to 1} \frac{س^2 - س}{2س^2 + 5س - 7}$

٤ . $\lim_{س \to -3} \frac{س^2 + 2س - 3}{س^2 + 7س + 12}$

٥ . $\lim_{س \to -2} \frac{س^2 + 8}{س + 2}$

٦ . $\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - 8}{س^2 - 4}$

٧ . $\lim_{هـ \to 0} \frac{(س + هـ)^2 - س^2}{هـ}$

٨ . $\lim_{هـ \to 0} \frac{(س + هـ)^3 - س^3}{هـ}$

٩ . $\lim_{س \to ١٠} \frac{١}{س - ١٠}$

١٠ . $\lim_{س \to -\frac{٣}{٢}} \frac{٢س + ٣}{٤س^{٢} + ١٢س + ٩}$

١١ . اذا اعطينا منحنى ق حيث ان ق (س) = $س^{٢}$ فأجب عما يلي :

(أ) أوجد الميل $م_{جـ}$ للخط المستقيم الواصل بين جـ ، ء للنقاط التالية :

(١) جـ (١ ، ١) ، ء (١,١ ، ق (١,١))

(٢) جـ (١ ، ١) ، ء ((١,٠١ ، ق (١,٠١))

(٣) جـ (١ ، ١) ، ء ((١,٠٠١ ، ق (١,٠٠١))

(ب) أوجد ميل المماس عند النقطة جـ (١ ، ١)

(جـ) ارسم المنحنى والمماس عند النقطة جـ

في التمرينين ١٣ ، ١٤ استعمل (٢ - ٢) لايجاد ميل المماس عند النقطة الواقعة على المنحنى واحداثيها السيني أ . وكذلك أوجد معادلة المماس عند النقطة ن المعطاة . ارسم المنحنى والمماس عند هذه النقطة

١٣ . ص = $\frac{١}{س}$ ، ن (٢ ، $\frac{١}{٢}$)

١٤ . ص = $\sqrt{س}$ ، ن (٤ ، ٢)

١٥ . اعط تعليلا هندسيا يبين أن المنحنى ص = | س | ليس له مماس عند النقطة (٠ ، ٠)

١٦ . بين هندسيا ان بيان اقتران اكبر عدد صحيح (انظر المثال ٨ في بند ٤ في الفصل الاول) ليس له مماس عند النقطة (٠ ، ٠)

١٧ . اشارة الى المثال (١) ارسم منحنى الاقتران ص = $س^{٣}$ وكذلك المماس عند النقطة ذات الاحداثي السيني - ٣ ، - ٢ ، - ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ . ما هي الميزة الخاصة للماس عند (٠ ، ٠)

عند اي نقط على المنحنى يكون ميل المماس يساوي ٦ .

١٨ . ارسم مخططا ذا ثلاثة مماسات افقية ومماس عمودي واحد .

٢ — تعريف النهاية :

لنعد الى المثال الذي درسناه في البند الاول وهو

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \quad \frac{١}{٢} (٣س - ١) = ٥,٥$$

ولندرس بتفصيل اكثر التغير في ق (س) = $\frac{١}{٢}$ (٣س − ١) عندما تقترب س من ٤ . فباستعمال قيم الاقتران الواردة في البند الاول نحصل على ما يلي :

٥,٣٥ < ق (س) <	٥,٦٥ عندما تكون	٣,٩ < س < ٤,١
٥,٤٨٥ < ق (س) <	٥,٥١٥ عندما تكون	٣,٩٩ < س < ٤,٠١
٥,٤٩٨٥ < ق (س) <	٥,٥٠١٥ عندما تكون	٣,٩٩٩ < س < ٤,٠٠١
٥,٤٩٩٨٥ < ق (س) <	٥,٥٠٠١٥ عندما تكون	٣,٩٩٩٩ < س < ٤,٠٠٠١
٥,٤٩٩٩٨٥ < ق (س) <	٥,٥٠٠٠١٥ عندما تكون	٣,٩٩٩٩٩ < س < ٤,٠٠٠٠١

ان كلاً من العبارات اعلاه يمكن كتابتها كالاتي :

(٢ − ٣) ٥,٥ − ٤ < ق (س) < ٥,٥ + ٤ عندما تكون

٤ − δ < س < ٤ + δ حيث ان الحرفين الاغريقيين ε (epsilon) δ (delta) قد استعملا ليدلا على عددين موجبين صغيرين . وعلى سبيل المثال يمكن استنتاج العبارة الاولى من (٢ − ٣) بوضع ε = ٠,٠١٥ . δ = ٠,٠١ وهكذا . واذا طرحنا ٥,٥ . ٤ من المتباينتين في (٢ − ٣) على الترتيب نحصل على ما يلي :

(٢ − ٤) ε < ق (س) − ٥,٥ < ε عندما تكون − δ < س − ٤ < δ .

وباستعمال (١ − ٢) فان المتباينتين الاخيرتين يمكن تمثيلها بواسطة القيم المطلقة كما يلي :

(٢ − ٥) | ق (س) − ٥,٥ | < ε عندما تكون ٠ < | س − ٤ | < δ حيث ان الشرط ٠ < | س − ٤ | قد وضع للحيلولة دون ان تأخذ س القيمة ٤ . وبعبارة

اخرى ١ ن ق (س) لا تختلف عن ٥ , ٥ الا بقيمة اقل من ε زيادة أو نقصانا عندما لا تختلف س عن ٤ الا بقيمة اقل من δ زيادة أو نقصانا (ولكن س ≠ ٤) . ان عبارة من هذا النوع ستلعب دورا هاما في تعريف النهاية، وللحصول على (٢ – ٥) بدأنا بتعيين قيم س القريبة من ٢ وبعدها فحصنا التغير في ق (س) . والآن نعكس هذه الخطوات فنبدأ بفترة تشمل ق (س) وبالتحديد نجعل الخطوة الاولى هي افتراض ان ε تعني أي عدد موجب (صغير) ونتحقق ثانيا اذا كان بالامكان ان نجعل ق (س) لا تختلف عن ٥ , ٥ الا بقيمة اقل من ε زيادة أو نقصانا وذلك باختيار س قريبة من ٤، ي اننا نتحقق من صحة المتباينة

| ق (س) – ٥,٥ | < ε اذا كانت | س – ٤ | كمية صغيرة بما فيه الكفاية ،ويمكن ذكر هذه الطريقة كالاتي :

ليكن ε اي عدد حقيقي موجب فالمطلوب هو ايجاد عدد حقيقي موجب δ بحيث يكون

| ق (س) – ٥ , ٥ | < ε عندما تكون . < | س – ٤ | < δ

ومن الآن فصاعدا سنعتبر ε و δ تمثلان عددين حقيقيين وان لم نذكر ذلك صراحة وحيث تذكر ε > ٠ أو δ > ٠ فذلك يعني انهما يمثلان عددين حقيقيين موجبين . ويمكننا الآن تكوين التعريف التالي :

(٢ – ٦) تعريف النهاية

اذا كان الاقتران ق معرفا في فترة مفتوحة تشمل ٢ ، لا يشترط ان يكون هذا الاقتران معرفا عند ٢ ذاتها ، فنقول ان ق (س) له نهاية عندما تقترب س من ٢ ، ونكتب

نهـــا ق (س) = ل

س ← ٢

اذا كان لكل ε > ٠ يوجد δ > ٠ تحققان

| ق (س) – ل | < ε عندما تكون ٠ < | س – ٢ | < δ

وحيث انه يمكن اختيار ε أي عدد صغير فيمكن التعبير عن المتباينات في

(٢ – ٦) بالعبارة « ان تجعل ق (س) على اي قرب نشاء من ل باختيار س قريبة بما فيه الكفاية من ا » . والمتباينة

| ق (س) – ل | < ε تعادل القول بأن

ق (س) تنتمي الى الفترة المفتوحة (ل – ε ، ل + ε) . والمتباينة . < |س – ا| < δ تعني ان س تنتمي الى (ا – δ ، ا + δ) ولكن س ≠ ا . ومن هنا يمكن كتابة الجزء الاخير من (٢ – ٦) بدلالة الفترات المفتوحة .

(٢ – ٧) $\lim_{س \to ا}$ ق (س) = ل

تعني انه لكل ε > ٠ يوجد δ > ٠ بحيث ان ق (س) تنتمي الى الفترة (ل – ε ، ل + ε) عندما تنتمي س الى (ا – δ ، ا + δ) ولكن س ≠ ا . وعند استعمال الرمز

$\lim_{س \to ا}$ ق (س) = ل

فسنفترض للايجاز ان جميع الشروط المعطاة في (٢ – ٦) قد تحققت ، ولذا قد لا نذكر دائما ان ق معرفة على فترة مفتوحة تشمل ا ، وقد لا نعين ل دائما بل نكتفي بكتابة

« نهاية ق (س) موجودة » « أو « ان ق (س) لها نهاية عندما تقترب س من ا » والعبارة « أوجد $\lim_{س \to ا}$ ق (س) « تعني » أوجد العدد ل بحيث

$\lim_{س \to ا}$ ق (س) = ل .

واذا لم يكن العدد ل موجودا نكتب

$\lim_{س \to ا}$ ق (س) غير موجودة

واخيرا قد نعبر احيانا عن

$\lim_{س \to ا}$ ق (س) = ل

بالعبارة « نهاية الاقتران ق عند أ هي ل » .

وللحصول على صورة واضحة عن اهمية العددين الموجبين ε ، δ في (٢ – ٦) لننظر في التفسير الهندسي لاقتران مجاله نقاط معينة تقع على خط مستقيم ع ، ومداه نقاط اخرى تقع على خط مستقيم عَ . وكما في الشكل (١ – ٢٢) لكل س تنتمي الى مجال ق نرسم سهما من النقطة التي احداثيها السيني هو س الواقعة على ع الى النقطة ذات الاحداثي السيني ق (س) الواقعة على عَ وهذا يقودنا الى الوصف الهندسي لكل من (٢ – ٦) و (٢ – ٧) كالاتي .

نأخذ أي ε > ٠ ونلاحظ الفترة المفتوحة (ل – ε ، ل + ε) على الخط عَ . فيمكن طبعاً لعناصر في مجال الاقتران ق ان تقع خارج الفترة (ل – ε ، ل + ε) كما في الشكل (٢ – ٤) .

ولكن اذا وجدت فترة مفتوحة (أ + δ ، أ + δ) على ع بحيث انه لكل س ∈ (أ – δ ، أ + δ) ولكن س ≠ أ يكون ق (س) ∈ (ل – ε ، ل + ε)

فإنَّ نهـــا ق (س) = ل
س ← أ

وهذا موضح بالرسم في الشكل (٢ – ٥)

لنكرر الفكرة الهامة جدا وهي

أولا : تعطي الفترة (ل – ε ، ل + ε)

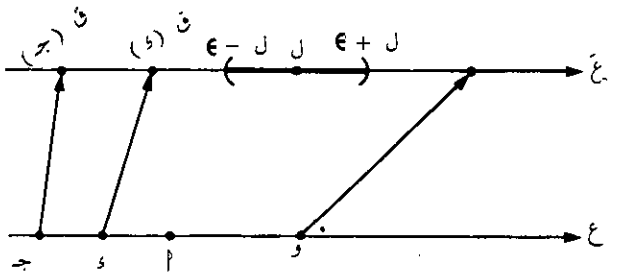
ثانيا . مهما تكن ε صغيرة فهناك فترة مفتوحة (أ – δ ، أ + δ) بحيث انه اذا كان س أي عدد في هذه الفترة الاخيرة (ما عدا س = أ فان ق (س) ∈ (ل – ε ، ل + ε) .

لاحظ ان العدد δ ليس وحيدا فلو استطعنا ايجاد قيمة له تفي بالمطلوب فان اي قيمة اخرى موجبة اصغر منها ستفي ايضا بالغرض .

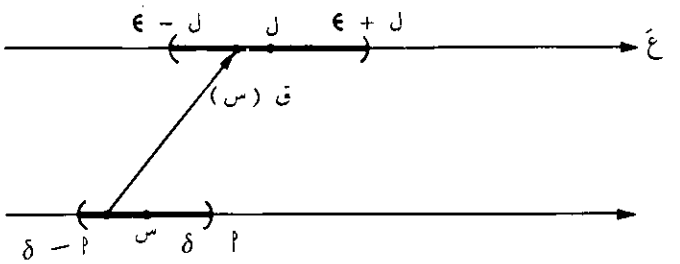
من هذا التفسير الهندسي نستطيع ان نرى بسهولة انه اذا كان للاقتران ق (س) نهاية عندما تقترب س من أ فان هذه النهاية وحيدة . فلنفرض على سبيل المثال أن :

نهـــا ق (س) = ل$_1$ وكذلك نهـــا ق (بس) = ل$_2$
س ← أ س ← أ

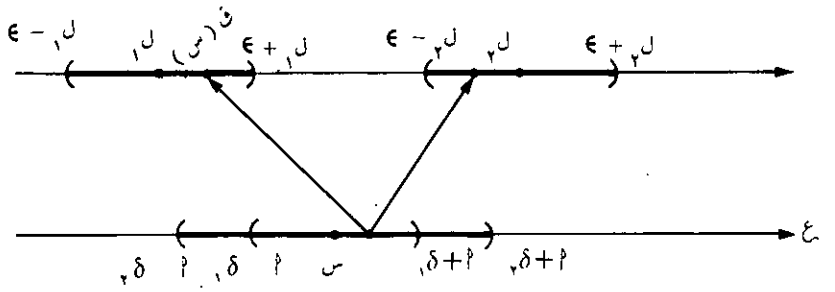
حيث ل$_1$ ≠ ل$_2$ ، فلنفترض ان ل$_1$ < ل$_2$
فباختيار ε < $\frac{1}{2}$ (ل$_2$ − ل$_1$) واعتبار الفترتين (ل$_1$ − ε ، ل$_1$ + ε) ، (ل$_2$ − ε ، ل$_2$ + ε) الواقعتين على الخط عَ (في الشكل ٢ − ٦) فلأن



الشكل ٢ — ٤



الشكل ٢ — ٥



الشكل ٢ — ٦

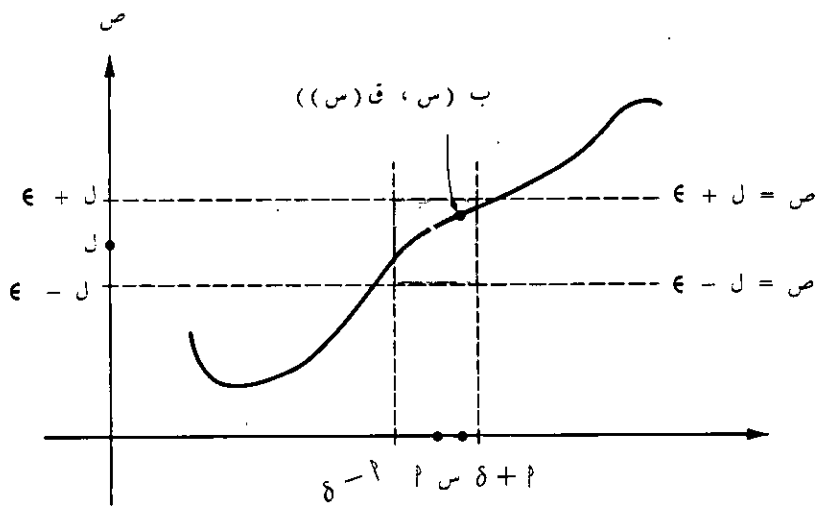
$\epsilon < \frac{1}{2}(ل_2 - ل_1)$ فان هاتين الفترتين منفصلتان . ومن (٢ ٧) نجد ان هناك $\delta > 0$ بحيث انه عندما تنتمي س الى $(أ - \delta ، أ - \delta)$ ولكن $س \neq أ$ فان

$ق(س) \in (ل_1 - \epsilon ، ل_1 + \epsilon)$.

وبالمثل هناك $\epsilon > 0$ بحيث انه عندما تكون س $\in (أ - \delta_2 ، أ + \delta_2)$ ولكن $س \neq أ$ فان ق (س) $\in (ل_2 - \epsilon ، ل_2 + \epsilon)$. والشكل (٢ – ٦) يوضح الحالة التي تكون فيها $\delta_1 > \delta_2$

فاذا افترضنا س تنتمي الى كل من $(أ - \delta_1) ، (أ + \delta_1)$ ، $(أ - \delta_2 ، أ + \delta_2)$ فان ق (س) تنتمي الى $(ل_1 - \epsilon ، ل_1 + \epsilon)$ وكذلك الى $(ل_2 - \epsilon ، ل_2 + \epsilon)$. وهذا يناقض ان الفترتين الاخيرتين منفصلتان . وفي حالة $ل_2 > ل_1$ نكرر نفس الخطوات السابقة لايجاد التناقض . وبهذا يكون فرضنا $ل_1 \neq ل_2$ خطأ ولذلك يكون $ل_1 = ل_2$

وحيث انه يمكن وصف الاقتران هندسيا بواسطة بيان يوضع بالنسبة الى نظام احداثيات متعامدة فان من الشائق ان نفسر التعريف (٢ – ٦) على هذا النحو . فالشكل (٢ – ٧) يوضح بيان الاقتران ق حيث انه لأي س تنتمي



الشكل ٢ — ٧

الى مجال ق تكون ق (س) هي الاحداثي الصادي للنقطة الواقعة على البيان ذات الاحداثي السيني س .

اعتبر المستقيمين الافقيين ص = ل ± ε حيث ε هو اي عدد موجب كما هو موضح في الشكل . فاذا استطعنا ايجاد فترة مفتوحة (أ − δ ، أ + δ) بحيث انه لجميع قيم س الواقعة في هذه الفترة ، ربما عدا س = أ ، فالنقطة ب (س ، ق (س)) تقع بين الخطين الافقيين اي انها تقع في المنطقة المستطيلة المظللة في الشكل ٢ − ٧ فان

$$\text{نهـــا}_{س \to أ} \; ق\,(س) = ل .$$

والنقطة ذات الاحداثي السيني أ لم تظهر على البيان وذلك لان س = أ قد اهملت في (٢ − ٦) .

وسنعود الآن الى المثال الذي استعملناه في بداية هذا البند ونبرهن باستعمال (٢ − ٦) ان

$$\text{نهـــا}_{س \to ٤} \; \frac{١}{٢}\,(٣س - ١) = \frac{١١}{٢} .$$

في هذه الحالة ق (س) = $\frac{١}{٢}$ (٣ س − ١) وكذلك ل = $\frac{١١}{٢}$

فاذا اردنا تطبيق (٢ − ٦) فلنفرض أن ε هو أي عدد موجب ومن الضروري ايجاد δ بحيث أن

$$\left| \frac{٣س - ١}{٢} - \frac{١١}{٢} \right| < ε \text{ عندما تكون } ٠ < |س - ٤| < δ$$

واحدى الوسائل التي يمكن ايجاد δ بواسطتها هي تفحص المتباينة التي تحوي ε كما يلي :

$$\left| \frac{١}{٢}\,(٣س - ١) - \frac{١١}{٢} \right| < ε$$

$$| \ ٣س - ١ - ١١ \ | < ٢ \epsilon$$
$$| \ ٣س - ١٢ \ | < ٢ \epsilon$$
$$| \ س - ٤ \ | < \frac{٢}{٣} \epsilon \ .$$

والمتباينة الاخيرة فيها الاشارة الى طريقة لتعيين δ . فاذا اخذنا $\delta = \frac{٢}{٣} \epsilon$

فعندما تكون $٠ < | \ س - ٤ | < \delta$ نحصل على $| \ س - ٤ | < \frac{٢}{٣} \epsilon$

وباستعمال المتباينات المتكافئة اعلاه ينتج أن المتباينة الاولى صحيحة ولهذا فان (٢ - ٦) تعطي

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤} \ \frac{١}{٢} (٣س - ١) = \frac{١١}{٢}$$

وفي البند الثاني وفي الملحق الثاني براهين اخرى تستند الى (٢ - ٦) .

وفي المثال التالي اقتران ليس له نهاية .

مثـــال :

$$\text{اذا كانت } ق (س) = \begin{cases} ٠ & \text{اذا كانت س عددا نسبيا} \\ ١ & \text{اذا كانت س عددا غير نسبي} \end{cases}$$

فبرهن على أن

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \ ق (س) \quad \text{غير موجودة لأي عدد صحيح } ٢ .$$

البرهـــان : ان بيان ق يتكون من جميع النقاط الواقعة على الخط المستقيم ص = ١ ما عدا النقاط التي احداثيها السيني عدد نسبي ، وكذلك جميع النقاط الواقعة على محور السينات ما عدا تلك التي يكون احداثيها السيني عددا غير نسبي . فظاهر بداهة ان ليس له نهاية . وسنقدم برهانا على ذلك بطريقة غير مباشرة . فلنفترض ان :

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ} \quad ق\ (س) = ل \quad \text{ولنأخذ} \quad \epsilon = \frac{1}{2}$$

فلا يمكن ان تحتوي الفترة (ل − ϵ ، ل + ϵ) على ٠ ، ١ معا وكل فترة مفتوحة (أ − δ ، أ + δ) تحتوي على اعداد نسبية واخرى غير نسبية ولذلك تأخذ ق القيم ٠، ١ في مثل هذه الفترة وبشكل خاص فانه لأي δ توجد س $\in$ (أ − δ ، أ + δ) بحيث ان ق (س) $\notin$ (ل − ϵ ، ل + ϵ) وهكذا اذا كانت $\epsilon = \frac{1}{2}$ فلا يمكن ايجاد أي δ تحقق الشروط الموجودة في (٢ − ٦) . ويعني هذا ان افتراضنا كان خطأ ولا يمكن ان تكون النهاية موجودة .

تمارين :

برهن على التمارين ١ − ٦ باستعمال التعريف (٢ − ٦) .

١ . $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} (٥ س - ٣) = ٧$

٢ . $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} (٢ س + ١) = -٥$

٣ . $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٥} (\frac{س}{٤} + ٢) = \frac{١٣}{٤}$

٤ . $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٦} (٩ - \frac{س}{٦}) = ٨$

٥ . $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣} ٥ = ٥$

٦ . $\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ} س = أ$

٧ . برهن أن $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{|س|}{س}$

٨ . برهن أن $\lim_{س \to ٤} \frac{١}{س - ٤}$ غير موجودة

٩ . اعط مثالا لاقتران معرف عند أ ونهـا ق (س) موجودة ولكن
س ← أ

نهـا ق (س) ≠ ق (أ) .
س ← أ

١٠ . اذا كانت ق هي اقتران اكبر عدد صحيح وكان أ اي عدد صحيح فبرهن ان
نهـا ق (س) غير موجودة
س ← أ

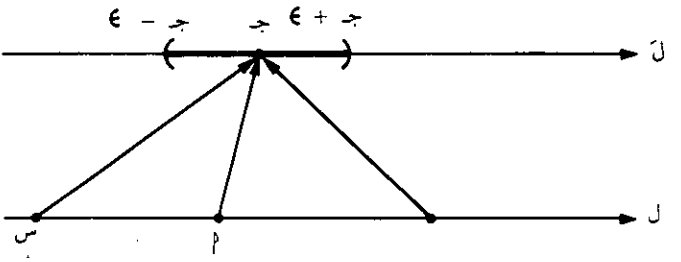
٣ — نظريات على النهايات :

انه لمن المهام الصعبة ان نحل كل مسألة على النهايات بواسطة التعريف (٢ – ٦) . والغرض من هذا البند هو دراسة بعض النظريات التي يمكن استعمالها لتسهيل العملية . ومن الضروري استعمال (٢ – ٦) لبرهنة النظريات.فاذا تم ذلك يمكن ايجاد كثير من النهايات دون استعمال ε أو δ . وفي هذا البند سنرهن على عدة نظريات ونترك براهين اخرى الى الملحق الثاني .

واسهل نهاية ندرسها تتعلق بالاقتران الثابت ق حيث ق (س) = جـ ، جـ عدد حقيقي . فاذا مثلنا ق هندسيا بواسطة خطوط احداثية ل ، لَ فان كل سهم صادر من ل ينتهي عند نفس النقطة على الخط المستقيم لَ وهي النقطة التي تقابل جـ . فلأي ε > ٠ اعتبر الفترة المفتوحة (جـ – ε ، جـ + ε) وكما هو واضح في الشكل ٢ – ٨ فانه مهما كانت قيمة س فان ق (س) تنتمي الى هذه الفترة أي ان لكل ε > ٠ تكون

| ق (س) – جـ | < ε عندما تكون ٠ < | س – أ | < δ .

وباستعمال ٢ – ٦ نجد أن نهـا ق (س) = جـ .
س ← أ



الشكل ٢ — ٨

وهكذا فقد برهنا النظرية التالية

(٢ − ٨) نظرية

اذا كان أ ، جـ عددين صحيحين فان

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow أ} \; جـ = جـ$$

ونعبر عن (٢ − ٨) احيانا بالعبارة التالية

« ان نهاية اي ثابت هي هذا الثابت » . فمثلا

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} \; ٨ = ٨ \text{ ، } \text{نهـا}_{س \leftarrow ٨} \; ٣٠ = ٣ \text{ ، } \text{نهـا}_{س \leftarrow \pi} \; \sqrt{٢٧} = \sqrt{\text{نهـا}_{س \leftarrow \pi} \; ٢٧}$$

حيث π هي النسبة التقريبية ، $\text{نهـا}_{س \leftarrow أ} \; ٠ = ٠$ وهكذا

وتبين النتيجة التالية انه لايجاد نهاية اقتران خطي عندما تقترب س من أ فاننا نعوض عن س بالقيمة أ في ق (س)

(٢ − ٩) نظرية :

اذا كانت أ ، ب ، م اعدادا حقيقية فان

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow أ} \; (م س + ب) = م \; أ + ب$$

البرهـــان : اذا كان م = ٠ فان م س + ب = ب وتتحول النظرية الى نهـــا ب = ب
س ← أ
وقد برهنا هذه النتيجة في (٢ – ٨) .

وفي حالة م ≠ . نأخذ ε > ٠ وحسب (٢ – ٦) فانه من الضروري ايجاد
δ > . بحيث ان :

(٢ – ١٠) | (م س + ب) – م أ + ب) | < ε عندما تكون . < | س – أ | < δ .

وكل المتباينات التالية متكافئة .

| م س + ب) – (م أ + ب) | < ε

| م س – م أ | < ε

| م | | س – أ | < ε

$$| س - أ | < \frac{ε}{| م |}$$

واذا وضعنا ع = $\frac{ε}{| م |}$ فانه عندما تكون ٠ < | س – أ | < δ

فان المتباينة الاخيرة في القائمة تكون صحيحة وهكذا تكون المتباينة الاولى

صحيحة . ولهذا فان (٢ – ١٠) تتحقق باختيار $δ = \frac{ε}{| م |}$

وكحالات خاصة من (٢ – ٩) نحصل على ما يلي :

نهـــا س = أ
س ← أ

نهـــا (٣ س – ٥) = ٣ × ٤ – ٥ = ٧
س ← ٤

نهـــا (١٣ س + ٢ $\sqrt{٢}$) = ١٣ $\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٢}$ = ١٤ $\sqrt{٢}$ وهكذا
س ← $\sqrt{٢}$

وتقول النظرية التالية انه اذا كان للاقتران ق نهاية موجبة عندما تقترب س من أ فان ق (س) تكون موجبة خلال فترة مفتوحة تحتوي على أ ، ربما باستثناء س = أ

(٢ – ١١) نظرية :

اذا كانت $\lim_{س \to أ}$ ق (س) = ل وكانت ل > ٠ فيمكن ايجاد فترة مفتوحة (أ – δ ، أ + δ) بحيث ان ق (س) > ٠ لجميع قيم س ∈ (أ – δ ، أ + δ) ربما باستثناء س = أ .

البرهـــان : اذا اخذنا $\epsilon = \frac{ل}{٢}$ فان الفترة (ل – ε ، ل + ε) تحتوي على اعداد موجبة فقط . وبناء على (٢ – ٧) توجد δ > ٠ بحيث انه عندما س ∈ (أ – δ ، أ + δ) و س ≠ أ فان ق (س) ∈ (ل – ε ، ل + ε) أي ان ق (س) > ٠ في هذه الفترة . وبالمثل اذا كانت

$\lim_{س \to أ}$ ق (س) < ٠

فهنالك فترة مفتوحة ع تحتوي على أ بحيث ان ق (س) < ٠ لكل س ∈ ع ربما باستثناء س = أ .

ويمكن التعبير عن كثير من الاقترانات بصيغة حاصل جمع اقترانات اخرى أو طرحها أو ضربها أو قسمتها . فمثلا لنفرض ان ن هو حاصل جمع الاقترانين ق و ك أى أن ن (س) = ق (س) + ك (س) لجميع قيم س الموجودة في مجال ن .

فاذا كانت

$\lim_{س \to أ}$ ق (س) = ل وكانت $\lim_{س \to أ}$ ك (س) = ى

فانه من الطبيعي استنتاج ان

$\lim_{س \to أ}$ ن (س) = ل + ى

وان صحة هذا القول وما يماثله في الضرب والقسمة لهي من نتائج النظرية التالية ، اما البراهين فهي في الملحق الثاني .

(٢-١٢) نظريـــة

اذا كانت نهـــا ق (س) = ل وكانت نهـــا م (س) = ى فان
س ← أ س ← أ

(١) نهـــا [ق (س) + م (س)] ل + ى
س ← أ

(٢) نهـــا ق (س) . م (س) = ل ى
س ← أ

(٣) نهـــا ق (س) / ك (س) = ل / ى اذا كانت ى
س ← أ

ويمكن اختصار النظرية السابقة كالاتي :

(٢-١٣) (١) نهـــا [ق (س) + م (س)] =
س ← أ

نهـــا ق (س) + نهـــا م (س)
س ← أ س ← أ

(٢) نهـــا ق (س) . م (س) = .
س ← أ

نهـــا ق (س) . نهـــا م (س)
س ← أ س ← أ

(٣) $\lim_{س \to ا} \frac{ق(س)}{م(س)} = \frac{\lim_{س \to ا} ق(س)}{\lim_{س \to ا} م(س)}$

شريطة ان نكون النهايات المشار اليها موجودة وان ليس هناك مقام يساوي صفرا .

ويمكن التعبير عن (٢ – ١٣) كالاتي :

(١) نهاية المجموع هي مجموع النهايات

(٢) نهاية حاصل الضرب هي حاصل ضرب النهايات .

(٣) نهاية خارج القسمة هي خارج قسمة النهايات .

واذا كان ك عددا حقيقيا فباستعمال (٢ – ١٣) (٢) مع اعتبار ق (س) = ك

نحصل على ما يلي :

$$\lim_{س \to ا} ك \cdot م(س) = \lim_{س \to ا} ك \times \lim_{س \to ا} م(س)$$

لكل عدد حقيقي ك .

ولكن نهاية الثابت ثابت ويقودنا هذا الى المعادلة المهمة التالية :

(٢ – ١٤) $\lim_{س \to ا} ك \times م(س) = ك \times \lim_{س \to ا} م(س)$

فاذا جعلنا ك = – ١ كحالة خاصة من (٢ – ١٤) ينتج ان

(٢ – ١٥) $\lim_{س \to ا} - م(س) = - \lim_{س \to ا} م(س)$

وبكتابة ق (س) – م (س) = ق (س) + (– م (س) وباستعمال (٢ – ١٣) و (٢ – ١٥) ينتج ان :

(٢ – ١٦) $\lim_{س \to ا} [ق(س) - م(س)] = \lim_{س \to ا} ق(س) - \lim_{س \to ا} م(س)$

أي أن نهاية الفرق هي فرق النهايات . ويمكن تعميم (٢ – ١٣) لأي عدد محدود ر من الاقترانات فاذا كانت ق١ ، ق٢ ، ... قر هي اقترانات وكانت

$\lim_{س \to ا} ق_و(س)$ موجودة لجميع و = ١ ، ٢ ، .... ر .

فان

(٢ – ١٧) $\lim_{س \to ا} ق_١(س) + ق_٢(س) + ... ق_ر(س) =$

$\lim_{س \to ا} ق_١(س) + \lim_{س \to ا} ق_٢(س) + ... +$

$\lim_{س \to ا} ق_ر(س)$ وكذلك

(٢ – ١٨) $\lim_{س \to ا} ق_١(س) ق_٢(س) ... ق_ر(س) =$

$\lim_{س \to ا} ق_١(س) \lim_{س \to ا} ق_٢(س) ... \lim_{س \to ا} ق_ر(س)$

وفي حالة تساوي ق$_و$ (س) لجميع قيم و= ١ ، ٢ ، ... ر .

فتأخذ (٢ – ١٨) الشكل التالي :

(٢ – ١٩) $\lim_{س \to ا} [ق(س)]^{ر} = [\lim_{س \to ا} ق(س)]^{ر}$

حيث ر عدد موجب واذا كانت ق (س) = س فان :

(٢ – ٢٠) $\lim_{س \to ا} س^{ر} = [\lim_{س \to ا} س]^{ر} = ا^{ر}$

حيث ر عدد موجب .

وباستعمال (٢ – ١٤) و (٢ – ٢٠) نحصل على الاتي :

(٢ – ٢١) $\lim_{س \to ا} ك\ س^{ر} = ك\ ا^{ر}$.

لاحظ ان (٢ – ٢١) تقول انه يمكن ايجاد النهاية بالتعويض عن س بالقيمة ا في ق (س) . وسنبرهن أن هذا صحيح في الاقترانات الحدودية والاقترانات النسبية

(٢ – ٢٢) نظريـــة :

اذا كان ق اقترانا حدوديا فان $\lim_{س \to ا} ق(س) = ق(ا)$ لأي عدد حقيقي ا .

البرهـــان : يمكن كتابة ق (س) كالاتي :

ق (س) = $ب_ن س^ن + ب_{ن-١} س^{ن-١} + ... + ب_٠$ حيث ان $ب_ن$ ، $ب_{ن-١}$ ، ... $ب_٠$ هي اعداد حقيقية ومن (٢ – ١٧) و (١ – ٢١) يتبع ان

$$\lim_{س \to ا} ق(س) = \lim_{س \to ا} ب_ن س^ن + \lim_{س \to ا} ب_{ن-١} س^{ن-١} + ... + \lim_{س \to ا} ب_٠$$

$$= ب_ن \, أ^ن + ب_{ن-1} \, أ^{ن-1} + \cdots + ب_0 = ق (أ)$$

(٢ - ٢٣) نتيجـــة :

اذا كان ق اقترانا نسبيا و أ موجودة في مجال ق فان

$$\text{نهـــا}_{س \to أ} \quad ق (س) = ق (أ)$$

البرهـــان : لنكتب $ق (س) = \frac{م (س)}{ن (س)}$ حيث م ، ن اقترانان حدوديان

وباستعمال (٢ - ١٣) و (٢ - ٢٢) نحصل على ما يلي :

$$\text{نهـــا}_{س \to أ} ق (س) = \frac{\text{نهـــا}_{س \to أ} م (س)}{\text{نهـــا}_{س \to أ} ن (س)}$$

$$= \frac{م (أ)}{ن (أ)} = ق (أ)$$

مثـال ١ :

أوجد $\text{نهـــا}_{س \to -٣} (٢ س^٢ - ٤ س + ١٠)$ وكذلك

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{٥ س^٢ + س + ١}{٨ س - ٣}$$

الحـــل : حسب (٢ – ٢٢) و (٢ – ٢٣) فان

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣} (٢س^{٣} - ٤س + ١٠) = ٢(-٣)^{٣} - ٤(-٣) + ١٠$$

$$= -٥٤ + ٢٢$$

$$= -٣٢$$

وكذلك

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} \frac{٥س^{٢} + س + ١}{٨س - ٣} = \frac{١ + ٢ + ٢٠}{١٦ - ٣} = \frac{٢٣}{١٣}$$

(٢ – ٢٤) نظريـــة :

اذا كان أ > ٠ وكان ن عددا صحيحا موجبا أو كان أ < ٠ وكان ن عددا صحيحا فرديا فان

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ} \sqrt[ن]{س} = \sqrt[ن]{أ}$$

وستجد برهان هذه النظرية في الملحق الثاني

واذا كان م ، ن عددين صحيحين موجبين وكان أ > ٠ . فباستعمال (٢ – ١٩) ، (٢ – ٢٤) نحصل على ما يلي :

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ} \left(\sqrt[ن]{س}\right)^{م} = \left(\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ} \sqrt[ن]{س}\right)^{م} = \left(\sqrt[ن]{أ}\right)^{م}$$

وفي حالة الاسس الكسرية يمكن التعبير عن هذا كالاتي :

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ} س^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}} \quad \text{حيث } أ > ٠ \text{ ، م ، ن عددان صحيحان}$$

موجبان .

وبالمثل يمكن تعميم ذلك ليشمل الاسس السالبة (انظر تمرين ٢٣) .

مثـال ٢ :

أوجد $\lim_{س \to ٨} \frac{٣ + \sqrt{س^{\frac{٢}{٣}}}}{٤ - \frac{١٦}{س}}$

الحـــل : ان على القاريء ان يعطي سببا لكل خطوة من الخطوات الآتية .

$$\lim_{س \to ٨} \frac{٣ + \sqrt{س^{\frac{٢}{٣}}}}{٤ - \frac{١٦}{س}} = \frac{\lim_{س \to ٨} (٣ + \sqrt{س^{\frac{٢}{٣}}})}{\lim_{س \to ٨} (٤ - \frac{١٦}{س})}$$

$$= \frac{\lim_{س \to ٨} ٣ + \lim_{س \to ٨} \sqrt{س^{\frac{٢}{٣}}}}{\lim_{س \to ٨} ٤ - \lim_{س \to ٨} \frac{١٦}{س}}$$

$$= \frac{٣ + \sqrt{٨^{\frac{٢}{٣}}}}{٤ - \frac{١٦}{٨}} = \frac{٤ + \sqrt{٦ + ٢}}{٤ - ٢}$$

$$= ٢ + \sqrt{٣ + ٢}$$

(٢ – ٢٥) نظريـــة :

اذا كانت $\lim_{س \to أ} ق(س)$ موجودة فان $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{ق(س)}$

$$= \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} ق(س)}$$

بشرط ان يكون ن عدد صحيحا فرديا موجبا أو عدد صحيحا زوجيا موجبا وان تكون

$$\lim_{س \to أ} ق(س) > 0$$

سيرد برهان هذه النظرية في البند ٥ ولكننا سنستعملها قبل ذلك حيثما يمكن كي نكتسب الخبرة في ايجاد نهايات العبارات الجبرية التي تشتمل على جذور.

مثـال ٣ :

أوجد $\lim_{س \to ٥} \sqrt[٣]{٣س^{٢} - ٤س + ٩}$

الحـــل : استعمل (٢ – ٢٥) ، (٢ – ٢٢) للحصول على

$$\lim_{س \to ٥} \sqrt[٣]{٣س^{٢} - ٤س + ٩} = \sqrt[٣]{\lim_{س \to ٥} (٣س^{٢} - ٤س + ٩)}$$

$$= \sqrt[٣]{٧٥ - ٢٠ + ٩} = \sqrt[٣]{٦٤} = ٤ .$$

اذا كان ق ، ر ، ن اقترانات وكان ر (س) يقع دائما بين ق (س) و ن (س) وكان للاقترانين ق ، ن نهاية واحدة مشتركة ل عندما تقترب س من أ ، فظاهر أن ر له هذه النهاية ذاتها . وهذا ما تنص عليه النظرية التالية . أما برهانها ففي الملحق الثاني .

(٢ – ٢٦) نظرية الشطيرة The Sandwich Theorem

اذا كان ق (س) ≤ م (س) ≤ ن (س) لجميع قيم س في فترة مفتوحة تحتوي على أ . ربما مع استثناء س = أ ، وكانت :

نهـــا ق (س) = ل = نهـــا ن (س) فان
س ← أ س ← أ

نهـــا م (س) = ل ايضا .
س ← أ

وسنستعمل هذه النظرية التالية في برهان (٣ - ١١) في الفصل القادم .

(٢ - ٢٧) نظريـــة :

اذا كان الاقتران ق معرفا على فترة مفتوحة تحوي أ فان

نهـــا ق (س) = نهـــا ق (أ + هـ)
س ← أ هـ ← ٠

بشرط ان تكون كلتا هاتين النهايتين موجودتين .

البرهـــن :

اذا كانت نهـــا ق (س) = ل فانه لكل ε > ٠ توجد δ
س ← أ

بحيث ان

| ق (س) - ل | < ε عندما تكون ٠ < | س - أ | < δ .

ضع س = أ + هـ في كلتا هاتين المتباينتين لتحصل على ما يلي :

| ق (أ + هـ) - ل | < ε عندما تكون ٠ < | هـ | < δ .

وهكذا يكافيء القول ان

نهـــا ق (أ + هـ) = ل .
هـ ← ٠

وبالعكس اذا كانت

نهـــا ق (أ + هـ) = ل فانه بعكس الخطوات السابقة
هـ ← ٠ .

نستنتج ان

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow أ} \quad ق(س) = ل .$$

وحسب (٢ – ٢٧) فاذا كان للاقتران نهاية عندما تقترب س من أ فيمكن البحث عن هذه النهاية بالتعويض عن س بالقيمة أ + هـ وجعل هـ تقترب من الصفر وكمثال فانه يمكن كتابة .

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} \quad (س^{٢} + ١) = \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \quad [(٣ + هـ)^{٢} + ١]$$

استعمل نظريات النهايات لحل كل من التمارين ١ – ٢٢ .

١ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow -٢} \quad (٣س^{٢} - ٢س + ٧)$

٢ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow \frac{١}{٢}} \quad \dfrac{٤س^{٢} - ٦س + ٣}{١٦س^{٣} + ٨س - ٧}$

٣ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٢٧} \quad ١٥$

٤ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow ١٥} \quad \sqrt{٢٧}$.

٥ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow \frac{١}{٢}} \quad \dfrac{٢س^{٢} + ٥س - ٣}{٦س^{٢} - ٧ + ٢}$

٦ . $\lim_{س \to -٣} \frac{س + ٣}{\frac{١}{س} + \frac{١}{٣}}$

٧ . $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س^{٣} - ٨}$

٨ . $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - س - ٢}{(س - ٢)^{٢}}$

٩ . $\lim_{س \to ١٦} \frac{س - ١٦}{\sqrt{س} - ٤}$

١٠ . $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٢} + ٨}{س^{٤} - ١٦}$

١١ . $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{١}{(٢ + هـ)^{٤}} - \frac{١}{٤}}{هـ}$

١٢ . $\lim_{هـ \to ٥} \frac{\frac{١}{٩ + هـ} - \frac{١}{٩}}{هـ}$

١٣ . $\lim_{س \to ١} \left(\frac{س^{٢}}{س - ١} - \frac{١}{س - ١} \right)$

١٤ . $\lim_{س \to ١} \left(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}} \right)^{٦}$

١٥ . $\lim_{س \to ١٦} \frac{٢ \sqrt{س} + س^{\frac{١}{٣}}}{\sqrt[٤]{س} + ٥}$

١٦ . $\lim_{س \to -٨} \frac{١٦ \, س^{\frac{١}{٣}}}{٤ - س^{\frac{٤}{٣}}}$

١٧ . $\lim_{س \to ٣} \sqrt[٣]{\frac{٢ + ٥س - ٣س^{٣}}{س^{٢} - ١}}$

١٨ . $\lim_{س \to \pi} \sqrt{\frac{س - \pi}{س + \pi}}$

١٩ . $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{١٦ + هـ} - ٤}{هـ}$

٢٠ . $\lim_{هـ \to ٠} \left(١ - \frac{١}{\sqrt{١ + هـ}} \right)^{\frac{١}{هـ}}$

٢١ . $\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)^{٥}}{س^{٥} - ١}$

٢٢ . $\lim_{س \to ٦} (س + ٤)^{٣} (س - ٦)^{٢}$

٢٣ . اذا كان ر أي عدد نسبي وكانت $أ > ٠$. اثبت ان

$\lim_{س \to أ} س^{ر} = أ^{ر}$. ماذا يشترط حتى يبقى هذا صحيحا عندما تكون

$أ < ٠$ ؟

٢٤ . اذا كانت $\lim_{س \to أ} ق (س) = ل \neq$ صفرا وكانت

$\lim_{س \to أ} ع (س) = ٠$

أثبت ان $\lim_{س \to أ} \frac{ق (س)}{ع (س)}$ غير موجودة (ملاحظة افترض وجود

عدد ل

بحيث $\lim_{س \to أ} \frac{ق (س)}{ع (س)} = ل$ واعتبر $\lim_{س \to أ} ق (س) =$

$\lim_{س \to أ} ع (س) \times \frac{ق (س)}{ع (س)}$

٢٥ . برهن انه اذا كانت نهاية اقتران ق عندما تقترب س من أ سالبة فتوجد فترة مفتوحة عَ تحوي أ بحيث ان ق (س) سالب لجميع قيم س ∈ عَ ربما باستثناء س = أ .

٤ ــ النهايات من طرف واحد

عند دراسة بعض الاقترانات يكون من المفيد ان ندرس نهاياتها من طرف واحد كما سنبين في هذا البند . وعلى سبيل المثال اذا كانت

ق (س) = $\sqrt{١ - س^{٢}}$

فان مجال ق هو الفترة المغلقة [− ١ ، ١] ومنحنى ق هو النصف العلوي من دائرة الوحدة . واذا كانت أ أي عدد ينتمي الى الفترة المفتوحة (− ١ ، ١) فمن (٢ − ٢٥) يكون

نهـــا $\sqrt{١ - س^{٢}} = \sqrt{١ - أ^{٢}}$
س ← أ

ولكن الحالتان أ = ١ ، أ = − ١ لا ينطبق عليهما التعريف (٢ − ٦) لان $\sqrt{١ - س^{٢}}$ لا يكون عددا حقيقيا اذا كانت س > ١ أو س < − ١ ولهذا فلا توجد فترة مفتوحة تحتوي على ١ ، − ١ وتكون عندها ق معرفة . ولكن هناك طريقة لتعميم مفهوم النهاية حتى تشمل هذين العددين . فاذا اردنا ان ندرس سلوك الاقتران عندما تقترب س من − ١ فاننا نحتاج الى مجرد تزويد تعريف النهاية بالشرط ان س يمكنها ان تأخذ قيما اكبر من − ١ فقط اي ان قيم س تكون محتواة في الفترة (− ١ ، ١) ولهذا فبدل الشرط

− ١ − δ < س < − ١ + δ في (٢ ــ ٧) ، نأخذ الشرط

− ١ < س < − ١ + δ . وبالمثل اذا كانت أ = ١ فاننا نشترط على قيم س ان تكون اقل من ١ فنأخذ ١ − δ < س < ١ بدلا من

١ − δ < س < ١ + δ .

والنهايتان الناتجتان (ان وجدتا) تدعيان نهاية ق (س) عندما تقترب س من − ١ من اليمين ونهاية ق (س) عندما تقترب س من ١ من اليسار على الترتيب . والتعريف العام هو كما يلي :

(٢ – ٢٨) تعريف $\lim_{س \to أ^+} ق(س) = ل$

اذا كان الاقتران ق معرفا على فترة مفتوحة (أ ، جـ) فان نهاية ق (س) عندما تقترب س من أ من اليمين هو ل ونكتب

$$\lim_{س \to أ^+} ق(س) = ل$$

اذا كان لكل $\epsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث ان

$| ق(س) - ل | < \epsilon$ عندما تكون $أ < س < أ + \delta$

ونشير احيانا الى (٢–٢٨) بالنهاية اليمنى للأقتران ق (س) عندما تقترب س من أ . والرمز $س \to أ^+$ يستعمل للاشارة الى قيم س التي هي أكبر من أ دائما . ويمكن تمثيل هذا هندسيا بطريقة مشابهة للشكلين (٢ – ٥) ، (٢ – ٧) والفرق الوحيد هو اننا قد اشترطنا في النهاية اليمنى ان تنحصر قيم س في النصف الايمن (أ ، أ + δ) من الفترة (أ – δ ، أ + δ) . ونحن نعرف بداهة انه عندما تقترب س من أ خلال قيم اكبر من أ فان ق (س) تقترب من ل وبالمثل يمكن تعريف النهاية اليسرى للافتران ق (س) عندما تقترب س من أ .

(٢ – ٢٩) تعريف $\lim_{س \to أ^-} ق(س) = ل$

اذا كان الاقتران معرفا على فترة مفتوحة (جـ ، أ) فان نهاية ق (س) عندما تقترب س من أ من اليسار هي ل ونكتب

$$\lim_{س \to أ^-} ق(س) = ل$$

اذا كان لكل $\epsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث

$| ق(س) - ل | < \epsilon$ عندما تكون $أ - \delta < س < أ$. والشرط في

(٢ – ٢٩) على س يكافيء $-\delta < س - أ < 0$ ونستعمل الرمز س $\to أ^-$ للدلالة على أن قيم س تكون اقل من أ دائما . وللحصول على تمثيل هندسي للنهايات اليسرى نستعمل الشكلين (٢ – ٥) ، (٢ – ٧) ونشترط أن تأخذ الموجودة في الفترة (أ - δ ، أ) . ونشير احيانا الى (٢ – ٢٨) و (٢ – ٢٩) بالنهايات ذات الجانب الواحد للاقتران ق (س) عندما تقترب س من أ .

وفي النظرية التالية سنذكر العلاقة بين النهايات من جانب واحد والنهايات اطلاقاً ونترك برهان هذه النظرية كتمرين .

(٢ – ٣٠) نظريـــة

اذا كانت ق معرفة على فترة مفتوحة تحوى أ (ربما باستثناء أ نفسها) فان

$$\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$$

اذا وفقط اذا كان

$$\lim_{س \to أ^+} ق(س) = ل \text{ وكذلك } \lim_{س \to أ^-} ق(س) = ل .$$

تبين هذه النظرية أن نهاية ق (س) عندما تقترب س من أ تكون موجودة اذا وفقط اذا وجدت نهايتاه اليمنى واليسرى وتساوتا . ويمكن ان نثبت ان نظريات النهايات التي وردت في البند السابق تنطبق على النهايات من جانب واحد . وعلى سبيل المثال فان

$$\lim_{س \to أ^+} (م س + ب) = م أ + ب . \text{ وكذلك}$$

$$\lim_{س \to أ^+} [ق(س) + ن(س)] \quad \lim_{س \to أ^+} ق(س) +$$

$$\lim_{س \to أ^+} ن(س)$$

شريطة وجود كل من النهايتين ، وهكذا . وبالمثل يمكن ايجاد نتائج مشابهة في حالة النهايات اليسرى .

مثـال ١ :

اذا كان ق معرفا كالآتي :

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} \dfrac{|س|}{س} & \text{اذا كانت } س \neq 0 \\ 1 & \text{اذا كانت } س = 0 \end{cases}$$

فبرهن ان $\lim_{س \to 0^+}$ ق (س) = ١ بينما

$\lim_{س \to 0^-}$ ق (س) = − ١ .

ما هي $\lim_{س \to 0}$ ق (س) ؟

الحـل : اذا كانت س > ٠ فان | س | = س وتكون ق (س) = $\frac{س}{س}$ = ١ ونتيجة لذلك فان

$$\lim_{س \to 0^+} \text{ق}(س) = \lim_{س \to 0^+} ١ = ١$$

واذا كانت س < ٠ فان | س | = − س وتكون ق (س) = $\frac{-س}{س}$ = − ١

ولهذا فان

$$\lim_{س \to 0^-} = \lim_{س \to 0^-} (-١) = -١$$

وبما ان النهايتين من اليمين والشمال غير متساويتين ينتج من (٢ − ٣٠) ان

$\lim_{س \to 0}$ ق (س) غير موجودة .

والشكل ٢ – ٩ يمثل بيان ق .

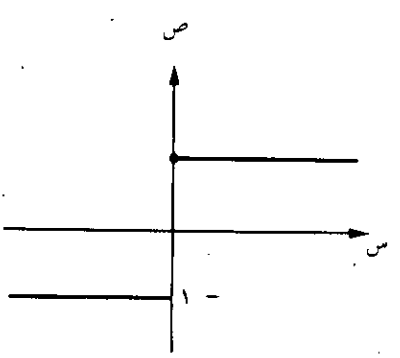
مثـال ٢ . اذا كانت ق معرفة كالاتي

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ٢ & \text{اذا كانت س} \neq ١ \\ ٠ & \text{اذا كانت س} = ١ \end{cases}$$

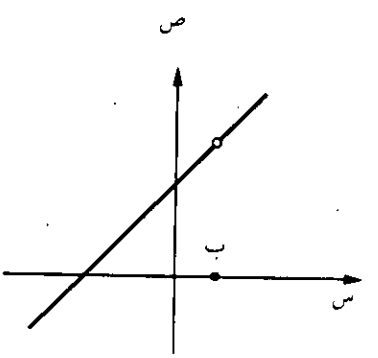
أوجد $\lim_{\text{س} \to ١^+}$ ق (س) ، وكذلك $\lim_{\text{س} \to ١^-}$ ق (س) وكذلك

$\lim_{\text{س} \to ١^+}$ ق (س) .

يتكون بيان الاقتران من النقطة ب (١ ، ٠) بالاضافة الى جميع النقط الواقعة على الخط المستقيم ص = س + ٢ ما عدا النقطة (١ ، ٣) كما يظهر في الشكل ٢ – ١٠ وواضح ان



الشكل ٢ — ٩



الشكل ٢ — ١٠

$$\text{نهـا}_{س \to ١^+} \quad ق\ (س) = ٣$$

$$= \quad \text{نهـا}_{س \to ١^-} \quad ق\ (س)$$

وباستعمال (٢ – ٣٠) فان

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \quad ق\ (س) = ٣ .$$

لاحظ أن $\text{نهـا}_{س \to ١} \quad ق\ (س) \neq ق\ (١)$

تمارين :

في كل من التمارين ١ – ١٠ أوجد النهاية (اذا وجدت)

١ . $\text{نهـا}_{س \to ٠^+} \quad (٤ + \sqrt{٧س})$

٢ . $\text{نهـا}_{س \to ٠^+} \quad (٤ س^{\frac{٢}{٣}} - \sqrt{٧س} + ٣)$

٣ . $\text{نهـا}_{س \to -٦^+} \quad (\sqrt{س + ٦} + س)$

٤ . $\text{نهـا}_{س \to -\frac{٥}{٢}} \quad (\sqrt{٥ - ٢س} - س^٢) .$

٥ . $\text{نهـا}_{س \to ٥^+} \quad (\sqrt{س^٢ - ٢٥} + ٣)$

٦ . $\lim_{س \to 3^-} س \sqrt{٩ - س^٢}$

٧ . $\lim_{س \to 3^-} \frac{|س - ٣|}{س - ٣}$

٨ . $\lim_{س \to -١٠^+} \frac{س + ١٠}{|س + ١٠|}$

٩ . $\lim_{س \to 3^+} \frac{\sqrt{(س - ٣)^٢}}{س - ٣}$

١٠ . $\lim_{س \to -١٠^-} \frac{س + ١٠}{\sqrt{(س + ١٠)^٢}}$

١١ . اذا كان ق معرفا كالاتي

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س & \text{اذا كانت } س \geq ٢ \\ س^٢ & \text{اذا كانت } س < ٢ \end{cases}$$

أوجد $\lim_{س \to ٢٠^+}$ ق (س) ، $\lim_{س \to ٢^-}$ ق (س) وارسم بيان ق .

١٢ . أوجد المطلوب في السؤال (١١) اذا كانت

$$ق(س) = \begin{cases} س^٣ & \text{اذا كانت } س \geq ٢ \\ ٤ - ٢س & \text{اذا كانت } س < ٢ \end{cases}$$

١٣ . اذا كان ق هو اقتران أكبر عدد صحيح وكان ن اي عدد صحيح فأوجد

نهـــا ق (س) وكذلك نهـــا ق (س) .
س ← ن+ س ← ن-

١٤ . اذا كانت ق (س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$ حيث س ≠ ٣ وكانت ق (٣) = ٥ أوجد

نهـــا ق (س) ، نهـــا ق (س) وكذلك
س ← ٣+ س ← ٣-

نهـــا ق (س) .
س ← ٣

١٥ . اذا كان ق اقترانا حدوديا فاثبت ان

نهـــا ق (س) = نهـــا ق (س) = ق (أ) لاي
س ← أ+ س ← أ-

عدد حقيقي أ .

١٦ . برهن (٢ - ٣٠)

١٧ . ارسم توضيحا هندسيا للنهايات اليمنى مشابهاً للشكلين (٢ - ٥) ، (٢ - ٧)

١٨ . اجب عن السؤال (١٧) في حالة النهايات اليسرى .

٥ ــ الاقترانات المتصلة : Continuous functions

للوصول الى تعريف نهـــا ق (س) اشترطنا بأن تكون س ≠ أ
س ← أ

وقد دل عدد من الامثلة أوردناها في البنود السابقة ان نهـــا ق (س)
س ← أ

يمكن ان تكون موجودة رغما من ان ق غير معرفة عند أ .

فلنركز انتباهنا الان على الحالة التي تكون فيها ﻫ تنتمي الى مجال ق . فاذا كانت ق معرفة عند ﻫ وكانت $\lim_{س \to ﻫ}$ ق (س) موجودة فربما تكون هذه النهاية مساوية ق (ﻫ) وفي هذه الحالة نقول ان ق متصلة عند ﻫ حسب التعريف :

(٢ - ٣١) تعريف الاقتران المتصل

يكون الاقتران ق متصلا عند ﻫ اذا تحققت الشروط الثلاثة التالية

(١) تنتمي ﻫ الى مجال ق

(٢) $\lim_{س \to ﻫ}$ ق (س) موجودة

(٣) $\lim_{س \to ﻫ}$ ق (س) = ق (ﻫ) .

واذا كانت ق غير متصلة عند ﻫ نقول انها منفصلة (discontinuous) عند ﻫ أو أن ﻫ هي نقطة انفصال .

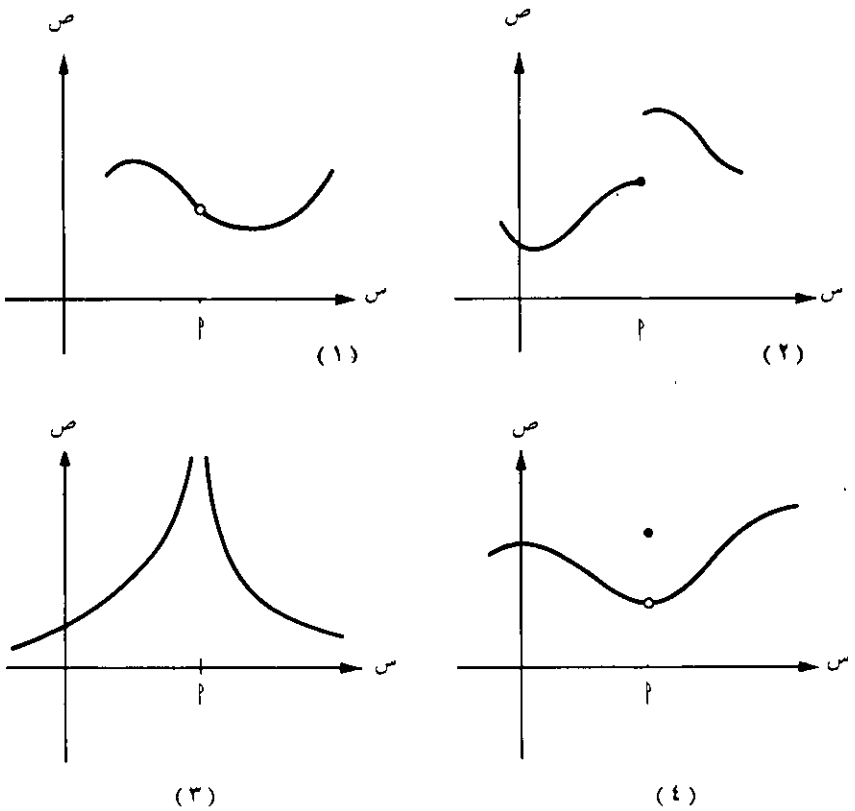
واذا كانت ق متصلة عند ﻫ فمن الشرطين (١) ، (٢) بالاضافة الى مفهوم وجود النهاية تكون ق معرفة على فترة مفتوحة تحوي ﻫ . وينتج عن (٢ - ٢٢) ، (٢ - ٢٣) بان اقترانات الحدوديات تكون متصلة عند اي نقطة ﻫ وكذلك الاقترانات النسبية فهي متصلة عند أي نقطة في مجالاتها . واذا كان ق متصلا عند ﻫ فباستعمال (٢ - ٣١) ، (١) توجد نقطة ب (ﻫ ، ق (ﻫ)) على بيان ق . وبما ان

$\lim_{س \to ﻫ}$ ق (س) = ق (ﻫ) فكلما اقتربت س من ﻫ تقترب ق (س) من ق (ﻫ) وبعبارة ادق وعلى نحو يطابق الشكل (٢ - ٧) وفيه النقطة ب (ﻫ ، ق (ﻫ))

فانه لكل زوج من الخطوط الافقية ص = ل ± ε توجد خطوط عمودية س = أ ± δ بحيث انه اذا كانت أ − δ < س < أ + δ فان النقطة (س ، ق (س)) التي تقع على مخطط ق تقع في المنطقة المستطيلة المظللة .

ولهذا السبب نعتبر احيانا الاقترانات المتصلة بانها الاقترانات التي يمكن رسم مخططها دون رفع القلم عن الورقة . وهذا ليس وصفا دقيقا ولكنه وسيلة لترسيخ مفهوم بديهي للاقترانات المتصلة .

ويمثل الشكل ٢ − ١١ عدة اقترانات غير متصلة عند النقطة أ . فالاقتران الذي بيانه موضح في (أ) غير متصل لان ق (أ) غير موجودة . اما في المخططين (٢) ، (٣) فالاقترانان منفصلان لان



شكل ٢ — ١١

نهـــا ق (س) غير موجودة
س ← أ

واما في المخطط (٤) فان كلاً من ق (أ) و نهـــا ق (س) موجودة
س ← أ

ولكنهما غير متساويتين ، وبناء على الشرط (٢) من (٢ – ٣١) تكون ق منفصلة عند أ . وهذا يبين ضرورة توافر الشروط الثلاثة في التعريف . وهناك انماط من الانفصال لها اسماء خاصة :

فاذا كانت نهـــا ق (س) موجودة ولكنها لا تساوي ق (أ)
س ← أ

نقول ان الانفصال عند أ قابلة للازالة أو زائل (Removable) ففي هذه الحالة يمكن وضع اقتران آخر هـ يُعرف كالاتي :

هـ (س) = ق (س) لجميع قيم س أ
هـ (أ) = نهـــا ق (س)
س ← أ

فعندما تكون س ≠ أ يتطابق الاقتران هـ مع الاقتران ق ولكن هـ هو اقتران متصل عند أ فيه ازيلت النقطة المزعجة عند س = أ . والاقترانات التي بياناتها الاشكال ٢ – ١١ ، (١) ، (٤) لها عند أ نقط انفصال قابلة للازالة واليك مثالا محسوسا في الاقتران ق في مثال ٢ من البند السابق حيث ان ق (س) = س + ٢ اذا كانت س ≠ ١ وكذلك ق (١) = ٠ (انظر الشكل ٢ – ١٠) . فبما ان

نهـــا ق (س) = ٣ ≠ ق (١)
س ← أ

فان ق لها انفصال زائل عند س = ١ . فاذا عرفنا هـ (س) = س + ٢ لجميع قيم سُ فان هـ لها نفس قيم ق اذا كانت س ≠ ١ ، هـ متصلة عند ١ في حين ان ق منفصلة عند أ .

واذا كانت النهايتان اليمنى واليسرى للاقتران ق (س) موجودتين وغير

متساويتين عندما تقترب س من ﻫ نقول ان ق لها انفصال قافز عند ﻫ كما هو واضح في الاقتران المرسوم في الشكل ٢ – ١١ ، (٢) وكذلك في الاقتران المعرف بالمعادلة ق (س) = $\frac{|\text{س}|}{\text{س}}$ (انظر الشكل ٢ – ٩) .

وفي حالة الانفصال القافز ليس هناك طريقة لتعريف ق (ﻫ) بحيث تصبح ق اقترانا متصلا عند ﻫ ولهذا لا يمكن ازالة هذا الانفصال وسندرس فيما بعد الاقترانات التي تصبح لا نهائية عند ﻫ ومن نمط الاقتران المبين في (٢ – ١١) ، (٢) ونشير احيانا الى هذا الانفصال بالانفصال اللانهائي . والبيانات المرسومة في الشكل ٢ – ١١ تبين أن هذه الاقترانات متصلة عند نقاط غير ﻫ . وكثير من الاقترانات التي تدرسها في التفاضل والتكامل . هي من هذا النوع أي انها منفصلة عند نقاط في مجالها ومتصلة في ما عدا ذلك وسنوسع تعريف الاتصال للاقتران عند ﻫ حتى يشمل الحالة التي لا تستلزم ان تكون ﻫ منتمية الى فترة مفتوحة تقع كليا في مجال الاقتران ق كأن تكون ﻫ هي أكبر أو اصغر عدد في المجال .

فاذا عرفنا ق على الفترة المغلقة [ﻫ ، جـ] وجعلنا ق غير معرفة عندما تكون س < ﻫ نقول ان ق تكون متصلة عند ﻫ اذا كانت

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{ﻫ}^+} \quad \text{ق} (\text{س}) = \text{ق} (\text{ﻫ})$$

وبالمثل اذا كانت ق معرفة على [جـ ، ﻫ] وغير معرفة عندما تكون < س فاننا نقول ان ق تكون متصلة عند ﻫ اذا كانت

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{ﻫ}^-} \quad \text{ق} (\text{س}) = \text{ق} (\text{ﻫ})$$

(٢ - ٣٦) تعريف الاتصال على فترة

يكون الاقتران ق متصلا على فترة ما اذا كان ق متصلا لجميع اعداد تلك الفترة . واذا كانت الفترة مغلقة أو نصف مفتوحة فبناء على الملاحظة السابقة يمكن بحث النهاية عند اطراف تلك الفترة .

مثـال ١ :

اذا كانت ق (س) = ٣س^{٢} + $\sqrt{س}$ + ٢ فبرهن أن ق يكون متصلا عند جميع الاعداد الموجودة في مجاله .

الحـــل : ان مجال ق هو الفترة اللانهائية (٠ ، ∞) واذا كانت أ موجبة فان

$$\text{نهـــا}_{س \to أ} \; ق\,(س) = \text{نهـــا}_{س \to أ} \; (٣س^{٢} + \sqrt{س} + ٢)$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to أ} \; ٣س^{٢} + \text{نهـــا}_{س \to أ} \; \sqrt{س}$$

$$+ \; \text{نهـــا}_{س \to أ} \; ٢$$

$$= ٣أ^{٢} + \sqrt{أ} + ٢ = ق\,(أ)$$

وبهذا يكون الاقتران ق متصلا عند (٠ ، ∞) وبما ان ق غير معرفة عند الاعداد الحقيقية السالبة فيجب ان ندرس حالة الصفر على حدة كنهاية من طرف واحد :

$$\text{ان} \quad \text{نهـــا}_{س \to ٠^{+}} \; ق\,(س) = \text{نهـــا}_{س \to ٠^{+}} \; (٣س^{٢} + \sqrt{س} + ٢)$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠^{+}} \; ٣س^{٣} + \text{نهـــا}_{س \to ٠^{+}} \; \sqrt{س}$$

$$+ \; \text{نهـــا}_{س \to ٠^{+}} \; ٢$$

$$= ٠ + ٠ + ٢ = ٢ = ق\,(٠)$$

فاذن ق متصل عند الصفر ومن ثم فهو متصل على [٠ ، ∞) .

مثـال ٢ :

اذا كانت ق (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{(س - ١)\sqrt{س}}$ فأوجد جميع الاعداد التي يكون عندها الاقتران منفصلا .

الحـــل : بما ان ق غير معرفة عندما تكون س ≤ ٠ أو س = ١ فيكون الاقتران منفصلا عند جميع الاعداد الغير الموجبة وكذلك عند س = ١ حيث تكون نقطة الانفصال زائلة ، وهو متصل عند جميع الاعداد الحقيقية الاخرى فاذا كانت ؏ > ، و ؏ ≠ ١ فباستعمال نظريات النهايات نجد ان

$$\text{نهـا}_{س \to ؏} \ ق(س) = \frac{\text{نهـا}_{س \to ؏} \ س^{٢} - ١}{\text{نهـا}_{س \to ؏} \ (س - ١)\sqrt{س}}$$

$$= \frac{\text{نهـا}_{س \to ؏} \ س^{٢} - ١}{\text{نهـا}_{س \to ؏} \ (س - ١)\sqrt{س}}$$

$$= \frac{\text{نهـا}_{س \to ؏} \ (س^{٢} - ١)}{\text{نهـا}_{س \to ؏} \ (س - ١) \ \text{نهـا}_{س \to ؏} \ \sqrt{س}}$$

$$= \frac{١ - ٢؏}{(؏ - ١)\sqrt{؏}} = ق(؏)$$

ويمكننا استنتاج النتيجة التالية باستعمال النظريات التي ناقشناها

(٢ - ٣٧) نظريـــة :

اذا كان الاقترانان ق ، م متصلين عند أ فيكون كذلك حاصل جمعهما ق + م والفرق بينهما ق − م وحاصل ضربهما ق م وكذلك ق ∖ م . بشرط أن تكون م (أ) ≠ ٠

البرهان : لنفرض أن ق ، م متصلتان عند أ فان

$$\text{نهـــا}_{س \to أ} \quad ق(س) = ق(أ) \text{ وكذلك}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to أ} \quad م(س) = م(أ)$$

وباستعمال تعريف حاصل جمع اقترانين ينتج أن

(ق + م) (س) = ق (س) + م (س) ونتيجة لهذا فان

$$\text{نهـــا}_{س \to أ} \quad (ق + م)(س)$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to أ} \quad [ق(س) + م(س)]$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to أ} \quad ق(س) + \text{نهـــا}_{س \to أ} \quad م(س)$$

$$= ق(أ) + م(أ) = (ق + م)(أ) \cdot$$

وهذا يثبت ان ق + م متصلة عند أ .

واذا كانت أ هي اكبر أو اصغر عدد ينتمي الى مجال ق + م فباستعمال النهايات من طرف واحد نجد ان ق + م متصل عند أ وبطريقة مماثلة يمكن برهان ما تبقى من النظرية .

ويمكن تعميم النظرية السابقة الى اكثر من اقترانين أي الى حاصل الجمع ، والطرح ، والضرب ، والقسمة ، لأي عدد من الاقترانات المتصلة

شريطة الا يكون المقام صفرا . وحيث ان تعريف الاتصال يشمل مفهوم النهاية فيمكن تعريف الاتصال بتبديل ل في (٢ – ٦) بالقيمة ق (أ) ، كأن نقول ق متصلة عند أ اذا كان لكل ε > ٠ توجد δ > ٠ بحيث ان | ق (س) – ق (أ)| < ε عندما تكون | س – أ| > δ لاحظ اننا هنا لا نحتاج الى الشرط ٠ < |س – أ| لان الاقتران معرف عند أ وكذلك عند س = أ تكون | ق (س) – ق (أ) | = | ق (أ) – ق (أ)| = ٠

وسنستعمل هذا التعريف لاثبات النظرية التالية وسنختار مجالات الاقترانات ومداها في البرهان بحيث تكون جميع العبارات المشار اليها ذات معنى .

(٢ – ٣٤) نظريـــة :

اذا كان كل من ق ، هـ اقترانا حيث نهـــا هـ (س) = س ← أ

ب ، ق متصل عند ب فان

نهـــا ق (هـ (س)) = ق (ب) = ق
س ← أ

(نهـــا هـ (س))
س ← أ

البرهـــان .

ليكن ε > ٠ فيما ان ق متصلة عند ب فتوجد δ١ > ٠ بحيث أن | ق (ر) – ق (ب)| < ε عندما تكون | ر – ب| < δ١ . وبوضع ر = هـ (س) نحصل على ما يلي

(٢ – ٣٥) | ق (هـ (س)) – ق (ب)| < ε عندما تكون | هـ (س) ب| < δ١ . ولكن

نهـــا هـ (س) = ب فمقابل δ١ توجد δ > ٠ بحيث ان
س ← أ

(٢-٣٦) | هـ (س) - ب | < δ عندما تكون ٠ < | س - أ | < δ

وينتج من (٢ - ٣٥) و (٢ - ٣٦) ان

| ق (هـ (س)) - ق (ب) | < ε عندما تكون ٠ < | س - أ | < δ

ومن (٢ - ٦) ينتج ان

$$\lim_{س \to أ} \text{ق (هـ (س)) = ق (ب)}$$

وتستعمل النظرية (٢ - ٣٤) بصورة خاصة لاشتقاق نظريات اخرى . فمثلا اذا كان ن عدد صحيحا موجبا وكان ق (س) = $\sqrt[ن]{س}$ فان ق (هـ (س)) = $\sqrt[ن]{هـ (س)}$ وكذلك

$$\text{ق}\left(\lim_{س \to أ} \text{هـ (س)}\right) = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} \text{هـ (س)}}$$

وبالتعويض في المعادلة

$$\lim_{س \to أ} \text{ق (هـ (س))} = \text{ق}\left(\lim_{س \to أ} \text{هـ (س)}\right)$$

نحصل على النتيجة المذكورة فى (٢ - ٢٥) وهي

$$\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{\text{هـ (س)}} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} \text{هـ (س)}} .$$

حيث اننا افترضنا ان الجذر النوني المشار اليه موجود . واذا كان الاقتران هـ في (٢ - ٣٤) متصلا عند أ وكان الاقتران ق متصلا عند ب = هـ (أ) فان

(٢-٣٧) $\lim_{س \to أ}$ ق (هـ (س)) = ق

$$\left(\lim_{س \to أ} \text{هـ (س)}\right) = \text{ق (هـ (أ))}$$

أي ان تركيب ق مع هـ يكون متصلا عند ﻫ .
ويمكن تعميم هذه النتيجة الى اقترانات متصلة على فترات ويمكن احيانا التعبير عن هذا بالعبارة « تركيب الاقترانات المتصلة متصل »

مثـال ٣ :

برهن ان الاقتران ق (س) = | س | متصل عند اي عدد حقيقي ﻫ .

الحـــل :

بما أن | س | = $\sqrt{س^{٢}}$ فباستعمال (٢ – ٢٥) ، (٢ – ٢٢) .

نحصل على ان

$$\text{نهـــا}_{س \to ﻫ} \quad ق (س) = \text{نهـــا}_{س \to ﻫ} \quad | س |$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ﻫ} \quad \sqrt{س^{٢}}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ﻫ} \quad \sqrt{س^{٢}} = \sqrt{ﻫ^{٢}} = ﻫ$$

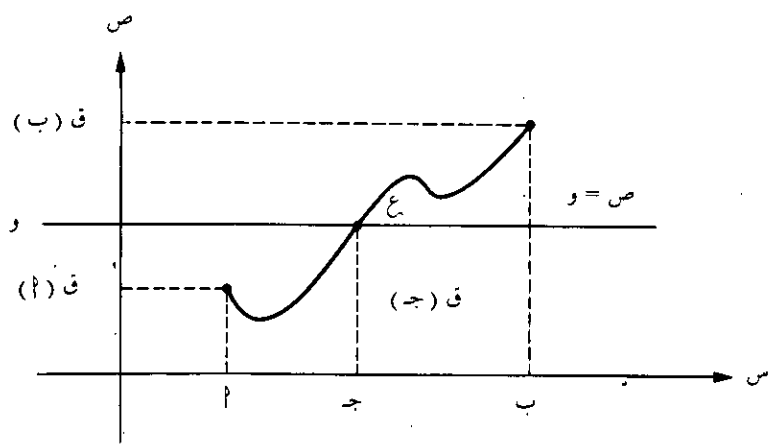
$$= ق (ﻫ)$$

وبناء على (٢ – ٣١) تكون ق متصلة عند ﻫ .
وسننهي هذا البند بذكر خاصية مهمة للاقترانات المتصلة اما البرهان فيجده الطالب في كتب متقدمة في التفاضل والتكامل .

(٢ – ٣٨) نظريـــة القيم الوسطى Intermediate Value thearem

اذا كان الاقتران ق متصلا على الفترة المغلقة [ﻫ ، ب] وكان ق (ﻫ) ≠ ق (ب) فان ق تأخذ كل قيمة بين ق (ﻫ) و ق (ب) .
تقول هذه النظرية اعلاه انه اذا كان ر أي عدد يقع بين ق (ﻫ) و ق (ب) فهناك عدد جـ بين ﻫ ، ب بحيث ق (جـ) = ر .

اذا ذكرنا ان منحنى الاقتران المتصل يمتد من النقطة (أ ، ق (أ)) الى النقطة (ب ، ق ب)) بلا انقطاع كما هو موضح في الشكل ٢ – ١٢ فظاهر انه لأي رقم ر يقع بين ق (أ) و ق (ب) فإن الخط الأفقي الذي يقطع محور الصادات عند (٠ ، ر) يجب ان يقطع المنحنى عند نقطة واحدة ع على الاقل . والاحداثي السيني للنقطة ع هو جـ حيث جـ تحقق المعادلة ق (جـ) = ر ومن نتائج (٢ – ٣٨) انه اذا كانت ق (أ) و ق (ب) باشارتين مختلفتين فانه يمكن ايجاد عدد جـ بين أ و ب بحيث ان ق (جـ) = ٠ أي ان للاقتران صفرا عند جـ . ومعنى هذا هندسيا انه اذا كانت ع (أ ، ق (أ) نقطة واقعة على منحنى اقتران متصل تقع اسفل محور السينات والنقطة د (ب ، ق (ب)) تقع فوق محور السينات أو بالعكس فيجب ان يقطع المنحنى محور السينات عند نقطة ما ولتكن و (جـ ، ٠) حيث أن أ < جـ < ب .



شكل ٢ — ١٢

تمارين

في التمارين ١ – ٤ اثبت ان الاقتران ق متصل عند النقطة المعطاة أ .

١ . ق (س) = $\sqrt{٢س - ٥}$ + ٣س ، أ = ٤

٢ . ق (س) = ٣س^{٢} + ٧ − $\frac{١}{\sqrt{٧ - س}}$ ، أ = − ٢

٣. ق (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤}$ ، أ = ٣

٤. ق (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ، أ = $١٠^{-٦}$

في كل من التمارين ٥ – ١٠ أوجد جميع النقاط التي يكون عندها الاقتران ق متصلا

٥. ق (س) = $\frac{٣\text{س} - ٥}{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ٣}$

٦. ق (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}$

٧. ق (س) = $\sqrt{٢\text{س} - ٣} + \text{س}^{٢}$

٨. ق (س) = $\frac{\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س} - ٤}}$

٩. ق (س) = $\frac{\text{س} - ١٠}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}$

١٠. ق (س) = $\frac{\text{س}}{\sqrt{١٧ - \text{س}^{٢}}}$

١١ – ١٤. ابحث في نقط الانفصال للاقترانات المعرفة في التمارين ١١ – ١٤ من البند ٤ .

١٥. اذا كانت ق (س) =
- ١ اذا كانت س ≠ ٣
- ٠ اذا كانت س = ٣

فهل يكون ق متصلا أم منفصلا عند ٣ ؟ لماذا ؟

١٦. اذا كانت ق (س) =
$$\begin{cases} \dfrac{|س - ٣|}{س - ٣} & \text{اذا كانت } س \neq ٣ \\ ١ & \text{اذا كانت } س = ٣ \end{cases}$$

فهل يكون الاقتران متصلا أم منفصلا عند ٣ ؟ اذكر السبب ؟

١٧. اثبت انه اذا كانت ق (س) = ١ / س تكون ق متصلة عند جميع الفترات المفتوحة التي لا تحتوي على الصفر. ما شأن الفترات المفتوحة التي تحتوي على الصفر ؟

١٨. اذا كانت ق معرفة كما في المثال في البند ٢ اثبت أن ق يكون منفصلا عند أي عدد حقيقي أ .

١٩. اذا كانت ق متصلة على فترة تحتوي على جـ وكان ق (جـ) > ٠ اثبت أن ق (س) تكون موجبة خلال فترة تحوي جـ (ملاحظة انظر الى (٢ - ١١) .

٢٠. اثبت ان الاقتران ق متصل عند أ اذا وفقط اذا كان

نهـــا ق (أ + هـ) = ق (أ) .
هـ ← ٠

في كل من التمارين ٢١ - ٢٤ حقق نظرية القيمة الوسطى للاقتران ق على الفترة [أ ، ب] المذكورة باثبات انه اذا كان و اي عدد يقع بين ق (أ) وق (ب) فيوجد عدد جـ ∈ [أ ، ب] بحيث أن ق (جـ) = و ٠

٢١. ق (س) = $س^٣$ + ١ : [-١ ، ٢]

٢٢. ق (س) = - $س^٣$: [٠ ، ٢]

٢٣. ق (س) = $س^٢$ + ٤س + ٣ : [٠ ، ١]

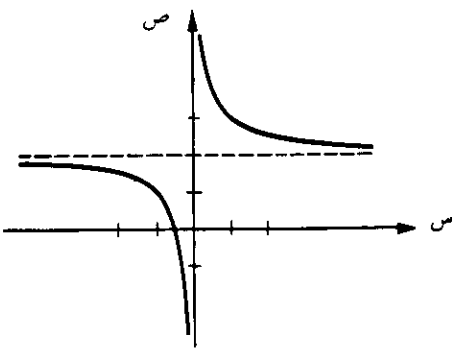
٢٤. ق (س) = $س^٢$ - س : [-١ ، ٣]

٦ — النهايات عند اللانهاية :

لتكن ق (س) = ٢ + $\frac{١}{س}$ ولندرس بيان ق المرسوم في الشكل ٢ – ١٣ فحوالي س = ٠ أمر يثير الانتباه ، الا اننا سنركز نظرنا الان على قيم ق (س) عندما يكون س عدداً كبيرا موجبا . فمثلا :

ق (١٠٠) = ٢,٠١ ، ق (١٠٠٠) = ٢,٠٠١ ، ق (١٠٠٠٠) = ٢,٠٠٠١ وكذلك ق (١٠٠٠٠٠) = ٢,٠٠٠٠١ .

ومن الواضح انه يمكن جعل ق (س) تقترب من ٢ الى أي حد نريد . وهذا يكافيء القول بانه يمكننا جعل | ق (س) – ٢ | صغيرة كما نشاء باختيار س كبيرة بما فيه الكفاية . . ويمكن التعبير عن هذا التغير للاقتران ق (س) كما يلي :

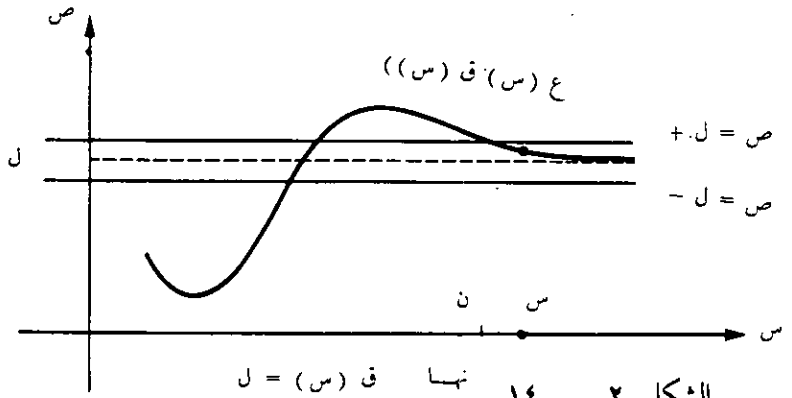


الشكل ٢ — ١٣

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \left(٢ + \frac{١}{س} \right) = ٢$$

ويمكن قراءتها « نهاية ٢ + $\frac{١}{س}$ تصبح ٢ عندما تؤول س الى مالا نهاية (أو عندما نزداد س دون حصر) .

(٢ – ٣٩) تعريف $\text{نهـا}_{س \to \infty}$ ق (س) = ل



الشكل ٢ — ١٤ نهـا ق (س) = ل
س ← ∞

اذا كانت ق معرفة على الفترة [جـ . ∞] فان

نهـا ق (س) = ل تعني انه لكل ε > ٠ هنالك عدد موجب
س ← ∞

ن حيث:

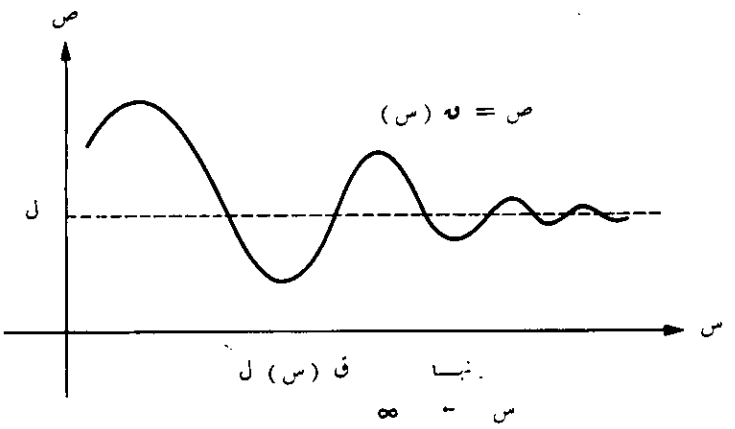
| ق (س) − ل | < ε لكل س > ن .

واذا تحقق (٢ − ٣٩) نقول ان نهاية ق (س) عندما تؤول س الى مالا نهاية (أو عندما تزداد س دون حصر) هي ل .
والرمز ∞ لا يمثل عدداً غير اننا نقول احيانا « ق (س) نهايتها ل عند اللانهاية » . ومن المفيد ان ندرس الدلالة البيانية للتعريف السابق . فنفرض أن

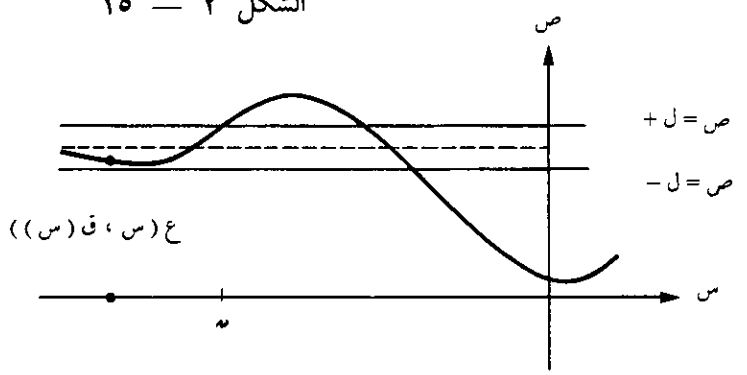
نهـا ق (س) = ل ، ولنأخذ اى خطين أفقيين
س ← ∞

ص = ل ± ε

(انظر الى الشكل ٢ − ١٤) .
فبناء على (٢ − ٣٩) ، اذا كانت س اكبر من عدد ما ن فان جميع النقط ع (س ، ق (س)) تقع بين هذين الخطين الافقيين . وبعبارة اخرى ، على وجه التقريب ، ان بيان ق يقترب من الخط المستقيم ص = ل عندما تصبح س أكبر فأكبر . ويمكن أن يقترب بيان ق من الخط المستقيم ص = ل بطرق عديدة . والشكل ٢ − ١٥ هو مثال آخر على ذلك



الشكل ٢ — ١٥



الشكل ٢ — ١٦

والحالة التي يكون فيها س كبيرا عدديا وسالبا هي ايضا مهمة ولا سيما ما يلي :

(٢ — ٤٠) نهـا ق (س) = ل .
س ← −∞

تعني ان |ق (س) − ل| يمكن جعلها كمية صغيرة الى اي حد نشاء باختيار قيم س اعدادا سالبة كبيرة بما فيه الكفاية . وفي هذه الحالة نقول ان للاقتران ق (س) نهاية ل عندما تقترب س من اللانهاية السالبة .

والتعريف (٢ — ٤٠) يمكن ان نحصل عليه من (٢ — ٣٩) وذلك بأخذ ن سالبا واستبدال س > ن بالمتباينة س < ن

وفي الشكل ٢ – ١٦ توضيح هندسي للتعريف (٢ – ٤٠) .

واذا اعتبرنا اي مستقيمين ص = ل ± ε فان جميع النقط ب (س ، ق (س)) على البيان تقع بين هذين الخطين ، اذا كانت س اقل من عدد ما وليكن ن . فمثلا يمكننا اثبات أن

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow -\infty} \left(٢ + \frac{١}{س} \right) = ٢$$

وكما هو واضح بالشكل ٢ – ١٣ ، عندما تتناقص س من خلال القيم السالبة ، تقترب النقط الواقعة على البيان من الخط المستقيم ص = ٢ .

واذا تحقق (٢ – ٣٩) أو (٢ – ٤٠) يسمى الخط المستقيم ص = ل بخط الاقتراب الافقي للبيان . والخط المستقيم ص = ل في الاشكال ٢ – ١٤ ، ٢ – ١٦ هو خط اقتراب أفقي لذلك البيان .

ويمكن الحصول على نظريات نهاية تطابق النظريات المذكورة في البند الثالث ، وخصوصاً النظريات (٢ – ١٢) ، (٢ – ١٩) المتعلقة بنهايات الجمع والضرب والقسمة تكون صحيحة في الحالات س ← ∞ أو س ← – ∞

وبالمثل فالنظرية (٢ – ٢٥) التي تتعلق بنهاية $\sqrt[ن]{هـ (س)}$ تصح للنهايات عند اللانهاية .

واخيرا من البديهي ان نبرهن أن

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow \infty} \quad جـ = جـ .$$

والنظرية التالية تضع ايدينا على وسيلة هامة لحساب انواع معينة من النهايات .

(٢ – ٤١) نظريـــة :

اذا كان ك عددا نسبيا موجبا وكان جـ أي عدد حقيقي غير الصفر فان

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{جـ}{س^{ك}} = ٠ \quad \text{وكذلك}$$

$$\text{نهـا}_{س \to -\infty} \frac{جـ}{س^{ك}} = ٠$$

بشرط ان يكون المقدار $س^{ك}$ معرفا دائما .

البرهـــان : لاي $\epsilon > ٠$. تكون المتباينات التالية كلها متكافئة .

$$\epsilon > \left| ٠ - \frac{جـ}{س^{ك}} \right|$$

$$\frac{|س^{ك}|}{|جـ|} > \frac{١}{\epsilon}$$

$$|س| < \sqrt[ك]{\frac{|جـ|}{\epsilon}}$$

فاذا جعلنا ن = $\sqrt[ك]{\frac{|جـ|}{\epsilon}}$ فانه عندما تكون ن < س تكون المتباينة الاخيرة ،

ومن ثم الاولى في القائمة ، صحيحة .

ومن (٢ – ٣٩) ينتج :

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{جـ}{س^{ك}} = ٠$$

وبنفس الطريقة نبرهن الجزء التالي من النظرية .

اختبر $\lim_{س \to -\infty} \frac{٢س^{٢} - ٥}{٣س^{٢} + س + ٢}$

الحـــل : ما يهمنا هنا هو قيم س الكبيرة رقيا ، السالبة ، فيمكن اذن ان نفترض ان س $\neq ٠$ فنقسم كلا من البسط والمقام على $س^{٢}$ ثم نستعمل نظريات النهايات فنحصل على :

$$\lim_{س \to -\infty} \frac{٢س^{٢} - ٥}{٣س^{٢} + س + ٢}$$

$$= \frac{\lim_{س \to -\infty} \left(٢ - \frac{٥}{س^{٢}} \right)}{\lim_{س \to -\infty} \left(٣ + \frac{١}{س} + \frac{٢}{س^{٢}} \right)}$$

$$= \frac{\left[\lim_{س \to -\infty} ٢ - \lim_{س \to -\infty} \frac{٥}{س^{٢}} \right]}{\left[\lim_{س \to -\infty} ٣ + \lim_{س \to -\infty} \frac{١}{س} + \lim_{س \to -\infty} \frac{٢}{س^{٢}} \right]}$$

$$= \frac{\lim_{س \to -\infty} ٢ - ٢ \lim_{س \to -\infty} \frac{١}{س} \cdot \lim_{س \to -\infty} \frac{٥}{س^{٢}}}{\lim_{س \to -\infty} ٣ + \lim_{س \to -\infty} \frac{١}{س} + ٢ \lim_{س \to -\infty} \frac{١}{س^{٢}}}$$

$$= \frac{٠ - ٢}{٣ + ٠ + ٠} = \frac{٢}{٣} .$$

فالخط المستقيم ص = $\frac{٢}{٣}$ هو خط تقارب افقي لمخطط الاقتران .

مثـال ٢ :

اذا كانت ق (س) = $\frac{٣س + ٢}{٥س^{٣} - ٤س}$ فأوجد خطوط التقارب الافقية لبيان ق .

الحـــل :

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٢}$ واستعمال نظريات النهايات نحصل على :

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \quad ق (س) = \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٣س + ٢}{٥س^{٣} + ٤س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{\frac{٣}{س^{٢}} + \frac{٢}{س^{٣}}}{٥ - \frac{٤}{س^{٣}}}$$

$$= \frac{\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٣}{س^{٢}} + \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٢}{س^{٣}}}{\text{نهـا}_{س \to \infty} ٥ - \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٤}{س^{٣}}}$$

$$= \frac{٠ + ٠}{٥ - ٠} = ٠$$

وبالمثل فان $\text{نهـا}_{س \to -\infty}$ ق (س) = ٠

ولهذا يكون ص = ٠ (محور السينات) هو خط التقارب الافقي لبيان ن .

مثـال ٣ :

$$\text{اختبر} \quad \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٩س^{٢} + ٢}}{٣ - ٤س^{٠}}$$

الحـــل :

بقسمة كل من البسط والمقام على س وبتطبيق نظريات النهاية نحصل على :

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٩س^{٢} + ٢}}{٣ - ٤س} = \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٩ + \frac{٢}{س^{٢}}}}{٤ - \frac{٣}{س}}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{نهـا}_{س \to \infty} \left(٩ + \frac{٢}{س^{٢}} \right)}}{\text{نهـا}_{س \to \infty} \left(٤ - \frac{٣}{س} \right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{نهـا}_{س \to \infty} \left(٩ + \frac{٢}{س^{٢}} \right)}}{\text{نهـا}_{س \to \infty} ٤ - \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٣}{س}}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{نهـا}_{س \to \infty} \left(9 + \frac{2}{س^2} \right)}}{\text{نهـا}_{س \to \infty} \left(4 - \frac{3}{س^2} \right)}$$

$$= \frac{\sqrt{9 - 0}}{4 -} = - \frac{3}{4}$$

تمارين :

أوجد النهايات للتمارين ١ - ١٢ .

١ . $\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٥س^2 - ٣ + ١}{٢س^2 + ٤س - ٧}$

٢ . $\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٣س^2 - س + ١}{٦س^2 + ٢س^2 - ٧}$

٣ . $\text{نهـا}_{س \to -\infty} \frac{٤ - ٧س}{٢ + ٣س}$

٤ . $\text{نهـا}_{س \to -\infty} \frac{(٣س + ٤)(س - ١)}{(٢س + ٧)(س + ٢)}$

٥ . $\text{نهـا}_{س \to \infty} \sqrt[٣]{\frac{٨ + س^2}{س(س + ١)}}$

٦ . $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س - ٣}{\sqrt{س^٢ + ١}}$

٧ . $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٤س + ١}}{٤س - ١}$

٨ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^٢ - س + ٣}{س^٣ + ١}$

٩ . $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{س^٢ + ٥س} - س)$

١٠ . $\lim_{س \to \infty} (س - \sqrt{س^٢ + ٣س})$

١١ . $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٥]{س} + ١}{\sqrt[٥]{س} - ١}$

١٢ . $\lim_{س \to \infty} (س - \sqrt{س^٢ + ١})$

١٣ . أوجد خطوط التقارب الافقية للمنحنى ص = $\frac{٤س^٢}{١ + س^٢}$ وارسمه .

١٤ . أوجد خطوط التقارب الأفقية للمنحنى ص = $\frac{٤}{٩ + س^٢}$ وارسمه

١٥ . اذا كان ق ، هـ اقترانين حدوديين من الدرجة ن فأوجد

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{ق(س)}{هـ(س)} \quad \text{وكذلك} \quad \text{نهـا}_{س \to -\infty} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$$

ماذا يحدث اذا كانت درجة ق اقل من درجة هـ ؟

١٦ . بالتطبيق المباشر للتعريف (٢ – ٣٩) اثبت أن

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \left(\frac{١}{س} + ٢ \right) = ٢$$

١٧ . اذا كانت ق حدودية ودرجتها أكبر من الصفر فاثبت ان

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{١}{ق(س)} = ٠$$

١٨ . عرف (٢ – ٤١) بطريقة مشابهة للتعريف (٢ – ٣٩) .

١٩. اذا كان ق ، هـ اقترانين يحققان ٠ < ق (س) < هـ (س) لجميع قيم س ، وكانت

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} هـ(س) = ٠$$ اثبت ان

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} ق(س) = ٠$$

٢٠ . برهن انه اذا كانت ق (س) لها نهاية عندما تصبح س لا نهائية فتكون هذه النهاية وحيدة .

٧ ــ الاقترانات التي تصبح لا نهائية :

اذا كانت $ق(س) = \frac{١}{(س - ٣)^{٢}}$ فعندما تقترب س من ٣(ولكن س ≠ ٣

يقترب المقام $(س - ٣)^{٣}$ من الصفر ، ولهذا تكون ق (س) كبيرة جدا .

اننا فعلا يمكننا ان نجعل ق (س) كبيرة كما نشاء باختيار س قريبة بما فيه الكفاية من ٣ . واستنادا الى التعريف التالي نشير الى هذا التغير في ق س) بكتابة

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} \frac{١}{(س - ٣)^{٢}} = \infty .$$

(٢ – ٤٢) تعريف $\text{نهـا}_{س \leftarrow أ}$ ق (س) = ∞ .

اذا كانت ق (س) معرفة على فترة مفتوحة تحتوي على أ (ولكن ربما باستثناء س = أ) فتصبح قيمة ق (س) لا نهائية (أي تكبر دون حصر) عندما تقترب س من أ (ونكتب

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow أ} \text{ ق (س) = } \infty) .$$

اذا كان لكل عدد موجب م توجد δ ، بحيث أن

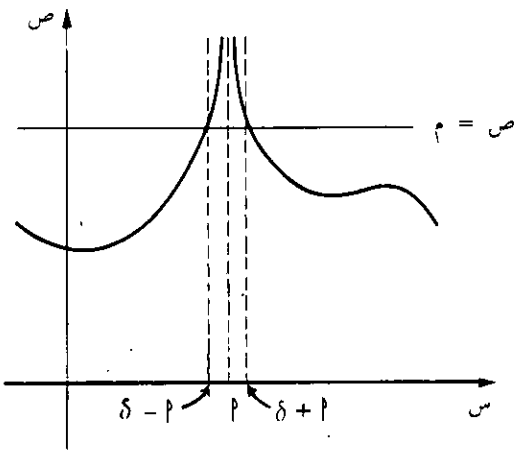
ق (س) > م عندما تكون ٠ < | س – أ | < δ

واحيانا نشير الى (٢ – ٤٢) بالقول ان ق (س) تصبح لا نهائية موجبة عندما تقترب س من أ . والشكل ٢ – ١٧ هو توضيح هندسي لبيان ق . فاذا أخذنا اي خط افقي ص = م فهنالك فترة ما مناسبة (أ – δ ، أ + δ) اذا وقعت فيها س حيث س ≠ أ تقع النقط الواقعة على البيان فوق الخط الافقي . ونؤكد هنا ان ∞ ليست عددا ومن ثم فالرمز

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow أ} \text{ ق (س) = } \infty$$

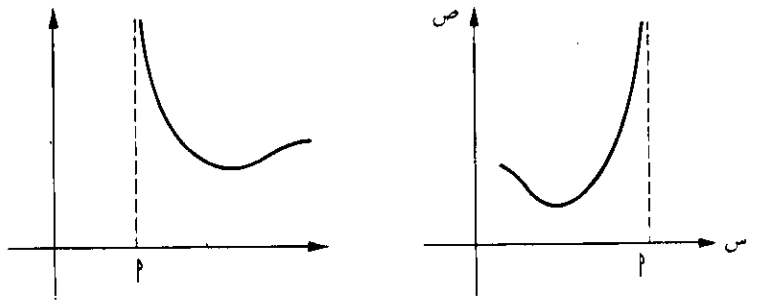
لا يعني ان النهاية موجودة عند اقتراب س من أ . فنحن نستعمل الرمز ∞ لمجرد التعبير عما وصفناه اعلاه .

ويمكن توضيح المفهوم ان ق (س) تصبح لا نهائية عندما تقترب س من أ من اليمين أو اليسار وذلك بتعديل بسيط في (٢ – ٤٢) . ونرمز الى هذا المفهوم بالصيغة التالية :



الشكل ٢ — ١٧

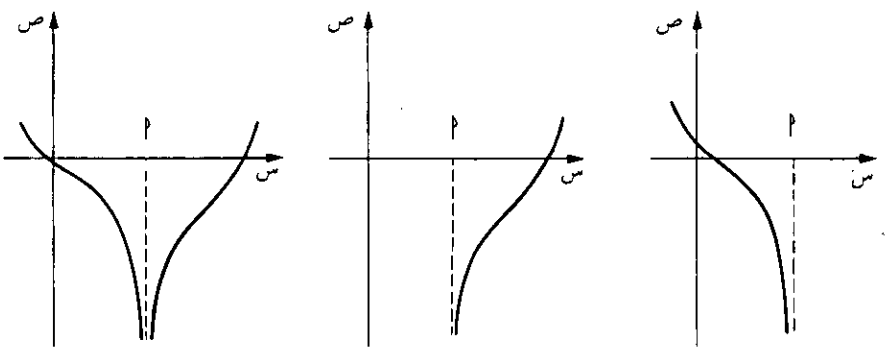
$$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{ا}} \text{ق (س)} = \infty$$



(١) $\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{ا}} \text{ق (س)} = \infty$

(٢) $\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{ا}^-} \text{ق (س)} = \infty$

الشكل ٢ — ١٨



(١) $\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{ا}} \text{ق (س)} = -\infty$

(٢) $\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{ا}^-} \text{ق (س)} = -\infty$

الشكل ٢ — ١٩

(٢ – ٤٣) $\lim_{س \to ا^+} ق(س) = \infty$ أو $\lim_{س \to ا^-} ق(س) = \infty$

على الترتيب .

فلنأخذ $س \to ا^+$ فنفترض أن ق (س) معرفة على فترة مفتوحة (ا ، جـ) وتغير المتباينة الاخيرة في (٢ – ٤٢) من

$. < |س - ا| < \delta$ الى $ا < س < ا + \delta$

أي ان س تأخذ قيما أكبر من ا . ويمكن وضع عبارات مشابهة في حالة $س \to ا^-$ ، والبيانات المرسومة في شكل (٢ – ١٨) توضح التعريف (٢ – ٤٣)

(٢ – ٤٤) تعريف $\lim_{س \to ا} ق(س) = -\infty$

اذا كانت ق (س) معرفة على فترة مفتوحة تحتوي ا (ربما باستثناء س = ا فان ق (س) تصبح لا نهائية سالبا (أو تتناقص دون حصر) ونكتب

$$\lim_{س \to ا} ق(س) = -\infty$$

اذا كان لكل عدد سالب ن توجد $\delta > 0$ بحيث أن

ق (س) < ن عندما تكون $. < |س - ا| < \delta$

والشكل ٢ – ١٩ يبين الرسوم التوضيحية للتعريف (٢ – ٤٤) بالاضافة الى الحالتين $س \to ا^+$ و $س \to ا^-$.

اذا تحقق (٢ – ٤٢) أو (٢ – ٤٤) (مع حالات النهايات من طرف واحد) يسمى الخط المستقيم س = ا بالخط التقاربي العمودي لبيان ق (Vertical asymptote) ونقول كذلك بأن ق لا نهائية الانفصال عند س = ا .

والخط س = ا في الاشكال ٢ – ١٧ إلى ٢ – ١٩ هو خط تقارب عمودي للبيان المعطى . ويمكن استخدام النظرية التالية التي سنذكرها دون برهان في ايجاد نهايات معينة :

(٢ - ٤٥) نظريـــة :

(١) اذا كان ن عددا زوجيا موجبا فان

$$\text{نهـا}_{س \to أ} \frac{١}{(س - أ)^{ن}} = \infty .$$

(٢) اذا كان ن عددا فرديا موجبا فان

$$\text{نهـا}_{س \to أ+} \frac{١}{(س - أ)^{ن}} = \infty \text{ ، وكذلك}$$

$$\text{نهـا}_{س \to أ-} \frac{١}{(س - أ)^{ن}} = - \infty$$

ونستنتج انه اذا كان ن عددا موجبا وكانت

$$ق (س) = \frac{١}{(س - أ)^{ن}}$$ فالخط المستقيم س = أ هو خط تقارب عمودي لبيان ق .

وبما أن $$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{١}{(س - أ)^{ن}} = ٠$$ فيكون محور السينات خطا تقاربيا افقيا . ولا ينبغي ان تحفظ (٢ - ٤٥) عن ظهر قلب فكل مسألة تعطي يمكن ايجاد جوابها بداهة .

فمثلا لنعتبر $$\text{نهـا}_{س \to -٥} \frac{١}{(س + ٥)^{٣}}$$. فاذا كانت س قريبة من - ٥ وس > - ٥ كان س + ٥ قريبا جدا من الصفر ، ويكون

سالبا ولهذا فان $(س + ٥)^{٣}$ يكون سالبا وقريبا من الصفر ويكون المقدار $\frac{١}{(س + ٥)^{٣}}$ عددا كبيرا سالبا فنكتبه:

$$\text{نهـا}_{س \to -٥} \frac{١}{(س + ٥)^{٣}} = -\infty .$$

وهذه امثلة اخرى على النظرية (٢ - ٤٥) :

$$\text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{١}{(س - ٥)^{٤}} = \infty ،$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{١}{(س - ٥)^{٣}} = -\infty$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٥^{+}} \frac{١}{(س + ٥)^{٣}} = \infty .$$

مثـال ١ :

اذا كانت $ق (س) = \frac{١}{س - ٢}$ فابحث في

$$\text{نهـا}_{س \to ٢^{+}} ق (س) ،$$

وفي $\text{نهـا}_{س \to ٢^{-}} ق (س)$ ، وارسم بيان ق .

الحـــل :

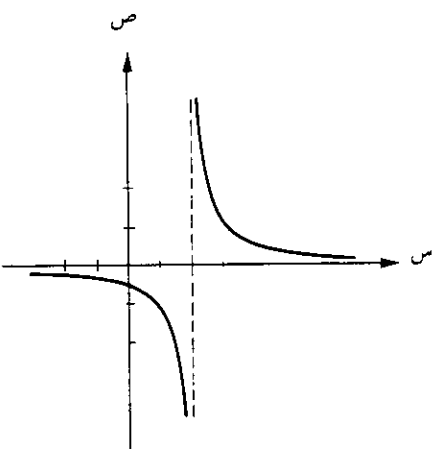
اذا كانت س قريبة جدا من ٢ ولكن اكبر من ٢ فان س − ٢ يكون عددا صغيرا موجبا ومن ثم فان $\frac{١}{س - ٢}$ هو عدد كبير موجب، فيتضح ان

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢^+} \frac{١}{س - ٢} = \infty .$$

ويمكن استنتاج هذه الحقيقة من (٢ − ٤٥ ب) ، بأخذ أ = ٢ و ن = ١ .
واذا كانت س قريبة من ٢ ولكن اقل من ٢ فيكون س − ٢ قريبا من الصفر وسالبا ولهذا فان

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢^-} \frac{١}{س - ٢} = - \infty .$$

ويمكن استنتاج هذا ايضا من (٢ − ٤٥ ب) ، والشكل ٢ − ٢٠ يبين رسم بيان ق .
فالخط المستقيم س = ٢ هو خط تقارب عمودي، ولاحظ ايضا أن



الشكل ٢ — ٢٠

$$\text{قاعدة } (س) = \frac{١}{س - ٢}$$

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{1}{س - 2} = 0 = \text{نهـا}_{س \to -\infty} \frac{1}{س - 2}$$

ولهذا فان ص = ٠ (أي محور السينات) خط تقاربي افقي

وباخذ أ = ٠ في (٢ - ٤٥) نحصل على الحالات الخاصة التالية :

(١) اذا كان ن عددا زوجيا موجبا فان

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{1}{س^{ن}} = \infty \quad (٢ - ٤٦)$$

(٢) اذا كان ن عددا فرديا موجبا فان $\text{نهـا}_{س \to 0^+} \frac{1}{س^{ن}} = \infty$ ،

$\text{نهـا}_{س \to 0^-} \frac{1}{س^{ن}} = -\infty$ ، ويمكن الحصول على نتائج مماثلة

للاسس النسبية

واليك خواص عديدة للجمع والطرح وحاصل القسمة وحاصل الضرب للاقترانات التي تصبح لا نهائية ، ويمكن وضع نتائج مشابهة لها تتحقق في المجالات

س $\to$ أ$^+$ و س $\to$ أ$^-$.

(٢ - ٤٧) نظريـــة :

اذا كانت $\text{نهـا}_{س \to أ}$ ق (س) = ∞

وكانت $\text{نهـا}_{س \to أ}$ هـ (س) = جـ $\neq$ ٠ فان

(١) $\lim_{س \to أ}$ هـ (س) + ق (س) = ∞

(٢) اذا كانت جـ > ٠ فان

$\lim_{س \to أ}$ هـ (س) ق (س) = ∞ وان

$\lim_{س \to أ} \frac{ق (س)}{هـ (س)} = ∞$.

(٣) اذا كانت جـ < ٠ فان

$\lim_{س \to أ} \frac{ق (س)}{هـ (س)} = - ∞$.

(٤) $\lim_{س \to أ} \frac{هـ (س)}{ق (س)} = ٠$

وواضح ان حقائق النظرية (٢ – ٤٧) بديهية واضحة ، فعلى سبيل المثال في (١) من النظرية اذا كانت هـ (س) قريبة من جـ وكانت ق (س) متزايدة دون حصر فعندما تقترب س من أ فمن المعقول ان نتوقع انه يمكن جعل ق (س) + هـ (س) كبيرة جدا كما نريد باختيار س قريبة من أ بما فيه الكفاية . وفي (٣) اذا كانت

$\lim_{س \to أ}$ هـ (س) = جـ < ٠

فتكون هـ (س) سالبة عندما تكون س قريبة من أ ولذلك اذا كانت س قريبة من أ يكون حاصل الضرب هـ (س) ق (س) عددا كبيرا سالبا وهذا يجعل

$$\text{نهـا}_{س \to أ} \; هـ (س) \; ق (س) = -\infty .$$

وعلى القاريء أن يطبق هذا النمط من النقاش على حقائق النظرية الاخرى . ولا نريد أن نعطي البراهين الشكلية لهذه النظرية

ويمكن ذكر نظرية مشابهة في حالة

$$\text{نهـا}_{س \to أ} \; ق (س) = -\infty .$$

كما يمكن اثبات نظريات مشابهة تتضمن أكثر من اقترانين.
ونجد للاقترانات النسبية عادة خطوط تقارب افقية وعمودية والشكل ٢ – ٢٠ هو مثال على ذلك بالاضافة الى المثال التالي :

مثـال ٢ :

اذا كانت $ق (س) = \frac{٢ س^{٢}}{س - س^{٢}}$ فأوجد خطوط التقارب الافقية والعمودية لبيان ق ثم ارسم البيان .

الحـــل :

نبدأ بكتابة

$$ق (س) = \frac{٢ س^{٢}}{(٣ - س)(٣ + س)}$$

وينعدم المقام عند س = ٣ أو س = – ٣ ولهذا فيمكن ان يكون هذان المستقيمان خطى تقارب عموديين (لماذا ؟) .

وبما أن $\lim_{س \to ٣^-} \frac{١}{٣ - س} = \infty$ وكذلك

$$\lim_{س \to ٣^-} \frac{٢ س^٢}{٣ + س} = ٣$$

فباستعمال نظرية (٢ - ٤٧) (٢)، نجد ان

$$\lim_{س \to ٣^-} ق (س) =$$

$$\lim_{س \to ٣^-} \left(\frac{١}{٣ - س} \right) \left(\frac{٢ س^٢}{٣ + س} \right) = \infty$$

وبما أن

$$\lim_{س \to ٣^+} \frac{١}{٣ - س} = - \infty$$

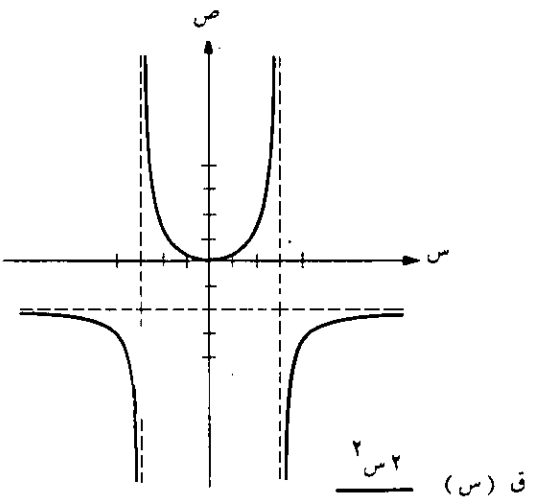
فباستعمال نظرية (٢ - ٤٧) (٣) نحصل على ما يلي :

$$\lim_{س \to ٣^+} = \lim_{س \to ٣^-} \left(\frac{١}{٣ - س} \right) \left(\frac{٢ - س^٢}{٣ + س} \right) = - \infty$$

وهذا التغير بالقرب من الخط التقاربي العمودي س = ٣ موضح في الشكل ٢ - ٢١

وبالمثل بما أن

$$\lim_{س \to ٣^-} \frac{١}{٣ - س} = - \infty$$ فان



الشكل ٢ — ٢١

$$\text{نهـا}_{س \to -٣^-} \quad ق(س) = \text{نهـا}_{س \to -٣^-} \left(\frac{١}{٣ + س}\right)\left(\frac{٢ س^٢}{٣ - س}\right)$$

$$= -\infty$$

ولكن لأن

$$\text{نهـا}_{س \to -٣^+} \quad \frac{١}{٣ + س} = \infty \quad \text{فان}$$

$$\text{نهـا}_{س \to -٣^+} \quad ق(س) = \infty$$

وهذا التغير في ق (س) قرب س = − ٣ موضح في الشكل ٢ − ٢١ . ولايجاد خطوط التقارب الأفقية نعتبر ما يلي :

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow \infty} \quad ق\ (س) = \text{نهـا}_{س \leftarrow \infty} \frac{٢ س^{٢}}{٩ - س^{٢}} = \text{نهـا}_{س \leftarrow \infty} \frac{٢}{\frac{٩}{س^{٢}} - ١} = - ٢$$

ونحصل على نفس النهاية عندما س $\leftarrow -\infty$

ونتيجة لهذا فان ص = - ٢ هو خط تقارب **أفقي** .

وباستعمال المعلومات السالفة الذكر ورسم بعض النقاط نحصل على الشكل ٢ - ٢١ .

ومن الضروري احيانا دراسة حالات مشابهة للحالات التالية :

(١) $\text{نهـا}_{س \leftarrow \infty}$ ق (س) = ∞

(٢) $\text{نهـا}_{س \leftarrow \infty}$ ق (س) = $-\infty$

(٣) $\text{نهـا}_{ض \leftarrow -\infty}$ ق (س) = ∞

(٤) $\text{نهـا}_{س \leftarrow -\infty}$ ق (س) = $-\infty$.

ويجب ان يكون المعنى لهذه النهايات واضحا . فالحالة (٢) التي تقول ان ق (س) تصبح لا نهائية سالبة عندما تصبح س لا نهائية موجبة يمكن وضعها بالشكل التالي :

« لأي عدد سالب ن يوجد عدد موجب م بحيث ان

ق (س) < ن عندما تكون م < س .

مثـال ٣ :

اختبر $\lim_{س \to \infty} (س^{٢} - ٣س)$.

الحـــل :

يمكن كتابة

$$\lim_{س \to \infty} (س^{٢} - ٣س) = \lim_{س \to \infty} س (س - ٣)$$

وبما ان المقدارين س ، (س – ٣) يمكن جعلهما أعداداً كبيرة كما نشاء وذلك باختيار س عدد كبيرا بما فيه الكفاية فكذلك يمكن ان تكون س (س – ٣) ولهذا فان

$$\lim_{س \to \infty} (س^{٢} - ٣س) = \infty .$$

مثـال ٤ :

أوجد $\lim_{س \to \infty} (س - \sqrt{س^{٢} + ١})$

الحـــل :

سنتبع الخطوات التالية

$$\lim_{س \to \infty} (س - \sqrt{س^{٢} + ١}) =$$

$$\lim_{س \to \infty} (س - \sqrt{س^{٢} + ١}) \left(\frac{س + \sqrt{س^{٢} + ١}}{س + \sqrt{س^{٢} + ١}} \right)$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} - (س^{٢} + ١)}{س + \sqrt{س^{٢} + ١}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-١}{س + \sqrt{س^{٢} + ١}} = ٠$$

تمارين :

١ . في التمارين ١ – ١٠ أوجد $\lim_{س \to ا^{+}}$ ق (س)

ونهـا $\lim_{س \to ا^{-}}$ ق (س)

١ . ق (س) = $\frac{٥}{٤ - س}$ ، ا = ٤

٢ . ق (س) = $\frac{٥}{٤ - س}$ ، ا = ٤

٣ . ق (س) = $\frac{٨}{(٢س + ٥)^{٣}}$ ، ا = $-\frac{٥}{٢}$

٤ . ق (س) = $\frac{-٤}{٧س + ٣}$ ، ا = $\frac{-٣}{٧}$

٥ . ق (س) = $\frac{٣س}{(س + ٨)^{٢}}$ ، ا = – ٨

٦ . ق (س) = $\frac{٣س^{٢}}{(٢س - ٩)^{٢}}$ ، أ = $\frac{٩}{٢}$

٧ . ق (س) = $\frac{٢س^{٢}}{س^{٢} - س - ٢}$ ، أ = − ١ ، أ = ٢

٨ . ق (س) = $\frac{٤س}{س^{٢} - ٤س + ٣}$ ، أ = ١ ، أ = ٣ .

٩ . ق (س) = $\frac{١}{س (س - ٣)^{٢}}$ ، أ = ٠ ، أ = ٣

١٠ . ق (س) = $\frac{س^{٢}}{س + ١}$ ، أ = − ١ .

في كل من التمارين ١١ − ١٤ أوجد خطوط التقارب الافقية والعمودية لمخطط ق .

١١ . ق (س) = $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{س^{٢} + ٢س - ٣}$

١٢ . ق (س) = $\frac{س^{٢} - ٥س}{س^{٢} - ٢٥}$

١٣ . ق (س) = $\frac{س + ٤}{س^{٢} - ١٦}$

١٤ . ق (س) = $\frac{\sqrt[٣]{١٦ - س^{٢}}}{٤ - س}$

أوجد النهاية في كل من التمارين ١٥ – ١٨ .

١٥ . $\lim_{س \to \infty} \frac{س}{\sqrt{س + ١}}$

١٦ . $\lim_{س \to -\infty} \frac{٢س^{٢} + ٥}{س + ٧}$

١٧ . $\lim_{س \to \infty} (س - \sqrt{س})$

١٨ . $\lim_{س \to \infty} (س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}})$.

١٩ . اذا كان ق ، هـ اقترانين حدوديين ودرجة ق (س) اكبر من درجة هـ (س) فما هي

$$\lim_{س \to \infty} \frac{ق (س)}{هـ (س)}$$ ؟

٢٠ . برهن (٢ – ٤٥) .

تمارين مراجعـــة

شفهيـــة :

عرف أو ناقش كلا مما يأتي :

١ نهاية الاقتران عندما تقترب س من أ

٢ . التفسير الهندسي لِـ $\lim_{س \to أ}$ ق (س) = ل

٣ . نظريات النهايات

٤ . النهايات اليسرى واليمنى للاقترانات

٥ . نهايات الحدوديات والاقترانات النسبية .

٦ . اقتران متصل .

٧ . اقتران منفصل .

٨ . الاتصال على فترة

٩ . النهاية لاقتران مركب

١٠ . نظرية القيم الوسطى

١١ $\lim_{س \to \infty}$ ق (س) = ل

١٢ . $\lim_{س \to -\infty}$ ق (س) = ل

١٣ . $\lim_{س \to أ}$ ق (س) = ∞

١٤ . $\lim_{س \to أ}$ ق (س) = $-\infty$

١٥ . الخط التقاربي الافقي

١٦ . الخط التقاربي العمودي

كتابـــة :

أوجد كلاً من النهايات في التمارين ١ – ١٤ (ان وجدت).

١ . $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٤ - ١٦}{س^٢ - س - ٢}$

٢ . $\lim_{س \to \infty} \frac{(٢س - ٥)(٣س + ١)}{(س + ٧)(٤س - ٩)}$

٣ . $\lim_{هـ \to ٠} \left(\frac{١}{هـ}\right)\left(\frac{١}{(٢ + هـ)^٣} - \frac{١}{٨}\right)$

٤ . $\lim_{س \to -٣} \sqrt[٣]{\frac{س + ٣}{س^٣ + ٢٧}}$

٥ . $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س + ١١}{\sqrt{٧س + ١}}$

٦ . $\lim_{س \to -\infty} \frac{٦ - ٧س}{(٣ + ٢س)^٤}$

٧ . $\lim_{س \to ٣^+} \frac{٣ - س}{|٣ - س|}$

٨ . $\lim_{س \to -٤} (س - \sqrt{١٦ - س^٢})$

٩ . $\lim_{س \to \infty} (٢س - \sqrt{٤س^٢ + س})$

١٠ . $\lim_{س \to -\frac{٣}{٥}} \frac{١}{٥س - ٣}$

١١ . $\lim_{س \to +\frac{٢}{٣}} \frac{س^٢}{٤ - ٩س^٢}$

١٢ . $\lim_{س \to ٠^+} \left(\sqrt{س} - \frac{١}{\sqrt{س}} \right)$

١٣ . $\lim_{س \to ٢^+} \frac{|س - ٢|}{٢ - س}$

١٤ . $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{(س - ١)^٢}}$

١٥ . أوجد الخطوط التقاربية الأفقية والعمودية لمخطط ق في كل من الآتي :

(أ) $ق(س) = \frac{٣س^٢}{٢٥ - ٩س^٢}$

(ب) $ق(س) \frac{س - ١}{س^٣ + ٤س^٢}$

١٦ . اذا كانت $ق(س) = ٢س^٢ + \sqrt{س} - ٣$ فأثبت أن ق متصلة عند ٣ وأوجد أكبر فترة تكون خلالها ق متصلة .

ابحث نقاط انفصال ق في كل من التمارين ١٧ – ٢٠

الفصـل الثالث

المشتقات التفاضليـة

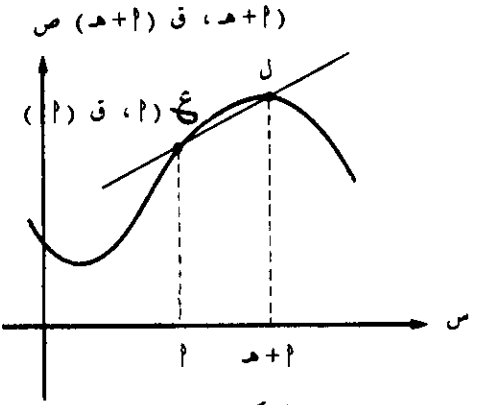
المشتقة التفاضلية

تعتبر المشتقة التفاضلية للاقتران من أكثر المفاهيم الرياضية فائدة فهي لا غنى عنها في الأبحاث المتقدمة في العلوم الطبيعية والانسانية . وسنبدأ دراستنا لها باعادة صياغة ميل المماس (المذكور في الفصل السابق) ثم نناقش سرعة جسم متحرك . وهذان المفهومان يمهدان لتعريف المشتقة المعطى في البند الثاني من هذا الفصل أما الجزء الباقي من هذا الفصل فمخصص لدراسة خواص المشتقات .

١ ـــ مقدمـــة :

اذا كانت النقطة ع (أ ، ق (أ)) أي نقطة على منحنى الاقتران ق (س) فانه من الممكن أن نرمز لاي نقطة أخرى على المنحنى بالرمز ل (أ + هـ ، ق (أ + هـ)) حيث هـ هي الفرق بين الأحداثيين السينيين للنقطتين ل ، ع (الشكل ٣ – ١) . وباستعمال (١ – ١٠) نجد ان ميل الخط المستقيم الواصل بين ل ، ع هو

$$م_{ل ع} = \frac{ق (أ + هـ) - ق (أ)}{هـ}$$



(الشكل ٣ — ١)

ولقد عرفنا في الفصل الثاني ميل المماس م عند النقطة ع بنهاية م ل ع عندما تؤول ل الى ع (البند ٢ – ٢ الشكل ٢ – ٢) أي عندما تؤول هـ الى الصفر اذا كان الاقتران متصلا ، وعليه فان التعريف السابق ذكره يصبح كما يلي :

٣ – ١ تعريف ميل المماس :

اذا كان الاقتران ق معرفا على فترة مفتوحة ف واذا كان أ أي عدد في ف فان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة ع (أ ، ق (أ)) هو

$$\text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}}$$

بشرط ان تكون هذه النهاية موجودة .

مثـال ٢ : أوجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) = س^{٣} عند النقطة ع (أ ، أ^{٣}) .

الحـــل هذه المسألة هي نفسها المذكورة في المثال ١ من البند الاول في الفصل الثاني . فباستعمال خارج القسمة المذكور في (٣ – ١) نجد ان :

$$\frac{ق(أ + هـ) - ق(أ)}{هـ} = \frac{(أ+هـ)^{٣} - أ^{٣}}{هـ}$$

$$= \frac{أ^{٣} + ٣أ^{٢}هـ + ٣أ هـ^{٢} + هـ^{٣} - أ^{٣}}{هـ}$$

$$= ٣أ^{٢} + ٣أ هـ + هـ^{٢}$$

فيل المماس هو

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} (٣أ^{٢} + ٣أهـ + هـ^{٢}) = ٣أ^{٢} .$$

واذا كان المماس رأسيا فلا ميل له وبناء عليه فان النهاية في (٣ – ١) غير موجودة . وسوف نؤجل دراسة المماس الرأسي حتى البند الاول من الفصل التالي . وقد كان من الاسباب الرئيسية لابتكار حساب التفاضل والتكامل الحاجة الى سبيل لدراسة خواص الاجسام في حالة حركتها . فلنبدأ البحث عن تعريف منطقي للسرعة المتجهة أو سرعة جسم متحرك عند لحظة معينة . ولنفرض للسهولة أن الجسم يتحرك على خط مستقيم وتسمى هذه الحركة بالحركة الخطية (Rectilinear motion) . فاذا كانت ف هي المسافة المقطوعة في ن وحدة زمنية فان السرعة المتوسطة ع خلال هذه الفترة تعرف كما يلي :

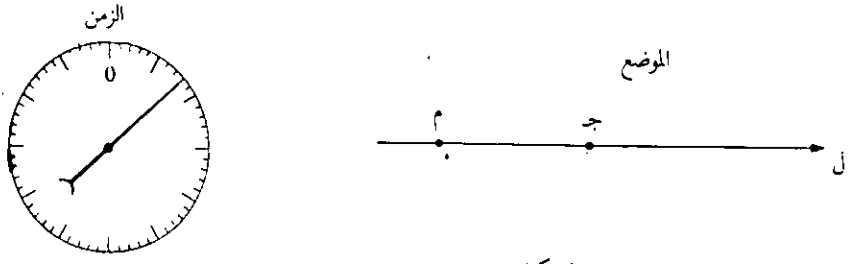
$$ع = ف / ن \quad (٣-٢)$$

مثال توضيحي ابتدائي :

اذا كانت المسافة بين المدينتين أ ، ب ١٥٠ ميلا وقامت سيارة من المدينة أ الساعة الواحدة بعد الظهر باتجاه المدينة ب فوصلت اليها الساعة الرابعة بعد الظهر ، فباستخدام (٣ – ٢) نجد ان السرعة المتوسطة

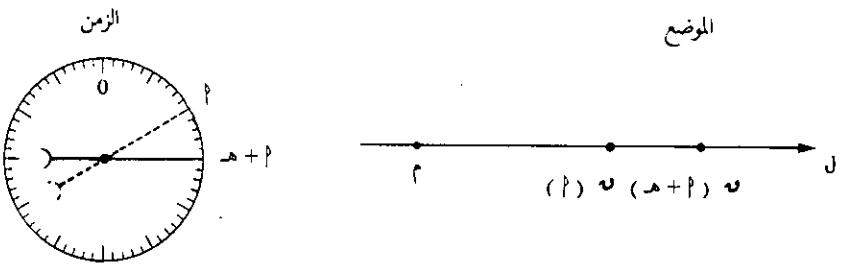
(Average Velocity) ع خلال هذه الفترة الزمنية هي ١٥٠ / ٣ أي ٥٠ ميلا / الساعة . فاذا حافظت السيارة على هذه السرعة فانها ستقطع المسافة بين أ ، ب بثلاث ساعات فقط . لاحظ ان السرعة المتوسطة لا تعطي أية معلومات عن السرعة عند أي نقطة فمثلا من الممكن ان يسجل مؤشر السيارة عند الساعة ٢,٣٠ : ٤٠ أو ٣٠ أو قد تتوقف حركة السيارة عندئذ . فاذا كنا نرغب في معرفة معدل حركة السيارة عند الساعة ٣٠ , ٢ بعد الظهر فاننا نحتاج الى معلومات عن حركة السيارة أو عن المكان الذي وصلت اليه حوالي هذه اللحظة . فمثلا افرض ان السيارة كانت الساعة ٣٠ , ٢ بعد الظهر على بعد ٨٠ ميلا من المدينة أ وعند الساعة ٣٥ , ٢ على بعد ٨٤ ميلا من أ . فنجد ان المسافة المقطوعة خلال هذه الفترة الزمنية هي اربعة اميال والزمن المقطوع هو ٥ دقائق أو ١ / ١٢ من الساعة وبالتعويض في (٣ – ٢) نجد ان السرعة المتوسطة ع خلال هذه الفترة الزمنية تساوي ٤ ÷ ١ / ١٢) = ٤٨ ميلا / الساعة . وهذا ليس مؤشرا دقيقا للسرعة عند الساعة ٣٠ , ٢ حيث ان من الممكن ان تكون السيارة قد تباطأت الساعة ٣٠ , ٢ ومن ثم بدأت بزيادة سرعتها تدريجيا حتى اصبحت على بعد ٨٤ ميلا من أ عند الساعة ٣٥ , ٢ . ونحصل على دلالة افضل اذا اعتبرنا السرعة المتوسطة خلال فترة زمنية اقصر فمثلا خلال الفترة من الساعة ٣٠ , ٢ حتى الساعة ٣١ , ٢ . ومن الواضح ان أفضل طريقة هي دراسة معدل السرعة خلال فترات زمنية أقصر واقصر حوالي الساعة ٣٠ , ٢ وهذا يوصلنا الى اعتبار النهايات كما فعلنا في حالة ميل المماس .

ولكي نبني بحثنا هذا على المفاهيم الرياضية فسوف نفرض انه من الممكن تمثيل موضع حركة جسم متحرك حركة خطية بحركة نقطة جـ على خط أحداثي ل . وفي بعض الاحيان نتكلم عن حركة النقطة جـ على الخط ل أو حركة ذرة على ل عندما تكون في الموضع جـ ، ونفرض كذلك ان موضع النقطة جـ معروف عند أي لحظة في أي فترة زمنية معروفة واذا كان ق (ن) يدل على احداثي جـ عند اللحظة ن فأن ق (ن) يسمى الاقتران الموضعي للنقطة جـ Position function واذا استعملنا ساعة لقياس الزمن نقول ان النقطة جـ تصبح على بعد ق (ن) وحدة من نقطة الاصل بعد مرور ن من وحدات الزمن (انظر الشكل ٣ – ٢) .



(الشكل ٣ — ٢)

ولكي نعرف سرعة جـ بعد م وحدة من الزمن نبدأ باختيار السرعة المتوسطة خلال فترة زمنية قصيرة قريبة من م وذلك باعتبار م ، م + هـ من اللحظات على التوالي حيث هـ ≠ ٠ . واوضاع جـ على الخط الاحداثي ل المناظرة لهذه اللحظات هي ق (م) ،ق (م + هـ) . كما في الشكل (٣ — ٣) وبناء عليه فان التغير في موضع جـ هو ق (م + هـ) — ق (م) وهذا المقدار من الممكن أن يكون موجبا أو سالبا أو صفرا حسب كون موضع النقطة جـ عند اللحظة م + هـ الى يمين الموضع الذي كانت عليه عند اللحظة م أو الى شماله أو منطبقا عليه . وهذا المقدار ليس من الضروري أن يساوي المسافة التي قطعتها جـ خلال الفترة الزمنية [م ، م + هـ] حيث من الممكن أن تكون قد تحركت ابعد من النقطة ق (م + هـ) ومن ثم عادت الى نفس الموضع عند اللحظه م + هـ . وباستعمال (٣ — ٢) نجد أن السرعة المتوسطة للنقطة جـ خلال هذه الفترة الزمنية هي .



$$\frac{\text{ق (أ+هـ) - ق (أ)}}{\text{هـ}} \quad (٣-٣)$$

وكما اسلفنا سابقا فانه كلما صغرت هـ كلما حصلنا على قيمة اقرب للسرعة عند اللحظة أ . وبناء عليه فاننا نعرف السرعة بنهاية المقدار (٣ - ٣) عندما تؤول هـ الى الصفر . وهذه النهاية تعرف بأسم السرعة اللحظية instantaneous velocity للنقطة جـ عند اللحظه أ .
والان نلخص هذه المقدمة بالتعريف التالي :

(٣ - ٤) تعريف السرعة :

اذا كانت النقطة جـ تتحرك على الخط الاحداثي ل وكان احداثيها هو ق (ن) عند اللحظة ن فان سرعة جـ عند اللحظة أ هي :

$$\text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق (أ + هـ) - ق (أ)}}{\text{هـ}}$$

بشرط ان تكون هذه النهاية موجودة .

واذا كان ق (ن) بالاقدام و ن بالثواني فان وحدة السرعة هي قدم في الثانية ونختصرها الى قدم / ثانية . واذا كان ق (ن) بالميل و ن بالساعة فان وحدة السرعة هي ميل في الساعة (ميل / ساعة) . ومن الممكن استعمال وحدات اخرى . وسوف نعود مرة ثانية لمناقشة مفهوم السرعة في الفصل الرابع حيث نجد انه اذا كانت السرعة موجبة خلال فترة زمنية معينة فان حركة النقطة خلال هذه الفترة تكون في الاتجاه الموجب على ل ، واذا كانت سالبة تكون حركتها في الاتجاه السالب وسنستعمل هذه الحقائق دون برهنة .

مثـال ٢ : اذا كان موضع النقطة جـ على الخط الاحداثي ل هو ق (ن) = $ن^{٢}$ - ٦ ن حيث ق (ن) مقدرة بالاقدام و ن بالثواني . أوجد السرعة عند أي لحظة أ . ما هي السرعة عندما ن = صفرا ؟ ن = ٤ ؟ عين الفترات الزمنية التي تتحرك

خلالها جـ (ف) بالاتجاه الموجب و (ب) بالاتجاه السالب . أوجد قيمة ن التي تكون عندها السرعة صفرا ؟

الحـــل : باستعمال صيغة ق (ن) نجد ان

$$\frac{\text{ق}(\text{ف}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{ف})}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{(\text{ف}+\text{هـ})^{٢}-٦(\text{ف}+\text{هـ})-(\text{ف}^{٢}-٦\text{ف})}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\text{ف}^{٢}+٢\text{ف}\,\text{هـ}+\text{هـ}^{٢}-٦\text{ف}-٦\text{هـ}-\text{ف}^{٢}+٦\text{ف}}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{٢\text{ف}\,\text{هـ}+\text{هـ}^{٢}-٦\text{هـ}}{\text{هـ}} = ٢\text{ف}+\text{هـ}-٦$$

وباستعمال (٣ – ٤) نجد ان السرعة بعد ف من الثواني هي

$$\text{نهـا}_{\text{هـ}\to٠}\ \frac{\text{ق}(\text{ف}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{ف})}{\text{هـ}} = \text{نهـا}_{\text{هـ}\to٠}\ (٢\text{ف}+\text{هـ})$$

$$= ٢\text{ف}-٦ = (-٦)$$

فالسرعة عندما ن = ٠ هي ٢ (٠) – ٦ = – ٦ قدم / الثانية . وعندما ن = ٤ فان السرعة = ٢ (٤) – ٦ = ٢ قدم / الثانية .

ومن الملاحظة السابقة نجد ان جـ تتحرك الى اليسار عندما تكون السرعة سالبة أي عندما ٢ ف – ٦ < ٠ أو ف < ٣ ، وتتحرك الى اليمين عندما ٢ ف – ٦ > ٠

أي ف > ٣ ٠ اذن تكون الحركة الى اليسار خلال الفترة الزمنية (- ∞ ، ٣)
والى اليمين خلال الفترة (٣ ، ∞) .
والسرعة = ٠ عندما ٢ف - ٦ = ٠ أي أن ف = ٣ ثوان .

ولا شك ان القاريء يلاحظ التشابه بين النهاية (٣ - ٤) والنهاية (٣ - ١) المستعملة في تعريف ميل المماس . حيث ان هذين المقدارين متطابقان

وهنالك عدة تطبيقات فزيائية ورياضية توصل الى نفس النهاية وسوف نناقش بعضا منها في الفصل اللاحق .

تمارين :

في التمرين ١ - ٤ أوجد ميل المماس عند النقطة ع (ف ، ق (ف)) على منحنى الاقتران ق . ارسم البيان وبين عليه المماسات عند نقط مختلفة .

١ ٠ ق (س) = ٢ - س^{٢} ٢ ٠ ق (س) = ٣س - ٥

٣ ٠ ق (س) = $\sqrt{س}$ + ١ ٤ ٠ ق (س) = ١ - $\frac{١}{س}$

٥ ٠ اذا كان موضع النقطة جـ على الخط الاحداثي ل بعد ن من الثواني هو ق (ن) = ٤ن^{٢} + ٣ ن حيث وحدة قياس ق (ن) هي القدم .
(ف) أوجد السرعة المتوسطة للنقطة جـ في الفترات التالية [١ ، ٢ ، ١] [١ ، ١ ، ١] ، [١ ، ١ ، ٠١ ، ١] ، [١ ، ٠٠١ ، ١] .
(ب) أوجد سرعة جـ عندما ن = ١ ٠
(جـ) أوجد الفترات التي تتحرك خلالها جـ في الاتجاه الموجب
(د) أوجد الفترات التي تتحرك خلالها جـ في الاتجاه السالب .

٦ ٠ حل تمرين ٥ اذا كان ق (ن) = ن^{٣} .

٧ ٠ اذا قذف جسم رأسيا الى اعلى من سطح الارض بسرعة ابتدائية مقدارها ١١٢ قدم / ثانية فان المسافة المقطوعة ق (ن) بعد ن من الثواني هي ١١٢ ن - ١٦ ن^{٢} .

ما هي سرعة الجسم عندما ن = ٢ ، ن = ٣ ، ن = ٤ ؟ عند أي لحظة يصل الجسم إلى اعلى ارتفاع ؟ عند أي لحظة يصطدم الجسم بالارض ؟ أوجد السرعة عند لحظة التصادم ؟

٨ • يتحرك بالون على ارتفاع ٥٠٠ قدم فوق سطح الارض . فاذا سقط جسم من هذا البالون فان بعده ق (ن) عن سطح الأرض بعد ن من الثواني هـو ٥٠٠ – ١٦ ن^{٢} . أوجد السرعة عندما ن = ١ ، ن = ٢ ، ن = ٣ . أوجد السرعة عندما يصطدم الجسم بالارض .

٩ • اذا اعطي موضع جسم يتحرك حركة خطية بدلالة اقتران حدودي من الدرجة الاولى فبرهن على ان سرعة الجسم ثابتة .

١٠ • اذا كان اقتران الموضع لنقطة تتحرك حركة خطية هو اقتران ثابت برهن على أن السرعة عند أي لحظة تساوي صفرا . صف حركة هذه النقطة .

٢ — تعريف المشتقة :

في البند السابق جابهتنا مسألتان متباينتان ولكننا عالجناهما بالسير بخطوات البحث عن النهاية . فالنهاية الظاهرة في (٣ – ١) و (٣ – ٤) واحدة من المفاهيم الأساسية في التفاضل والتكامل وفي الجزء الباقي من هذا الفصل سوف نشتق عددا من القواعد التي تتعلق بهذه الفكرة ولنبدأ بعرض المصطلحات المتعلقة بهذه النهاية .

٣ – ٥ تعريف المشتقة :

اذا كان الاقتران ق معرفا على فترة مفتوحة تحوى أ فان المشتقة قَ (أ) للاقتران عند أ تعطي بالقاعدة

$$قَ(أ) = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{ق(أ + هـ) - ق(أ)}{هـ}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة .

يقرأ الرمز قَ (أ) (ق فتحة أ) وعندما نقول ان قَ (أ) موجودة نعني أن النهاية في (٣ – ٥) موجودة . واذا كانت قَ (أ) موجودة فاننا نقول أن ق قابل للاشتقاق (اشتقاقي) عند النقطة أ أو أن له مشتقة عند أ . لاحظ اننا في حالة تعويض صفر بدل هـ في (٣ – ٥) نحصل على المقدار $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهذا لا معنى له ولذا يجب في معظم الحالات تغيير شكل الكسر في (٣ – ٥) قبل التعويض عن هـ بصفر .

ومن المهم ملاحظة انه اذا كان ق قابلا للاشتقاق عند أ فمن (٣ – ١) ينتج أن قَ (أ) هو ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة جـ (أ ، ق (أ)) . وكما بحثنا في النهايات من جانب واحد يستحسن ادخال فكرة المشتقات من جانب واحد . فاذا كان ق معرفا على الفترة النصف المفتوحة [أ ، جـ) فان المشتقة اليمنى قَ (أ) للاقتران ق عند النقطة أ تعطى بالقاعدة :

$$(٣-٦)\quad ق_{+}(أ) = \text{نهـا}_{هـ \to 0^{+}} \frac{ق(أ + هـ) - ق(أ)}{هـ}$$

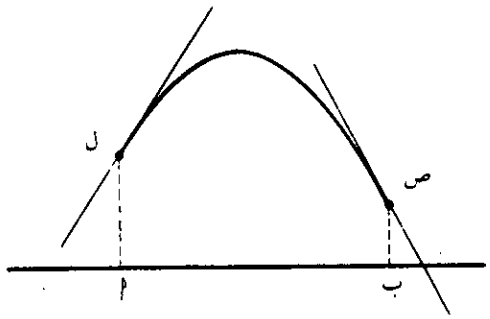
بشرط ان تكون هذه النهاية موجودة . وبنفس الطريقة اذا كان ق معرفا على الفترة النصف المفتوحة (جـ ، أ] فان مشتقة ق اليسرى قَ (أ) عند أ هي

$$(٣-٧)\quad ق_{-}(أ) = \text{نهـا}_{هـ \to 0^{-}} \frac{ق(أ + هـ) - ق(أ)}{هـ}$$

وباستعمال (٢ – ٣٠) نجد ان قَ (أ) تكون موجودة اذا وفقط اذا كانت قَ$_{+}$ (أ) ، قَ$_{-}$ (أ) موجودتين ومتساويتين .

واذا كان ق معرفا على الفترة المغلقة [أ ، ب] وغير معرف خارجها ، فان فكرة المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى تمكننا من تعريف ميلي المماسين عند النقطتين ع (أ ، ق (أ)) و ص (ب ، ق (ب)) بأنهما قَ$_{+}$ (أ) ، قَ$_{-}$ (ب) على التوالي ، كما هو موضح بالشكل (٣ – ٤) . ولذا فلايجاد

ميل المماس عند النقطة ع نحسب قيمة نهاية الميل $م_{ل ع}$ للخط الواصل بين النقطتين ل ، ع عندما تؤول ل الى ع (من الجانب الايمن) وكذلك لميل المماس عند ص عندما تؤول ل الى ص من الجانب الايسر.



(الشكل ٣ – ٤)

وفي حالة مثل (٣ – ٦) سوف لا نميز بين قَ (أ) و $ق_{+}$ (أ) عندما يكون ق غير معرف لقيم س > أ أي انه اذا كانت $ق_{+}$ (أ) موجودة فاننا نقول أن قَ (أ) موجودة وسوف تستعمل (٣ – ٦) و (٣ – ٥) كصيغتين مترادفتين. ومثل هذا الكلام ينطبق على قَ (ب).

لنفرض ان ق اقتران واد ثهـ = { أ ، قَ (أ) موجودة } حيث قَ (أ) ترمز الى مشتقة يمنى أو يسرى عندما يكون ق غير معرف خارج فترة ما. فاذا قرنا كل قيمة س في ثهـ مع قَ (س) فاننا نحصل على الاقتران قَ (س) الذي مجاله ثهـ ويطلق عليه اسم مشتقة ق أو الاقتران المشتق (Derived Function) للاقتران ق. وتعطى قيمة ق عند س بالصيغة :

$$(٣-٨)\quad قَ(س) = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$$

أو بالمشتقة الجانبية المناسبة. وقد تسمى قَ (س) بمشتقة ق (س) بالنسبة الى س حيث نستعمل العبارة بالنسبة الى س للدلالة على المتغير المستقل.

ومن المهم ان نلاحظ انه عند تعيين قَ (س) تحدد س ولكن عشوائيا وتحسب النهاية عندما تؤول هـ الى الصفر . وتستعمل العبارتان تفاضل ق (س) وايجاد مشتقة ق (س) بمعنى واحد . وفي نص التعريف والنظريات تعني العبارة (ق قابل للاشتقاق) ان قَ (س) موجودة لجميع قيم س المحتواة في مجموعة فرعية من الاعداد الحقيقية ج . والمجال ثم للاقتران قَ . قد لا يذكر صراحة في كل الحالات ، وفي اغلب المسائل يمكن ايجاده بالتخمين .

مثال ١ :

اذا كانت ق (س) = ٣س^{٢} − ٥س + ٤

أوجد قَ (س) . ما هو مجال قَ ؟ أوجد قَ (٢) ، قَ (−$\sqrt{٢}$) و قَ (أ) .

الحـــل :

باستعمال (٣ − ٨) نجد ان

$$\text{قَ}(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\text{ق}(س + هـ) - \text{ق}(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣(س + هـ)^{٢} - ٥(س + هـ) + ٤ - (٣س^{٢} - ٥س + ٤)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣س^{٢} + ٦س هـ + هـ^{٢} - ٥س - ٥هـ + ٤) - (٣س^{٢} - ٥س + ٤)}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{٦ س هـ + ٣ هـ^{٢} - ٥ هـ}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} (٦ س + ٣ هـ - ٥)$$

$$= ٦ س - ٥ .$$

وبما أن ق َ(س) = ٦ س − ٥ فان مجال قَ هو خ وبالتعويض عن س نجد ان

قَ (٢) = ٦ (٢) − ٥ = ٧

قَ (− √٢) = ٦ (− √٢) − ٥ = − (٦ √٢ + ٥) .

قَ (أ) = ٦أ − ٥ .

مثـال ٢ : أوجد قَ (س) اذا كان ق (س) = √س

الحـــل : من (٣ − ٨) ينتج ان

$$ق َ(س) = \text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\sqrt{س + هـ} - \sqrt{س}}{\text{هـ}}$$

في حل التمارين سنفرض دائما ان قيم المتغيرات قد اختيرت بحيث ان المقادير المستعملة معرفة . ولذلك في المثال الحالي سنفرض ان قيم س و هـ قد أختيرت بحيث أن √س + هـ و√س موجودة . ولايجاد هذه النهاية سنضرب البسط والمقام بالمقدار √س + هـ + √س . وهكذا فان

$$قَ(س) = \text{نهـا}_{\text{هـ} \to 0} \frac{\sqrt{س + هـ} - \sqrt{س}}{\text{هـ}} \cdot \frac{\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س}}{\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س}}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{(س + هـ) - س}{هـ (\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{1}{\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{س} + \sqrt{س}} = \frac{1}{\sqrt{٢س}}$$

فمجال ق هو المجموعة المكونة من الاعداد الحقيقية غير السالبة بينما مجال قَ هو مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة لأن قَ (٠) غير موجودة .

مثـال ٣ : اثبت ان الاقتران ق (س) = | س | غير قابل للاشتقاق عند س = ٠

الحـــل : لقد رسم بيان الاقتران ق في شكل (١ – ٢٤) . وسنبث ان قَ (٠) غير موجودة وذلك باثبات ان المشتقتين اليمنى واليسرى قَ$_+$ (٠) و قَ$_-$ (٠) غير متساويتين . فباستعمال (٣ – ٦) و (٣ – ٧) مع مثال ١ من البند الرابع في الفصل الثاني نجد ان

$$\text{قَ}_+ (٠) = \text{نهـا}_{هـ \to 0^+} \frac{|٠ + هـ| - |٠|}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to 0^+} \frac{|هـ|}{هـ} = ١$$

$$قَ(٠) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{|٠ + هـ| - |٠|}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{|هـ|}{هـ} = -١ \neq ٠$$

اذن قَ (٠) غير موجودة .

ونتيجة للمثال السابق نستنتج ان بيان اقتران ق (س) = | س | ليس له مما س عند النقطة ع (٠ ، ٠) ومن الممكن ملاحظة هذا هندسيا بدراسة الميل م$_{ع}$ للخط المستقيم الواصل بين النقطة ع واي نقطة اخرى ل عندما تؤول ل الى ع و ل تتغير بين نقط على يمين محور ص ونقط على يسار محور ص .

وهناك صيغة اخرى للمشتقة قَ (أ) يمكن استنتاجها كما يلي : اعتبر المقدار ف (س) المعطى بالصيغة :

$$(٣-٩) \quad ف(س) = \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ} \quad ، س \neq أ$$

وبالتعويض عن س بالمقدار أ + هـ نجد ان

$$(٣-١٠) \quad ف(أ + هـ) = \frac{ق(أ + هـ) - ق(أ)}{هـ} \quad ، هـ \neq ٠$$

ومن (٢-٢٧) ينتج ان

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} ف(أ + هـ) = \text{نهـا}_{س \to أ} ف(س)$$

بشرط وجود كل من النهايتين . واذا استعملنا (٣-٩)، (٣-١٠) للتعويض عن ف (س) و ف (أ + هـ) على التوالي ، ينتج أن

$$= \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{ق(أ + هـ) - ق(أ)}{هـ}$$

$$\text{نهـا}_{س \to أ} \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$$

بشرط وجود كل من النهايتين وبذلك فان صيغة اخرى لمشتقة ق عند النقطة أ هي

$$(٣-١١)\ قَ(أ) = \text{نهـا}_{س \to أ} \frac{ق(س) - ق(أ)}{أ - س}$$

والمثال التالي سيوضح استعمال (٣ – ١١).

مثـال ٤ : اذا كان ق (س) = $س^{\frac{١}{٣}}$ $أ \neq ٠$ احسب قَ (أ) وأوجد مجال قَ .

الحـــل : سنبدأ بالصيغة (٣ – ١١) ومن ثم نجري بعض العمليات الجبرية والنتيجة هي

$$قَ(أ) = \text{نهـا}_{س \to أ} \frac{س^{\frac{١}{٣}} - أ^{\frac{١}{٣}}}{أ - س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to أ} \frac{س^{\frac{١}{٣}} - أ^{\frac{١}{٣}}}{(س^{\frac{١}{٣}})^{٣} - (أ^{\frac{١}{٣}})^{٣}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to أ} \frac{س^{\frac{١}{٣}} - أ^{\frac{١}{٣}}}{(س^{\frac{١}{٣}} - أ^{\frac{١}{٣}})(س^{\frac{٢}{٣}} + أ^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{١}{٣}} أ^{\frac{١}{٣}})}$$

فبقسمة البسط والمقام على $س^{\frac{1}{3}} - أ^{\frac{1}{3}}$ وأخذ النهاية ينتج ان

$$ق'(أ) = \frac{1}{\text{أ}^{\frac{2}{3}} + \text{أ}^{\frac{2}{3}} + \text{أ}^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\,\text{أ}^{\frac{2}{3}}}$$

ولان أ عدد عشوائي لا يساوي صفرا فان هذه المعادلة تعني ان ق' (س) = $\frac{1}{3}س^{\frac{2}{3}}$ لجميع قيم س $\neq$ ٠ . وهكذا فان مجال ق' هو مجموعة الاعداد الحقيقية عدا الصفر.

(٣ – ١٢) **نظريـــة** : اذا كان الاقتران ق قابلا للاشتقاق عند أ فان ق يكون متصلا عند أ .

البرهـــان : اذا كانت س نقطة في مجال ق ، و س $\neq$ أ فانه من الممكن كتابة ق (س) على الشكل التالي :

$$ق(س) = ق(أ) + \left[\frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}\right](س - أ)$$

وباستخدام نظريات النهايات والصيغة (٣ – ١١) نجد أن

$$\text{نهـا}_{س \to أ}\ ق(س) = \text{نهـا}_{س \to أ}\ ق(أ) + \text{نهـا}_{س \to أ}\ \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}\ (س - أ)$$

$$= ق(أ) + ق'(أ) \times ٠ = ق(أ)$$

وهكذا فان ق متصل عند أ ، بناء على (٢ – ٣١) .

ومعكوس (٣ – ١٢) لا يصح أي أن هناك اقترانات متصلة وهي غير قابلة للاشتقاق . فالاقتران المعطى في المثال ٤ متصل ولكنه غير اشتقاقي عند الصفر . وكذلك اذا كان ق (س) = | س | كان ق متصلا عند الصفر ولكنه غير قابل للاشتقاق عند الصفر كما اثبتنا في المثال ٣ .

وتستعمل رموز مختلفة للدلالة على المشتقات ففي بعض الاحيان يستعمل د هـ (س) بدلا من قَ (س) واذا اردنا بيان المتغير المستقل س نستعمل ترقيما سفليا مع د فنكتب د$_{س}$ ق (س) بدلا من قَ (س) ويفضل استعمال الصيغة الاخيرة اذا كان هناك عدة متغيرات تظهر في مسألة واحدة . ففي المثال ١ نكتب

د (٣س^{٢} – ٥س + ٤) = ٦س – ٥ أو

د$_{س}$ (٣س^{٢} – ٥س + ٤) = ٦س – ٥ .

ويسمي الرمز د (أو د$_{س}$) بالمؤثر او الفاعل التفاضلي differential operator وهذا المؤثر ليس له بمفرده أثر عملي ولكن اذا وضع على يسار مقدار في س فانه يدل على المشتقة ، فنقول ان د يؤثر على المقدار الذي يظهر على يساره . فاذا كان ق معرفا بالمعادلة ص = ق (س) نكتب

د (ص) = قَ (س) أو د$_{س}$ (ص) = قَ (س)

ونسميه مشتقة ص بالنسبة الى س . ومن الشائع استعمال صَ بدل د$_{س}$ (ص) .

ونرمز الى قَ بالرمز د (ق) واذا كان س هو المتغير المستقل نكتب د$_{س}$ (ق) . وفي البند الرابع سنورد رمزا آخر للمشتقات وهذه الرموز كلها تستعمل في الكتب المختلفة فيستحسن ان يلم الطالب بجميع اشكالها .

وغني عن البيان انه يمكن ان نستعمل حروفاً اخرى غير س و ص للدلالة على المتغيرات . فمثلا نفرض ان ف = ق (ن) فيكون

$$ق'(ن) = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{ق(ن + هـ) - ق(ن)}{هـ}$$

وهذه يرمز لها بالرمز د (ق (ن)) أو $\frac{د}{ن}$ (ق (ن)) أو $\frac{د}{ن}$ (ف) أو فَ .

تمارين :

في الاسئلة ١ – ٦ أوجد قَ (س) وعين مجال قَ .

١. ق (س) = ٢ + ٨س – ٥س^{٢}

٢. ق (س) = (٢س + ٣)^{٣}

٣. ق (س) = ٤س^{٣} – ٣س + ١

٤. ق (س) = س^{٤}

٥. ق (س) = ٧ / $\sqrt{س}$

٦. ق (س) = $\sqrt{٣س + ١}$

في الاسئلة ٧ – ١٢ أوجد $\frac{د}{س}$ (ص)

٧. ص = (٢س + ٣) / (س – ١)

٨. ص = ١ / (س^{٢} + ١)

٩. ص = ٥س – ٧

١٠. ص = ٩

١١. ص = س$^{-٣}$

١٢. ص = س / (٣س + ٤)

في الاسئلة ١٣ – ١٦ أوجد قَ (م) باستعمال (٣ – ١١)

١٣. ق (س) = ١ / (س + ٥)

١٤. ق (س) = ٨ – س^{٣}

١٥. ق (س) = س^{٢}

١٦. ق (س) = $\sqrt{٢س}$

١٧. اذا كان ق (س) حدوديا من الدرجة الاولى برهن ان قَ (س) حدودي من الدرجة صفر . ما الجواب اذا كان ق (س) حدوديا من الدرجة الثانية أو الثالثة ؟

١٨ ـــ برهن ان لكل عدد حقيقي جـ يكون د$_{س}$ (جـ) = ٠ .

١٩ ـــ برهن انه اذا كان ن عدداً صحيحاً كان اقتران اكبر عدد صحيح غير قابل للاشتقاق عند ن .

٢٠ ـــ برهن ان الاقتران في المثال المعطى في البند ٢ من الفصل الثاني غير قابل للاشتقاق عند أي عدد صحيح .

٣ ـــ قواعد ايجاد المشتقات

يحتوي هذا البند على بعض القواعد العامة التي تسهل عملية ايجاد المشتقات .

(٣ – ١٣) نظريـــة : اذا كان ق الاقتران الثابت ق (س) = جـ . فان قَ (س) = ٠ .

البرهـــان :

بما أن قيمة ق هي دائما جـ فان ق (س) = جـ ، ق (س + هـ) = جـ وهكذا من (٣ – ٨) ينتج ان

$$قَ(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{جـ - جـ}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} ٠ = ٠$$ بناء على (٢ – ٨)

وبدلالة مؤثر التفاضل الوارد في البند السابق نكتب نتيجة هذه النظرية على الشكل د (جـ) = ٠ أو د$_{س}$ (جـ) = ٠ ، وقد يشار الى هذا بالعبارة « مشتقة العدد الثابت صفر » .

(٣ – ١٤) **نظريـــة** اذا كان ق (س) = س فان قَ (س) = ١ .

البرهـــان : نستعمل (٣ – ٨) وتعريف الاقتران فنحصل على :

$$ق'(س) = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{(س + هـ) - س}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{هـ}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to 0} ١ = ١$$

وبدلالة رمز مؤثر التفاضل نكتب د (س) = ١ أو $د_س(س) = ١$.

في برهان النظرية التالية سنستعمل الصيغة الجبرية :

(٣ – ١٥) $أ^ن - ب^ن = (أ - ب)(أ^{ن-١} + أ^{ن-٢} ب + أ^{ن-٣} ب^٢ + ... + أ ب^{ن-٢} + ب^{ن-١})$.

حيث أ ، ب أي اعداد حقيقية و ن أي عدد صحيح موجب . ويمكن اثبات صحة (٣ – ١٥) بطريقة الاستنتاج الرياضي أو بملاحظة أنه عند ضرب المقدارين في الطرف الايسر فان جميع الحدود تختفي ما عدا $أ^ن - ب^ن$. يجب ملاحظة ان عدد الحدود المجتمعة داخل القوسين الاخيرين هو ن ، وكمثال على ذلك نعرض ما يلي :

ان عدد الحدود المجتمعة داخل القوسين الاخيرين هو ن ، وكمثال على ذلك نعرض ما يلي :

$أ^٢ - ب^٢ = (أ - ب)(أ + ب)$

$أ^٣ - ب^٣ = (أ - ب)(أ^٢ + أ ب + ب^٢)$

$أ^٤ - ب^٤ = (أ - ب)(أ^٣ + أ^٢ ب + أ ب^٢ + ب^٣)$.

(٣ – ١٦) قاعدة القوى

اذا كان ق (س) = س^{ن} حيث ن عدد صحيح موجب فان قَ (س) = ن س$^{ن-١}$.

البرهـــان : من (٣ – ٨) نجد ان

$$قَ(س) = \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{(س + هـ)^{ن} - س^{ن}}{هـ}$$

نعوض في (٣ – ١٥) ، أ = س + هـ ، ب = س ونحصل على

$$(س + هـ)^{ن} - س^{ن} = [(س + هـ) - س][(س + هـ)^{ن-١} + (س + هـ)^{ن-٢} . س + \cdots + (س + هـ) س^{ن-٢} + س^{ن-١}]$$

اذن اذا كانت هـ ≠ . فان

$$\frac{(س + هـ)^{ن} - س^{ن}}{هـ} = (س + هـ)^{ن-١} + (س + هـ)^{ن-٢} س + \cdots + (س + هـ) س^{ن-٢} + س^{ن-١} .$$

ويأخذ النهاية عندما تؤول هـ الى الصفر فان كل حد في حاصل الجمع على يسار المعادلة الاخيرة يختزل الى س$^{ن-١}$ وحيث ان هناك ن من الحدود تكون النتيجة

$$\text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{(س + هـ)^{ن} - س^{ن}}{هـ} = ن س^{ن-١}$$

واذا كان س ≠ . فان (٣ – ١٦) تصح حتى في حالة ن = ٠ حيث في هذه الحالة فان س^{٠} = ١ ومن (٣ – ١٣) ، قَ (س) = ٠

وبدلالة رمز فاعل التفاضل نكتب قاعدة القوى (٣ – ١٦) بالصيغة .

$$د_{س} (س^{ن}) = ن\ س^{ن-١} \quad ،$$

واذا لم يكن هنالك أي التباس بالنسبة للمتغير المستقل فمن الممكن كتابتها

$$د (س^{ن}) = ن\ س^{ن-١} .$$ واليك هذه الامثلة

$$د_{س} (س^{٣}) = ٣ س^{٢} \quad ، \quad د (س^{٨}) = ٨ س^{٧} .$$

وبالمثل اذا كان ص = س ١٠٠ فان $د_{س} (ص) = ١٠٠ س^{٩٩}$ أو $صَ = ١٠٠ س^{٩٩}$.

وقد نستعمل أي رمز آخر غير س للمتغير المستقل فنكتب قاعدة القوى بالشكل التالي :

$$د_{ل} (ل^{ن}) = ن ل^{ن-١} \text{ أو } د_{ع} (ع^{ن}) = ن ع^{ن-١} \text{ أو } د_{ص} (ص^{ن}) = ن\ ص^{ن-١} .$$

وهكذا . وسنبرهن في البند ٦ ان قاعدة القوى صحيحة لجميع الاعداد النسبية ن .

(٣ – ١٧) نظريـــة : اذا كان ق قابلا للاشتقاق وكان ك (س) = جـ ق (س) ، حيث جـ أي عدد صحيح فان كَ (س) = جـ قَ (س) .

البرهـــان : على القاريء تقديم الاسباب لكل خطوة من الخطوات التالية :

$$كَ (س) = \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ك (س + هـ) - ك (س)}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{جـ ق (س + هـ) - جـ ق (س)}{هـ}$$

$$= جـ\ \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق (س + هـ) - ق (س)}{هـ}$$

$$= جـ قَ (س) .$$

ومن الممكن كتابة نتيجة (٣ – ١٧) بالصيغة .

(٣ – ١٨) $د_{س}$ (جـ ق (س)) = جـ $د_{س}$ (ق (س)) .

ويمكن حذف الترقيم السفلي س اذا كان واضحاً ان جـ ثابت . وفي الحالة الخاصة ق (س) = $س^{ن}$ ، فان (٣ – ١٧) ، (٣ – ١٦) يعطيان العلاقة :

(٣ – ١٩) $د_{س}$ ($جـ\ س^{ن}$) = جـ ن $س^{ن-١}$.

وهي صحيحة لجميع الاعداد الحقيقية جـ والاعداد الصحيحة الموجبة ن .

وكذلك يمكن حذف الترقيم السفلي عن رمز مؤثر التفاضل د اذا كان واضحا ان جـ ثابت .

مثـال ١

(أ) أوجد د ($٧س^{٤}$)

(ب) أوجد قَ (ع) اذا كان ق (ع) = – ٣ $ع^{١٥}$.

الحـــل : (أ) باستعمال (٣ – ١٩) ينتج ان د ($٧س^{٤}$) = $٧ \times ٤ س^{٣} = ٢٨ س^{٣}$.

(ب) وايضا من (٣ – ١٩) مع ملاحظة أن ع هو المتغير المستقل نجد ان

قَ (ع) = (– ٣) (١٥) $ع^{١٤}$ = – $٤٥ع^{١٤}$.

والنظريات التالية تحوي عدة اقترانات وكالعادة سنفرض ان كل قيم س تختار من تقاطع مجالات هذه الاقترانات .

(٣ – ٢٠) **نظريـــة** : اذا كان ق و ك قابلين للاشتقاق وكان ل (س) = ق (س) + ك (س)

لجميع قيم س فان لَ (س) = قَ (س) + كَ (س) .

البرهـــان : على القاريء تعليل كل الخطوات التالية :

$$لَ(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ل(س + هـ) - ل(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{[ق(س+هـ)+(ك(س+هـ)] - [ق(س)+ك(س)]}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \left[\frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ} + \frac{ك(س+هـ)-ك(س)}{هـ} \right]$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ} + \lim_{هـ \to 0} \frac{ك(س+هـ)-ك(س)}{هـ}$$

$$= قَ(س) + كَ(س).$$

وبدلالة رمز الفاعل التفاضلي د، نأخذ (٣ - ٢٠) الشكل :

(٣-٢١) $د[ق(س)+ك(س)] = د[ق(س)] + د[ك(س)]$

ويمكن كتابة عبارة مشابهة باستعمال $د_{س}$ بدل د . ويمكن تعميم هذه النتيجة لأي عدد من الاقترانات . ونعبر عنها بالكلام بقولنا : « مشتقة حاصل جمع أي عدد من الاقترانات الاشتقاقية هو حاصل جمع مشتقات هذه الاقترانات » .

ويمكن صياغة نتيجة كهذه لحاصل الطرح فمثلا يمكن ان نبرهن ان

(٣-٢٢) $د[ق(س)-ك(س)] = د[ق(س)] - د[ك(س)]$.

ولكن سنترك البرهان تمرينا للقاريء .

ولان الحدودية هي عبارة عن حاصل جمع حدود على الشكل جـ $س^{ن}$ ، حيث ن عدد صحيح غير سالب فمن الممكن استعمال (٣ - ١٩) مع

النتيجتين المتعلقتين بحاصل الجمع وحاصل الطرح لايجاد مشتقة أية حدودية كما في المثال التالي :

مثـال ٢ . أوجد قَ (س) اذا كان ق (س) = ٢ س^{٤} − ٥ س^{٣} + س^{٢} − ٤ س + ١ .

الحـــل : قَ (س) = د (٢ س^{٤} − ٥ س^{٣} + س^{٢} − ٤ س + ١) .

= د (٢ س^{٤}) − د (٥ س^{٣}) + د (س^{٢}) − د (٤ س) + د (١)

= ٨ س^{٣} − ١٥ س^{٢} + ٢ س − ٤ .

(٣–٢٣) قاعدة المضروبين : اذا كان ق (س) ، ك (س) قابلين للاشتقاق وكان ل (س) = ق (س) ك (س) فان :

لَ (س) = ق (س) كَ (س) + قَ (س) ك (س) .

البرهـــان : من تعريف لَ (س) و ل (س) نجد ان

$$لَ(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ل(س+هـ) - ل(س)}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ)\,ك(س+هـ) - ل(س)\,ك(س)}{هـ}$$

حتى نستطيع ايجاد قيمة النهاية نغير شكل هذا المقدار الكسري وذلك بطرح المقدار ق (س + هـ) ك (س) من البسط ثم ضمه اليه وبذلك نحصل على ما يلي :

$$لَ(س) = \lim_{هـ \to 0} [ق(س+هـ) ك(س+هـ) - ق$$

$$(س+هـ) ك(س) + ق(س+هـ) ك(س) - ق(س) ك$$

$$(س)] / هـ$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \left[ق(س+هـ) \times \frac{ك(س+هـ) - ك(س)}{هـ} + ك(س) \times \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} \right]$$

$$= \lim_{هـ \to 0} ق(س+هـ) \times \lim_{هـ \to 0} \frac{(ك(س+هـ) - ك(س)}{هـ}$$

$$+ \lim_{هـ \to 0} ك(س) \times \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$$

وبما ان ق اشتقاقي عند س فانه يكون متصلا عند س وبناء عليه فان

$$\lim_{هـ \to 0} ق(س+هـ) = ق(س) \text{ وايضا}$$

$$\lim_{هـ \to 0} ك(س+هـ) = ك(س) \text{ حيث س ثابت في عملية النهاية}$$

واخيرا بتطبيق تعرف المشتقة على ق (س) و ك (س) نحصل على

لَ (س) = ق (س) كَ (س) + قَ (س) ك (س) .

ونعبر عن هذه القاعدة كما يلي : مشتقة حاصل ضرب متغيرين تساوي الاول مضروبا في مشتقة الثاني ، ومضافا اليه الثاني مضروباً في مشتقة الاول . ويمكن كتابتها بدلالة مؤثر التفاضل كما يلي :

(٣-٢٤) د[ق (س) ك (س)] = ق (س) د [ك (س)] + ك (س) د [ق (س)]

مثـال ٣ : أوجد قَ (س) حيث ق (س) = (س^{٣} + ٣ س^{٢} + ١) (٢ س^{٢} + ٨ س - ٥)

الحـــل : نستعمل قاعدة المضروبين (٣ - ٢٤) ومشتقة الحدودية فنحصل على قَ (س) = (س^{٣} + ٣ س^{٢} + ١) د (٢ س^{٢} + ٨ س - ٥) + (٢ س^{٢} + ٨ س - ٥) د (س^{٣} + ٣ س^{٢} + ١)

= (س^{٣} + ٣ س^{٢} + ١) (٤ س + ٨) + (٢ س^{٢} + ٨ س - ٥) (٣ س^{٢} + ٦ س)

ومن المستحسن دائما كتابة قَ (س) على صورة حاصل ضرب عوامل . ففي هذا المثال نجري ما يلي :

قَ (س) (س^{٣} + ٣ س^{٢} + ١) (٤) (س + ٢) + (٢ س^{٢} + ٨ س - ٥) (٣ س) (س + ٢)

= (س + ٢) [٤ (س^{٣} + ٣ س^{٢} + ١) + ٣ س (٢ س^{٢} + ٨ س - ٥)]

= (س + ٢) [٤ س^{٣} + ١٢ س^{٢} + ٤ + ٦ س^{٣} + ٢٤ س^{٢} - ١٥ س] .

= (س + ٢) (١٠ س^{٣} + ٣٦ س^{٢} - ١٥ س + ٤) .

(٣-٢٥) قاعدة المقسومين (ونعني بهما المقسوم والمقسوم عليه) : اذا كان ق (س) و ك (س) قابلين للاشتقاق وكان ل (س) = ق (س) / ك (س) فان

$$لَ(س) = \frac{ك(س)\,قَ(س) - ق(س)\,كَ(س)}{[ك(س)]^{٢}}$$

البرهـــان : باستخدام تعريف لَ (س) و ل (س) نجد ان

$$لَ(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ل(س + هـ) - ل(س)}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\frac{ق(س + هـ)}{ك(س + هـ)} - \frac{ق(س)}{ك(س)}}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ك(س)\,ق(س + هـ) - ق(س)\,ك(س + هـ)}{هـ\,ك(س + هـ)\,ك(س)}$$

وبطرح ك (س) ق (س) من البسط ثم ضمه اليه نحصل على

$$ل(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ك(س)\,ق(س+هـ) - ك(س)\,ق(س) + ك(س)\,ق(س) - ق(س)\,ك(س+هـ)}{هـ\,ك(س+هـ)\,ك(س)}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} ك(س) \left[\frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}\right] - \left[\frac{ك(س+هـ) - ك(س)}{هـ}\right] ق(س)$$

$$ك(س+هـ)\,ك(س)$$

بأخذ نهاية كل من البسط والمقام ينتج ان

$$لَ(س) = \frac{ك(س)\,قَ(س) - ق(س)\,كَ(س)}{[ك(س)]^{٢}}$$

وبدلالة رمز المؤثر التفاضلي نكتب

$$د\left[\frac{ق(س)}{ك(س)}\right] = \frac{ك(س)\,د[ق(س)] - ق(س)\,د[ك(س)]}{[ك(س)]^{٢}}$$

ونعبر عن هذه القاعدة بقولنا « مشتقة خارج قسمة اقتران على آخر تساوي المقام في مشتقة البسط مطروحا منه البسط في مشتقة المقام ، والكل مقسوم على مربع المقام » . ومن المستحسن ان نتذكر هذه العبارة بدلا من القاعدة نفسها .

مثال ٤ : أوجد صَ اذا كان ص = $\frac{٣س^{٢} - س + ٢}{٤س^{٢} + ٥}$

الحل من قاعدة المقسومين (٣ - ٢٦) نجد ان

$$صَ = \frac{(٤س^{٢}+٥)\,د(٣س^{٢}-س+٢) - (٣س^{٢}-س+٢)\,د(٤س^{٢}+٥)}{(٤س^{٢}+٥)^{٢}}$$

$$= \frac{(٤س^{٢}+٥)(٦س-١) - (٣س^{٢}-س+٢)(٨س)}{(٤س^{٢}+٥)^{٢}}$$

$$= \frac{٢٤س^{٣} - ٤س^{٢} + ٣٠س - ٥ - (٢٤س^{٣} - ٨س^{٢} + ١٦س)}{(٤س^{٢}+٥)^{٢}}$$

$$= \frac{٤س^{٢} + ١٤س - ٥}{(٤س^{٢} + ٥)^{٢}}$$

لقد اصبح الان مسألة بسيطة تعميم قاعدة القوي (٣ - ١٦) لتشمل الحالة التي يكون فيها الاس عددا صحيحا سالبا .

(٣-٢٧) نتيجة : اذا كان ن عددا صحيحا موجبا فان $د_{س}(س^{-ن}) = -ن س^{-ن-١}$

البرهـــان : باستعمال تعريف $س^{-ن}$ مع (٣ - ٢٦) و (٣ - ١٦) نحصل على :

$$د_{س}(س^{-ن}) = د\left(\frac{١}{س^{ن}}\right) = \frac{س^{ن}(٠) - ١(ن\ س^{ن-١})}{(س^{ن})^{٢}}$$

$$= \frac{-ن\ س^{ن-١}}{س^{٢ن}}$$

$$= -ن\ س^{ن-١-٢ن} = -ن\ س^{-ن-١}$$

وبذلك تكون (٣ - ١٦) و (٣ - ١٩) صحيحتين لكل الاسس الصحيحة .

مثـال ٥ : فاضل ما يلي (أ) $ك(ع) = ١/ع^{٤}$

(ب) $ل(ف) = ٣/ف$

الحـــل : (أ) اكتب $ك(ع) = ع^{-٤}$ واستعمل قاعدة القوى (مع اعتبار أن ع هو المتغير المستقل) نجد أن $كَ(ع) = -٤ع^{-٥} = -٤/ع^{٥}$.

(ب) بما أن $ل(ف) = ٣ف^{-١}$ فأن $لَ(ف) = ٣(-١)ف^{-٢} = -٣/ف^{٢}$

لقد صيغت جميع قواعد المشتقات بدلالة قيم اختيارية للاقترانات المشتقة مثل ق (س) ، ك (س) الخ . ولكن يمكن ان نعبر عن قواعد المشتقات بدلالة الاقترانات ذاتها دون الرجوع الى قيمها عند س وذلك بان نكتبها كما يلي :

$$
\left|\begin{array}{l}
د_{س}(ق + ك) = د_{س}(ق) + د_{س}(ك) \\
د_{س}(ق\,ك) = ق\,د_{س}(ك) + ك\,د_{س}(ق) \\
د_{س}(ق / ك) = \dfrac{ك\,د_{س}(ق) - ق\,د_{س}(ك)}{ك^{٢}}
\end{array}\right. \qquad (٣-٢٨)
$$

واذا اشرنا الى المشتقة بالفتحة فأن (٣ – ٢٨) نأخذ الشكل التالي :

$$
\left|\begin{array}{l}
(ق + ك)' = ق' + ك' \\
(ق\,ك)' = ق'\,ك + ك'\,ق \\
(ق / ك)' = \dfrac{ك\,ق' - ك'\,ق}{ك^{٢}}
\end{array}\right. \qquad (٣-٢٩)
$$

تمارين :

فاصل الاقترانات المعرفة في التمارين ١ – ٢٠

١ . ق (س) = ٣س^{٣} – ٢س^{٢} + ٤س – ٧

٢ . ك (ع) = ٥ع^{٤} – ٨ع^{٢} + ع

٣ . ف (م) = م^{٢} + ١ / م^{٢}

٤ . ل (س) = ٢س + ١ / ٢س

٥ . ك (س) = (٨س^{٢} – ٥س) (٣س^{٢} + ٤) ،

٦ . ق (ص) = (ص^{٥} – ٢ص^{٣}) (٧ص^{٢} + ص – ٨)

٧ . ك (ر) = (ر^{٣} – ١) / (ر^{٣} + ١)

٨ . ف (م) = (٨م + ١٥) / (م^{٢} – ٢م + ٣)

٩ . ق (س) = ١ / (١ + س + س^{٢} + س^{٣})

١٠ . ص (س) = ١ + ١ / س + ١ / س^{٢} + ١ / س^{٣} .

١١ . ك (ع) = ع (٢ع^{٣} – ٥ع – ١) (٦ع^{٢} + ٧)

١٢ . ح (و) = ٤ و (و – ١) (٢ و – ٣)

١٣ . ك (ر) = (٣ ر)$^{-٤}$

١٤ . م (ر) = (٣ ر)^{٤}

١٥ . ق (س) = (٥س − ٤)^{٢}

١٦ . ق (ر) = (٥ ر − ٤)$^{-٢}$

١٧ . $ف (م) = \frac{١ - (٣ / ٥م)}{١ + (٢ / م^{٢})}$

١٨ . ل (و) = (٢ و + ١)^{٣}

١٩ . ق (س) (٢س^{٣} − ٧س^{٢} + ٤س + ٣) / س^{٢}

٢٠ . ق (س) = (٣س^{٢} − ٥س + ٨) / ٧ .

٢١ . اذا كان ص = (٣س − ١) / س^{٢} أوجد صَ بطريقتين .

(أ) باستعمال قاعدة المقسومين. (ب) باستعمال قاعدة المضروبين .

٢٢ . حل التمرين ٢١ اذا كان ص = (س^{٢} + ١) / س^{٤} .

٢٣ . اذا كان ص = (١٢س − ١٧) (٥س + ٣) أوجد صَ بطريقتين .

(أ) باستعمال قاعدة المضروبين (ب) بضرب العاملين أولا

٢٤ . أجب عن (أ) ، (ب) من تمرين (٢٣) اذا كان ص = ٨س^{٢} (٥س − ٩) .

٢٥ . اذا كانت الاقترانات ق ، ك ، ل اشتقاقية فبرهن على أن

$د_{س}$ [ق (س) ك (س) ل (س)] = ق (س) ك (س) لَ (س) + ق (س) ل (س) كَ (س) + ك (س) ل (س) قَ (س) .

وكنتيجة لذلك افرض ان ق = ك = ل واستنتج ان

$د_{س}$ [ق (س)]^{٣} = ٣ [ق (س)]^{٢} قَ (س) .

٢٦ . عمم نتيجة التمرين ٢٥ الى مشتقة حاصل ضرب اربعة اقترانات ومن ثم جد قانونا للمشتقة $د_{س}$ [ق (س)]^{٤} .

في تمارين ٢٧ ، ٢٨ استعمل التمرين (٢٥) لايجاد صَ .

٢٧ . ص = (٨س − ١) (س^{٢} + ٤س + ٥) (س^{٣} − ٥)

٢٨ . ص = (٣س^{٤} + ٨) (٢س^{٢} − ١٠) (٦س + ٧) .

٢٩ . أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = ٥ / (١ + س^{٢}) عند النقط الاتية (أ) ع (٠ ، ٥) ، (ب) ع (١ ، ٥ / ٢) ، (جـ) ع (− ٢ ، ١) .

٣٠ . أوجد معادلة المماس للمنحني ص= ٢ س^{٣} + ٤ س^{٢} − ٥ س − ٣ عند النقط الاتية

(أ) ع (٠ ، − ٣) (ب) ع (− ١ ، ٤) (جـ) ع (١ ، − ٢) .

٣١ . أوجد الاحداثي السيني للنقط الواقعة على منحني ص = س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٤ س + ٥ التي يكون عندها المماس : (أ) افقيا (ب) موازيا للخط المستقيم ٢ص + ٨س − ٥ = ٠ .

٣٢ . أوجد النقطة جـ على منحنى الاقتران ص = س^{٣} بحيث أن المماس عندها يقطع من محور السينات مقطعا يساوي ٤ .

٣٣ . اذا كان موضع النقطة جـ على الخط الاحداثي ل يعطي بالعبارة م (ن) = ٢ن^{٣} + ٩ن^{٢} − ٦٠ن + ١ ، عين الفترات الزمنية التي فيها تتحرك جـ (أ) بالاتجاه الموجب (ب) بالاتجاه السالب . متى تكون السرعة صفرا ؟

٣٤ . حل التمرين ٣٣ اذا كان م (ن) = ٣ن^{٥} − ٦ن^{٣} .

٣٥ . اذا كان الاقترانان ق و ك قابلين للاشتقاق وكان ق (٢) = ٣ ، قَ (٢) = − ١ ك (٢) = − ٥ ، كَ (٢) = ٢ . أوجد ما يلي :

(أ) (ق + ك) (٢) (ب) (ق − ك)َ (٢)

(جـ) (٤ق)َ (٢) (د) (ق ك)َ (٢)

(هـ) (ق / ك)َ (٢)

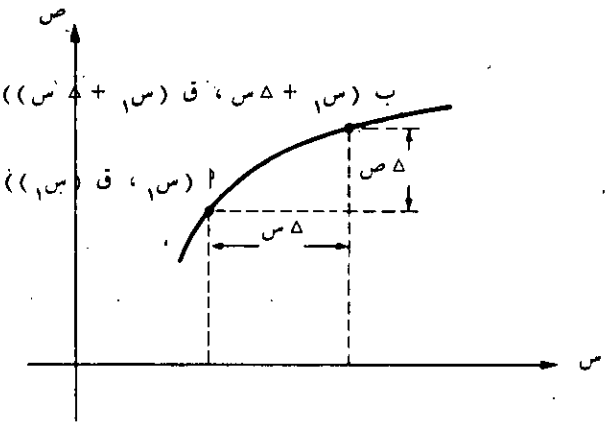
٣٦ . اذا كان ق (س) = س^{٣} − س^{٢} + س + ١ أوجد النقط التي يتقاطع عندها منحنيا ق و قَ .

٤ — الزيادات والتفاضلات :

لنبدأ بالمعادلة ص = ق (س) حيث ق (س) اقتران . في كثير من التطبيقات يخضع المتغير المستقل س لتغيرات صغيرة ومن الضروري ايجاد التغير المناظر الذي يطرأ على المتغير التابع ص . فاذا تغير س من $س_1$ الى $س_2$ فان التغير في س يكتب عادة Δ س (يقرأ دلتا س) أي أن Δ س = $س_2 - س_1$. ويسمى العدد Δ س زيادة س . لاحظ ان $س_2 = س_1 + \Delta$ س أي ان القيمة الجديدة للمتغير س تساوي قيمة س مضافا اليها زيادة س . وبالمثل فان Δ ص يرمز لتغير المتغير التابع ص المناظر للتغير Δ س . اذن

(٣–٣٠) Δ ص = ق ($س_2$) − ق ($س_1$) = ق ($س_1 + \Delta$ س) − ق ($س_1$) .

ويبين الشكل (٣ – ٥) عرضا هندسيا لهاتين الزيادتين .



(الشكل ٣ — ٥)

مثـال ١ : اذا كان ص = ٣ $س^2$ − ٥ أوجد التغير Δ ص اذا كانت قيمة س الابتدائية هي ٢ وكانت Δ س = ٠,١ .

الحـل : باستعمال (٣ – ٣٠) مع ق (س) = ٣ $س^2$ − ٥ نحصل على :

Δ ص = ق ($س_1 + \Delta$ س) − ق ($س_1$) = ق (٢,١) − ق (٢)

= [٣ (٢,١)^2 − ٥] − [٣ (٢)^2 − ٥]

= ١,٢٣ .

يمكن استعمال رمز الزيادة في تعريف مشتقة الاقتران ، وكل ما نحتاجه هو التعويض عن هـ بالرمز Δ س في (٣ – ٨) واعتبار س هي القيمة الابتدائية للمتغير المستقل وهذا يعطينا .

$$قَ (س) = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{ق (س + \Delta س) - (ق \quad س)}{\Delta س} .$$

باستعمال (٣ – ٣٠) واعتبار س هي القيمة الابتدائية نجد ان

$$\Delta ص = ق (س + \Delta س) - ق (س) ، \quad (٣-٣١)$$

وبالتعويض في الصيغة السابقة للمشتقة قَ (س) ينتج ان

$$(٣-٣٢) \quad قَ (س) = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س} .$$

ويمكن التعبير عن (٣ – ٣٢) بالالفاظ كما يلي مشتقة الاقتران ق هي نهاية نسبة زيادة المتغير التابع Δ ص الى زيادة المتغير المستقل Δ س عندما تؤول Δ س الى الصفر . لاحظ انه اذا كان س = س$_1$ كما في الشكل (٣ – ٥) فان Δ ص /Δ س هو ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين أ و ب، من (٣ – ٣٢) ينتج ان

$$(٣-٣٣) \quad \frac{\Delta ص}{\Delta س} \approx قَ (س) \quad \text{اذا كان } \Delta س \approx .$$

وهذا واضح هندسيا حيث انه عندما تكون Δ س قريبة جدا من الصفر فان ميل الخط المستقيم الواصل بين أ و ب ، وهو Δ ص /Δ س (انظر الشكل ٣ – ٥) يكون قريبا جدا من الميل قَ (س) للماس عند النقطة أ . واليك طريقة اخرى لكتابة (٣ – ٣٣) .

(٣ – ٣٤) Δ ص $\approx$ قَ (س) Δ س اذا كان Δ س $\approx$.

سنعطي للمقدار قَ (س) Δ س الوارد في (٣ – ٣٤) اسما خاصا في التعريف الآتي .

(٣ – ٣٥) تعريف التفاضلة : اذا كان ص = ق (س) ، وكان ق قابلا للاشتقاق واذا كانت Δ س هي زيادة س فان :

(أ) التفاضلة ء ص للتابع ص هي ء ص = قَ (س) Δ س.

(ب) والتفاضلة ء س للمتغير المستقل س هي ء س = Δ س

لاحظ ان ء ص تعتمد على قيم س وΔ س بينما من (ب) يلاحظ انه بالنسبة للمتغير المستقل ليس هناك فرق بين الزيادة Δ س والتفاضلة ء س فبتعويض ء س بدلا من Δ س في (أ) ينتج ان

(٣ – ٣٦) ء ص = قَ (س) ء س .

واذا قسمنا طرفي (٣ – ٣٦) على ء س (مع اعتبار ء س $\neq$ صفرا) نحصل على

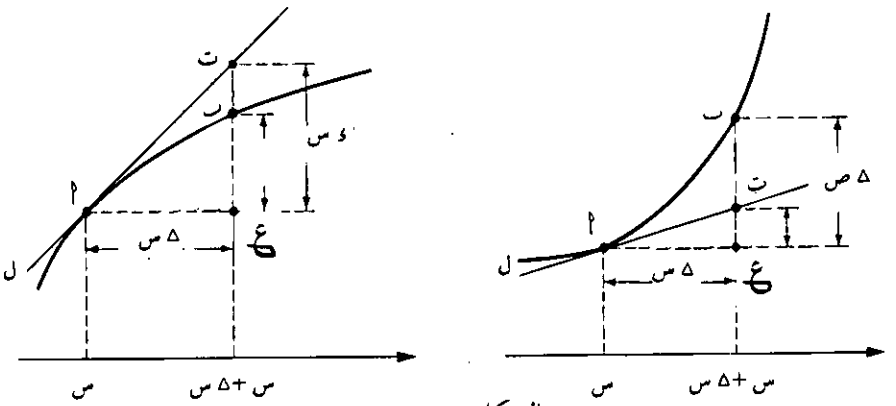
(٣ – ٣٧) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = قَ (س)

اذن فالمشتقة قَ (س) هي خارج قسمة تفاضلتين وهذا في الواقع هو أحد الاسباب لتعريف ء س و ء ص كما في (٣ – ٣٥) .

مثال ٢ : أوجد ء ص اذا كان ص = س^{٤} – ٣ س^{٢} + ٥ س + ٤ .

الحل : نفرض ان ق (س) = س^{٤} – ٣ س^{٢} + ٥ س + ٤ ونجد من (٣ – ٣٦) أن ء ص = (٤ س^{٣} – ٦ س + ٥) ء س .

ومن المفيد دراسة التفسير الهندسي لكل من ء س و ء ص بدلالة منحني ق . فلنأخذ المخططين المبينين بالشكل (٣ – ٦) حيث ل هو المماس عند النقطة



(الشكل ٣ — ٦)

فيهما جعلنا كلا من Δ س و Δ ص موجبة ولكن من الممكن ان تكونا سالبتين . فاذا كانت ت هي نقطة تقاطع ل مع الخط الرأسي المار بالنقطة ب وكانت ع هي النقطة التي احداثياها (س +Δ س ، ق (س)) فانه بالنظر في المثلث أ ع ت يمكن ملاحظة أن الميل قَ (س) للمماس هو النسبة ر/Δ س حيث ر ترمز لطول الخط ع ت . فيكون ر/Δ س = قَ (س) أي أن ر = قَ (س)Δ س = ء ص . وواضح ان نتيجة مماثلة تستنتج اذا كانت احدى الزيادتين (أو كلتاهما) سالبة . وعلى العموم اذا اصاب س زيادة ما Δ س ، فان ء ص هي المقدار الذي به يعلو (أو يهبط) المماس عندما يتغير المتغير المستقل من س الى س +Δ س وهذا يخالف المقدار Δ ص الذي به يعلو المخطط أو يهبط بين النقطتين أ ، ب .

فمن (٣ — ٣) و (٣ — ٣٥) (أ) ينتج انه اذا كان Δ س صغيرا فان Δ ص ≈ ء ص وهذا يؤكده هندسيا الشكل (٣ — ٦) . ونتيجة لذلك اذا كان ص = ق (س) فمن الممكن اتخاذ ء ص قيمة تقريبية للتغير Δ ص الذي يقابل التغير Δ س في س . ولهذه الفكرة فائدة في التطبيقات حيث يكفي ايجاد قيمة تقريبية للتغير Δ ص .

مثال ٣ : اذا كان ص = ٣ س^{٢} — ٥ ، فاستعمل ء ص لايجاد قيمة تقريبية للزيادة Δ ص عندما تتغير س من ٢ الى ١ , ٢ .

الحـــل : اذا كان ق (س) = ٣س^{٢} − ٥ فمن مثال ١ نجد أن Δ ص = ٢٣ , ١ .
ولكن باستعمال (٣ − ٣٦) نجد ان ؏ ص = قَ (س) ؏ س = ٦ س ؏ س
في المثال الحالي س = ٢ . ؏ س = ١ , ٠ فيكون ؏ ص = ٦ (٢) (١ ,) =
٢ , ١ . ولذا فان التقريب صحيح لاقرب رقم عشري واحد .

وفي بعض الاحيان يمكن استعمال التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية للخطأ . وهذا ما يوضحه المثال التالي :

مثـال ٤ : **قدر نصف قطر بالون كروي باثني عشر انشا تقريبا مع خطأ في القياسات أقصاه ٠,٠٥ من الانش . أوجد أكبر خطأ في حساب الحجم .**

الحـــل اذا كان س يرمز لنصف قطر البالون و ج هو الحجم فان
ج = $\frac{٤}{٣}$ * س^{٣} .

واذا كان أكبر خطأ في قياس س هو ؏ س (أو Δ س) فان القيمة الحقيقية لنصف القطر تنحصر بين س − ؏ س و س + ؏ س . اذا فرضنا ان Δ ج هو الخطأ في ج الناتج عن الخطأ Δ س في س فأن الحجم ج يقع بين ج − Δ ج و ج + Δ ج . ويمكننا تقريب Δ ج بالتفاضله ؏ ج = ٤ * س^{٢} ؏ س . فاذا عوضنا س = ١٢ ، ؏ س = ± ٠,٠٥ ينتج ان

؏ ج = ٤ * (١٢)^{٢} (± ٠,٠٥) ≈ ± ٩٠

وهكذا فان أكبر خطأ في الحجم الناتج عن الخطأ في قياس نصف القطر يساوي ٩٠ انشا مكعباً تقريبا .

اذا كانت القيمة المقيسة لكمية ما هي ك مع احتمال خطأ مقداره هـ فان معـــدل الخطـــأ (Average Error) أو الخطـــأ النسبي (Relative Error) يعطي بالمقدار هـ / ك بشرط ان ك ≠ صفرا . فمثلا اذا كان الطول المقيس لجسم ما هو ٢٥ انشاً والخطأ المحتمل هو ٠,١ انش فان معدل الخطأ هو ٠,١ / ٢٥ أو ٠,٠٠٤ وهذا يدل على ان مقدار الخطأ الحاصل هو بمعدل ٠,٠٠٤ انش لكل انش . ويعرف الخطأ المئوي بانه الخطأ النسبي مضروبا في ١٠٠ وفي المثال السابق يكون الخطأ المئوي يساوي ٠٠٤ ٠ × ١٠٠ أو ٠,٤ ٪

وتستعمل التفاضلات في حساب الخطأ فاذا كان ل يمثل قياسا ما مع خطأ محتمل مقداره ء ل فان معدل الخطأ هو ء ل / ل . وواضح انه اذا كان ء ل هو الخطأ في قياس ل على وجه التقريب فأن ء ل / ل هو تقريب لمعدل هذا الخطأ . ففي مثال ٤ كان معدل الخطأ في نصف القطر ء س / س أو ٠,٠٥ / ١٢ = ١ / ٢٤٠ انش لكل انش . وكان معدل الخطأ في الحجم هو ء ج / ج أو ٠,٠١٢ انش^{٣} / انش^{٣}

لقد توصلنا في (٣ – ٣٧) الى الصيغة $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = قَ (س) ولقد كان

ليبنز أول من استخدم هذا الرمز في دراساته المشهورة عن التفاضل والتكامل وكان ذلك في اوائل القرن السابع عشر وما زال الرمز يستعمل بكثرة في الرياضيات والعلوم التطبيقية . وليس من الضروري دائما اعتبار ء ص / ء س خارج قسمة تفاضلتين . فان ء ص / ء س هي ايضا رمز آخر للمشتقة قَ (س) . فمثلا اذا كان

ص = ٧ س^{٣} – ٤ س^{٢} + ٢ فان ء ص / ء س = ٢١ س^{٢} – ٨ س

ويستعمل الرمز ء ص / ء س بديلا عن المؤثر التفاضلي $د_{س}$. وهكذا فان

$$قَ (س) = د_{س} [ق (س)] = \frac{ء}{ء س} [ق (س)]$$

واذا كان ق اقترانا فان $د_{س}$ (ق) تكتب $\frac{\text{ء ق}}{\text{ء س}}$ وهكذا تأخذ الصيغ

(٣ – ٢٨) الشكل التالي :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ق} + \text{ك}) = \frac{\text{د ق}}{\text{د س}} + \frac{\text{د ك}}{\text{د س}}$$

$$\frac{\text{د}(\text{ق ك})}{\text{د س}} = \text{ق}\frac{\text{د ك}}{\text{د س}} + \text{ك}\frac{\text{د ق}}{\text{د س}} \qquad (٣-٣٨)$$

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{ق}/\text{ك}) = \frac{\text{ك}\dfrac{\text{د ق}}{\text{د س}} - \text{ق}\dfrac{\text{د ك}}{\text{د س}}}{\text{ك}^{٢}}$$

تمارين :

في التمارين ١ – ٤ أوجد Δ ص اذا كانت قيمتا س ، Δ س الابتدائيتان كما يلي :

١ . ص = ٣ س^{٢} – ٤ س + ٥ ، س = ٢ ، Δ س = – ٠,٢

٢ . ص = س^{٣} – ٣ س^{٢} + س – ٤ ، س = – ١ ، Δ س = ٠,١

٣ . ص = ١ / س^{٢} ، س = ٣ ، Δ س = ٠,٣

٤ . ص = ١ / س^{٢} ، س = ٣ ، Δ س = ٠,٣

٥ . ص = (س + ٢) / (س + ٣) ، س = ٠ ، س = – ٠,٠٣

في التمارين ٥ – ٨ (أ) استعمل (٣ – ٣١) لايجاد صيغة عامة للزيادة Δ ص

(ب) أوجد د ص (جـ) أوجد د ص – Δ ص .

٦ . ص = ٣ س^{٢} + ٥ س – ٢

٧ . ص = ٤ – ٧ س – ٢ س^{٢}

٨ . ص = ١٠ / س

٩ . ص = ٧ س + ١٢

١٠ . اذا كان ق (ع) = ع^{٣} – ٣ ع^{٢} + ٢ ع – ٧ ، ك = ق (ع) أوجد د ك .

استعمل د ك لايجاد قيمة تقريبية للتغير في ك عندما تتغير ع من ٤ الى ٣,٩٥ .

١١ . اذا كان ق (ن) = ١ / (٢ − ن^{٢}) ، ل = ق (ن) أوجد ؏ ل . استعمل ؏ ل لايجاد قيمة تقريبية للتغير في ل اذا تغيرت ن من ١ الى ١,٠٢ .

١٢ . نصف قطر قرص دائري ٨ انش تقريبا مع احتمال خطأ في القياس اقصاه ٠,٠٦ انش . استعمل التفاضلات لايجاد أكبر خطأ في حساب مساحة احد أوجه القرص . ما هو الخطأ النسبي والخطأ المئوي على وجه التقريب ؟

١٣ . اذا كان طول ضلع مربع قدما واحدا تقريبا مع احتمال خطأ في القياس اقصاه ١ / ١٦ انش . استعمل التفاضلات لحساب أكبر خطأ في مساحة المربع . ما هو الخطأ النسبي والخطأ المئوي بالتقريب ؟

١٤ . استعمل التفاضلات لحساب الزيادة في حجم مكعب عندما يتغير طول ضلع المكعب من ١٠ انش الى ١٠,١ انش . ما هو التغير الحقيقي في حجم المكعب .

١٥ . استعمل التفاضلات لحساب الزيادة في مساحة سطح بالون كروي عندما يتغير قطر البالون من ٢ قدم الى ٢,٠٢ قدم .

١٦ . باستعمال التفاضلات أوجد قيمة تقريبية للمقدار (٠,٩٨)^{٤} . ما هي القيمة الحقيقية لهذا المقدار ؟

١٧ . استعمل التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية لما يلي :

م = (٢,٠١)^{٤} − ٣ (٢,٠١)^{٣} + ٤ (٢,٠١)^{٢} − ٥

ما هي قيمة م الحقيقية ؟

١٨ . المساحة م لمربع طول ضلعه ل هي م = ل^{٢} . فاذا زاد ل بالمقدار Δ ل فبين هندسيا قيم ؏ م ، Δ م − ؏ م .

١٩ . حجم مكعب طول ضلعه س هو ج = س^{٣} فاذا زاد س بمقدار Δ س . فبين هندسيا قيم ؏ ج ، Δ ج − ؏ ج .

٥ ـ قاعدة السلسلة :

افرض ان ق و ك اقترانان اشتقاقيان حيث ان

ص = ق (ع) ، ع = ك (س) .

فاذا كان المتغير س قد حدد تحديدا مناسبا فانه يمكن ان نكتب .

ص = ق (ع) = ق (ك (س)) .

أي ان نجعل ص دالة س . فان الاقتران المعطى كالاقتران المركب ق ٥ ك (Composite Function) لمعرف في البند ٥ من الفصل الاول . واذا رمزنا الى ق ٥ ك بالرمز ل يصير

ص = ق (ك (س)) = ل (س) .

وهدفنا ايجاد صيغة للمشتقة لَ للاقتران المركب ل . فلنبدأ بمعالجة هذه المسألة بالطريقة البديهية اذا اعتبرنا المشتقة كخارج قسمة تفاضلتين كما رأينا في البند السابق يكون .

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = \frac{د\,ص}{د\,ع} \cdot \frac{د\,ع}{د\,س}$$

بشرط ان د س ≠ صفرا ، د ع ≠ صفرا . ولان

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = لَ(س)\text{ ، }\frac{د\,ص}{د\,ع} = قَ(ع)\text{ ، }\frac{د\,ع}{د\,س}$$

= كَ (س) فان

لَ (س) = قَ (ع) كَ (س) = قَ (ك (س)) كَ (س) .

وهذا لايبرهن شيئا ولكنه يجعل العبارة التالية تبدو معقولة :

(٣ – ٣٩) **قاعدة السلسلة** : اذا كان ل (س) = ف (ك (س)) فان لَ (س) = قَ (ك (س)) . كَ (س) .

والنظرية التالية تبين أن (٣ – ٣٩) صحيحة فعلا ولكن تحت شروط مناسبة .

(٣–٤٠)نظريـــة : اذا كان ق و ك اقترانين وكان ك له مشتقة عند ٢ و ق له مشتقة عند ك (٢) فان الاقتران المركب ل والمعرف بالعلاقة ل (س) = ق (ك (س)) لهمشتقة عند النقطة ٢ وتعطي بالقاعدة

لَ (٢) = قَ (ك (٢)) . كَ (٢) .

البرهـــان : نفرض ان ص = ق (ع) ، ع = ك (س) و ب = ك (٢) والمطلوب ان نثبت أن لَ (٢) = قَ (ب) كَ (٢) . نطبق القاعدة (٣ ـ ١١) على ل ونحصل على

$$\text{(٣–٤١)}\quad \text{لَ}(٢) = \lim_{س \to ٢} \frac{\text{ل}(س) - \text{ل}(٢)}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{\text{ق}(\text{ك}(س)) - \text{ق}(\text{ك}(٢))}{س - ٢}$$

بشرط ان تكون النهاية موجودة . واذا كان ك (س) ≠ ك (٢) يكون ق

$$\frac{\text{ق}(\text{ك}(س)) - \text{ق}(\text{ك}(٢))}{س - ٢} =$$

$$\frac{\text{ق}(\text{ك}(س)) - \text{ق}(\text{ك}(٢))}{\text{ك}\,س) - \text{ك}(٢)} \cdot \frac{\text{ك}(س) - \text{ك}(٢)}{س - ٢}$$

(٣-٤٢) أي ان $\dfrac{\text{ق (ك (س)) − ق (ك (أ))}}{\text{س − أ}} =$

$$\frac{\text{ق (ع) − ق (ب)}}{\text{ع − ب}} \qquad \frac{\text{ك (س) − ك (أ)}}{\text{س − أ}}$$

فاذا كانت كَ (أ) موجودة ينتج من (٣ − ١٢) ان ك متصل عند أ ونتيجة لذلك تكون نهـا ك (س) = ك (أ) ، أي انه اذا كانت س تؤول الى أ فان ع تؤول الى ب . وبما ان

س ← أ

$$\text{نهـا}_{\text{ع} \leftarrow \text{ب}} \frac{\text{ق (ع) − ق (ب)}}{\text{ع − ب}} = \text{قَ (ب)}$$

فانه عندما تؤول س الى أ (من ثم تؤول ع الى ب) فان المقدار على الجانب الايسر من (٣ − ٤٢) له النهاية قَ (ب) كَ (أ) . وهذه هي النتيجة المطلوبة . ولكن بما أن المقدار على الجانب الأيسر من (٣ − ٤٢) غير معرف عندما ع = ب فان الاسلوب السابق في البرهان يكون صحيحا في حالة ع ≠ ب لجميع قيم س الواقعة في فترة مفتوحة تحتوي أ (ربما عدا أ نفسها) . ولبرهنة النظرية في حالة ع = ب عندما تكون س قريبة من أ فانه من الضروري ان نتبع طريقة اكثر تعقيدا . ولنبدأ بتعريف اقتران جديد ف كما يلي .

(٣-٤٣)

$$\left.\begin{array}{l} \text{ف (ع)} = \dfrac{\text{ق (ع) − ق (ب)}}{\text{ع − ب}} - \text{قَ (ب)} \\ \qquad \text{اذا كانت ع} \neq \text{ب} \\ \text{ف (ب)} = 0 \end{array}\right\}$$

وهكذا نجعل ف معرفا على فترة مفتوحة تحوي ب وبما ان قَ (ب) موجودة

فان $\lim_{ع \to ب}$ ف (ع) = قَ (ب) − قَ (ب) = ٠

وهذا يبين أن ف متصل عند ب .

ثم لنعتبر الاقتران المركب م المعطى بالعلاقة م (س) = ف (ك (س)) .فيما

أن $\lim_{س \to ا}$ ك (س) = ك (ا) = ب ولان ف متصل عند ب فمن

الممكن تطبيق (٢ − ٣٤) لنحصل على :

$$\lim_{س \to ا} م (س) = \lim_{س \to ا} ف (ك (س)) = ف$$

$$\lim_{س \to ا} (ك (س)) = ف (ب) = ٠$$

فاذا وضعنا ك (س) بدل ع في (٣−٤٣) نحصل على

$$ف (ك (س)) = \frac{ق (ك (س)) - ق (ب)}{ك (س) - ب} - قَ (ب)$$

على اعتبار أن ك (س) ≠ ب . وبضرب طرفي المعادلة الاخيرة في ك (س) − ب

وترتيب الحدود ينتج ان

ق (ك (س)) − ق (ب) = [ف (ك (س)) + قَ (ب)] [ك (س) − ب]

أو

(٣−٤٤) ق (ك (س)) − ق (ك (ا)) = [ف (ك (س)) + قَ (ك (ا))] [ك (س) − ك (ا)] .

لقد اشتقت المعادلة (٣ – ٤٣) على فرض ان ك(س) ≠ ب . وبناء عليه فان س ≠ أ . ولكن يظهر من التعويض المباشر ان (٣ – ٤٤) صحيحة ايضا عندما ك (س) = ب = ك (أ) . واذن فهي متطابقة على فترة مفتوحة تحوي أ . فبالتعويض عن ق (ك (س)) – ق (ك (أ)) من (٣ – ٤٤) في (٣ – ٤٢) ينتج أن

$$لَ(أ) = \lim_{س \to أ} [ف(ك(س)) - قَ(ك(أ))] \left[\frac{ك(س) - ك(أ)}{س - أ}\right]$$

وباستعمال نظريات النهايات علما بأن

$$\lim_{س \to أ} ف(ك(س)) = \lim_{س \to أ} م(س) = ٠$$

نحصل على :

$$لَ(أ) = قَ(ك(أ)) . \lim_{س \to أ} \frac{ك(س) - ك(أ)}{س - أ}$$

أو

$$لَ(أ) = قَ(ك(أ))كَ(أ)$$

وهذه هي النتيجة المطلوبة .

اذا كان س أي عدد يحقق نفس الشروط التي يحققها أ واذا كان ل (س) = ق (ك (س)) . فان نتيجة (٣ – ٤٠) يمكن كتابتها كما في (٣ – ٣٩) . اليك طريقة سهلة لحفظ قاعدة السلسلة وهي استعمال رموز التفاضلات . اذا فرضنا أن ص = ق (ع) ، ع = ك (س) أي ان ص = ق (ك (س)) فان (٣ – ٣٩) يمكن كتابتها كما يلي :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \cdot \frac{د ع}{د س} . \qquad (٣-٤٥)$$

وهذه الصيغة يسهل تذكرها اذا فكرنا في اختصار د ع في الجانب الايسر منها .

مثـال ١ : اذا كان ص = ع^{٣} ، ع = س^{٢} + ١ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحـــل : يمكن حل هذا المثال بطريقتين الاولى هي التعويض عن ع بالعبارة س^{٢} + ١ في المعادلة الاولى ومن ثم تحسب $\frac{د ص}{د س}$ واما الطريقة الاخرى فهي استعمال (٣ – ٤٥) وهكذا فان

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \cdot \frac{د ع}{د س} = (٣ع^{٢}) (٢س)$$

فاذا عوضنا س^{٢} + ١ بدلا من ع نحصل ايضا على

$$\frac{د ص}{د س} = ٣ (س^{٢} + ١)^{٢} (٢س)$$

ومن الاستخدامات الرئيسية لقاعدة السلسلة استعمالها في اثبات قواعد الاشتقاق الاخرى . وكمثال على ذلك سنستعملها للحصول على صيغة لمشتقة اقتران مرفوع الى قوة .

(٣–٤٦) قاعدة القوى للاقترانات : افرض ان ك اقتران قابل للاشتقاق وان ن أي عدد صحيح . فاذا كان ل (س) = [ك (س)]^{ن} فان

لَ (س) = ن [ك (س)]$^{ن-١}$ ك (س) .

البرهـــان اذا كان ق (س) = س^{ن} فان ل (س) = [ك (س)]^{ن} = ق (ك (س)) ومن (٣ – ١٦) نجد ان قَ (س) = ن س$^{ن-١}$. ولذا فان قَ (ك (س)) = ن [ك (س)]$^{ن-١}$ والتعويض عن قَ (ك (س)) في قاعدة السلسلة (٣ – ٣٩) يعطي النتيجة المطلوبة . وبدلالة الموثر التفاضلي $د_{س}$ نجد ان

(٣–٤٧) $د_{س}$ [ك (س)]^{ن} = ن [ك (س)]$^{ن-١}$ $د_{س}$ (ك (س)) .

مثـال ٢ . أوجد قَ (س) اذا كان ق (س) = (س^{٥} − ٤ س + ٨)^{٧} .

الحـــل : باستخدام (٣ − ٤٧) حيث ك (س) = س^{٥} − ٤ س + ٨ و ن = ٧ نجد ان

قَ (س) = ٧ (س^{٥} − ٤ س + ٨)^{٦} $\frac{د}{د س}$ (س^{٥} − ٤ س + ٨)

= ٧ (س^{٥} − ٤ س + ٨)^{٦} (٥ س^{٤} − ٤) .

مثـال ٣ . أوجد صَ اذا كان ص = ١ / (٤ س^{٢} + ٦ س − ٧)^{٣}

الحـــل : بكتابة ص = (٤ س^{٢} + ٦ س − ٧)$^{-٣}$ واستعمال قاعدة القوى (٣ − ٤٧) حيث ك (س) = ٤ س^{٢} + ٦ س − ٧ و ن = − ٣ نحصل على

صَ = − ٣ (٤ س^{٢} + ٦ س − ٧)$^{-٤}$ $\frac{د}{د س}$ (٤ س^{٢} + ٦ س − ٧) =

٣ (٤ س^{٢} + ٦ س − ٧)$^{-٤}$ (٨ س + ٦)

$$= - \frac{٦ (٤ س + ٣)}{(٤ س^{٢} + ٦ س - ٧)^{٤}}$$

مثـال ٤ : اذا كان ق (ع) = (٢ ع + ٥)^{٣} (٣ ع − ١)^{٤} أوجد قَ (ع)

الحـــل : نستعمل أولا قاعدة المضروبين ثم قاعدة القوى ومن ثم نحلل النتيجة ونحصل على :

ق (ع) = (٢ ع + ٥)^{٣} $\frac{د}{د ع}$ (٣ ع − ١)^{٤} + (٣ ع − ١)^{٤} $\frac{د}{د ع}$ (٢ ع + ٥)^{٣}

= ٢ (ع + ٥)^{٣} ٤ (٣ ع − ١)^{٣} (٣) + (٣ ع − ١)^{٤} (٣) (٢ ع + ٥)^{٢} (٢)

= ٦ (٢ ع + ٥)^{٢} (٣ ع − ١)^{٣} [٢ (٢ ع + ٥) + (٣ ع − ١)]

= ٦ (٢ ع + ٥)^{٢} (٣ ع − ١)^{٣} (٧ ع + ٩) .

اذا كان ك اقترانا و ص = ك (س) فان (٣ − ٤٧) يمكن كتابتها في اي من الاشكال التالية .

$$د_{س} (ص^{ن}) = ن\, ص^{ن} \; د_{س} (ص) = ن\, ص^{ن-١} \; صَ$$

$$= ن\, ص^{ن-١} \frac{د\, ص}{د\, س} .$$

لقد استعمل الترقيم السفلي س مع المؤثر التفاضلي د للتأكيد على أن المتغير المستقل هو س . أما المتغير التابع ص فيمثل المقدار ك (س) ونتيجة لذلك عندما نفاضل ص^ن يلزم أن نضرب ن ص^{ن-١} بالمشتقة صَ . وان من الاخطاء الشائعة كتابة $د_{س} (صَ) = ر\, ص^{ر-١}$. وسنجد ان الصيغة (٣ - ٤٨) مهمة جدا عند دراسة الاقترانات الضمنية في البند التالي :

تمارين :

فاضل الاقترانات المعطاة في التمارين ١ - ٢٠

١ ٠ ق (س) = $(٨ س^{٣} - ٢ س^{٢} + س - ٧)^{٥}$

٢ ٠ ك (ع) = $(ع^{٤} - ٨ ع + ١٥)^{٤}$

٣ ٠ ق (ع) = $(١٧ ع - ٥)^{١٠٠٠}$

٤ ٠ ك (س) = $(٣ س^{٢} - ٥ س + ٧)^{-١}$

٥ ٠ ف (ن) = $(٤ ن^{٥} - ٣ ن^{٣} + ٢ ن)^{-٢}$

٦ ٠ ص (م) = $١ / (٨ - ٥ م + ٧ م^{٢})^{١٠}$

٧ ٠ ل (س) = $(٦ س - ٧)^{٣} (٨ س^{٢} + ٩)^{٢}$

٨ ٠ ق (ع) = $(٢ ع^{٢} - ٣ ع + ١) (٣ ع + ٢)^{٤}$.

٩ ٠ ك (م) = $(م^{٢} - ١ / م^{٢})^{٦}$

١٠ ٠ ف (ن) = $\left(\frac{٣ ن + ٤}{٦ ن - ٧} \right)^{٣}$

١١ ٠ ل (ع) = $\frac{(ع^{٢} + ١)^{٣}}{(٤ ع - ٥)^{٥}}$

١٢ ٠ ك (س) = $(٣ س - ٨)^{-٢} (٧ س^{٢} + ٤)^{-٣}$

١٣ . ق (س) = $\left(\frac{٣س^{٢} - ٥}{٢س^{٢} + ٧} \right)^{٢}$

١٤ . م (ع) = $\frac{٩ع^{٢} + ٢ع}{(٦ع + ١)^{٣}}$

١٥ . ل (ف) = (ف$^{-٤}$ + ٣ف$^{-٢}$ + ٢)$^{-٦}$

١٦ . ق (ع) = (ع$^{-١}$ − ٢ع$^{-٢}$)$^{-٣}$

١٧ . ك (س) = [(٢س + ١٠)^{١٠} + ١]^{١٠}

١٨ . ق (ن) = [(١ + $\frac{١}{ن}$)$^{-١}$ + ١]$^{-١}$

١٩ . ق (م) = ٢م (٢م + ١)^{٢} (٢م + ٣)^{٣}

٢٠ . ك (س) = $\frac{٧س (س^{٢} + ١)^{٢}}{(٣س^{٢} + ١٠)^{٤}}$

في كل من التمارين ٢١ − ٢٤ أوجد (م) معادلة المماس لمنحنى المعادلة المعطاة عند النقطة المعطاة ، (ب) النقط على هذا المنحنى التي يكون عندها المماس افقيا .

٢١ . ص = (٤س^{٢} − ٨س + ٣)^{٤} ، م (٢ ، ٨)

٢٢ . ص = (س + $\frac{١}{س}$)^{٥} ، م (١ ، ٣٢)

٢٣ . ص = (٢س − ١)^{١٠} ، م (١ ، ١)

٢٤ . ص = (س^{٢} − ١)^{٧} ، م (٠ ، − ١)

٢٥ . اذا كان ص = (س^{٤} − ٣س^{٢} + ١)^{١٠} أوجد ص ومن ثم استعملها لايجاد قيمة تقريبية للتغير ص عندما تتغير س من ١ الى ١,٠١ .

٢٦ . اذا كان ع = م^{٣} (م − ١)^{٥} أوجد ع واستعملها لايجاد قيمة تقريبية للتغير في ع عندما تتغير م من ٢ الى ١,٩٨ .

٢٧ ـ اذا كان ع = ق (م) ، م = ك (ف) اكتب قيمة $\frac{د ع}{د ف}$ بصيغة قاعدة السلسلة وبدلالة رموز التفاضلات .

٢٨ ـ اذا كان ل = ق (ع) ، ع = ك (م) اكتب $\frac{د ل}{د م}$ بصيغة قاعدة السلسلة وبدلالة رموز التفاضلات .

٢٩ ـ استعمل نتيجة تمرين ٢٧ لايجاد $\frac{د ع}{د ف}$ اذا كان ع = م^{٣} − ٢ / م ، م = (ف^{٢} + ١)^{٥}

٣٠ ـ استعمل نتيجة ٢٩ لايجاد $\frac{د ل}{د م}$ اذا كان ل = (ع^{٤} + ٢ع^{٢} + ١)^{٣} وع = ٤م^{٢} .

٣١ ـ اذا كان ق (س) = س^{٤} − ٣س^{٣} + ٣س + ٢ ، ك (س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٢س + ١ استعمل التفاضلات لتقريب التغير في ق (ك (س)) اذا تغيرت س من ١ الى ٩٩ , ٠

٣٢ . اذا كان ق (س) = س^{٥} + س^{٤} + س^{٣} + س + ١ ، أوجد قيمة تقريبية للتغير في ق (ق (س)) اذا تغيرت س من ٠ الى ٠,٠١

٣٣ ـ اذا كان ل (س) = ق (ك (س)) حيث ق (٢) = − ٤ ، ك (٢) = ٢ قَ (٢) = ٣ ، كَ (٢) = ٥ أوجد لَ (٢) .

٣٤ . اذا كان ل ، ق ، ك اقترانات حيث ل (س) = ق (ك (س)) ، ق (٠) = − ١ ، ك (٠) = ٠ ، قَ (٠) = − ٣ ، لَ (٠) = ٢ أوجد كَ (٠) .

٦ — التفاضل الضمني (Implicit Differentiation)

تعين المعادلة ذات المتغيرين في معظم الاحيان اقتراناً واحدا أو اكثر . فمثلا اذا كان ل ، م أي مقداريـن جبريين في س و ص فـان مجموعـة الحل (Solution Set) للمعادلة ل = م يمكن التعبير عنها بما يلي :

ج = { (س ، ص) : ل = م }

حيث يرمز (س ، ص) للمجموعة المكونة من الازواج المرتبة التي هي حلول للمعادلة ل = م . فاذا كان يناظر كل س في مجموعة ما سهـ من الاعداد الحقيقية قيمة وحيدة للمتغير ص حيث (س ، ص) ∈ ج فان اقترانا ق قد عين بحيث ان ق (س) = ص لجميع قيم س في المجال سهـ . ومن ثم فان مجموعة الحل يمكن كتابتها على الشكل التالي :

ج = { (س ، ص) ، ص = ق (س) }

ونسمي اي اقتران معرف على هذا النحو اقترانا ضمنيا لان تعريفه متضمن **بالمعادلة ل = م** . وفي بعض الاحيان يمكن ايجاد صيغة مباشرة للاقتران وذلك بحل **بالمعادلة** وايجاد قيمة ص بدلالة س كما هو موضح بالمثال التالي

مثـال ١ : أوجد الاقتران الضمني **المعرف** بالمعادلة س (س + ١) − ٢ ص = ٣ (س − ص) ،

الحـــل : كل من المعادلات التالية تكافيء المعادلة المعطاة .

$$س^{٢} + س - ٢ص = ٣س - ٣ص$$

$$-٢ص + ٣ص = ٣س - س^{٢} - س$$

$$ص = ٢س - س^{٢}$$

اذن فان مجموعة الحل للمعادلة المعطاة هي

ج = { (س ، ص) : ص = ٢ س − س^{٢} } .

والمعادلة تعين ضمنيا الاقتران ق حيث ق (س) = ٢ س − س^{٢} . لجميع قيم س . وفي الشكل (١ − ١٢) بيان هذا الاقتران الضمني ق . واذا عوضنا عن ص بـ ق (س) في المعادلة المعطاة في مثال ١ نحصل على

س (س + ١) − ٢ ق (س) = ٣ (س − ق (س))

أو

س (س + ١) − ٢ (٢ س − س^{٢}) = ٣ (س − (٢ س − س^{٢})) وهذه المعادلة تختزل الى المتطابقة التالية :

٣س^{٢} − ٣س = ٣س^{٢} − ٣س

وهذه النتيجة تميز كل اقتران ق يعرف ضمنيا بمعادلة في س ، ص ويمكن استعمالها لمعرفة هل الاقتران ضمني أم لا .

ويمكن ان تعين المعادلات في س ، ص عدة اقترانات ضمنية كما هو موضح بالمثال الاتي :

مثـال ٢ . أوجد اقترانين ضمنيين تعينهما المعادلة ص^{٢} = س .

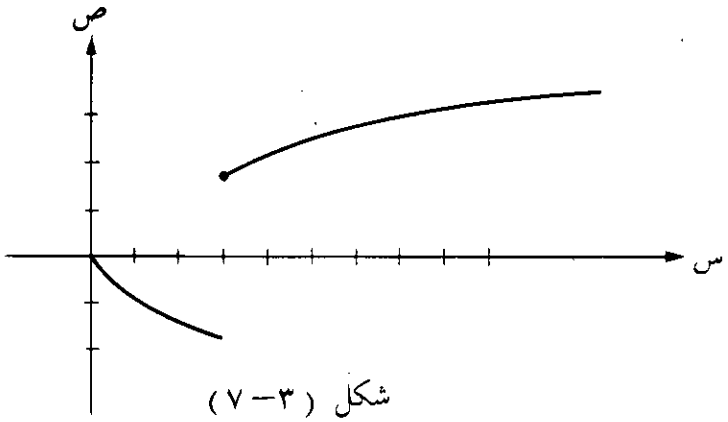
الحـــل : مجموعة حل ص^{٢} = س هي اتحاد مجموعتي الحل للمعادلتين ص = $\sqrt{س}$ و ص = − $\sqrt{س}$. فاذا عرفنا الاقترانين ق و ك بالمعادلتين

ق (س) = $\sqrt{س}$ ، ك (س) = − $\sqrt{س}$.

حيث س ⩾ ٠ ومن ثم اذا عوضنا ق (س) أو ك (س) بدلا من ص في المعادلة المعطاة نحصل على المتطابقة س = س . وهكذا فان ق و ك اقترانان ضمنيان . وفي الحقيقة فان المعادلة ص^{٢} = س تعين اقترانات ضمنية اخرى . فمثلا اذا عرفنا ل بالمعادلتين

$$ل (س) = \begin{cases} -\sqrt{س} & \text{اذا كان } ٠ \leq س < ٣ . \\ \sqrt{س} & \text{اذا كان } س \geqslant ٣ . \end{cases}$$

فان ل اقتران ضمني حيث ان التعويض عن ص بالرمز ل (س) في المعادلة يفضي الى المتطابقة س = س ٠ لقد رسم بيان ل في الشكل (٣ − ٧) . لاحظ ان ل له نقطة انفصال قافز عند س = ٣ .



شكل (٣ – ٧)

وليس من السهل دائما استعمال الطريقة التي اتبعت في المثالين ١ ، ٢ لايجاد الاقترانات الضمنية . فمثلا من الصعوبة حل المعادلة

$ص^{٤} + ٣ص - ٤س^{٣} = ٥س + ١$.

لايجاد ص بدلالة س . ولكن ما زالت هذه المعادلة تعين اقترانا ضمنيا ق في المفهوم التالي : اذا عوضنا ق (س) بدلا من ص فان المعادلة

$[ق(س)]^{٤} + ٣[ق(س)] - ٤س^{٣} = ٥س + ١$

تصبح متطابقة لجميع قيم س في مجال ق . ومن الممكن ذكر شروط يكون معها الاقتران الضمني موجودا وقابلا للاشتقاق عند نقط في مجاله ولكن البرهان يتطلب طرقا متقدمة ولذلك فقد حذفناه . وفي الامثلة التالية سنفرض أن أي معادلة معطاة في س ، ص تعين اقترانا قابلا للاشتقاق بحيث اذا عوضنا ق (س) بدلا من ص فان المعادلة تصبح متطابقة لجميع قيم س في مجال ق . ومن ثم يمكن ايجاد مشتقة ق بطريقة التفاضل الضمني كما هو موضح بالمثال الاتي :

مثـال ٣ على فرض ان المعادلة $ص^{٤} + ٣ص - ٤س^{٣} = ٥س + ١$ تعين اقترانا ضمنياق قابلا للاشتقاق بحيث ان ص = ق (س) أوجد مشتقة ق .

الحـــل : نعتبر ص رمزا يرمز الى ق (س) وان المعادلة متطابقة لجميع قيم س في مجال ق . وبناء عليه فان مشتقة الطرفين متساوية أي ان

$$\frac{د}{د س}(ص^{٤} + ٣ص - ٤س^{٣}) = \frac{د}{د س}(٥س + ١)$$

أو

(٣-٤٩) $د_س(ص^٤) + د_س(٣ص) - د_س(٤س^٣) = د_س(٥س) + د_س(١)$ ومن المهم ملاحظة ان $د_س(ص^٤) \neq ٤ص^٣$ بوجه عام . ولكن بما أن ص = ق (س) فاننا سنستعمل قاعدة القوى (٣ - ٤٨) ونحصل على $د_س(ص^٤) = ٤ص^٣ صَ$ وبنفس الطريقة فان $د_س(٣ص) = ٣صَ$.

وبالتعويض في (٣ - ٤٩) ينتج ان

$٤ص^٣ صَ + ٣صَ - ١٢س^٢ = ٥ + ٠$

وبحل هذه المعادلة لايجاد صَ نجد ان

$(٤ص^٣ + ٣) صَ = ١٢ س^٢ + ٥$

أي ان

$$صَ = \frac{١٢س^٢ + ٥}{٤ص^٣ + ٣}$$

بشرط ان المقام لا يساوي صفرا . فبدلالة ق تصبح هذه كما يلي

$$ق`(س) = \frac{١٢س^٢ + ٥}{٤[ق(س)]^٣ + ٣}$$

والمعادلتان الاخيرتان تكشفان عن نقطة ضعف في طريقة التفاضل الضمني . ذلك أن صَ (أو قَ (س)) تعطي بدلالة صيغة ما زالت تحتوي المقدار ص (أو ق س)) ولكن هذه النتيجة ما زالت رغم ذلك مفيدة جدا في دراسة ق وبيانها . وهذا موضح بالمثال التالي :

مثـال ٤ . أوجد ميل المماس لبيان المعادلة $ص^٤ + ٣ص - ٤س^٣ = ٥س + ١$ عند النقطة (١ ، - ٢) .

الحـــل : من (٣ - ١) نجد ان ميل المماس م عند النقطة جـ (أ ، ب) على منحناها هو قيمة المشتقة صَ عندما س = أ ، ص = ب . والمعادلة المعطاة في هذا المثال هي نفس المعادلة المعطاة في مثال ٣ حيث وجدنا أن صَ = (١٢ س^٢

+ ٥) / (٤ ص^{٣} + ٣) فبالتعويض س = ١ ص = − ٢ . نجد أن

$$م = \frac{١٢ (١)^{٢} + ٥}{٤ (-٢)^{٣} + ٣} = -\frac{١٧}{٢٩}$$

مثال ٥ : على فرض ان س^{٢} + ص^{٢} = ١ يعين اقترانا ق حيث ص = ق (س) ، اوجد صَ .

الحل : كما في مثال ٣ نفاضل طرفي المعادلة بالنسبة الى س ونحصل على

د$_{س}$ (س^{٢}) + د$_{س}$ (ص^{٢}) = د$_{س}$ (١)

فيكون

٢ س + ٢ ص صَ = ٠ أو ص صَ = − س . واذا كان ص ≠ ٠ فان صَ = − س / ص .

والمعادلة س^{٢} + ص^{٢} = ١ في مثال ٥ تعين اكثر من اقتران . من ذلك الاقترانات ق و ك حيث ق (س) = $\sqrt{١ - س^{٢}}$ ، ك (س)

= − $\sqrt{١ - س^{٢}}$.

ومن الممكن اثبات ان طريقة التفاضل الضمني تعطي مشتقة أي اقتران قابل للاشتقاق ومعرف بمعادلة ذات مجهولين . ولكن سوف لا نحاول برهنة هذه العبارة في هذا الكتاب .

مثال ٦ أوجد صَ اذا كان ٤ س ص^{٣} − س^{٢} ص + س^{٣} − ٥ س + ٦ = ٠

الحل : فاضل طرفي المعادلة بالنسبة الى س تحصل على :

د$_{س}$ (٤ س ص^{٣}) د$_{س}$ (س^{٢} ص) + د$_{س}$ (س^{٣}) د$_{س}$ (٥ س) + د$_{س}$ (٦) = د$_{س}$ (٠) .

وبما أن ص ترمز الى ق (س) حيث ان ق اقتران فيجب تطبيق قاعدة المضروبين على د$_{س}$ (٤ س ص^{٣}) و د$_{س}$ (س^{٢} ص) . وهكذا فان

$$د_س (٤س ص^٣) = ٤س د_س (ص^٣) + ص^٣ د_س (٤س)$$
$$= ٤س (٣ص^٢ صَ) + ص^٣ (٤)$$
$$= ١٢ س ص^٢ صَ + ٤ص^٣$$

$$د_س (س^٢ ص) = س^٢ د_س (ص) + ص د_س (س^٢)$$
$$= س^٢ صَ + ص (٢س)$$
$$= س^٢ صَ + ٢ص س .$$

وبالتعويض بالمعادلة الاولى في الحل عن هذين الحدين ومفاضلة الحدود الاخرى ينتج ان

$$(١٢ س ص^٢ صَ + ٤ص^٣) - (س^٢ صَ + ٢س ص) + ٣س^٢ - ٥ = ٠$$

ثم بتجميع الحدود التي تحتوي على صَ ونقل الحدود الاخرى الى الطرف الايسر من المعادلة ينتج

$$(١٢ س ص^٢ - س^٢) صَ = ٥ - ٣س^٢ + ٢س ص - ٤ص^٣$$

$$صَ = \frac{٥ - ٣س^٢ + ٢س ص - ٤ص^٣}{١٢ س ص^٢ - س^٢}$$

تمارين :

أوجد اقترانا ضمنيا واحداً على الاقل تعرفه كل واحدة من المعادلات المعطاة في التمارين ١ – ٨ وأوجد مجاله .

١ . $٣س - ٢ص + ٤ = ٢س^٢ + ٣ص - ٧س$

٢ . $س^٣ - س ص + ٤ص = ١$

٣ . $س^٢ + ص^٢ - ١٦ = ٠$

٤ . $٣س^٢ - ٤ص^٢ = ١٢$

٥ . $س^٢ - ٢س ص + ص^٢ = س$

٦ . $٣س^٢ - ٤ص + ص^٢ = ٠$

٧ . $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ١$

٨ . $|س - ص| = ٢$.

على فرض ان كل معادلة من المعادلات في التمارين ٩ – ١٦ تعين اقترانا ق حيث ص = ق (س) أوجد صَ .

٩ . $٨س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$

١٠ . $٤س^{٣} - ٢ص^{٣} = س$

١١ . $٢س^{٣} + س^{٢}ص + ص^{٣} = ١$

١٢ . $٥س^{٢} + ٢س^{٢}ص + ص^{٢} = ٨$

١٣ . $٥س^{٢} - س ص - ٤ص^{٢} = ٠$

١٤ . $س^{٤} + ٤س^{٢} ص^{٢} - ٣س ص^{٣} + ٢س = ٠$

١٥ . $١ / س^{٢} + ١ / ص^{٢} = ١$

١٦ . $س = ص + ٢ص^{٢} + ٣ص^{٣}$.

في كل من التمارين ١٧ – ٢٠ أوجد معادلة المماس لمنحنى المعادلة المعطاة عند النقطة أ المبينة في التمرين .

١٧ . $س ص + ١٦ = ٠$. أ (– ٢ ، ٨)

١٨ . $ص^{٤} - ٤س^{٢} = ٥$ ، أ (– ١ ، ٣)

١٩ . $٢س^{٣} - س^{٢} ص + ص^{٣} - ١ = ٠$ أ (٢ ، – ٣)

١٠ . $١ / س + ٣ / ص = ١$ ، أ (٢ ، ٦) .

٢١ . اثبت ان المعادلة $س^{٢} + ص^{٢} + ١ = ٠$ لا تعين اقترانا ق حيث ص = ق (س) .

٢٢ . اثبت ان المعادلة $ص^{٢} = س$ تعين عددا لا نهائيا من **الاقترانات** الضمنية

٢٣ . كم اقترانا ضمنيا يعين بكل من المعادلات التالية ؟

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} - ١ = ٠$ (ب) $س^{٢} + ص^{٢} = ٠$

٢٤ . استعمل التفاضل الضمني لبرهان انه اذا كانت جـ أي نقطة على محيط الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = أ^{٢}$ فان المماس عند النقطة جـ يكون عموديا على م جـ حيث م مركز الدائرة .

٧ ـــ مشتقات الاقترانات الجبرية :

يمكن تعميم قاعدة القوى (٣ – ١٦) الى الحالة التي يكون فيها الاس عددا نسبيا . وهكذا اذا كان

ص = س م / ن

حيث م ، ن اعداد حقيقية صحيحة ، ن ≠ . فان

ص^{ن} = س^{م}

نفرض ان صَ موجودة وليس هناك أي مقام مساو للصفر .

فمن التفاضل الضمني نحصل على

$$ن ص^{ن-١} \frac{د ص}{د س} = م س^{م-١}$$

ونتيجة لذلك فان

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} س^{م-١} ص^{١-ن}$$

$$= \frac{م}{ن} س^{م-١} \left(س^{\frac{م}{ن}} \right)^{١-ن}$$

تستعمل قوانين الاسس لتبسيط الطرف الايسر ونحصل على

$$(٣-٥٠) \quad د_س \left(س^{\frac{م}{ن}} \right) = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$$

وهذه قاعدة القوى للاسس النسبية . والبرهان المعطى هنا غير كامل لاننا فرضنا وجود صَ : ومن اجل اعطاء برهان كامل فمن الممكن استعمال التعريف (٣ – ٨) للمشتقة .

مثـال ١ : أوجد صَ اذا كان ص = ٦ $\sqrt[3]{س^4}$ + ٤ / $\sqrt{س}$.

الحـــل : بتحويل الجذور الى اسس تأخذ ص الشكل

$$ص = ٦ س^{\frac{٤}{٣}} + ٤ س^{-\frac{١}{٢}}$$

ومنه ينتج ان

$$صَ = ٦ \left(\frac{٤}{٣} \right) س^{\frac{٤}{٣}-١} + ٤ \left(-\frac{١}{٢} \right) س^{-\frac{١}{٢}-١}$$

$$= ٨ س^{\frac{١}{٣}} - ٢ س^{-\frac{٣}{٢}}$$

لجميع قيم س > ٠

والنظرية التالية تمكننا من مفاضلة أي اقتران جبري . والبرهان مشابه لبرهان (٣ - ٤٦) .

(٣ - ٥١) قاعدة القوى للاقترانات :

اذا كان ك اقترانا قابلا للاشتقاق وكان ر أي عدد نسبي فان

$$د_س [ك (س)]^ر = ر [ك (س)]^{ر-١} د_س (ك (س))$$

بشرط أن $[ك (س)]^{ر-١}$ موجود .

مثـال ٢ : أوجد قَ (س) اذا كان ق (س) = $\sqrt[3]{٥ س^٢ - س + ٤}$

الحـــل : نكتب ق (س) = (٥ س^٢ - س + ٤)$^{\frac{١}{٣}}$ ونستعمل (٣ - ٥١) ونحصل على.

$$قَ (س) = \frac{١}{٣} (٥ س^٢ - س + ٤)^{-\frac{٢}{٣}} د_س (٥ س^٢ - س + ٤)$$

$$= \frac{١٠ س - ١}{٣ \sqrt[3]{(٥ س^٢ - س + ٤)^٢}}$$

مثـال ٣ : أوجد $\frac{د ص}{د س}$ اذا كان ص = $(٣س + ١٠)^{٦} \sqrt{٢س - ٥}$

الحـــل : بما أن ص = $(٣س + ١)^{٦} (٢س - ٥)^{\frac{١}{٢}}$ فباستعمال قاعدة المضروبين وقاعدة القوى نحصل على :

$$\frac{د ص}{د س} = (٣س + ١)^{٦} \frac{١}{٢} (٢س - ٥)^{-\frac{١}{٢}} (٢)$$

$$+ (٢س - ٥)^{\frac{١}{٢}} ٦ (٣س + ١)^{٥} (٣)$$

$$= \frac{(٣س + ١)^{٦}}{\sqrt{٢س - ٥}} + ١٨ (٣س + ١)^{٥} \sqrt{٢س - ٥}$$

$$= \frac{(٣س + ١)^{٦} + ١٨ (٣س + ١)^{٥} (٢س - ٥)}{\sqrt{٢س - ٥}}$$

$$= \frac{(٣س + ١)^{٥} (٣٩س - ٨٩)}{\sqrt{٢س - ٥}}$$

وللمثال التالي اهمية خاصة حيث يبين انه قد يلزم تطبيق قاعدة القوى (٣ - ٥١) لايجاد $د_{س}$ [ك (س)] بعد تطبيقها على [ك (س)]^{ن}.

مثـال ٤ : أوجد قَ (س) اذا كان ق (س) = $(٧س + \sqrt{س^{٢} + ٦})^{٤}$

الحـــل : بتطبيق قاعدة القوى ينتج ان

قَ (س) = $٤ (٧س + \sqrt{س^{٢} + ٦})^{٣} د_{س} [٧س + \sqrt{س^{٢} + ٦}]$

= $٤ (٧س + \sqrt{س^{٢} + ٦})^{٣} [د_{س} (٧س) + د_{س} (\sqrt{س^{٢} + ٦})]$

وبتطبيق القاعدة مرة اخرى ينتج

$$د_{س}(\sqrt{س^{٢}+٦})^{\frac{١}{٢}} = د_{س}(س^{٢}+٦)^{\frac{١}{٢}}$$

$$= \frac{١}{٢}(س^{٢}+٦)^{-\frac{١}{٢}} د_{س}(س^{٢}+٦)$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{س^{٢}+٦}} (٢س) = \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+٦}}$$

$$\therefore ق'(س) = ٤(٧س + \sqrt{س^{٢}+٦})^{٣} \left[\frac{س}{\sqrt{س^{٢}+٦}} + ٧ \right]$$

تمارين :

فاضل الاقترانات المعطاة في التمارين ١ – ٢٠

١ . $ق(س) = \sqrt{٢س}$

٢ . $ك(س) = ١ / \sqrt[٥]{س}$

٣ . $ق(ع) = ١٠\sqrt{ع^{٣}} + ٣ / \sqrt[٣]{ع}$

٤ . $ق(م) = \sqrt[٣]{م^{٢}} - (١ / \sqrt[٣]{م})$

٥ . $ك(ر) = (ر^{٢} - ٤ر + ٣) / ر^{\frac{٣}{٢}}$

٦ . $ف(س) = ٨س^{٢}\sqrt{س} + ٣س\sqrt[٣]{س}$

٧ . $م(س) = \sqrt{٤س^{٢} - ٧س + ٤}$

٨ . $ف(ل) = \sqrt[٣]{٥ل - ٧٠}$

٩ . $ق(م) = ٤ / (٩م^{٢} + ١٦)^{\frac{٢}{٣}}$

١٠ . $ل(و) = ١ / \sqrt[٣]{(و^{٣} + ٧و^{٢})}$

١١. ل (ع) = $\sqrt{\frac{٣ع + ٨}{٢ع + ٥}}$

١٢. ك (س) = $\left(\frac{س}{س^{٢} + ١}\right)^{\frac{٥}{٢}}$

١٣. ف (ص) = $\sqrt[٤]{ص^{٢} + ٩}\ (٤ص + ٥)^{٤}$

١٤. ك (ص) = (١٥ص + ٢) $(ص^{٢} + ٢)^{\frac{٣}{٤}}$

١٥. ل (س) = $(س^{٢} + ٤)^{\frac{٥}{٣}}\ (س^{٣} + ١)^{\frac{٣}{٥}}$

١٦. ق (ع) = $\sqrt{ع^{٣}\ (٩ع + ١)^{٥}}$

١٧. ك (ع) = $\frac{\sqrt[٣]{٢ع + ٣}}{\sqrt{٣ع + ع}}$

١٨. ل (س) = $\frac{٢س + ٣}{\sqrt{س^{٢} + ٩}}$

١٩. ق (س) = $(٧س + \sqrt{س^{٢} + ٣})^{٦}$

٢٠. ص (أ) = $[\frac{١}{٢}(أ٢ + ١) + ١]^{\frac{١}{٢}}$

في كل من التمارين ٢١ – ٢٤ أوجد معادلة المماس المنحني عند النقطة أ.

٢١. ص = $\sqrt{٢س^{٢} + ١}$ ، أ (– ١ ، $\sqrt{٣}$)

٢٢. ص = (٥س – ٨) $^{\frac{١}{٣}}$ ، أ (٧ ، ٣)

٢٣. ص = ٤س $^{\frac{٢}{٣}}$ + ٢س $^{-\frac{١}{٣}}$ ، أ (– ٨ ، ٥)

٢٤. ص = ٤س / $\sqrt{س + ١}$ ، أ (٣ ، ٦)

٢٥ . أوجد النقطة أ على منحنى ص = $\sqrt{٢س - ٤}$ التي عندها يمر المماس بنقطة الاصل .

٢٦ . أوجد النقط على منحنى ص = س $\frac{٥}{٣}$ + س $\frac{١}{٣}$ التي عندها يكون المماس معامداً للمستقيم ٢ص + س = ٧ .

افرض ان كلا من المعادلات في التمارين ٢٧ – ٣٠ تعين اقترانا ق حيث ص = ق (س) وأوجد صَ .

٢٧ . $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ١٠٠$

٢٨ . س $\frac{٢}{٣}$ + ص $\frac{٢}{٣}$ = ٤

٢٩ . ٦س + $\sqrt{س ص}$ – ٣ص = ٤

٣٠ . س ص^{٢} + $\sqrt[٣]{س ص}$ + س^{٤} = ٧

٣١ . استعمل التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[٣]{٦٥}$

٣٢ . استعمل التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt{٩٩}$

٣٣ . استعمل التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية للتغير في ق (س) = (٤ س^{٢} + ٩)$^{\frac{٣}{٢}}$ عندما تتغير س من ٢ الى ١,٩٩٨ .

٣٤ . استعمل التفاضلات لتقريب

ل = ٥ (١,٠١)$^{\frac{٣}{٥}}$ – ٣ (١,٠١)$^{\frac{١}{٥}}$ + ٧

٨ ــ المشتقات ذات الرتب العليا : (Higher order derivatives)

ان مشتقة اي اقتران ق تعطي اقترانا اخر قَ ، فاذا كان للاقتران قَ مشتقة فنرمز لها بالرمز قً وتسمى المشتقة الثانية للاقتران ق . وهكذا فان

(٣-٥٢) قً (س) = د (قَ (س)) = د (د (ق (س))) .

لجميع قيم س حيث تكون المشتقة المعنية موجودة . ويختصر المقدار في الطرف الايسر من (٣ – ٥٢) الى د^{٢} (ق (س)) أو الى د$^{٢}_{س}$ (ق (س)) ، اذا اردنا تحديد المتغير المستقل . وبنفس الطريقة فان المشتقة الثالثة قٌ هي مشتقة المشتقة الثانية وبالتحديد فان

قٌ (س) = د (قً س)) = د (د^{٢} (ق (س))) .

ويمكن ان نرمز للمقدار الاخير بالرمز د$^{٣}_{س}$ (ق (س)) أو د$^{٣}_{س}$ (ق (س)) .

وعلى وجه العموم اذا كان ن عددا صحيحا موجبا فان ق$^{(ن)}$ ترمز للمشتقة النونية للاقتران ق ويمكن ايجادها بمفاضلة ق ، ن من المرات . وباستعمال رمز الفاعل التفاضلي فان ق$^{(ن)}$ (س) = د^{ن} (ق (س)) ويسمى العدد الصحيح ن رتبة المشتقة ق$^{(ن)}$.

اذا كان ص = ق (س) فاننا نرمز للمشتقات ن الاولى للرمز ص بما يلي .

د$_{س}$ (ص) ، د$^{٢}_{س}$ (ص) ، .... ، د$^{(ن)}_{س}$ (ص)

أو صَ ، صً ، ... ، ص$^{(ن)}$

واذا استعملنا رموز التفاضلات فاننا نكتبها كما يلي .

$$\frac{و\ ص}{و\ س} \ ، \ \frac{و^{٢}\ ص}{و\ س^{٢}} \ ، \ \frac{و^{٣}\ ص}{و\ س^{٣}} \ ، \ ... \ ، \ \frac{و^{ن}\ ص}{و\ س^{ن}}$$

وفي هذه الحالة يجب ان لا تفسر رموز المشتقات ذات الرتب العليا كخارج قسمة .

مثـال ١ : اذا كان ق (س) = ٤ س − ٥ س + ٨ − (٣ / س) . أوجد مشتقاته الاربع الاولى .

الحـــل . بما أن ق (س) = ٤ س^{٢} − ٥ س + ٨ − ٣ س$^{-١}$ فان

قَ (س) = ٨ س − ٥ + ٣ س$^{-٢}$ = ٨ س − ٥ + ٣ / س^{٢}

قً (س) = ٨ − ٦ س$^{-٣}$ = ٨ − ٦ / س^{٣}

قٌ (س) = ١٨ س$^{-٤}$ = ١٨ / س^{٤}

ق$^{(٤)}$ (س) = − ٧٢ س$^{-٥}$ = − ٧٢ / س^{٥}

والمثال التالي يوضح الطريقة المتبعة في ايجاد المشتقات ذات الرتب العليا للاقترانات الضمنية .

مثـال ٢ : أوجد صً اذا كان ص^{٤} + ٣ص − ٤ س^{٣} = ٥ س + ١

الحـــل : لقد نوقشت هذه المعادلة في المثال ٣ من البند ٦ حيث وجدنا ان

صَ = (١٢ س^{٢} + ٥) / (٤ ص^{٣} + ٣)

اذن

صً = د$_{س}$ (صَ) = د$_{س}$ [(١٢ س^{٢} + ٥) / (٤ ص^{٣} + ٣)]

هنا نستعمل قاعدة المقسومين ونفاضل ضمنيا كما يلي :

$$صً = \frac{(٤ص^{٣}+٣)\,د_{س}(١٢س^{٢}+٥) - (١٢س^{٢}+٥)\,د_{س}(٤ص^{٣}+٣)}{(٤ص^{٣}+٣)^{٢}}$$

$$= \frac{(٤ص^{٣}+٣)(٢٤س) - (١٢س^{٢}+٥)(١٢ص^{٢}\,صَ)}{(٤ص^{٣}+٣)^{٢}}$$

وبالتعويض عن ص ينتج ان صً =

$$\frac{(٤ص^{٣} + ٣)(٢٤س) - (١٢س^{٢} + ٥)(١٢ص^{٢})\left(\frac{١٢س^{٢} + ٥}{٤ص^{٣} + ٣}\right)}{(٤ص^{٣} + ٣)^{٢}}$$

$$= \frac{(٤ص^{٣} + ٣)^{٢}(٢٤س) - ١٢ص^{٢}(١٢س^{٢} + ٥)^{٢}}{(٤ص^{٣} + ٣)^{٣}}$$

وهنالك كثير من التطبيقات الرياضية والفيزيائية للمشتقات ذات الرتب العليا سنناقش بعضها في الفصل القادم .

تمارين :

أوجد المشتقة الاولى والثانية لكل من الاقترانات في التمارين ١ - ٦

١ . ق (س) = $٣س^{٤} - ٤س^{٢} + س - ٢$

٢ . ك (س) = $٣س^{٨} - ٢س^{٥}$

٣ . ف (ل) = $\sqrt[٣]{ل} + ٢ \;/\; ل^{٢}$

٤ . ق (م) = $م^{\frac{٣}{٢}} - ٢م^{\frac{١}{٢}} + ٤م^{-\frac{١}{٣}}$

٥ . ك (ع) = $\sqrt{٣ع + ١}$

٦ . ف (م) = $(م^{٢} + ٤)^{\frac{٢}{٣}}$

في التمارين ٧ - ١٠ أوجد $د^{٣}س$ (ص)

٧ . ص = $٢س^{٥} + ٣س^{٣} - ٤س + ١$

٨ . ص = $\sqrt{٢ - ٥س}$

٩ . ص = $\frac{٢س - ٣}{٣س + ١}$

١٠ . ص = $١ \;/\; (س^{٢} + ٤)$

بفرض ان كل معادلة في التمارين ١١ – ١٤ تعين اقترانا ق حيث ص = ق (س) . أوجد صَ

١١ . $س^{٣} - ص^{٣} = ١$

١٢ . $س^{٢} ص^{٣} = ١$

١٣ . $س^{٢} - ٣ س ص + ص^{٢} = ٤$

١٤ . $\sqrt{س ص} - ص + س = ٠$

١٥ . أوجد كل المشتقات غير الصفرية للاقتران ق (س) = $س^{٦} - ٢ س^{٤} + ٣ س^{٣} - س + ٢$

١٦ . أوجد كل المشتقات غير الصفرية للاقتران ق (س) = $(س^{٢} - ١)^{٣}$.

١٧ . اذا كان ق (س) = ١ / س أوجد صيغة للمشتقة $ق^{(ن)}$ (س) حيث ن أي عدد صحيح موجب . ما قيمة $ق^{(ن)}$ (١) ؟

١٨ . اذا كان ق (س) = $\sqrt{س}$ أوجد صيغة للمشتقة $ق^{(ن)}$ (س) حيث ن أي عدد صحيح موجب .

١٩ . اذا كان ق (س) حدوديا من الدرجة ن اثبت ان $ق^{(م)}$ (س) = ٠ اذا كان م ≥ ن .

٢٠ . أوجد حدودية ق (س) من الدرجة الثانية حيث ق (١) = ٥ ، قَ (١) = ٣ ، قً (١) = – ٤ .

٢١ . اذا كان ق (س) = $٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ١٢$ س + ٧ أوجد قيمة قً عند كل صفر للمشتقة قَ .

٢٢ . اذا كان ق (س) = $س^{٤} - س^{٣} - س^{٢} + ٧$ س . أوجد معادلة المماس لمنحنى قَ عند النقطة أ (٢ ، ٣) .

٩ – تمارين مراجعة :

شفهية

عرف ما يلي أو اشرحه

١ . ميل المماس لمنحنى الاقتران

٢ . سرعة نقطة متحركة حركة خطية

٣ . مشتقة الاقتران

٤ . اقتران اشتقاقي

٥ . رمز الزيادة

٦ . التفاضلات

٧ . مشتقة الاقتران اليمنى

٨ . مشتقة الاقتران اليسرى

٩ . الاقتران المشتق

١٠ . العلاقة بين الاتصال والاشتقاق للاقتران

١١ . قاعدة المضروبين

١٢ . قاعدة المقسومين

١٣ . قاعدة السلسلة

١٤ . قاعدة القوى للاقترانات

١٥ . التفاضل الضمني

١٦ . مشتقات الاقترانات ذات الرتب العليا .

كتابـــة :

في التمرينين ١ ، ٢ أوجد قَ (س) باستعمال تعريف المشتقة .

١ . ق (س) = ٤ (٣س^{٢} + ٢)

٢ . ق (س) = $\sqrt{٥ - ٧س}$

أوجد المشتقة الاولى في التمارين ٣ – ٣٢

٣ . ق (س) = ٢س^{٣} – ٧س + ٢

٤ . ل (س) = ١ (٩س^{٤} – س^{٢} + ١)

٥ . ك (م) = $\sqrt{٦م + ٥}$

٦ . ل (م) = ١ / $\sqrt{٦م + ٥}$

٧ . ق (ع) = $\sqrt[٣]{٧ع^{٢} - ٤ع + ٣}$

٨ . ق (ر) = $\sqrt[٥]{٣ر^{٢}}$

٩ . ك (س) = ٦ / (٣س^{٢} – ١)^{٤}

١٠ . ل (س) = (٣س^{٢} – ١)^{٤} / ٦

١١ . ق (ص) = (ص^{٢} – ص$^{-٢}$)$^{-٢}$

١٢. ق (ع) = ((ع^{٢} − ١)^{٥} − ١)^{٥}

١٣. ك (س) = $\sqrt[٥]{(٣س + ٢)^{٤}}$

١٤. ف (س) = (س + س$^{-١}$)^{٢}

١٥. ل (ر) = $\left(\frac{(٤ - ٨ر^{٢})}{١ - ٩ر^{٣}}\right)^{\frac{٤}{١}}$

١٦. ك (ع) = $\frac{(ع - ١)(ع - ٣)}{(ع + ١)(ع + ٣)}$

١٧. ق (س) = (س^{٦} + ١)^{٥} (٣س + ٢)^{٣}

١٨. ل (ر) = (ر^{٢} + (ر^{٢} + ٩)$^{\frac{١}{٢}}$)$^{\frac{١}{٢}}$

١٩. ك (ص) = (٧ص − ٢)$^{-٢}$ (٢ص + ١)$^{\frac{٢}{٣}}$

٢٠. ف (س) = (٢س^{٤} + ٣س^{٢} − ١) / س^{٢}

٢١. ق (س) = (س^{٢} + ١)(س^{٢} + ٢)(س^{٢} + ٣)

٢٢. ك (م) = (م^{٦} − م$^{-٦}$)^{٦}

٢٣. ف (س) = $\sqrt{\sqrt{\sqrt{س} + \sqrt{س}} + \sqrt{س}}$

٢٤. ك (ر) = $\sqrt{ر\sqrt{ر\sqrt{ر} + ١}\sqrt{ر} + ٢}$

٢٥. ق (س) = $\sqrt[٣]{٢س + ٣} / \sqrt{٣س + ٢}$

٢٦. ق (س) = ٦س^{٢} − ٥ / س + ٢ / $\sqrt[٣]{س^{٢}}$

٢٧. ك (ع) = (٩ع$^{\frac{٥}{٣}}$ − ٥ع$^{\frac{٣}{٥}}$)^{٣}

٢٨. ق (م) = (٥م^{٢} − ٧) / (م^{٢} + ٢)

٢٩. ك (ص) = (٢ص^{٢} − ٣ص + ١)(٩ص − ١)^{٤}

٣٠. ك (س) = (٣س + ٢س$^{-٢}$ + ٤س$^{-٣}$)$^{-٥}$

٣١ . ق (ع) = $\sqrt{\frac{٢ع + ٥}{٧ع - ٩}}$

٣٢ . ل (م) = $\sqrt{م^{٢} + م + ١}$ $\sqrt[٣]{٤م - ٩}$

على فرض ان كل معادلة في التمارين ٣٣ – ٣٦ تعين اقترانا ق حيث ص = ق (س) أوجد صَ .

٣٣ . $٥س^{٣} - ٢س^{٢} ص^{٢} + ٤ص^{٣} - ٧ = ٠$

٣٤ . $٣س^{٢} - س ص^{٢} + ص^{-١} = ١$.

٣٥ . $\frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{ص} + ١}$ = ص

٣٦ . $ص^{٢} - \sqrt{س ص} + ٣س = ٢$.

في كل من التمارين ٣٧ – ٣٩ أوجد معادلة المماس لبيان المعادلة المعطاة عند النقطة م المبينة في التمرين .

٣٧ . ص – ٢س – (٤ / $\sqrt{س}$) ، م (٤ ، ٦)

٣٨ . ص = $(س^{٣} + ٢)^{٥}$ ، م (– ١ ، ١)

٣٩ . $س^{٢} ص - ص^{٣} = ٨$ ، م (– ٣ ، ١)

في التمارين ٤٠ – ٤٢ أوجد صَ ، صَّ ، ص .

٤٠ . ص = $٥س^{٣} + ٤\sqrt{س}$

٤١ . ص = $س^{-٢} + س^{-١}$

٤٢ . ص = ٧

٤٣ . اذا كان $س^{٢} + ٤س ص - ص^{٢} = ٨$ أوجد صَّ بطريقة التفاضل الضمني

٤٤ . اذا كان ق (س) = $س^{٣} - س^{٢} - ٥س + ٢$

(م) أوجد الاحداثي السيني لجميع النقط الواقعة على منحنى الاقتران ق التي يكون عندها المماس موازيا للخط الواصل بين النقطتين م (– ٣ ، ٢) و ب (١ ، ١٤)

(ب) أوجد قيم قَّ عند كل صفر من اصفار قَ .

٤٥ . اذا كان ق (س) = ١ / (١ − س) أوجد صيغة للمشتقة ق$^{(ن)}$ (س) حيث ن عدد صحيح موجب .

٤٦ . اذا كان ص = ٥ س / (س^{٢} + ١) أوجد ء ص واستعمله لايجاد قيمة تقريبية للتغير في ص عندما تتغير س من ٢ الى ٩٨ ٠١ ما هي القيمة الحقيقية للتغير في ص .

٤٧ . طول ضلع مثلث متساوي الاضلاع ٤ انش تقريبا مع خطأ في قياسه اقصاه ٠٣ , انش . استعمل التفاضلات لايجاد أكبر خطأ ممكن في حساب مساحة المثلث . ما هو معدل الخطأ .

٤٨ . اذا كان ل = ٣ ر^{٢} − ٢ $\sqrt{ر + ١}$ ، ر = م^{٣} + م^{٢} + ١ ، استعمل قاعدة السلسلة لايجاد قيمة $\frac{ء ل}{ء م}$ عندما م = ١ .

٤٩ . اذا كانت ق (س) = ٢ س^{٣} + س^{٢} − س + ١ ، ك (س) = س^{٥} + ٤ س^{٣} + ٢ س استعمل التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية للاقتران ك (ق (س)) عندما تتغير س من − ١ الى − ١ , ٠١ .

٥٠ . استعمل التفاضلات لايجاد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[٣]{٢ , ٦٤}$.

الفصل الرابع
تطبيقات على المشتقات التفاضلية

في هذا الفصل نستعمل التفاضل لدراسة بعض المسائل الرياضية والفزيائية ، ويشمل ذلك ايجاد القيم العظمى والصغرى للاقترانات واستغلال ذلك في حل بعض المسائل العملية ، وهو يشمل ايضا شرح مفاهيم التحدب والتقعر ونقط الانعطاف ، واستخدام ذلك في تخطيط البيانات ، كما يشمل دراسة سرعة تغير الكميات التي تتغير مع الزمن . وفي البند الاخير نقدم فكرة اصل المشتقة التفاضلية ونستخدمها في دراسة الحركة على خطوط مستقيمة .

١ — المماسات والاعمدة :

نستنتج من (٣ – ١) ومن تعريف المشتقة ان قَ (س$_{١}$) هو ميل المماس لمنحنى الاقتران التفاضلي ق في النقطة ن (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) . وحسب صيغة النقطة والميل (١ – ١٦) تكون معادلة المماس في هذه النقطة هي :

ص – ص$_{١}$ = قَ (س$_{١}$) (س – س$_{١}$)

والعمود (normal) على المنحنى في النقطة ن هو الخط العمودي على المماس في تلك النقطة ، كما يتضح من الشكل ٤ – ١ حيث ل هو المماس ، لَ هو العمود فاذا كان قَ (س$_{١}$) صفرا ينتج من (١ – ١٥) ان الميل لَ هو – ١ / قَ (س$_{١}$) فمعادلة العمود في النقطة ن (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هي

$$ص - ص_{1} = \frac{1}{قَ(س_{1})} (س - س_{1})$$

واذا كان المماس في ن افقيا ، اي اذا كان قَ (س$_{1}$) = ٠ كان العمود راسيا وكانت معادلته س = س$_{1}$

واذا كان انحراف ل عند النقطة ن (م ، ق (م)) = ٩٠° كان العمود افقيا . ويبين الشكل ٤ – ٢ مثالين على هذه الاوضاع .

وواضح ان الانحراف عند ن يكون ٩٠° اذا صار قَ (س) عندما تقترب س من م لا نهائيا ، سلبا او ايجابا ، لهذا نضع التعريف التالي الذي يفترض ان قَ (س) موجود على مدى فترة مفتوحة تضم م ولكن باستثناء س = م

٤ – ١ تعريف المماس الرأسي

يكون لمنحنى ق مماس رأسي في النقطة ن (م ، ق (م)) اذا كان :

$$\text{نهـا}_{س \to م} [قَ(س)] = \infty$$

مثـال ١ : اذا كان ق (س) = (س – ٨)$^{\frac{٢}{٣}}$ + ١

(م) أوجد معادلة العمود على منحنى ق عند ن (٠ ، ٥)

(ب) أوجد كل الاعمدة الرأسية ووضح جوابك بالرسم

الحـل : (م) من قاعدة القوى ينتج :

$$قَ(س) = \frac{٢}{٣}(س - ٨)^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣(س - ٨)^{\frac{١}{٣}}}$$

فميل المماس عند ن (٠ ، ٥) هو قَ (٠) = $-\frac{١}{٣}$

فميل العمود لـ َ هو ٣ ، واذن فمعادلة لَ هي

ص – ٥ = ٣ (س – ٠) اي ص = ٣س + ٥

(ب) هنالك مماس عند كل نقطة سوى س = ٨

ثم ان $\lim_{س \to ٨}$ [قَ (س)] =

$$\infty = \left[\frac{٢}{\sqrt[٣]{(٣ (س - ٨)^{٢}}} \right] \lim_{س \to ٨}$$

فمن (٤ – ١) ينتج ان هنالك مماسا رأسيا عند (٨ ، ١) على المنحنى كما تبين من الشكل ٤ – ٣ . لاحظ انه اذا اقتربت س من ٨ من اليسار يكون قَ (س) لا متناهيا سلبا اما اذا اقتربت س من ٨ من اليمين كان قَ (س) لا متناهيا ايجابا .

واذا كان الاقتران ق متصلا في الفترة المغلقة [أ ، ب] وكان غير معرف خارجها فهنا يمكن ان نتحدث عن المماس عند ن (أ ، ق (أ)) ، ط (ب ، ق (ب)) بدلالة قَ$_{+}$ (أ) ، قَ (ب)

واذا كان ق قابلا للاشتقاق على (أ ، ب) ينتج انه يكون للمنحنى عند ن او ط عمود رأسي اذا كان $\lim_{س \to أ^{+}}$ | قَ (س) | = ∞ ، أو

$\lim_{س \to}$ بَ | قَ (س) | = ∞ على الترتيب .

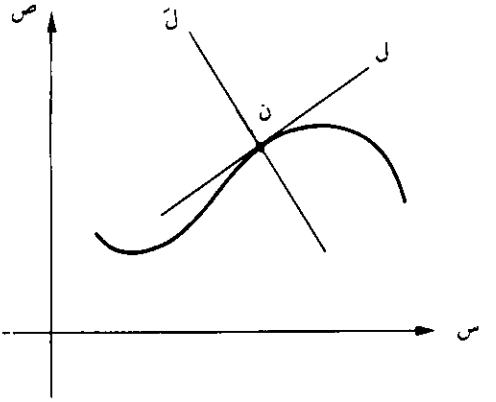
مثـال ٢ : اذا كان ق (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ فابحث عن اعمدته الرأسية .

الحـــل : من قاعدة القوى : قَ (س) = – س / $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

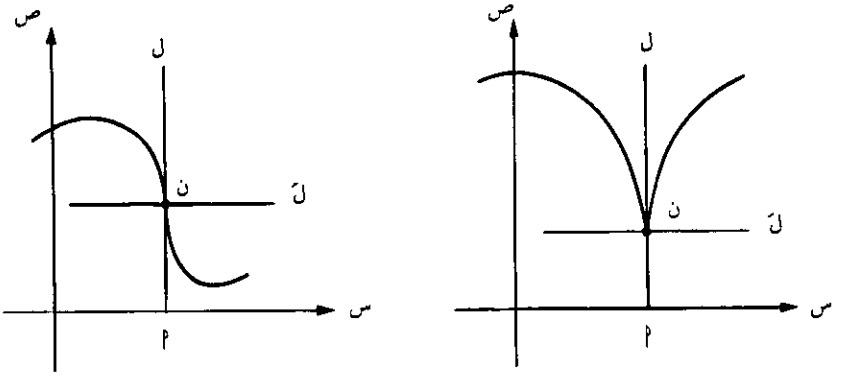
ونترك للقاريء ان يبين ان $\lim_{س \to ٢}$ | قَ (س) | = ∞

$= \lim_{س \to}$ | قَ (س) |

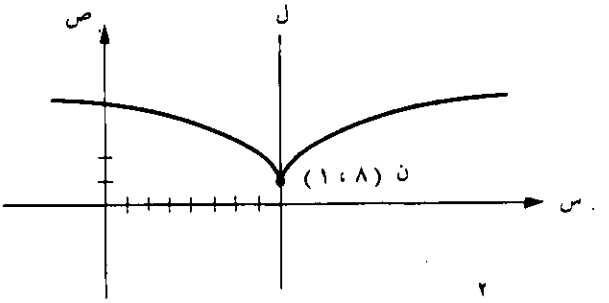
فللمنحنى مماسان رأسيان عند نقطتين احداثياهما السينيان ٢ ، – ٢ . وهذا يسهل ان نتبينه هندسيا لان المنحنى هو النصف العلوي لدائرة نصف قطرها ٢ ومركزها نقطة الاصل (انظر الشكل ٤ – ٤)



الشكل ٤ — ١

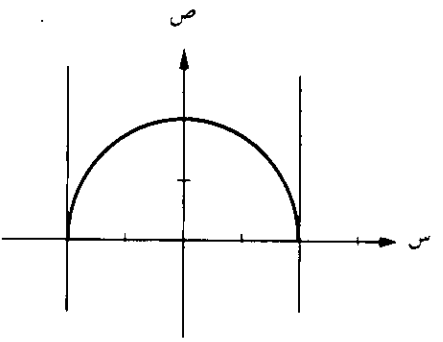


الشكل ٤ — ٢



$$ق (س) = (س - ٨)^{\frac{٢}{٣}} + ١$$

الشكل ٤ — ٣



شكل (٤ — ٤)

تمارين :

أوجد معادلتي المماس والعمود لمنحنيات الاقترانات المذكورة في التمارين ١ — ٤ عند النقاط المعطاة .

١ . ق (س) = $\sqrt{٨س^{٢} - ٥س + ٧}$ ، ن (— ٢ ، ٧)

٢ . ق (س) = $س^{٤} + س^{٢} + ١$ ؛ ن (— ١ ، ٣)

٣ . $س^{٣} - س$ [ق (س)]$^{٢} + ٤$ [ق (س)]$^{٣} - ٣س + ٤ = ٠$ ، ن (٢ ، — ١)

٤ . ق (س) = $٦س^{\frac{٢}{٣}} - ٣س^{\frac{١}{٣}} - ٥$ ، ن (٨ ، ١٣)

٥ . أوجد معادلة العمود لـ للمنحنى ص = $٣س^{٢} + ٤س - ٦$ اذا كان لـ يوازي الخط الذي معادلته ٢س + ٥ص — ١ = ٠

٦ . أوجد معادلات الاعمدة على منحنى ص = $س^{٣}$ اذا كانت هذه الاعمدة توازي ٣س + ١٦ص + ١٧ = ٠

٧ . أوجد معادلة مستقيم يمر بالنقطة ن (٥ ، ٩) ويمس المنحنى ص = $س^{٢}$

٨ . أوجد معادلات مستقيمات تمر بالنقطة ن (٣ ، ١) وتمس س ص = ٤

في التمارين ٩ — ١٢ أوجد نقاطا على منحنى ق يكون عندها المماس رأسيا

٩ . ق (س) = $س (س + ٢)^{\frac{٣}{٥}}$

١٠ . ق (س) = $\sqrt{٧س + ٢}$

١١ . ق (س) = $\sqrt{١٦ - ٩س^{٢}}$ + ٣ ١٢ . ق (س) = $\sqrt[٣]{س - ٥}$

في التمارين ١٣ – ١٦ أوجد الاحداثيات السينية للنقاط التي يكون عندها المماس (أ) افقيا (ب) رأسيا

١٣ . $س^{-\frac{١}{٣}} + ص^{\frac{١}{٣}} = أ^{\frac{١}{٣}}$ ١٤ . $س^{٣} + ص^{٣} = أ^{٣}$

١٥ . $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ١٢$

١٦ . $س^{٣} + س^{٢} + ص^{٢} = ٠$

١٧ . بين ان كل مماس للاقتران الخطي ق ينطبق على منحناه .

١٨ . بين ان الدائرة التي نصف قطرها نق ومركزها (هـ ، و) لها مماسان رأسيان ومماسان افقيان .

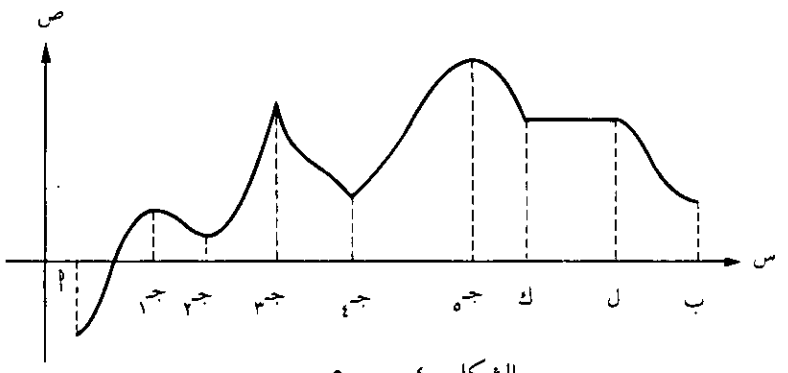
١٩ . بين ان منحنى الاقتران النسبي ليس له مماسات رأسية .

٢٠. ضع تخطيطا لمنحنى ص = | $س^{٣}$ – س | وأوجد أين يكون لهذا المنحنى :
(أ) مماس أفقي (ب) مماس رأسي (جـ) لا مماس .

٢ — القمم المحلية للاقتران : Local extrema

لنفرض ان المنحنى المبين بالشكل ٤ – ٥ رسمته آلة تسجيل تسجل تغير كمية ما بتغير الزمن . في هذه الحالة يمثل محور س الزمن وتمثل الاحداثيات الصادية مقادير هذه الكمية ، وهذه قد تكون درجات حرارة او ضغطا او التيار الجاري في دورة كهربائية أو اي كمية اخرى . ويشير الشكل الى ان هذه الكمية تتزايد في الفترة [أ ، $جـ_{١}$] وتتناقص في الفترة [$جـ_{١}$ ، $جـ_{٢}$] وتتزايد في الفترة [$جـ_{٢}$ ، $جـ_{٣}$] ، وهكذا فاذا حصرنا انتباهنا في الفترة [$جـ_{١}$ ، $جـ_{٤}$]نجد ان الكمية بلغت قيمتها العظمى عند $جـ_{٣}$ وقيمتها الصغرى عند $جـ_{٢}$ اما في الفترات الاخرى فتجد للكمية قيما عظمى وصغرى غير هاتين ، فمثلا في الفترة [أ ، ب] نجد القيمة العظمى عند $جـ_{٥}$ والقيمة الصغرى عند أ .

فاذا كان المخطط في الشكل ٤ – ٥ يمثل منحنى اقتران ما ، ق ، فمن المناسب ان نستعمل مصطلحات ، كالقيم العظمى والصغرى ، لوصف تغير ق (س) . وهذه المصطلحات يوضحها التعريفان التاليان :



الشكل ٤ — ٥

(٤ – ٢) تعريف الاقتران المتزايد والاقتران المتناقص

يكون الاقتران ق متزايدا في الفترة ت اذا كان ق (س$_{١}$) < ق (س$_{٢}$) لكل س$_{١}$ < س$_{٢}$ في هذه الفترة . ويكون الاقتران ق متناقصا في الفترة ت اذا كان ق (س$_{١}$) > ق (س$_{٢}$) لكل س$_{١}$ < س$_{٢}$ في هذه الفترة .

ونعتبر العبارتين « ق متزايد » « و » ق (س) متزايد » مترادفتين وكذلك « ق متناقص » « و » ق (س) متناقص » . فاذا كان الاقتران متزايداً فان تزايد الاحداثي السيني يقضي بتزايد الصادي وهذا يعني ان بيانه يرتفع بتزايد س .

واذا كان الاقتران متناقصا فان الاحداثي الصادي يتناقص بتزايد السيني ، وهذا يعني ان بيانه ينخفض بتزايد س . فاذا كان المخطط في الشكل ٤ – ٥ يمثل بيان اقتران ما ، ق ، فان ق يتزايد في الفترات [أ ، جـ$_{١}$] ، [جـ$_{٢}$ ، جـ$_{٣}$] ، [جـ$_{٤}$ ، جـ$_{٥}$]ويتناقص في الفترات [جـ$_{١}$ ، جـ$_{٢}$] ، [جـ$_{٣}$ ، جـ$_{٤}$] ، [جـ$_{٥}$ ،ك] ، [ل ، ب] ، وهو لا يتزايد ولا يتناقص في [ك ، ل] لانه ثابت القيمة في هذه الفترة .

(٤ – ٣) لنفرض ان الاقتران ق معرف في الفترة ت وان هـ ، و عددان في ت .

(أ) فاذا كان ق (س) ≤ ق (هـ) لكل س في ت نقول ان ق (هـ) هي قيمة عظمى للاقتران في ت (maximum)

(ب) واذا كان ق (س) ≥ ق (و) لكل س في ت نقول ان ق (و) هي قيمة صغرى للاقتران في ت (minimum) . واذا كانت ق (هـ) قيمة عظمى للاقتران في ت نقول ان الاقتران بلغ قمته او ذروته في ت وعندها تكون

النقطة ن (هـ ، ق (هـ)) هي اعلى نقطة لبيانه في تلك الفترة . وكذلك اذا كانت ق (و) قيمة صغرى للاقتران في ت نقول ان الاقتران بلغ الحضيض او القاع وعندها تكون النقطة ط (و ، ق (و)) ادنى نقطة للبيان في تلك الفترة . ونسمي القيم العظمى والصغرى معا بالذرى او القمم (extrema) . ويجدر ان نلاحظ انه اذا كان ق يتزايد في فترة ما (أ ، جـ] ويتناقص في [جـ ، ب) فانه يبلغ ذروة الفترة (أ ، ب) عند جـ . وكذلك اذا كان ق تيناقص في (أ ، جـ] ويتزايد في [جـ ، ب) فانه عند جـ يبلغ قاع الفترة (أ ، ب) . وعلى القاريء ان يتحقق من ذلك ويرجع الى الشكل ٤ – ٥ للبحث عن امثلة اخرى . وقد يكون للاقتران قيمة عظمى ولا يكون له قيمة صغرى في فترة ما ، او العكس . وقد يخلو الاقتران من القيم العظمى والصغرى . ومثالا على ذلك نأخذ الاقتران ق (س) = ١ / س ، وفي الشكل ١ – ٥ تخطيط لبيانه ، لاحظ ان ق ينقطع عند الصفر . والواقع

$$\text{ان } \lim_{س \to 0^+} ق(س) = \infty \quad ، \quad \lim_{س \to 0^+} ق(س) = \infty$$

فني الفترة المغلقة [– ١ ، ١] ليس للاقتران قيمة عظمى ولا صغرى وهذا يصدق على الفترة المفتوحة (٠ ، ١) لانه اذا كان ٠ < < ١ فاننا نستطيع دائما ان نجد عددين $س_1$ ، $س_2$ في (٠ ، ١) حيث ق ($س_1$) < ق (أ) ، ق ($س_2$) < ق (أ) . فنحن نستطيع ان نختار اي عددين $س_1$ ، $س_2$ بحيث يكون . < $س_1$ < أ < $س_2$ < ١ . ففي الفترة نصف المفتوحة (٠ ، ١] للاقتران قيمة صغرى هي ق (١) وليس له قيمة عظمى ، وفي الفترة المغلقة [١ ، ٢] للاقتران قيمة عظمى ق (١) وقيمة صغرى ق (٢) .

من هذين المثالين نستنتج ان وجود القيم العظمى والصغرى يعتمد على اتصال الاقتران وعلى الفترة التي هي قيد البحث : أهي مفتوحة ام مغلقة ام بين بين . والنظرية التالية ، وقد اهملنا برهانها ، تعطي الشروط الكافية لتوافر القيم العظمى والصغرى في الفترة المعطاة . اما البرهان فيجده القاريء اذا شاء في كتب متقدمة في حساب التفاضل والتكامل .

(٤-٤) نظريـــــة :

اذا كان الاقتران ق متصلا في الفترة المغلقة [أ ، ب] فان ق يتخذ قيمة عظمى ، ق (هـ) ، وقيمة صغرى ، ق (و) عند نقطتين هـ ، و في [أ ، ب] .

ومن القيم ما يسمى بالقيم العظمى والصغرى **المطلقة** للاقتران ق في الفترة المعطاة لان هناك أيضاً قيما عظمى وصغرى **محلية** . فمثلا : اذا كان الشكل ٤ – ٥ هو منحنى اقتران ما ، ق ، فان ق (جـ$_1$) ، ق (جـ$_2$) ، ق (جـ$_3$) ، ق (جـ$_4$) ، ق (جـ$_5$) هي قيم محلية واليك هذا التعريف العام :

(٤-٥) تعريف القيم العظمى والصغرى المحلية ليكن جـ عددا في مجال الاقتران ق :

(أ) اذا كانت هنالك فترة مفتوحة (أ ، ب) تحوي جـ وكان ق (س) ≤ ق (جـ) لكل قيم س في (أ ، ب) ، تكون ق (جـ) قيمة محلية عظمى للاقتران ق .

(ب) اذا كانت هناك فترة (أ ، ب) تحوى جـ وكان ق (س) ≥ ق (جـ) لكل قيم س في (أ ، ب) ، تكون ق (جـ) قيمة محلية صغرى للاقتران ق .

وتسمى هذه القيم بالمحلية لاننا نحصرها في محل واحد هو فترة صغيرة بما فيه الكفاية ، تحوي جـ . وفي هذه الفترة تكون ق (جـ) قيمة عظمى او صغرى في تلك الفترة اي بالنسبة الى قيم ق (س) فيها ، ولذلك قد تسمى القيم المحلية بالقيم النسبية ايضا . وكل قيمة عظمى او صغرى محلية هي ذروة محلية للاقتران ق وهذه القيم مجتمعة هي مجموعة الذرى المحلية لهذا الاقتران . فالاقتران الذي خطط بيانه بالشكل ٤ – ٥ له قيم عظمى محلية عند جـ$_1$ ، جـ$_3$ ، جـ$_5$ ، وقيم

صغرى محلية عند جـ٢ ، جـ٤ . وقد تكون قيمة صغرى محلية اكبر من قيمة عظمى محلية ، مثل ق (جـ٤) فهي اكبر من ق (جـ١) . وقيم الاقتران عند جميع نقاط الفترة (ك ، ل) هي قيم عظمى وصغرى محلية في آن واحد (لماذا ؟) ويلاحظ ان الذرى المحلية قد لا تشمل النهاية العظمى المطلقة او الصغرى المطلقة للاقتران ق . فمثلا في الشكل ٤ – ٥ نجد ان ق (أ) هي القيمة الصغرى للاقتران في [أ ، ب] ولكنها ليست محلية اذ ليس هنالك فترة مفتوحة تحوى أ في [أ ، ب] وفيها ق (أ) هي القيمة الصغرى . اما ق (جـ٥) فهي قيمة عظمى مطلقة ومحلية للاقتران ق في [أ ، ب] .

وفي النقطة التي يكون عندها للاقتران ذروة محلية (انظر الشكل ٤ – ٥) نجد ان المماس للمنحنى افقي او رأسي ، او نجد ان ليس هنالك مماس . وهذا يقع حيث تكون المشتقة صفرا او ليس لها وجود . والنظرية التالية تقيم الدليل على صحة هذا القول .

(٤–٦) **نظريـــة** : اذا كان للاقتران ق ذروة محلية عند العدد جـ كان قَ (جـ) اما صفراً أو غير موجود .

البرهـــان : افرض ان ق له ذروة محلية عند جـ . فاذا كان قَ (جـ) غير موجود فليس هنالك ما نبرهن عليه . واذا كان قَ (جـ) موجودا فلا بد من ان يكون (١) ق (جـ) > ٠ أو (٢) قَ (جـ) > ٠ او (٣) قَ (جـ) = ٠ وسنثبت ان الحالتين (١) و (٢) مستحيلتان فتبقى الحالة الاخيرة . فلنفرض ان قَ (جـ) > ٠ : فمن الصيغة (٣ – ١١) للمشتقة يكون

$$\text{نهـا}_{س \to جـ} \frac{ق(س) - ق(جـ)}{س - جـ} > ٠$$

ومن (٢ – ١١) ينتج ان هنالك فترة مفتوحة (أ ، ب) تحوى جـ وفيها $\frac{ق(س) - ق(جـ)}{س - جـ} > ٠$. لكل قيم س في (أ ، ب) عدا جـ

وهذا يعني انه اذا كان أ < س < ب ، س ≠ جـ كان ق (س) – ق (جـ) ، س – جـ موجبين معا او سالبين معا ، اي ان

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ق (س) – ق (جـ)} > 0 & \text{لكل س – جـ} > 0 \\ \text{و ق (س) – ق (جـ)} < 0 & \text{لكل س – جـ} < 0 \end{array}\right\} \quad (٤-٧)$$

وبعبارة اخرى : اذا كان س في (أ ، ب) وكان س ≠ جـ كان

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ق (س)} < \text{ق (جـ)} & \text{لكل س} < \text{جـ} \\ \text{و ق (س)} > \text{ق (جـ)} & \text{لكل س} > \text{جـ} \end{array}\right\} \quad (٤-٨)$$

ينتج ان ق (جـ) ليس قيمة عظمى ولا صغرى للاقتران ق ، وهذا عكس ما فرضناه . من ذلك ينتج ان الحالة (١) لا يمكن ان تقع . وبالمثل نبين ان قَ (جـ) < ٠ تؤدي الى تناقض . فلا يبقى الا (٣) وهو المطلوب .

(٤ – ٩) **نتيجـــة** : اذا كان للاقتران ق مشتقة عند جـ وكان قَ (جـ) ≠ صفرا ينتج ان ق (جـ) ليس ذروة لهذا الاقتران .

وتصح (٤ – ٦) على الذرى المطلقة للاقتران المتصل في الفترة المغلقة [أ ، ب] أذا كانت هذه الذرى في الفترة المفتوحة (أ ، ب) . فمنطوق النظرية كما يلي :

(٤ – ١٠) اذا كان الاقتران ق متصلا في الفترة المغلقة [أ ، ب] وكان له قيمة عظمى او صغرى عند جـ في الفترة المفتوحة (أ ، ب) كان قَ (جـ) = ٠ او ليس له وجود .

والبرهان هو برهان (٤ – ٦) ذاته مع حذف كلمة « محلية » .
فمن (٤ – ٦) و (٤ – ١٠) ينتج ان الاعداد التي تكون عندها المشتقة صفرا او غير موجودة لها دور حاسم في البحث عن القيم العظمى والصغرى للاقتران . لذا تعطى هذه الاعداد اسما خاصا نعرفه كما يلي :

(٤ – ١١) **تعريف الاعداد الحاسمة** : يكون العدد جـ في مجال الاقتران ق عددا حاسما (أو حرجا) لهذا الاقترانِ اذا كان قَ (جـ) = ٠ او غير موجود . ويتبين من (٤ – ٦) انه اذا كان للاقتران ذروة محلية فان هذا يحدث عند عدد حاسم ولكن يلاحظ ان ليس كل عدد حاسم مرافقا لذروة محلية ، كما يتبين من المثال التالي :

مثـال ١ : اذا كان ق (س) = س^{٣} فاثبت ان ق ليس له ذروة محلية

الحل : مشتقة ق هي قَ (س) = ٣ س^{٢} وهذه موجودة لكل قيم س وهي صفر عند س = ٠ فقط فالصفر هو العدد الحاسم الوحيد لهذا الاقتران . ولكن اذا كان س < ٠ كان ق (س) = س^{٣} < ٠ . واذا كان س > ٠ كان ق (س) = س^{٣} > ٠ فاذن ق (٠) ليس قيمة كبرى محلية ولا صغرى . ولان الذروة المحلية ترافق عددا حاسما (انظر (٤ – ٦)) فليس لهذا الاقتران ذروة محلية . وقد خطط منحنى هذا الاقتران في الشكل ٢ – ٣ . لاحظ ان المماس عند ن (٠ ، ٠) افقي ، واحداثيه السيني صفر ، وهو العدد الحاسم .

مثـال ٢ : اوجد الاعداد الحاسمة للاقتران ق حيث ق (س)

$$= (س + ٥)^{٢} \sqrt[٣]{س - ٤}$$

الحـــل : تفاضل ق (س) = (س + ٥)^{٢} $\sqrt[٣]{س - ٤}$ فنحصل على

$$قَ(س) = (س + ٥)^{٢} \times \frac{١}{٣}(س - ٤)^{-\frac{٢}{٣}} + ٢(س + ٥)\sqrt[٣]{س - ٤}$$

$$= \frac{س + ٥}{\sqrt[٣]{(س - ٤)^{٢}}} [(س + ٥) + ٦(س - ٤)]$$

$$= \frac{(س + ٥)(٧س - ١٩)}{٣(س - ٤)^{\frac{٢}{٣}}}$$

فيكون قَ (س) = ٠ اذا كان س = – ٥ أو س = ١٩/٧

ويكون قَ (س) غير موجود اذا كان س = ٤

فللأقتران ق ثلاثة اعداد حاسمة هي −٥ ، ٧/١٩ ، ٤

تمارين :

استعمل (٤ − ٢) في اثبات التمارين ١ الى ٤ :

١ . اذا كان ق (س) = س^{٢} فان ق يتناقص في (− ∞ ، ٠] ويتزايد في [٠ ، ∞)

٢ . اذا كان ق (س) = ا ـس^{٢} فان ق يتزايد في(−∞ ، ٠] ويتناقص في [٠ ، ∞)

٣ . اذا كان ق (س) = (س − ١)^{٣} فان ق يتزايد في (− ∞ ، ∞)

٤ . اذا كان ق (س) = ١ − س^{٣} فان ق يتناقص في (− ∞ ، ∞)

٥ . (أ) اذا كان ق (س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ فاثبت ان الصفر هو العدد الحاسم الوحيد للاقتران ق وان ق (٠) ليس ذروة محلية وان منحنى ق له مماس رأسي عند (٠ ، ٠)

(ب) اذا كان ق (س) = س $^{\frac{٢}{٣}}$ فاثبت ان الصفر هو العدد الحاسم الوحيد للاقتران ق وان ق (٠) هو قيمة صغرى محلية وان منحنى ق له مماس عند (٠ ، ٠)

٦ . اذا كان ق (س) = | س | فاثبت ان الصفر هو العدد الحاسم الوحيد للاقتران ق وان ق (٠) هو قيمة صغرى محلية وان منحنى ق ليس له مما س عند (٠ ، ٠)

٧ . اذا كان ق (س) = س^{٣} + ١ فاثبت ان ق ليس له ذرى محلية . ارسم بيان ق واثبت ان ق متصل في الفترة (٠ ، ١) ولكن ليس له قيم عظمى ولا صغرى في هذه الفترة . لماذا لا يتناقض هذا مع (٤ − ٤) ؟

٨ . اعد تمرين ٧ على اعتبار ان ق (س) = ١/س^{٢}

أوجد الاعداد الحاسمة للاقترانات في التمارين ٩ − ٢٠

٩ . ق (س) = ٤ س^{٢} − ٣ س + ٢

١٠ . ف (س) = ٢ س + ٥

١١ . ك (ن) = ٢ ن^{٣} + ن^{٢} − ٢٠ ن + ٤

١٢ . ك (ع) = ٤ع^{٣} + ٥ع^{٢} − ٤٢ع + ٧

١٣ . ف (و) = و^{٤} − ٣٢و

١٤ . ك (س) = س^{٥} − ٢س^{٣} + س − ١٢

١٥ . ق (ع) = $\sqrt{ع^{٢} - ١٦}$

١٦ . م (س) = $\sqrt{س^{٢} - س - ٢}$

١٧ . ف (ن) = ن^{٢} $\sqrt[٣]{٢ن - ٥}$

١٨ . ت (ف) = (٤ف + ١) $\sqrt{ف^{٢} - ١٦}$

١٩ . ج (س) = (٢س − ٣) / (س^{٢} − ٩)

٢٠ . ف (س) = س^{٢} / (٥س + ٤)

٢١ . بين ان الاقتران الحدودي من الرتبة ١ ليس له ذرى ، لا محلية ولا مطلقة ، في الفترة (− ∞ ، ∞) . ما حال الفترة المغلقة [أ ، ب] ؟

٢٢ . اذا كان ق اقترانا ثابتا وكانت (أ ، ب) فترة مفتوحة اثبت ان ق (جـ) ذروة محلية ومطلقة للاقتران ق لكل عدد جـ في (أ ، ب)

٢٣ . اذا كان ق اقتران اكبر عدد صحيح فاثبت ان كل عدد هو عدد حاسم بالنسبة الى ق .

٢٤ . اذا كان ق هو الاقتران الذي عرف في المثال المذكور في البند ٢ من الفصل ٢ فاثبت ان كل عدد هو عدد حاسم بالنسبة الى هذا الاقتران .

٢٥ . اثبت ان الاقتران التربيعي له عدد حاسم واحد في الفترة (− ∞ ، ∞)

٢٦ . اثبت ان الاقتران الحدودي ذا الرتبة الثالثة له ذروتان محليتان ، او ليس له اي ذروة ، في الفترة (− ∞ ، ∞) . ضع رسوما تبين كيف تقع كل من هاتين الحالتين .

٢٧ . اذا كان ق (س) = س^{ن} حيث ن عدد صحيح موجب اثبت ان ق له ذروة محلية واحدة ، اولا ذروة ، في الفترة (− ∞ ، ∞) حسب كون ن زوجية او فردية . خطط منحنيات تبين كل حالة .

٢٨ . بين ان الاقتران الحدودي من الرتبة ن له على الاكثر ن − ١ من الذرى المحلية في الفترة (− ∞ ، ∞) .

٣ — نظرية رول ونظرية القيمة الوسطى :

قد يكون صعبا جدا ايجاد الاعداد الحاسمة للاقتران . وقد لا يكون هنالك ما يضمن وجود هذه الاعداد ، والنظرية التالية تبين تحت اي شروط توجد ، وتسمى هذه النظرية باسم الرياضي الفرنسي ميشيل رول (١٦٥٢ – ١٧١٩) . والشروط التي تحددها تقتضي ان يكون ق متصلا في الفترة [أ ، ب] وقابلا للاشتقاق في (أ ، ب) وان يكون ق (أ) = ق (ب) . وفي الشكل ٤ – ٦ مخططات لمثل هذا الاقتران وهي تشير الى ان من الطبيعي ان نتوقع وجود عدد ما ، جـ ، بين أ ، ب حيث يكون المماس في النقطة ن (جـ ، ق (جـ)) افقيا اي ان يكون قَ (جـ) = صفرا . وهذا هو مضمون النظرية

(٤ – ١٢) **نظرية رول** : اذا كان الاقتران ق متصلا في الفترة المغلقة [أ ، ب] وتفاضليا في الفترة المفتوحة (أ ، ب) وكان قَ (أ) = قَ (ب) لزم ان يكون فيها عدد واحد على الاقل ، جـ ، حيث قَ (جـ) = صفرا .

البرهـــان : يجب ان يكون ق واحدا على الاقل من الاصناف الثلاثة التالية :

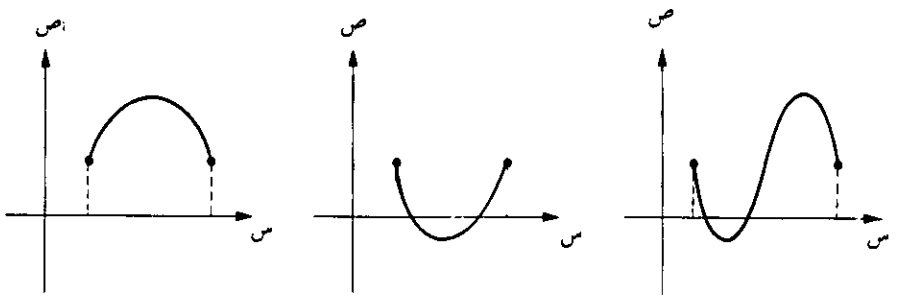
١ . ق (س) = ق (أ) لكل س في (أ ، ب) وفي هذه الحالة يكون ق اقترانا ثابتا ويكون قَ (س) = ٠ لكل قيم س . فكل عدد ، جـ ، في (أ ، ب) هو عدد حاسم .

٢ . ق (س) > ق (أ) لأحدى قيم س في (أ ، ب) وفي هذه الحالة تكون قيمة ق العظمى في [أ ، ب] اكثر من كل من ق (أ) ، ق (ب) ، فيلزم ان يقع ذلك عند عدد ما ، جـ ، في الفترة المفتوحة (أ ، ب) . ولان المشتقة موجودة على طول (أ ، ب) نستنتج من (٤ – ٦) ان قَ (جـ) = ٠

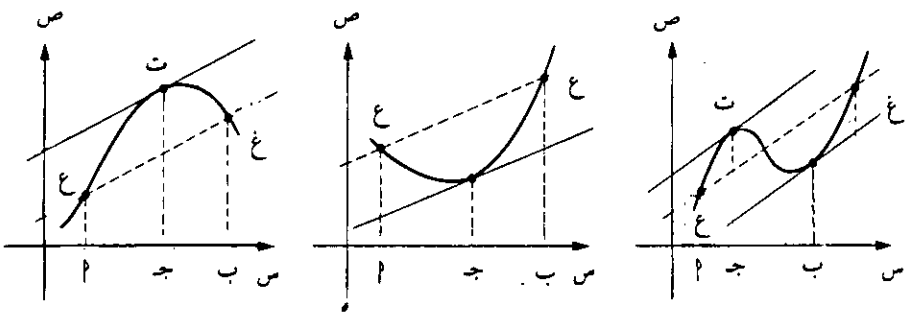
٣ . ق (س) < (أ) لأحدى قيم س في (أ ، ب) وفي هذه الحالة تكون قيمة ق الصغرى في [أ ، ب] اقل من كل من ق (أ) ، ق (ب) ويلزم ان يقع ذلك عند جـ في الفترة المفتوحة (أ ، ب) ، وكما في (٢) يكون قَ (جـ) = ٠

(٤ – ١٣) نتيجـــة : اذا كان الاقتران ق متصلا في فترة مغلقة [أ ، ب] وكان ق (أ) = ق (ب) كان لهذا الاقتران عدد حاسم واحد على الاقل في الفترة (أ ، ب) .

البرهـــان : اذا كان ق غير موجود عند نقطة ما ، جـ ، في (أ ، ب) ينتج من (٤ – ١١) ان جـ عدد حاسم . ومن ناحية اخرى اذا كان ق موجودا على طول (أ ، ب) ينتج من (٤ – ١٢) ان هنالك عدد حاسم في هذه الفترة .



الشكل ٤ — ٦



الشكل ٤ — ٧

وليست نظرية رول ذات اهمية رئيسية في حل التمارين العددية . ولكنها كبيرة الفائدة في استنتاج نتائج نظرية ، واحدى هذه النتائج النظرية (٤ – ١٥) القادمة وهذه تعتبر تعميما لنظرية رول يشمل الحالة عندما يكون ق (أ) = ق (ب) . انظر في مخططات الشكل ٤ – ٧ . فاذا كان ق موجودا على طول الفترة المفتوحة (أ ، ب) يتبدى هندسيا ان هنالك نقطة واحدة على الاقل ، ت (جـ ، ق (جـ))على المخطط حيث يكون المماس للمنحنى موازيا للقاطع ع غ ، اي بدلالة الميل :

$$(٤-١٤)\quad قَ(جـ) = \text{ميل ع غ} = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$$

والكسر الايسر هنا يأتي من قانون ميل الخط المار بالنقطتين ع ، غ . والصيغة التالية هي عبارة اخرى عن هذا الذي نقوله مجردة عن المفاهيم الهندسية .

(٤ – ١٥) **نظرية القيمة الوسطى** : اذا كان الاقتران ق متصلا على الفترة المغلقة [أ ، ب] وتفاضليا على الفترة المفتوحة (أ ، ب) لزم وجود عدد ما ، جـ ، في (أ ، ب) حيث يكون

ق (ب) – ق (أ) = قَ (جـ) (ب – أ)

البرهـــان : ليكن هنالك الاقتران ف حيث :

$$(٤-١٦)\quad ف(س) = ق(س) - ق(أ) - \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$$

(س – أ) لكل س في [أ ، ب]

قد يبدو للقارىء اننا اصطنعنا الاقتران ف اصطناعا بلا مقدمات . ولكن له تفسيرا هندسيا لطيفا : (انظر التمرين ١٦) .

فبما ان ق متصل على [أ ، ب] وتفاضلي على (أ ، ب) فكذلك ف . فاذا فاضلناه ينتج

$$(٤-١٧)\quad فَ(س) = قَ(س) - \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$$

وبالتعويض المباشر في (٤ – ١٦) نجد ان ف (أ) = ف (ب) = ٠ فالاقتران ف يحقق شروط نظرية رول . فيوجد اذن العدد جـ في (أ ، ب) حيث فَ (جـ) = صفرا ، فمن (٤ – ١٧) ينتج

$$\text{ان } قَ(جـ) - \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ} = ٠$$

وهذا يبرهن النظرية .

وتسمى نظرية القيمة الوسطى احيانا بنظرية الوسط وسنستخدمها فيما بعد لاثبات كثير من النتائج الهامة . والمثال التالي يوضحها عدديا .

مثـال : اثبت ان الاقتران ق حيث ق (س) = $س^{٣}$ − ٨س − ٥ يحقق في الفترة [١ ، ٤] شروط نظرية القيمة الوسطى وأوجد عددا جـ في هذه الفترة يحقق النظرية .

الحـــل : بما ان ق حدودي فهو متصل على [١ ، ٤] ، وبما ان قَ (س) = ٣$س^{٢}$ − ٨ فان ق قابل للاشتقاق على الفترة المفتوحة (١ ، ٤) . فمن (٤ − ١٥) هنالك عدد ما جـ في (١ ، ٤) يحقق ق (٤) − ق (١) = قَ (جـ) (٤ − ١)

أي ٢٧ − (− ١٢) = (٣$جـ^{٢}$ − ٨) (٣)

نترك للقارىء ان يستنتج ان جـ = $\pm\sqrt{٧}$ فالعدد المطلوب في (١ ، ٤) هو جـ = $\sqrt{٧}$

تمارينـــن :

١ . اذا كان ق (س) = | س | كان ق (− ١) = ق (١) ولكن قَ (جـ) ≠ ٠ لكل جـ في الفترة (− ١ ، ١) . لماذا لا يتعارض هذا مع نظرية رول ؟

٢ . حل التمرين ١ على ق (س) = ٦ $س^{\frac{٢}{٣}}$

٣ . اذا كان ق (س) = ٤ /س اثبت انه ليس هنالك عدد جـ حيث ق (٤) − ق (− ١) = قَ (جـ) [٤ − (− ١)].لماذا لا يناقض هذا نظرية القيمة الوسطى على الفترة [− ١ ، ٤] ؟

٤ . حل التمرين ٣ على اعتبار ان ق هو اقتران أكبر عدد صحيح .

في التمارين ٥ − ٨ بين ان ق يحقق شروط نظرية رول على الفترة [أ ، ب] المعطاة ثم جد كل الاعداد جـ في (أ ، ب) حيث قَ (جـ) = ٠

٥ . ق (س) = ٣$س^{٢}$ − ١٢س + ١١ ، [٠ ، ٤]

٦ . ق (س) = ٥ − ١٢س − ٢س^{٢} ، [− ٧ ، ١]

٧ . ق (س) = س^{٤} + ٤س^{٢} + ١ ، [− ٣ ، ٣]

٨ . ق (س) = س^{٣} − س ، [− ١ ، ١]

في التمارين ٩ − ١٢ اثبت ان الاقتران ق يحقق شروط نظرية القيمة الوسطى على الفترة [أ ، ب] المعطاة ثم أوجد كل جـ في (أ ، ب) حيث ق (ب) − ق (أ)= قَ (جـ) (ب − أ)

٩ . ق (س) = س^{٣}+١ ، [− ٢ ، ٤]

١٠. ق (س) = ٥س^{٢} − ٣س + ١ ، [١ ، ٣]

١١. ق (س) = س + ٤ ، [١ ، ٤]

١٢. ق (س) = ٣س^{٥} + ٥س^{٣} + ١٥س ، [− ١ ، ١]

١٣. اثبت انه اذا كان ق اقترانا خطيا فانه يحقق شروط نظرية القيمة الوسطى على اي فترة مغلقة [أ ، ب] وان كل عدد جـ يحقق نتيجة هذه النظرية .

١٤. اذا كان ق اقترانا تربيعيا وكانت [أ ، ب] اي فترة مغلقة اثبت ان هنالك عددا واحدا في الفترة (أ ، ب) يحقق نتيجة نظرية القيمة الوسطى

١٥. اذا كان ق اقترانا حدوديا من الدرجة الثالثة وكانت [أ ، ب] اي فترة مغلقة فاثبت ان هنالك عددين على الاكثر في الفترة (أ ، ب) يحققان نتيجة نظرية القيمة الوسطى . ضع تخطيطات تبين الحالات المختلفة . ماذا تقول عن اقتران حدودي من الدرجة الرابعة ؟

ضع تخطيطات تؤيد جوابك . عمم جوابك على حدوديات من الدرجة ن حيث ن عدد صحيح موجب .

١٦. بين انه اذا كان ف (س) هو المعرف بالصيغة (٤ − ١٦) كان | ف (س) | هو طول قطعة من الخط الرأسي الذي احداثيه السيني | س | موجودة بين منحنى ق والخط الذي يصل بين النقطتين ع (أ ، ق (أ)) ، غ (ب ، ق (ب))

٤ — اختبار المشتقة الاولى :

تبين النظرية التالية كيف تستعمل المشتقة لتحدد الفترات التي يكون فيها الاقتران متزايدا او متناقصا .

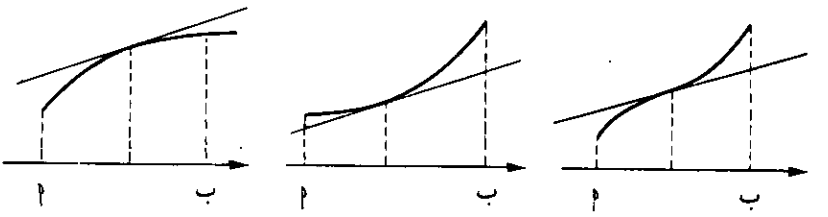
(٤ – ١٨) **نظريـــة** : ليكن الاقتران متصلا على الفترة المغلقة [أ ، ب] وتفاضليا على الفترة المفتوحة (أ ، ب) : (١) فاذا كان قَ (س) > ٠ لكل س في (أ ، ب) كان ق متزايدا على [أ ، ب] .

(٢) واذا كان قَ (س) < ٠ لكل س في (أ ، ب) كان ق متناقصا على [أ ، ب]

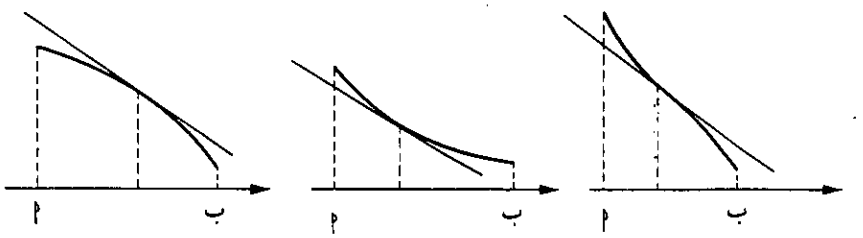
الحـــل : (١) افرض قَ (س) > ٠لكل س في (أ ، ب) وخذ اي عددين $س_١$ ، $س_٢$ في [أ ، ب] حيث $س_١ < س_٢$. فنريد ان نثبت ان ق ($س_١$) < ق ($س_٢$) . فنطبق نظرية القيمة الوسطى (٤ – ١٥) على الفترة [$س_١$ ، $س_٢$] فينتج :

ق ($س_٢$) – ق ($س_١$) = قَ (و) ($س_٢ - س_١$) ، حيث و في الفترة المفتوحة ($س_١$ ، $س_٢$) فلأن $س_٢ - س_١ > ٠$ ولان قَ (و) > ٠ فرضاً ، ينتج ان الطرف الايسر للمعادلة السابقة موجب ، فيكون ق ($س_٢$) – ق ($س_١$) > ٠ اي ان ق ($س_٢$) > ق ($س_١$) . وهذا ما اردنا اثباته . وبالمثل نبرهن على الحالة (٢) ولكن سنترك البرهان تمرينا للطالب .

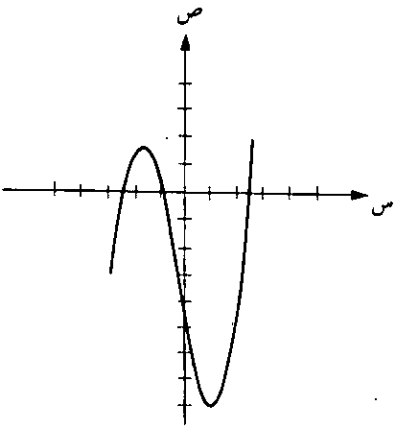
وفي الشكلين ٤ – ٨ و ٤ – ٩ توضيح هندسي للنظرية (٤ – ١٨) حيث رسم مماس للمنحنى في نقطة احداثيها السيني في (أ ، ب) . ويبين الشكل ٤ – ٨ انه اذا كان قَ (س) > ٠ فالمماس يرتفع ، والمنحنى ايضا يرتفع كما برهنا . واذا كان قَ (س) < ٠ ينخفض المماس والمنحنى ، كما يتبين بالشكل ٤ – ٩ .



الشكل ٤ — ٨



الشكل ٤ — ٩



الشكل ٤ — ١٠

ق (س) = س^{٣} + س^{٢} − ٥ س − ٥

مثـال ١ : اذا كان ق (س) = س^{٣} + س^{٢} − ٥ س − ٥ أوجد الفترات التي فيها يتزايد ق والفترات التي فيها يتناقص ، ثم ضع تخطيطا لبيان ق .

الحـل : نفاضل فينتج قَ (س) = ٣ س^{٢} + ٢ س − ٥ = (٣ س + ٥) (س − ١) فمن (٤ − ١٨) يكفي ان نجد الفترات التي فيها يكون قَ (س)> ٠ وتلك التي فيها قَ (س)< ٠ فبتحليل المشتقة الى عامليها

وتحديد العددين الحاسمين $-\frac{5}{3}$ ، ١ نجد ان علينا ان ندرس الفترات $(-\infty\ ،\ -\frac{5}{3})$ ، $(-\frac{5}{3}\ ،\ 1)$ ، $(1\ ،\ \infty)$. ولحصر الاشارات يحسن ان نضع خطوات العمل في جدول كالتالي حيث تبين الاشارتان + ، − العبارات الموجبة والسالبة

الفترات	(٣س + ٥)	(س − ١)	قَ (س)	ق
$(-\infty\ ،\ -\frac{5}{3})$	−	−	+	متزايد
$(-\frac{5}{3}\ ،\ 1)$	+	−	−	متناقص
$(1\ ،\ \infty)$	+	+	+	متزايد

لاحظ ان ق (س) يمكن ان يكتب ق (س) = $س^{٢}$ (س + ١) − ٥ (س + ١) = ($س^{٢}$ − ٥) (س + ١) . فمقاطع المنحنى من محور س هي $\sqrt{٥}$ ، $-\sqrt{٥}$ ، − ١ ، ومقطعه من محور ص هو ق (٠) = − ٥ والنقطتان اللتان تناظران عدديه الحاسمين هما $(-\frac{5}{3}\ ،\ \frac{40}{27})$ ، (١ ، − ٨) فبرسم هذه النقاط الست وملاحظة فترات تزايد ق وتناقصه نحصل على مخطط كالمبين بالشكل ٤ − ١٠ .

لقد ذكرنا في البند الثاني انه اذا كان للاقتران ذروة محلية فان هذه تقع عند عدد حاسم . ولكن ليس كل عدد حاسم ملازما لذروة محلية . فلايجاد الذرى المحلية يمكن ان نبدأ بتعيين الاعداد الحاسمة ، ثم نختبر كلا منها لنرى هل يؤدي الى ذروة محلية ام لا . وهنالك عدة طرق للاختبار . والنظرية التالية تعطي واحدة منها تعتمد على اشارة المشتقة الاولى للاقتران وهي تنص على وجه التقريب على انه اذا غيرت ق (س) اشارتها بتزايد س عبورا بالعدد الحاسم جـ كان للاقتران ق قيمة عظمى او صغرى عند جـ . اما اذا لم تغير ق (س) اشارتها فليس عند جـ قيمة عظمى ولا صغرى .

(٤–١٩) الاختبار بالمشتقة الاولى :

لنفرض ان جـ عدد حاسم للاقتران ق وان (أ ، ب) فترة مفتوحة تحوى جـ ، ولنفرض ان ق متصل على [أ ، ب] وتفاضلي على (أ ، ب) ، ربما باستثناء جـ .

(١) اذا كان قَ (س) > ٠ لكل أ < س < جـ ، قَ (س) < ٠ لكل جـ < س < ب : تكون ق (جـ) قيمة عظمى للاقتران ق

(٢) اذا كان قَ (س) < ٠ لكل أ < س < جـ ، قَ (س) > ٠ لكل جـ < س < ب : تكون ق (جـ) قيمة صغرى للاقتران ق .

(٣) اذا كان قَ (س) > ٠ أو قَ (س) < ٠ لكل س في (أ ، ب) ، عدا س = جـ . فان ق (جـ) ليست ذروة محلية للاقتران ق .

البرهـــان : اذا توافرت في ق (س) الشروط المذكورة في (١) فمن (٤ – ١٨) ينتج ان ق يتزايد على [أ ، جـ] ويتناقص على [جـ ، ب] ومعنى ذلك ان ق (س) < ق (جـ) لكل س في (أ ، ب) ، عدا جـ . فمن (٤ – ٥) ينتج ان ق (جـ) ذروة محلية للاقتران ق .

والقسمان (٢) و (٣) يبرهن عليهما بنفس الطريقة .

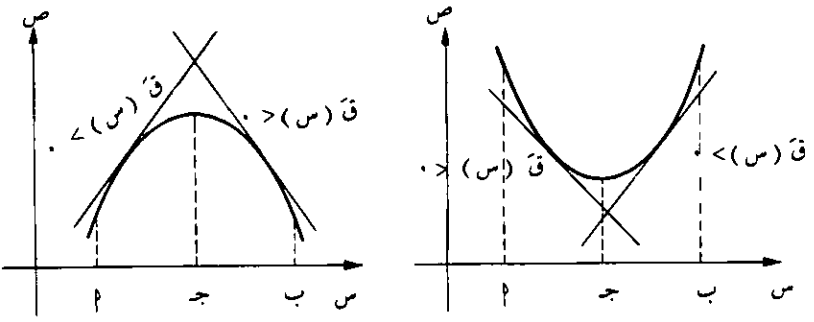
ولنتذكر اختبار المشتقة الاولى نتخيل زسمين كالمبينين بالشكل ٤ – ١١ ، ففي الرسم (أ) عند القيمة العظمى يكون ميل المماس موجبا قبل جـ وسالبا بعده ، وفي الرسم ب عند القيمة الصغرى يكون العكس .

مثـال ٢ : جد الذرى المحلية للاقتران ق اذا كان ق (س) = $س^{٣} + س^{٢} - ٥ س - ٥$

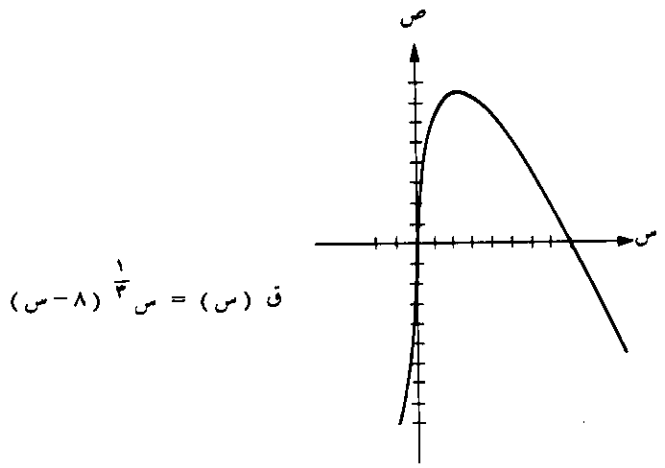
الحـــل : هذا الاقتران هو نفسه الاقتران الذي درسناه في المثال ١ ، فله عدد ان حاسمان هما : $-٣/٥$ ، ١

ويتبين من جدول المثال ١ ان اشارة قَ (س) تتغير من الموجب الى السالب بتزايد س عبورا بالعدد $-٣/٥$ ، فمن الاختبار الاول : ق له قيمة عظمى عند $-٣/٥$. وهي

ق ($-٣/٥$) = $٢٧/٤٠$.



الشكل ٤ — ١١



الشكل ٤ — ١٢

وبالمثل هنالك قيمة صغرى عند أ لان اشارة قَ (س) تتغير من السالب الى الموجب عند تزايد س عبورا بالواحد . وهذه القيمة الصغرى هي ق (١) = − ٨ .

ومن الجدير بالملاحظة ان ذروتي المثال ٢ عينتا بمساعدة جدول المثال ١ ولم نحتج الى المخطط المبين بالشكل ٤ — ١٠ .

مثـال ٣ : جد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق حيث ق (س) = س $\frac{١}{٣}$ (٨ − س) ثم ارسم مخطط هذا الاقتران

الحـــل : من قاعدة المضروبين يكون ق (س) = س $\frac{١}{٣}$ (− ١) + (٨ − س) $\frac{١}{٣}$ س $\frac{٢}{٣}$

$$= \frac{-٣س + (٨ - س)}{٣ س^{\frac{٢}{٣}}} = \frac{٤ (٢ - س)}{٣ س^{\frac{٢}{٣}}}$$

فللأقتران عددان حاسمان هما ٠ ، ٢ والجدول التالي يبين تغير اشارة ق (س) في الفترات التي يحددها هذان العددان :

الفترة	٢ − س	س $\frac{٢}{٣}$	قَ (س)	ق
= (− ∞ ، ٠)	+	+	+	متزايد
(٠ ، ٢)	+	+	+	متزايد
(٢ ، ∞)	−	+	−	متناقص

فمن الاختبار الاول : للاقتران قيمة عظمى محلية عند ٢ . وهذه القيمة هي :

ق (٢) = ٢ $^{\frac{١}{٣}}$ (٨ − ٢) = $\sqrt[٣]{٢^{٦}}$ ≈ ٧,٦

وليس هذا الاقتران ذروة عند الصفر لان اشارة ق (س) لا تتغير بعبور س بالصفر . ولكن هنالك مماس رأسي عند نقطة الاصل لان

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} \left| \text{قَ (س)} \right| = \infty$$

ولتخطيط البيان نبدأ بوضع نقطة تمثل الاعداد الحاسمة . ومن صيغة ق (س) يتبدى ان المنحنى يقطع محور س عند ٠ ، ٨ فالمخطط المطلوب هو ما في الشكل ٤ − ١٢ .

مثـال ٤ : أوجد القيم المحلية للاقتران ق حيث ق (س) = $س^{\frac{2}{3}}$ ($س^2$ − ٨) ثم خطط منحنى ق

الحـــل : من قاعدة المضروبين يكون :

$$ق'(س) = س^{\frac{2}{3}} (٢س) + (س^2 - ٨)(\frac{2}{3} س^{-\frac{1}{3}})$$

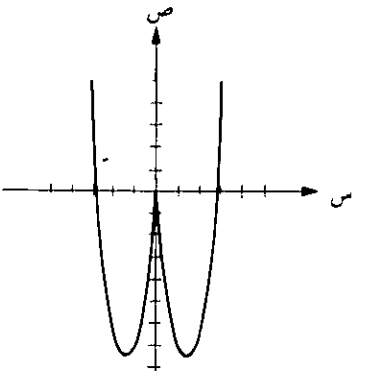
$$= \frac{٦س^2 + ٢(س^2 - ٨)}{٣س^{\frac{1}{3}}} = \frac{٨(س^2 - ٢)}{٣س^{\frac{1}{3}}}$$

فالاعداد الحاسمة هي بالترتيب : $-\sqrt{٢}$ ، ٠ ، $\sqrt{٢}$ وهذا يوحي باختيار اشارة قَ (س) في الفترات (− ∞ ، $-\sqrt{٢}$) ، ($-\sqrt{٢}$ ، ٠)، (٠ ، $\sqrt{٢}$) ، ($\sqrt{٢}$ ، ∞). فلنضع الجدول التالي :

الفترة	$س^2$ − ٢	$س^{\frac{1}{3}}$	قَ (س)	ق
(− ∞ ، $-\sqrt{٢}$)	+	−	−	متناقص
($-\sqrt{٢}$ ، ٠)	−	−	+	متزايد
(٠ ، $\sqrt{٢}$)	−	+	−	متناقص
($\sqrt{٢}$ ، ∞)	+	+	+	متزايد

فمن الاختبار الاول نجد ان ق له قيمتان صغريان عند $-\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٢}$ وقيمة عظمى عند الصفر وهذه القيم هي ق (٠) = ٠ ، ق ($-\sqrt{٢}$) = $-٦\sqrt{٢}^3$ = ق ($\sqrt{٢}$)

لاحظ ايضا ان هنالك مماسا رأسيا عند س = ٠ ، لماذا ؟ اما المخطط المطلوب ففي الشكل ٤ − ١٣ .



الشكل ٤ — ١٣

ذكرنا في البند ٢ ان القيمتين العظمى والصغرى المطلقتين قد لا تكونان بين ذرى الاقتران فالقيمة الصغرى المطلقة للاقتران الذي خططبالشكل ٤ – ٥ هي عند أ . وبوجه عام اذا كان الاقتران متصلا على فترة مغلقة [أ ، ب] واردنا ان نجد قيمتيه العظمى والصغرى المطلقتين وجب ان نجد جميع الذرى ثم ق (أ) ، ق (ب) عند الطرفين أ ، ب . فأكبر هذه القيم هي القيمة العظمى المطلقة على [أ ، ب] واصغرها هي القيمة الصغرى المطلقة على [أ ، ب] . واذا وقعت العظمى او الصغرى عند أ أو ب فقد تسمى بالذروة المتطرفة للاقتران (end-point extremum) ولاستيضاح هذه النقاط لننظر في الاقتران الذي تقدم بالمثال السابق ونركز انتباهنا في فترات محددة .

مثـال ٥ : اذا كان ق (س) = $س^{\frac{2}{3}}$ ($س^{2}$ – ٨) فأوجد قيم ق العظمى والصغرى المطلقة في كل من الفترات التالية (أ) [– ١ ، $\frac{١}{٢}$]

(ب) [– ١ ، ٣] (جـ) [– ٣ ، – ٢]

الحـل · يبين الرسم في الشكل ٤ – ١٣ الذرى المحلية والفترات التي فيها يتزايد س او يتناقص ، فلم يبق علينا الا ان نجد الاحداثيات الصادية للنقاط العليا والدنيا في كل من الفترات المعطاة .

فلنضع ذلك في جدول ولنترك للقاريء ان يتحقق ان ما فيه صحيح :

الفترة	القيمة الصغرى	القيمة العظمى
$[-١ ، \frac{١}{٢}]$	ق (−١) = −٧	ق (٠) = ٠
$[-١ ، ٣]$	ق $(\sqrt[٣]{٢})$ = $-٦\sqrt[٣]{٢}$	ق (٣) = $\sqrt[٣]{٩}$
$[-٣ ، -٢]$	ق (−٢) = $-٤\sqrt[٣]{٤}$	ق (−٣) $\sqrt[٣]{٩}$

لاحظ ان القيمة العظمى او الصغرى للاقتران هي نفسها الذروة المحلية في بعض الفترات وانها ليست كذلك في فترات اخرى .

تمارين :

في التمارين ١ − ١٠ أوجد ذرى ق المحلية وصف الفترات التي فيها يتزايد ق أو يتناقص ثم ضع له مخططا .

١ . ق (س) = ٥ − ٧س − ٤س^{٢}

٢ . ق (س) = ٦س^{٢} − ٩س − ٥

٣ . ق (س) = ٢س^{٣} + س^{٢} − ٢٠س + ١

٤ . ق (س) = س^{٣} − س^{٢} − ٤٠س − ٨

٥ . ق (س) = س^{٤} − ٨س^{٢} + ١

٦ . ق (س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٣س + ٧

٧ . ق (س) = $س^{\frac{٤}{٣}} + ٤س^{\frac{١}{٣}}$

٨ . ق (س) = $س^{\frac{٢}{٣}}$ (٨ − س)

٩ . ق (س) = $س^{٢}\sqrt[٣]{س^{٢} - ٤}$

١٠ . ق (س) = $س\sqrt{٤ - س^{٢}}$

في التمارين ١١ − ١٦ أوجد ذرى ق المحلية

١١ . ق (س) = $\sqrt[٣]{س^{٣} - ٩س}$

١٢ . ق (س) = $س^{٢}\sqrt{س - ٧}$

١٣ . ق (س) = (س − ٢)^{٣} (س + ١)^{٤}

١٤ . ق (س) = س^{٢} (س − ٥)^{٤}

١٥ . ق (س) = (٢س + ٥) (س + ٣)

١٦ . ق (س) = (س^{٢} + ٣) (س − ١)

١٧ . ٢٠ في الاقترانات المبينة بالتمارين ١ − ٤ أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة في كل من الفترات التالية :

(أ) [− ١ ، ١] (ب) [− ٤ ، ٢]

(جـ) [٠ ، ٥]

في كل من ٢١ ، ٢٢ ضع تخطيطا لاقتران قابل للاشتقاق ويحقق الشروط المعطاة :

٢١ . قَ (− ٥) = ٠ ، قَ (٠) = ٠ ، ق (٥) = ٠ ، قَ (س) > ٠ لكل س > ٥ ، قَ (س) < ٠ لكل ٠ < س < ٥ .

٢٢ . قَ (أ) = ٠ اذا كانت أ = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، قَ (س) > ٠ لكل قيم س الاخرى

في كل من ٢٣ ، ٢٤ أوجد ذرى ق المحلية وصف الفترات التي فيها يتزايد ق او يتناقص ثم ضع تخطيطا لمنحنى ق وابحث في تغير ميل المماس اثناء تزايد س في مجال ق .

٢٣ . ق (س) = س^{٤} + ٦س^{٢}

٢٤ . ق (س) = ٤س^{٣} − ٣س^{٤}

٢٥ . اذا كان ق (س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د فأوجد قيم أ ، ب ، جـ ، د علما بان ق له قيمة عظمى محلية هي ٢ عند س = − ١ وقيمة صغرى محلية هي − ١ عند س = ١

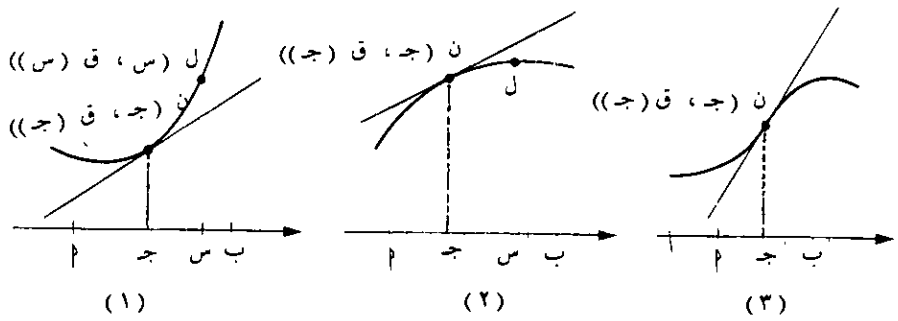
٢٦ . اذا كان ق (س) = أس^{٤} + ب س^{٣} + جـ س^{٢} + د س + هـ فأوجد قيم أ ، ب ، جـ ، د ، هـ علما بان ق له قيمة عظمى محلية هي ٢ عند س = ٠ وقيمتان صغريان محليتان − ١٤ عند س = − ٢ ، س = ٢

٥ ــ التحدب والتقعر (concavity) والاختبار بالمشتقة الثانية :

تفيد فكرة التحدب والتقعر في وصف منحنى الاقتران القابل للاشتقاق . فاذا كان قَ (جـ) موجودا فمعنى ذلك ان للاقتران مماسا عند ن (جـ ، ق (جـ)) ميله هو

قَ (جـ) . وفي الشكل ٤ – ١٤ تظهر ثلاث حالات يمكن ان تقع اذا كان قَ (جـ)> ٠ ومثل هذه الحالات تقع اذا كان قَ (جـ) < ٠ أو قَ (جـ) = ٠

لاحظ انه في الشكل ٤ – ١٤ (١) هنالك فترة مفتوحة (أ ، ب) تحوي جـ ، ولجميع قيم س في (أ ، ب) عدا س = جـ فان النقطة ن (س ، ق (س)) على منحنى ق تقع فوق نظيرتها على المماس التي لها نفس الاحداثي السيني . وفي هذه الحالة نقول ان منحنى ق يقع فوق المماس في النقطة ن على طول الفترة (أ ، ب) وهذا القول ليس دقيقا فعند ن يتلاقى المنحنى والمماس ولكننا نتغاضى عن ذلك تسهيلا للامر . وفي الحالة (٢) من الشكل ٤ – ١٤ يقع المنحنى تحت المماس . اما في الحالة (٣) ففي الفترة المفتوحة (أ ، ب) ليس المنحنى فوق المماس ولا تحته ولكن المماس يقطع المنحنى عند النقطة جـ . والمصطلحات التالية تصف هذه الحالات .

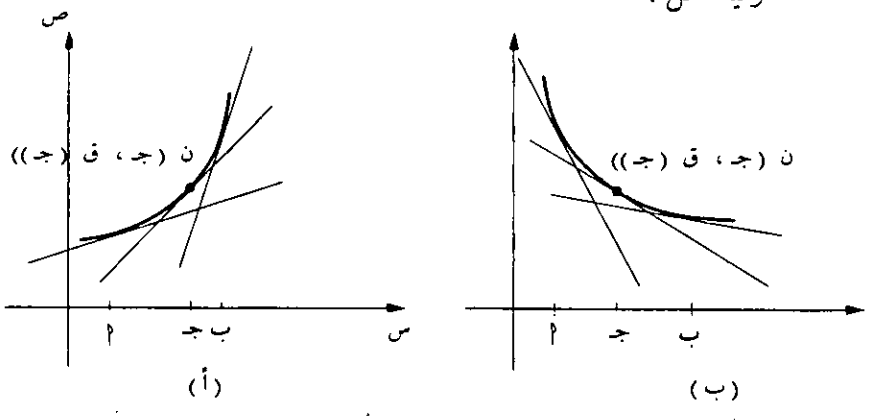


الشكل ٤ — ١٤

(٤–٢٠) تعريف التحدب والتقعر :

لنفرض ان الاقتران قابل للاشتقاق عند جـ ، فان منحنى ق يوصف بانه مقعر (concave upward) عند النقطة ن (جـ ، ق (جـ)) اذا كانت هنالك فترة مفتوحة تحوي جـ على طولها يقع منحنى ق فوق المماس في النقطة ن ٠ ويكون المنحنى محدبا (concave downard) عند ن اذا كانت هنالك فترة مفتوحة تحوي جـ عليها يقع المنحنى تحت المماس في النقطة ن .

افرض اقترانا ق منحناه مقعر عند النقطة ن (جـ ، ق (جـ)) ولتكن (أ ، ب) فترة مفتوحة تحوي جـ وعلى طول (أ ، ب) يقع منحنى ق فوق المماس في النقطة ن . فاذا كان ق اشتقاقيا على (أ ، ب) فلمنحناه مماس في كل نقطة ط (س ، ق (س)) احداثيها السيني في (أ ، ب) . فاذا اخذنا عددا من هذه المماسات ، كما في الشكل ٤ – ١٥ ، نجد انه كلما زاد الاحداثي السيني لنقطة التماس يتزايد قَ (س) أي ميل المماس . ففي ٤ – ١٥ (أ) يتزايد الميل اذا سارت ن يمينا ، وفي (ب) يتزايد الميل ايضا فهو سالب ويصير سالبا بقيمة رقمية اقل .



الشكل ٤ — ١٥

وبالعكس اذا تزايدت المشتقة قَ (س) بتزايد س عبورا بالنقطة جـ يكون المنحنى مقعرا عند (جـ ، ق (جـ)) ، ومن (٤ – ١٨) ينتج انه اذا كانت مشتقة اي اقتران موجبة في فترة ما كان الاقتران متزايدا فينتج انه اذا كانت قيم المشتقة الثانية موجبة على فترة ما كانت المشتقة الاولى متزايدة على هذه الفترة . وهذا يعني ان إشارة قً يمكن ان تستخدم لاختبار التحدب والتقعر . وهذا ما تقضي اليه النظرية التالية :

(٤–٢١) اختبار التحدب والتقعر :

اذا كان الاقتران ق اشتقاقيا في فترة مفتوحة تحوي جـ فعند النقطة ن (جـ ، ق (جـ)) يكون منحناه (أ) مقعرا اذا كان قَ (جـ) > ٠ ،
(ب) محدبا اذا كان قَ (جـ) < ٠

البرهـــان : لنأخذ الصيغة (٣ – ١١) لمشتقة الاقتران ق :

$$ق'(جـ) = \text{نهـا}_{س \to جـ} \frac{ق(س) - ق(جـ)}{س - جـ}$$

فاذا كان ق'(جـ) > ٠ فمن (٢ – ١١) هنالك فترة مفتوحة (أ ، ب) تحوي جـ وفيها

$$\frac{ق(س) - ق(جـ)}{س - جـ} > ٠$$

لكل قيم س في (أ ، ب) ، عدا جـ . فاذن ق(س) – ق(جـ) ، س – جـ باشارة واحدة لجميع قيم س في (أ ، ب) ، عدا جـ . وسنبين ان هذا يعني تقعرا :

خذ س في (أ ، ب) وانظر النقطة (س ، ص) على المماس في ن (جـ ، ق (جـ)) والنقطة (س ، ق (س)) على منحنى ق . (انظر الشكل ٤ – ١٦) . فاذا جعلنا ف (س) = ق (س) – ص نستطيع ان نثبت التقعر (اي ان المنحنى فوق المماس) باثبات ان ف (س) موجب لكل قيم س ≠ جـ

فمعادلة المماس عند ن هي ص – ق (جـ) = ق'(جـ) (س – جـ) ، فيكون :

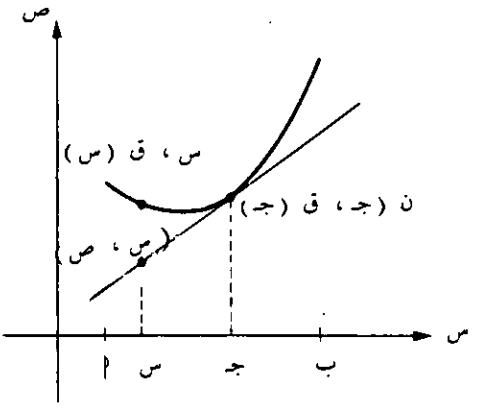
ص = ق (جـ) + ق'(جـ) (س – جـ) ، واذن

(٤–٢٢) ف (س) = ق (س) – ص = ق (س) – ق (جـ) – ق'(جـ) (س – جـ) وبتطبيق نظرية القيمة الوسطى (٤ – ١٥) على الاقتران ق في الفترة [س ، جـ] نجد ان هنالك عدداً و في الفترة المفتوحة (س ، جـ) حيث ان :

ق (س) – ق (جـ) = ق'(و) (س – جـ)

وبتعويض ق (س) – ق (جـ) في (٤ – ٢٢) ينتج :

ف (س) = ق'(و) (س – جـ) – ق'(جـ) (س – جـ) ، اي ان :



الشكل ٤ — ١٦

(٤ – ٢٣) ف (س) = [قَ (و) – قَ (جـ)] (س – جـ)

ولان و في الفترة (ا ، ب) نعلم من أولى خطوات البرهان ان قَ (و) – قَ (جـ) ، و – جـ لها اشارة واحدة . ولأن و بين س ، جـ فان و – جـ ، س – جـ لها نفس الاشارة فينتج ان قَ (و) – قَ (جـ) ، س – جـ باشارة واحدة لكل قيم س في (ا ، ب) عدا س = جـ فينتج من (٤ – ٢٣) ان ف (س) موجب حيث س ≠ جـ وهو المطلوب .

ويعتبر المنحنى محدبا او مقعرا في فترة ما اذا كان محدبا او مقعرا عند كل نقطة في هذه الفترة .

مثال ١ : اذا كان ق (س) = س^{٣} + س^{٢} – ٥ س – ٥ فبين الفترات التي يكون فيها ق مقعرا والفترات التي يكون فيها محدبا .

الحل : درسنا هذا الاقتران في المثالين ١ ، ٢ من البند السابق . فلأن قَ (س) = ٣ س^{٢} + ٢ س – ٥ يكون قً (س) = ٦ س + ٢ = ٢ (٣ س + ١) .

فيكون قً (س) < ٠ اذا كان ٣ س + ١ < ٠ اي اذا كان س < $-\frac{١}{٣}$. فينتج من (٤ – ٢١) ان المنحنى يكون محدبا في الفترة (– ∞ ، $-\frac{١}{٣}$) . وبالمثل يكون قً (س) > ٠ اذا كان س > $-\frac{١}{٣}$ فيكون المنحنى مقعرا في ($-\frac{١}{٣}$ ، ∞) . والنقطة ن ($-\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{٨٨}{٢٧}$) التي فيها يبدل المنحنى تحدبه وتقعره تسمى نقطة انعطاف (point of inflection) وتعريفها كما يلي :

(٤-٣٤) تعريف نقطة الانعطاف :

تكون النقطة ن (جـ ، ق (جـ)) على منحنى الاقتران ق نقطة انعطاف اذا كان هنالك فترة مفتوحة (أ ، ب) تحوي جـ وتحقق ما يلي :

(١) قً (جـ) > ٠ لكل أ < س < جـ ، قً (جـ) < ٠

لكل جـ < س < ب

أو (٢) قً (جـ) < ٠ لكل أ < س < جـ ، قً (جـ) > ٠ لكل جـ < س < ب

وهكذا فمن (٤ - ٢٤) ، (٤ - ٢١) اذا مرت نقطة على المنحنى عبورا بنقطة انعطاف فان هذه النقطة تنعطف من تقعر الى تحدب او من تحدب الى تقعر .

واذا كانت النقطة ن (جـ ، ق (جـ)) نقطة انعطاف في منحنى ق وكان قً متصلا على فترة مفتوحة تحوى جـ لزم ان يكون قً (جـ) = ٠ ولاثبات ذلك لاحظ انه اذا كان قً (جـ) > ٠ كان قً (س) > ٠ على فترة (أ ، ب) تحوى جـ . وهذا يناقض (٤ - ٢٤) . ونصل الى مثل هذا التناقض اذا فرضنا ان قً (جـ) < ٠

واذن فلتعيين نقط الانعطاف لاي اقتران مشتقته الثانية متصلة نبدأ بايجاد قيم س حيث قً (س) = ٠ ثم نختبر كل واحد من هذه الاعداد لنعرف هل هو الاحداثي السيني لنقطة انعطاف وسنأتي بمثال على ذلك ، ولكن لنلاحظ اولا الاختبار التالي لتعيين القيم العظمى والصغرى .

(٤-٢٥) اختبار المشتقة الثانية

ليكن ق اقترانا اشتقاقيا على فترة مفتوحة تحوي جـ ، وليكن قَ (جـ) = ٠

(١) اذا كان قً (جـ) < ٠ فان ق له قيمة محلية عظمى عند جـ

(٢) واذا كان قً > ٠ فان ق له قيمة صغرى محلية عند جـ

البرهـــان اذا كان ق (جـ) = ٠ كان المماس للمنحنى عند ن (جـ ، ق (جـ)) افقيا . فاذا كان ايضا قً (جـ) < ٠ كان المنحنى محدبا عند جـ واذن فهنالك فترة (أ ، ب) تحوى جـ حيث يقع المنحنى تحت المماس في ن . من ذلك ينتج ان ق (جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق . وبالمثل نثبت (٢)

اما اذا كان قً (جـ) = ٠ فاختبار المشتقة الثانية لا يصلح ويجب ان نلجأ الى اختبار المشتقة الاولى .

مثـال ٢ : اذا كان ق (س) = ١٢ + ٢ س^{٢} − س^{٤} فاستعمل اختبار المشتقة الثانية لايجاد ذرى ق المحلية . ناقش تحدب منحناه وأوجد نقط انعطافه ثم ضع مخططا له .

الحـــل : نبدأ بايجاد المشتقتين الاولى والثانية ونكتبهما بصيغة عوامل كما يلي :

قَ (س) = ٤ س − ٤ س^{٣} = ٤ س (١ − س^{٢})

قً (س) = ٤ − ١٢ س^{٢} = ٤ (١ − ٣ س^{٢})

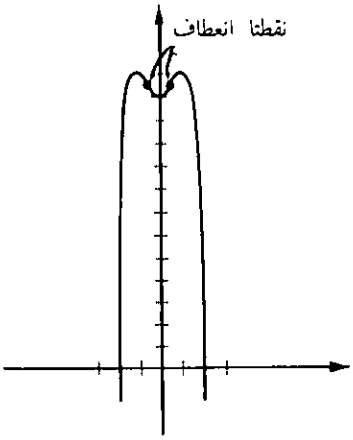
ومن قَ (س) نجد ان الاعداد الحاسمة هي ٠ ، ١ ، − ١ . وقيم قً عند هذه الاعداد هي قً (٠) = ٤ ، قً (١) = − ٨ . ، قً (− ١) = − ٨ .

فمن اختبار المشتقة الثانية نجد ان هنالك قيمة صغرى عند الصفر وقيمتان عظميان عند ١ ، − ١ وقيمها على الترتيب ق (٠) = ١٢ ، ق (١) = ١٣ = ق (− ١) وللبحث عن نقط الأنعطاف نحل المعادلة قً (س) = ٠ = ٤ (١−٣ س^{٢}) فمجموعة الحل هي { −√٣ / ٣ ، √٣ / ٣ } . وهذا يوحي بالبحث عن اشارة قً (س) في الفترات (− ∞ ، −√٣ / ٣) ، (−√٣ / ٣ ، √٣ / ٣) ، (√٣ / ٣ ، ∞) فنرتب العمل في جدول كما يلي :

الفترة	قً (س)	الهيئة
(− ∞ ، − √٣ \ ٣)	−	تحدب
(− √٣ \ ٣ ، √٣ \ ٣)	+	تقعر
(√٣ \ ٣ ، ∞)	−	تحدب

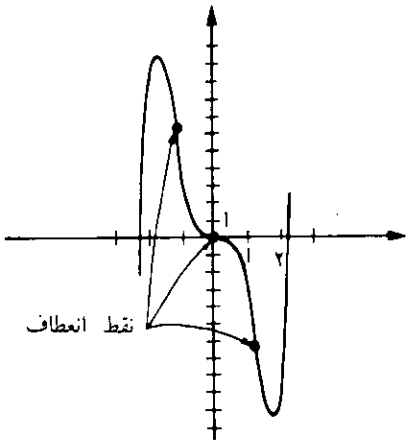
ولان اشارة قً (س) تتغير عندما يتزايد س عبورا بالمقدارين −√٣ \ ٣ ، √٣ \ ٣ فالنقطتان (± √٣ \ ٣ ، ١١٣ \ ٩) على المنحنى نقطتا انعطاف وهما النقطتان اللتان يتغير فيهما الانحناء ، فكما يظهر الجدول ان المنحنى مقعر في

الفترة المفتوحة ($-\sqrt{٣}/٣$ ، $\sqrt{٣}/٣$) ومحدب خارجها . اما مخططه ففي الشكل ٤ – ١٧ .



ق (س) = $١٢ + ٢س^{٢} - س^{٤}$

الشكل ٤ — ١٧



ق (س) = $س^{٥} - ٥س^{٣}$

الشكل ٤ — ١٨

مثـال ٣ : اذا كان ق (س) = $س^{٥} - ٥س^{٣}$ فاستعمل اختبار المشتقة الثانية لايجاد ذرى ق المحلية . ناقش هيئة المنحنى وأوجد نقط الانعطاف ثم ضع تخطيطا له .

الحـــل : باتباع خطوات المثال السابق نجد :

$ق'(س) = ٥س^{٤} - ١٥س^{٢} = ٥س^{٢}(س^{٢} - ٣)$

$ق''(س) = ٢٠س^{٣} - ٣٠س = ١٠س(٢س^{٢} - ٣)$

فصيغة ق' (س) تؤدي الى الاعداد الحاسمة . ، $-\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ وقيم ق'' عند هذه الاعداد هي ق'' (٠) = ٠ ، ق'' $(\sqrt{٣}) = ١٠\sqrt{٣}(٦ - ٣) = ٣٠$

$\sqrt{٣} > ٠$ ، ق'' $(-\sqrt{٣}) = -١٠\sqrt{٣}(٦ - ٣) = -٣٠\sqrt{٣} < ٠$

ق'' $(-\sqrt{٣}) = -١٠\sqrt{٣}(٦ - ٣) = -٣٠\sqrt{٣} > ٠$

فينتج من اختبار المشتقة الثانية ان ق له قيمة صغرى محلية عند $\sqrt{٣}$ وقيمة عظمى محلية عند $-\sqrt{٣}$ وهما ق $(\sqrt{٣}) = -٦\sqrt{٣}$ ، ق $(-\sqrt{٣}) = ٦\sqrt{٣}$ ولان ق'' (٠) = ٠ فلا يصلح الاختبار الثاني عند الصفر ، فنلجأ الى الاختبار الاول :

فاذا كان $-\sqrt{٣} < س < ٠$ يكون قَ (س) < ٠ واذا كان $٠ < س < \sqrt{٣}$ يكون قَ (س) > ٠ ولان ق (س) لا يغير اشارته فليس عند الصفر قيمة عظمى ولا صغرى .

ولايجاد نقط الانعطاف نحل المعادلة قً (س) = ٠ اي

$$١٠ س (٢ س^{٢} - ٣) = ٠$$

فحلول هذه المعادلة هي بالترتيب $-\sqrt{٦} / ٢ ، ٠ ، \sqrt{٦} / ٢$. فنضع الجدول التالي :

الفترة	قً (س)	الهيئة
$(-\infty ، -\frac{١}{٢}\sqrt{٦})$	−	تحدب
$(-\frac{١}{٢}\sqrt{٦} ، ٠)$	+	تقعر
$(٠ ، \frac{١}{٢}\sqrt{٦})$	−	تحدب
$(\frac{١}{٢}\sqrt{٦} ، \infty)$	+	تقعر

ولان اشارة قً (س) تتغير بتزايد س عبورا بالقيم $-\sqrt{٦} \setminus ٢ ، ٠ ، \sqrt{٦} \setminus ٢$ تكون النقط (٠ ، ٠) ، $(-\sqrt{٦} \setminus ٢ ، ٢١ \sqrt{٦} \setminus ٨)$ ، $(\sqrt{٦} / ٢ ، - ٢١ \sqrt{٦} / ٨)$ نقط انعطاف

اما المنحنى ففي الشكل ٤ – ١٨ حيث جعلنا المحورين للايضاح بمقياسي رسم مختلفين

تمارين :

في التمارين ١ – ١٢ استعمل الاختبار الثاني (حيث يمكن) لايجاد الذرى المحلية للاقتران ق ، وناقش هيئته ثم أوجد الاحداثيات السينية لنقط الانعطاف وارسم منحنى الاقتران

١ . ق (س) = $س^{٣} - ٢ س^{٢} + س + ١$

٢ . ق (س) = $س^{٣} + ١٠ س^{٢} + ٢٥ س - ٥٠$

٣ . ق (س) = $٣ س^{٤} - ٤ س^{٣} + ٦$

٤ . ق (س) = ٨س^{٢} − ٢س^{٤}

٥ . ق (س) = ٢س^{٦} − ٦س^{٤}

٦ . ق (س) = ٣س^{٥} − ٥س^{٣}

٧ . ق (س) = (س^{٢} − ١)^{٢}

٨ . ق (س) = س − ١٦ / س

٩ . ق (س) = س^{٢} $\sqrt{٢٥ - ٤س^{٢}}$

١٠ . ق (س) = (س + ٤) $\sqrt{س}$

١١ . ق (س) = س^{٢} − ٢٧ س^{٢}

١٢ . ق (س) = س$^{\frac{٢}{٣}}$ (١ − س)

في التمارين ١٣ − ١٦ ضع تخطيطا لمنحنى اقتران متصل ق يحقق الشروط المعطاة

١٣ . ق (٠) = ١ ، ق (٢) = ٣ ، قَ (٠) = قَ (٢) = ٠ ، قَ (س) < ٠ اذا كان | س − ١ | > ١ ، قَ (س) > ٠ اذا كان | س − ١ | < ١ ، قً (س) > ٠ اذا كان س < ١ ، قً (س) < ٠ اذا كان س > ١ .

١٤ . ق (٠) = ٤ ، ق (٢) = ٢ ، ق (٥) = ٦ ، قَ (٠) = قَ (٢) = ٠ ، قَ (س) > ٠ لكل | س − ١ | > ١ ، قَ (س) < ٠ لكل | س − ١ | < ١ ، قً (س) < ٠ اذا كان س < ١ أو اذا كان | س − ٤ | < ١ ، قً (س) > ٠ اذا كان | س − ٢ | < ١ أو اذا كان س > ٥

١٥ . ق (٠) = ٢ ، ق (٢) = ق (− ٢) = ١ ، قَ (٠) = ٠ ، قَ (س) > ٠ اذا كان س < ٠ قَ (س) < ٠ اذا كان س > ٠ .

قً (س) < ٠ اذا كان | س | < ٢ ، قً (س) > ٠ اذا كان | س | > ٢ .

نهـا ق (س) = ٠ ، نهـا ق (س) = ٠

س ← ∞ س ← −∞

١٦ . ق (١) = ٤ ، قَ (س) > ٠ لكل س > ١ ، قَ (س) < ٠ لكل س < ١ ، قً (س) > ٠ لكل س ≠ ١ ،

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١} |\, ق\ (س)\, | = \infty \ ،$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} ق\ (س) = ٠ \ ،$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty} ق\ (س) = ٠$$

١٧ . اثبت ان بيان الاقتران التربيعي ليس له نقط انعطاف . ضع الشروط التي يكون فيها هذا المنحنى (١) مقعراً (٢) محدباً . وضح بالاشكال .

١٨ . اثبت ان منحنى الاقتران الحدودي التكعيبي له نقطة انعطاف واحدة فقط . وضح هذه الحقيقة بالامثلة .

١٩ . اثبت ان منحنى الحدودي ذي الرتبة ن > ٢ له على الاكثر ن – ٢ من نقط الانعطاف .

٢٠ . اذا كان ق (س) = $س^{ن}$ حيث ن > ١ فاثبت ان منحنى ق له نقطة انعطاف واحدة أو لا انعطاف ، حسب كون ن فرديا او زوجيا . وضح بالاشكال .

٦ — تطبيقات على القيم العظمى والصغرى :

كثيرا ما تنشأ خارج حقل الرياضيات مسائل تتضمن قيما عظمى وصغرى ، فتصاغ هذه المسائل في العادة بالكلمات ، وهذه يقتضي ان نحولها الى لغة الرياضيات قبل البدء بالحل فنحيلها الى صيغ رياضية او اقترانات او معادلات ثم نجري الحل حسب ما تقدم .

وليس هنالك قواعد مقررة تسري لحل كل مسألة من هذا النوع ، ولكن المنهج التالي كثيرا ما يكون ذا فائدة :

١ . خطط صورة او شكلا للمسألة التي تريد حلها تظهر فيه المتغيرات المتضمنة .

٢ . اكتب كل العلاقات القائمة بين هذه المتغيرات .

٣ . بين اي هذه المتغيرات يراد ايجاد قيمته العظمى او الصغرى وعبر عنه بدلالة واحدة من المتغيرات الاخرى .

٤ . اوجد الاعداد الحاسمة للاقتران الذي تجده في (٣) واختبر كلا منها لتصنيف الذروة .

٥ . انظر اذا كان هنالك ذرى متطرفة على طرفي مجال الاقتران الذي حصلت عليه في (٣) . وسنوضح هذه الخطوات بالامثلة :

مثـال ١ : يراد عمل صندوق مستطيل الشكل بلا غطاء من لوحة مستطيلة من الكرتون عرضها ١٦ بوصة وطولها ٢١ بوصة ، وذلك بقص مربع من كل ركن من اركانها الاربعة ثم طي الاطراف لتكون جدرانا قائمة ، اوجد ضلع المربع الذي تقصه من كل ركن حتى تصنع اوسع صندوق ممكن .

الحـــل : نبدأ برسم صورة للمسألة التي يراد حلها . فاذا قطع من كل ركن مربع ضلعه س ينتج معنا الوضع المبين بالشكل ٤ – ١٩ . والهدف هو ان نجعل ح ، اعني حجم الصندوق ، أكبر ما يمكن . لاحظ انه حتى يمكن صنع الصندوق يجب ان يكون س يحقق العلاقة . < س < ٨

فبعد طي الجوانب على الخطوط المنقطة يظهر أن لحجم ح هو :

ح = س (١٦ – ٢ س) (٢١ – ٢ س) = ٢ (١٦٨ س – ٣٧ س^{٢} + ٢ س^{٣})

وهذه المعادلة تعبر عن ح بدلالة س فلنجد الاعداد الحاسمة : تفاضل فينتج :

حَ = ٢ (١٦٨ – ٧٤ س + ٦ س^{٢})

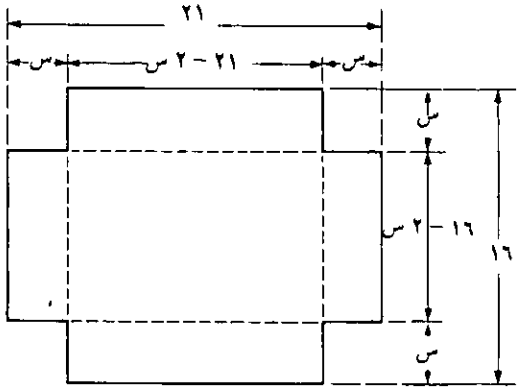
= ٤ (٣ س^{٢} – ٣٧ س + ٨٤)

= ٤ (٣ س – ٢٨) (س – ٣)

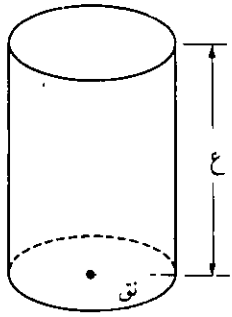
فالعددان الحاسمان هما ٢٨ / ٣ ، ٣ ولان ٢٨ / ٣ خارج عن مجال ح لذلك نسقطه ونأخذ بالعدد ٣ . والمشتقة الثانية هي

حً = ٢ (– ٧٤ + ١٢ س) = ٤ (٦ س – ٣٧)

نعوض س = ٣ فينتج : حً = ٤ (١٨ – ٣٧) = – ٧٦ . فمن الاختبار الثاني يكون ح في قيمة عظمى نسبية عند س = ٣ . وهذا يعني ان ما يقتطع من كل ركن هو مربع ضلعه ٣ بوصة حتى ينشأ اوسع صندوق يمكن صنعه من قطعة الكرتون المعطاة .



الشكل ٤ — ١٩



الشكل ٤ — ٢٠

وفي هذه الحالة ليس لمجال ح طرفان لان س محصورة في فترة مفتوحة (٠ ، ٨) فهنا يمكن اهمال الخطوة ٥ في المنهج السابق .

مثـال ٢ : يراد عمل وعاء اسطواني مفتوح من اعلى سعته ٢٤ π بوصة مكعبة . أوجد الابعاد التي تجعل التكاليف اقل ما يمكن ، علما بان سعر المادة التي تصنع منها القاعدة ثلاثة امثال سعر مادة الجدران .

الحـــل : ليكن نصف قطر القاعدة نق ، كما يظهر الشكل ٤ – ٢٠ ، وليكن الارتفاع ع، بالبوصات . فلأن الحجم ٢٤ بوصة مكعبة يكون π نق^{٢} ع = ٢٤ π
وهذا يؤدي الى العلاقة ع = ٢٤ / نق^{٢} بين ع ، نق . وهذه هي الخطوة ٢ من المنهج المتقدم والهدف هو جعل تكاليف الصنع ك اقل ما يمكن . فاذا كان ∌ سعر البوصة المربعة من مادة الجدار يكون سعر مادة القاعدة ٣ ∌ فتكون تكاليف صنع الجدار ∌ (٢ π نق ع) وتكاليف صنع القاعدة ٣ ∌ (π نق^{٢}) فالتكاليف الكلية هي :

ك = ∌ (٢ π نق ع) + ٣ ∌ (π نق^{٢}) = ∌ π (٢ نق ع + ٣ نق^{٢})

ولان ع = ٢٤ / نق^{٢} يكون :

$$ك = ∌ \pi \left(\frac{٤٨}{نق^{٢}} + ٦ نق \right)$$

ثم نساوي هذا بالصفر ونحل المعادلة لايجاد قيمة نق فينتج ما يلي :

$$- \frac{٤٨}{\text{نق}} + ٦ \text{ نق} = ٠ \text{ ، } - ٤٨ + ٦ \text{ نق}^{٣} = ٠ \text{ ،}$$

$$\text{نق}^{٣} = ٨ \text{ ، نق} = ٢$$

لاحظ ان نق = ٠ ليس عددا حاسما لان ك لا تحدد اذا كان نق = ٠

الان نفاضل ثانية فينتج كً = ﻫ × ($\frac{٩٦}{\text{نق}^{٣}}$ + ٦)

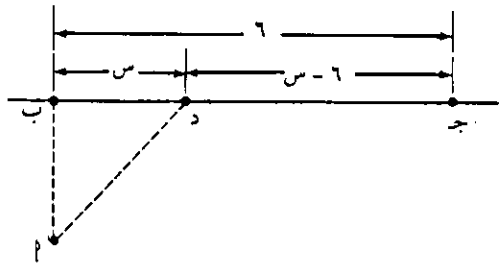
فاذا كان نق = ٢ يكون كً = ﻫ × ($\frac{٩٦}{٨}$ + ٦) = ﻫ × (١٨)

وهذا موجب لان ﻫ > ٠ فاذن تتخذ ك قيمتها الصغرى عندما يكون نق = ٢ .

فيكون ع = $\frac{٢٤}{\text{نق}^{٢}}$ = $\frac{٢٤}{٤}$ = ٦ . وليس هنالك قيم متطرفة

مثال ٣ : رجل في قارب يبعد ميلين عن اقرب نقطة اليه على شاطيء مستقيم وهو يريد ان يصل الى نقطة اخرى على الشاطيء تبعد عن الاولى مسافة ٦ أميال . فاذا كان يستطيع ان يجدف بسرعة ٣ أميال في الساعة وان يجري بسرعة ٥ أميال في الساعة فكيف يتوجه حتى يصل الى هدفه في اقصر وقت ؟

الحل : في الشكل ٤ – ٢١ تخطيط للمسألة فيه تمثل ﻫ موضع القارب ، ب هي اقرب نقطة اليه على الشاطيء ، جـ هي النقطة التي يستهدفها الرجل ، ولتكن د هي النقطة التي يتوجه اليها القارب ، ولتكن س هي المسافة بين ب ، ء . فالمتغير س اذن محصور في الفترة [٠ ، ٦] ، ومن نظرية فيثاغورس تكون المسافة بين ﻫ ، ء هي $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}$. فحسب القاعدة : الزمن = المسافة / السرعة (انظر المعادلة (٣ – ٢)) يكون الزمن الذي يستغرقه الرجل في التجديف من ﻫ الى ء هو $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}$ / ٣ . اما الزمن الذي يستغرقه في الجري على الشاطيء من ء الى جـ فهو (٦ – س) / ٥ . فالزمن الكلي هو :



الشكل ٤ — ٢١

$$\text{ن} = \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 4}}{3} + \frac{6 - \text{س}}{5} \quad \text{اي ان}$$

$$\text{ن} = \frac{1}{3}(\text{س}^2 + 4)^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{5} - \frac{\text{س}}{5} \qquad (٤-٢٤)$$

والمطلوب ايجاد اقل قيمة للزمن ن . ويلاحظ ان الحالة س = ٠ تمثل الحالة المتطرفة التي فيها يحدف الرجل رأسا الى ب ثم يجري طوال المسافة من ب الى جـ . والحالة س = ٦ تمثل الحالة التي فيها يحدف الرجل طوال المسافة من أ الى جـ . ويمكن اعتبار هاتين الحالتين حالتين متطرفتين في مجال ن .

فاذا كان س = ٠ فمن (٤ — ٢٦) ينتج ان ن = $\sqrt{4}$ / ٣ + ٦ / ٥ = ١٥/٢٨ ، اي ساعة و ٥٢ دقيقة . واذا كان س = ٦ يكون ن = $\sqrt[3]{40}$ / ٥ = ٢ $\sqrt[3]{10}$ / ٥ ≈ ٢,١١ ، اي ما يقارب ساعتين و ٧ دقائق .

نفاضل (٤ — ٢٦) فينتج نَ = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(\text{س}^2 + 4)^{\frac{1}{2}}(2\text{س}) - \frac{1}{5}$

$$= \frac{\text{س}}{3(\text{س}^2 + 4)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{5}$$

فلأيجاد الاعداد الحاسمة نفرض نَ = ٠ فيؤدي هذا الى المعادلات التالية المتكافئة :

$$٥\text{س} = 3(\text{س}^2 + 4)^{\frac{1}{2}} \quad ، \quad ٢٥\text{س}^2 = ٩(\text{س}^2 + 4) \quad ،$$

$١٦ س^{٢} = ٣٦$ ، $س^{٢} = \frac{٣٦}{١٦}$ فيكون س = $\sqrt{٦} \div \sqrt{٤} = ٣ \div ٢$ ، وهذا هو

العدد الحاسم الوحيد

نجد الان المشتقة الثانية . فمن قاعدة المقسومين ينتج :

$$نً = \frac{٣ (س + ٤)^{\frac{١}{٢}} - (س) \times ٣ \times \frac{١}{٢} (س^{٢} + ٤)^{-\frac{١}{٢}} (٢ س)}{٩ (س^{٢} + ٤)}$$

$$= \frac{٣ (س^{٢} + ٤) - ٣ س^{٢}}{٩ (س^{٢} + ٤)^{\frac{٣}{٢}}} = \frac{٤}{٣ (س^{٢} + ٤)^{\frac{٣}{٢}}}$$

وهذا يكون موجبا عند س = $\frac{٣}{٢}$

فينتج ان ن يكون لهقيمة صغرى في هذه الحالة . والزمن ن الذي يناظر س = $\frac{٣}{٢}$

هو حسب (٤ – ٢٦) : ن = $\frac{١}{٣} (\frac{٩}{٤} + ٤)^{\frac{١}{٢}} - \frac{٦}{٥} - \frac{١}{١٠}$

وهذا يساوي ٢٦ / ١٥ ساعة اي ساعة و ٤٤ دقيقة

وقد رأينا ان قيمتي ن عند طرفي المجال احداهما ساعة و ٥٢ دقيقة والاخرى أكثر من ساعتين . فاقل قيم ن تقع عند س = ٣ / ٢ . واذن فيجب ان يرسو القارب بين ب ، جـ على نقطة تبعد $١\frac{١}{٢}$ ميل عن ب .

ولدراسة مثال شبيه بهذا ولكن فيه قيمة صغرى عند احد الطرفين انظرالتمرين ٢٢ .

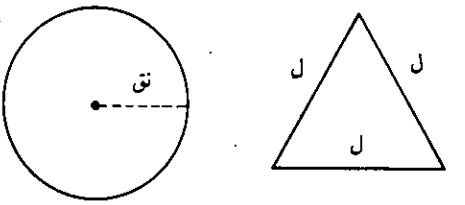
مثـال ٤ : سلك طوله ٦٠ بوصة يراد قطعه قطعتين تعمل احداهما دائرة وتعمل الاخرى مثلثا متساوي الاضلاع فاين تقطع السلك بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمثلث (أ) أكبر ما يمكن (ب) اقل ما يمكن ؟

الحـــل : اذا كان س طول احدى القطعتين يكون طول الثانية ٦٠ – س ، فلتكن الاولى هي التي تجعل دائرة نصف قطرها نق ، فيكون ٢ × نق = س .

فاذا جعلت الثانية مثلثا متساوي الاضلاع ضلعه ل يكون ٣ل = ٦٠ – س.

انظر الشكل ٤ – ٢٢ ، فمساحة الدائرة = π نق^{٢} = π (س / ٢ π)^{٢}

$$= \frac{١}{٤} \text{ س}^{٢} / \pi$$



٢ ط نق = س ٣ل = ٦٠ – س

الشكل ٤ — ٢٢

ومساحة المثلث = ($\sqrt{٣}$ / ٤) ل^{٢} = ($\sqrt{٣}$ / ٤) ($\frac{٦٠ - \text{س}}{٣}$)^{٢}

$$= (\sqrt{٣} / ٣٦) (٦٠ - \text{س})^{٢}$$

فيكون مجموع المساحتين ج = ($\frac{١}{\pi ٤}$) س^{٢} + ($\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}$) (٦٠ – س)^{٢}

فنجد الاعداد الحاسمة للمجموع ج :

$$\text{جَ} = \left(\frac{١}{\pi ٢}\right) \text{س} - \left(\frac{\sqrt{٣}}{١٨}\right) (٦٠ - \text{س})$$

$$= \left(\frac{١}{\pi ٢} + \frac{\sqrt{٣}}{١٨}\right) \text{س} - \frac{١٠ \sqrt{٣}}{٣}$$

فيكون جَ = ٠ اذا وفقط اذا كان س = $\frac{١٠ \sqrt{٣} / ٣}{\frac{١}{\pi ٢} + \frac{\sqrt{٣}}{١٨}}$

(وهذا يساوي تقريبا ٢٢,٦٠٧٥)

والمشتقة الثانية ج" = $\frac{١}{٢ \times}$ + $\frac{\sqrt{٣٧}}{١٨}$ وهي موجبة دائما . فالعدد الحاسم

اذن يعطي قيمة صغرى للمجموع

ولانه ليس هنالك اعداد اخرى حاسمة فان ج لا تأخذ قيمة عظمى . ولكن يمكن ان نختبر الحالتين المتطرفتين س = ٠ ، س = ٦٠ فنجد قيمة عظمى للمجموع ج عند س = ٦٠ ، وهي الحالة التي لا يقطع فيها السلك وانما يجعل كله دائرة .

تمارين :

١ . أوجد عددين حقيقيين الفرق بينهما ٤٠ وحاصل ضربهما اقل ما يمكن .

٢ . أوجد عددين حقيقيين موجبين مجموعهما ٤٠ وحاصل ضربهما اكبر ما يمكن .

٣ . يراد صنع صندوق خشبي بلا غطاء قاعدته مربعة وحجمه ٤ اقدام مكعبة . أوجد ابعاد الصندوق الذي يستنفد اقل ما يمكن من الخشب (اهمل سمك الصندوق وما يفقد من الخشب بالصنع) .

٤ . حل التمرين ٣ على اعتبار ان الصندوق له غطاء .

٥ . سياج ارتفاعه ٨ أقدام يمتد على موازاة مبنى ذي ارتفاع كبير ، ويبعد عنه مسافة قدم واحد . والمطلوب ايجاد طول اقصر سلم يمتد من الارض الى جدار المبنى مارا بحافة السياج العلوية .

٦ . يراد صنع كراسات مساحة كل صفحة فيها ٩٠ بوصة مربعة على ان تجعل ابعاد الصفحة بحيث تبقى اكبر مساحة ممكنة للكتابة بعد ترك حاشية في اعلى الصفحة عرضها $\frac{١}{٢}$ بوصة وحواشٍ في اسفلها وعلى الجانبين عرض كل منها بوصة واحدة .

٧ . اوجد ابعاد أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها نق على ان يقع رأسان من رؤوسه على قطرها .

٨ . أوجد حجم اكبر اسطوانة دائرية قائمة داخل مخروط ارتفاعه ١٢ بوصة ونصف قطر قاعدته ٤ بوصة علما بان محوري المخروط والاسطوانة متطابقان .

٩ . أوجد حجم اكبر مخروط دائري قائم داخل كرة نصف قطرها نق

١٠ . أوجد حجم اكبر اسطوانة دائرية قائمة داخل كرة نصف قطرها نق .

١١ . يراد صنع وعاء اسطواني بلا غطاء سعته قدم مكعب واحد . أوجد الابعاد التي تستنفد اقل ما يمكن من المادة على اعتبار ان ليس هنالك ما يفقد من المادة بالصنع .

١٢ . اذا كانت قاعدة الوعاء (في التمرين ١١) تقطع من لوحة معدنية مربعة ويهمل ما يتبقى فما الابعاد التي تستنفد اقل ما يمكن من المادة ؟

١٣ . لوحة طويلة مستطيلة من المعدن عرضها ١٢ بوصة يراد ثنيها عند الجانبين لتصير قناة جداراها عموديان على القاعدة فكم تجعل ارتفاع الجدار حتى تجعل للقناة أكبر سعة ممكنة ؟

١٤ . حل التمرين (١٣) على اعتبار ان كل جدار يصنع مع القاعدة ١٢٠°

١٥ . اثبت ان أوسع مستطيل يرسم بمحيط معلوم م هو مربع

١٦ . دار مستطيل محيطه م حول احد اضلاعه فكون اسطوانة دائرية قائمة . فما ابعاد المستطيل الذي يكوّن كبر اسطوانة ممكنة حجماً ؟

١٧ . تتناسب قوة الالواح المستطيلة مع عرضها ومربع سمك مقطعها العرضي فما ابعاد اقوى لوح مستطيل يمكن قطعه من اسطوانة نصف قطرها نق

١٨ . نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة . فاذا كان محيط الدائرة ١٥ قدما فما ابعاده التي تدخل منها أكبر كمية من الضوء ؟

١٩ . أوجد على منحنى ص = س^{٢} + ١ اقرب نقطة الى النقطة (٣ ، ١)

٢٠ . أوجد الاحداثي السيني لاقرب نقطة الى (٤ ، ٠) على منحنى ص = س^{٣}

٢١ . مصنع يبيع احدى مصنوعاته بسعر القطعة ٢٠ دولارا اذا كان الشاري يريد اقل من ٥٠ قطعة . فاذا طلب الشاري ٥٠ قطعة أو أكثر (حتى ٦٠٠) يخفض سعر القطعة ٠٢ , ٠ دولار عن كل قطعة تطلب . ما حجم الطلب الذي به يحقق المصنع أكبر مردود ممكن ؟

٢٢ . في المثال ٣ من هذا البند : اذا كان الرجل في زورق بخاري يسير بسرعة ١٥ ميلا في الساعة فكيف يتجه حتى يصل الى مبتغاه في اقصر وقت ممكن ؟

٢٣ . تتناسب الاضاءة الآتية من مصدر الضوء طرديا مع قوة المصدر وعكسيا مع مربع البعد عنه فاذا كان هنالك مصدران قوتهما ق$_{١}$ و ق$_{٢}$ والبعد بينهما ب ففي اي نقطة بينهما تكون الاضاءة اقل ما يمكن ؟

٢٤ — في الواحدة بعد الظهر كانت الباخرة أ على بعد ٣٠ ميلا جنوبي الباخرة ب وتسير شمالا بسرعة ١٥ ميلا في الساعة . فاذا كانت ب تسير غربا بسرعة ١٠ اميال في الساعة فمتى تكون المسافة بين الباخرتين اقل ما يمكن ؟

٧ — السرعة والتسارع :

في الفصل الثالث عرفنا سرعة النقطة التي تتحرك على الخط الاحداثي . وفي الصفحات القادمة سنستعمل غالبا الحرف م للدلالة على المسافات مقيسة على خطوط مستقيمة او منحنية . فاذا كانت المسافة من نقطة الاصل الى النقطة ب في الزمن ن هي ف (ن) ينتج من (٣ – ٤) أن السرعة عند ب هي فَ(ن) . فنسمي ف اقتران الموضع (position function) للنقطة ب . فاذا رمزنا لسرعة ب في الزمن ن بالرمز ع (ن) نحصل على التعريف التالي :

(٤ – ٢٧) **تعريف السرعة** : اذا كان ف (ن) هي موضع النقطة ب على الخط الاحداثي ل في الزمن ن كانت سرعتها ع (ن) في الزمن ن هي

ع (ن) = فَ (ن) .

والاقترانَ ع هو اقتران السرعة للنقطة ب ، وهو المشتقة الاولى للاقتران ف

$$\text{اي ان } ع = د_{ن} (ف) = \frac{د\ ف}{د\ ن}$$

فاذا كانت ن بالثواني ، ف (ن) بالاقدام ، كانت ع (ن) بالاقدام في الثانية . وكذلك اذا كانت ن بالساعات ، ف (ن) بالاميال كانت ع (ن) بالاميال في الساعة . وهكذا وفي البند ٤ توصلنا الى نظرية تحدد اتجاه الحركة . فاذا فرضنا ان ل خط افقي وان الاتجاه الموجب عليه الى اليمين ، فاذا كانت ع (ن) في فترة ما موجبة كانت فَ (ن) > ٠ فحسب (٤ – ١٨) يكون ف (ن) متزايدا ، اي ان النقطة تتحرك الى اليمين .

وبالمثل اذا كان ع (ن) < ٠ كان ف (ن) متناقصا وكانت ب تتحرك الى اليسار . ولان ع (ن) = فَ (ن) كانت اللحظات التي تصير فيها السرعه صفرا هي الاعداد الحاسمة لاقتران الموضع ف فهي قد تؤدي الى قيم عظمى او صغرى

محلية للاقتران ف . فاذا كانت هنالك قيم محلية عظمى للاقتران ف عند اللحظة ز فقد تكون اللحظة ز لحظة عندها تغير ب اتجاهها من اليمين الى اليسار . وبالمثل عند نقطة القيمة المحلية الصغرى قد تغير النقطة ب اتجاهها من اليسار الى اليمين . وسرعة ب المطلقة هي | ع (ز) | وهي تقيس حركة ب بغض النظر عن اتجاه هذه الحركة .

اما المشتقة عَ (ز) فتسمى العجلة او التسارع (acceleration) ويرمز لها بالرمز ت (ز) . ولان ع (ز) = فَ (ز) ينتج ان

$$(٤-٢٨) \quad ت (ز) = عَ (ز) = فً (ز) = \frac{د^٢ ف}{د ز^٢}$$

والاقتران ت يسمى اقتران التسارع للنقطة ب .

ومن تعريف المشتقة ينتج ان

$$(٤-٢٩) \quad عَ (ز) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ع (ز + هـ) - ع (ز)}{هـ}$$

والبسط ع (ز + هـ) − ع (هـ) هو مقدار تغير السرعة في الفترة (ز ، ز + هـ) . وبقسمة هذا التغير على هـ نحصل على متوسط تغير السرعة في الفترة الزمنية المعطاة .

وعلى غرار تعريفنا للسرعة الآنية (في الفصل ٤) يمكن ان نعتبر النهاية المعطاة في (٤ − ٢٩) ، اي تسارع ب ، سرعة التغير الانية في سرعة ب في اللحظة ز . ووحدات ت (ز) هي اقدام في الثانية^٢ (قدم / ث^٢) اي اقدام في الثانية في الثانية ، أو ميل / ساعة^٢ (اميال في الساعة في الساعة) وهكذا . وحسب نظرية الاقترانات المتزايدة والمتناقصة نستنتج انه اذا كان ت (ز) > ٠ تكون السرعة متزايدة في اللحظة ز واذا كان ت (ز) < ٠ تكون السرعة متناقصة . لاحظ انه اذا كان ت (ز) > ٠ ، ع (ز) < ٠ فان السرعة تتناقص بمعنى ان قيمتها السالبة تصبح اكبر رقميا ، فمع ان السرعة تتناقص فان السرعة المطلقة | ع (ز) | تتزايد . والمثال ١ القادم يوضح ذلك .

ولان الاقتران ت هو المشتقة الثانية لاقتران الموضع م فانه يستعمل لتعيين القيم العظمى والصغرى للاقتران م كما يستعمل اختبار المشتقة الثانية . فاذا كان ع (ج$_1$) = ٠ ، ت (ج$_1$) < ٠ كان م (ج$_1$) قيمة عظمى محلية وكانت ب في تلك اللحظة تغير اتجاهها من اليمين الى اليسار. وكذلك اذا كان ع (ج$_1$) = ٠ ، ت (ج$_1$) > ٠ قيمة صغرى محلية للاقتران م وفي تلك اللحظة تغير ب اتجاهها من اليسار الى اليمين .

مثـال ١ : م اقتران موضع للنقطة ب على خط احداثيات وهو معرف بالعلاقة م (ج) = ج^3 − ١٢ج^2 + ٣٦ج − ٢٠ حيث ج بالثواني و م بالاقدام . صف حركة ب في الفترة [− ١ ، ٩]

الحـــل : نفاضل : ع (ج) = ٣ج^2 − ٢٤ ج + ٣٦ = ٣ (ج − ٢) (ج − ٦)

ت (ج) = ٦ج − ٢٤ = ٦ (ج − ٤)

فينتج ان السرعة تكون صفرا عند ج = ٢ ، ج = ٠٦ والجدول التالي يعطي اتجاه الحركة

الفترة	ع (ج)	الاتجاه
(− ١ ، ٢)	+	الى اليمين
(٢ ، ٦)	−	الى اليسار
(٦ ، ٩)	+	الى اليمين

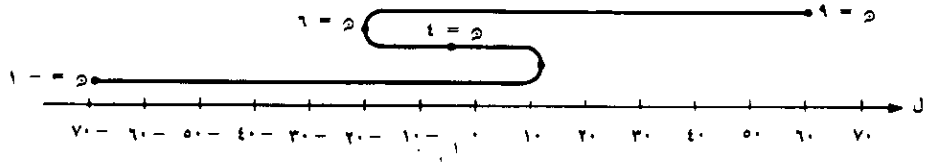
ويبين هذا الجدول ان الاقتران م له قيمة عظمى محلية عن ج = ٢ وقيمة صغرى محلية عند ج = ٠٦ وهذا يحققه ايضا ان ت (٢) = − ١٢ < ٠ . ت (٦) = ١٢ > ٠

والجدول التالي يبين تغيرات الموضع والسرعة والتسارع في الاعداد الصغرى والكبرى في الفترة [− ١ ، ٩] وفي اللحظات التي تكون فيها السرعة او التسارع صفرا .

ن	١ −	٢	٤	٦	٩
م (ن)	٦٩ −	١٢	٤ −	٢٠ −	٦١
ع (ن)	٦٣	٠	١٢ −	٠	٦٣
ت (ن)	٣٠ −	١٢ −	٠	١٢	٣٠

ومن المناسب وصف حركة ب بطريقة تصويرية كما في الشكل ٤ − ٢٣ . والخط الذي فوق مستقيم الاحداثيات ليس طريق النقطة ب ولكنه يبين اتجاه حركتها على المستقيم ل . وحسب الجدول والشكل ٤ − ٢٣ : عندن = − ١ تكون النقطة على بعد ٦٩ قدما الى يسار نقطة الاصل وهي تتحرك يمينا بسرعة ٦٣ قدم / ث . والتسارع السالب يدل على ان السرعة تتناقص بمعدل ٣٠ قدم/ث كل ثانية . وتستمر النقطة بالسير يمينا متباطئة الى ان تصير سرعتها صفرا عندن = ٢ ، على بعد ١٢ قدما الى يمين نقطة الاصل . عندها تعكس النقطة اتجاهها وتمضي حتى ن = ٦ فتكون عندها على بعد ٢٠ قدما الى يسار نقطة الاصل . عندها تعكس النقطة اتجاهها مرة اخرى وتمضي الى اليمين حتى نهاية الفترة المعطاة ، بسرعة متزايدة .

واللحظة ن = ٤ التي عندها يكون التسارع صفرا هي لحظة حاسمة بالنسبة الى اقتران السرعة ، لماذا ؟ ان قيمة ذلك تتضح اذا نحن درسنا تغير السرعة المطلقة | ع (ن) | = | ٣ (ن − ٢) (ن − ٦) | . في الفترة [٢ ، ٦] تتغير السرعة المطلقة من الصفر عندن = ٢ الى قيمة عظمى محلية | − ١٢ | = ١٢ عندن = ٤ ، ثم تتناقص الى الصفر عند ن = ٦ .



الشكل ٤ — ٢٣

مثـال ٢ : اطلقت قذيفة رأسيا الى اعلى بسرعة ٤٠٠ قدم / ث . فاذا كان بعدها عن سطح الارض في الثانية ز يعطي بالصيغة م (ز) = − ١٦ ز^{٢} + ٤٠٠ ز فأوجد الزمن والسرعة عندما تصدم القذيفة الارض . ما أعلى ارتفاع تصل اليه وكم يكون تسارعها في اللحظة ز ؟

الحـــل : خط سير القذيفة هو خط احداثيات رأسي ، نقطة الاصل فيه على سطح الارض واتجاهه الموجب الى اعلى . وتصل القذيفة الى الارض عندما يكون:

− ١٦ ز^{٢} + ٤٠٠ ز = ٠ اي − ١٦ ز (ز − ٢٥) = ٠ فالقذيفة تصدم الارض بعد ٢٥ ثانية .

والسرعة في اللحظة ز هي ع (ز) = م َ(ز) = − ٣٢ ز + ٤٠٠ فعندما تكون ز = ٢٥ تكون ع (٢٥) = − ٣٢ (٢٥) + ٤٠٠ = − ٤٠٠ قدم / ث

وأعلى ارتفاع لها يكون عند م َ (ز) = ٠ اي عند − ٣٢ ز + ٤٠٠ = ٠

وهذا يعطي ز = ٤٠٠ / ٣٢ = ٢٥ / ٢

فأعلى ارتفاع لها هو م (٢٥ / ٢) = − ١٦ (٢٥ / ٢)^{٢} + ٤٠٠ (٢٥ / ٢)

= ٢٥٠٠ قدم اما تسارعها في اللحظة ز فهو ت (ز) = ع َ(ز) = − ٣٢ قدم / ث^{٢}

تمارينـــن :

التمارين ١ − ١٠ تعرف اقترانات موضع لنقاط تتحرك على خط مستقيم . أوجد السرعة والتسارع في اللحظة ز ثم صف حركة النقطة في الفترة المعطاة وضع لها تخطيطا كما في شكل ٤ − ٢٣ .

١. م (ز) = ٣ ز^{٢} − ١٢ ز + ١ ، [٠ ، ٥]

٢. م (ز) = ز^{٢} + ٣ ز − ٦ ، [− ٢ ، ٢]

٣. م (ز) = ز^{٣} − ٩ ز + ١ ، [− ٣ ، ٣]

٤. م (ز) = ٢٤ + ٦ ز − ز^{٣} ، [− ٢ ، ٣]

٥. م (ز) = ز + ٤ \ ز ، [١ ، ٤]

٦. م (ز) = ٢ ٧ز + ١ \ ز ، [١ ، ٤]

٧ . م (ع) = ٢ ع^{٤} − ٦ ع^{٢} ، [− ٢ ، ٢]

٨ . م (ع) = ٢ ع^{٣} − ٦ ع^{٥} ، [− ١ ، ١]

٩ . م (ع) = ع^{٣} + ١ ، [٠ ، ٤]

١٠ . م (ع) = $\sqrt[٣]{ع}$ ، [− ٨ ، ٠]

١١ . قذف حجر الى اعلى بسرعة ١٤٤ قدماً / ث فاذا كان ارتفاعه م (ع) عن الارض بالاقدام بعد ع ثانية يعطي بالصيغة م (ع) = ١٤٤ع − ١٦ع^{٢} . فما سرعته وما تسارعه في اللحظة ع ؟ بعد ٣ ثوان ؟ ما اعلى ارتفاع له ؟ متى يصدم الحجر الارض ؟

١٢ . حجر يتدحرج على سطح مائل بحيث ان بعده م (ع) بالبوصات عن نقطة انطلاقه يعرف بالصيغة م (ع) = ٥ع^{٢} + ٢ ، فما سرعته بعد ثانية ؟ بعد ثانيتين ؟ متى تكون سرعته ٢٨ بوصة / ث ؟

١٣ . يعطي اقتران الموضع م لنقطة تتحرك على خط مستقيم بالصيغة م (ع) = ٢ع^{٣} − ١٥ع^{٢} + ٤٨ع − ١٠ حيث ع بالثواني ، م بالاقدام . أوجد التسارع عندما تكون السرعة ١٢ قدماً / ث . أوجد السرعة عندما يكون التسارع ١٠ قدم / ث^{٢} .

١٤ . حل التمرين ١٣ اذا كان م (ع) = ع^{٥} − $\frac{٥}{٣}$ ع^{٣} − ٤٨ ع

٨ — سرعات التغير الترابطة (Related rates)

كل الكميات التي نقابلها في الحياة اليومية تتغير مع الزمن . وهذا ما يتضح في البحوث العلمية فالكيماوي قد يهمه أن يرقب سرعة انحلال مادة ما في الماء ، والمهندس الكهربائي قد يهمه سرعة تغير التيار في جزء ما من الدورة الكهربائية ، والبيولوجي قد يرقب السرعة التي بها يتزايد أو يتناقص عدد البكتيريا في حقل تجاربه ، الى غير ذلك من أمثلة ، منها ما هو من حقول غير حقول العلوم التجريبية . فلندرس الحالة العامة التالية التي تسري على جميع تلك الحالات الخاصة . فلنفرض ان المتغير غ دالة للزمن ع تعرف بالعلاقة غ = ج (ع) حيث ج اقتران قابل للاشتقاق . فالفرق بين قيمتي غ في مبدأ الفترة [ع ، ع + هـ] ومنتهاها هو ج (ع + هـ) − ج (ع) . وكما رأينا في دراستنا للسرعة ، ان متوسط تغير غ في الفترة [ع ، ع + هـ] هو :

$$\frac{ج(س + هـ) - ج(س)}{هـ} \qquad (٤-٣٠)$$

وسرعة التغير الآتية في اللحظة س هي :

$$ج'(س) = \frac{ص غ}{ص س} \qquad (٤-٣١)$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ج(س + هـ) - ج(س)}{هـ}$$

اما الوحدات فتعتمد على طبيعة الكمية غ .

مثـال ١ : وجد عالم انه اذا سخن مادة ما فان س (ن) درجة حرارتها في اللحظة ن بالدرجات المئوية حيث . $٠ \leq ن \leq ٥$ تعطي بالصيغة $ع(ن) = ٣٠ن + ٦\sqrt{ن} + ٨$

(أ) أوجد متوسط سرعة تغير ع (ن) في الفترة [٤ ، ٤,٤١]

(ب) أوجد سرعة التغير الآتية عند ن = ٤

الحـل : لنجعل ن = ٤ ، هـ = ٤١,٠ فيكون متوسط سرعة تغير ع في الفترة [٤ ، ٤,٤١] هو

$$\frac{ع(٤,٤١) - ع(٤)}{٤١و٠}$$

$$= \frac{[٣٠(٤,٤١) + ٦\sqrt{٤,٤١} + ٨] - [١٢٠ + ٦\sqrt{٤} + ٨]}{٤١و٠}$$

$$= \frac{١٢,٩}{٠,٤١} \approx ٣١,٤٦ \text{ درجة } \setminus \text{ دقيقة}$$

(ب) من (٤ – ٣١) تكون سرعة تغير ر الآنية في اللحظة ن هي :

$$ر'(ن) = ٣٠ + ٣ \sqrt{ن}$$

فيكون ر' (٤) = $٣٠ + ٣ \sqrt{٤} = ٣١,٥$ درجة \ دقيقة

وفي المسائل العملية قد نجابه متغيرين س ، ص كلاهما تفاضلي بالنسبة الى الزمن . كأن يكون س = ق (ن) ، ص = ف (ن) ويكون بين س ، ص علاقة مثل $س^{٢} - ص^{٣} - ٢س + ٧س^{٢} - ٢ = ٠$

فنفاضل هذه المعادلة بالنسبة الى ن باستعمال قاعدة السلسلة ونحصل على معادلة

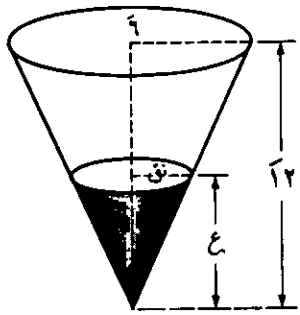
فيها $\frac{د س}{د ن}$ ، $\frac{د ص}{د ن}$ ،

فالمعادلة السابقة على سبيل المثال تعطي :

$$٢س \frac{د س}{د ن} - ٣ص^{٢} \frac{د ص}{د ن} - ٢ \frac{د س}{د ن} + ١٤ ص \frac{د ص}{د ن} = ٠$$

فتسمى $\frac{د س}{د ن}$ ، $\frac{د ص}{د ن}$ في مثل هذه الحالة بالسرعتين المترابطتين لان المعادلة تربط بين سرعة تغير س وسرعة تغير ص . والمعادلة الاخيرة تمكننا من ايجاد اي من السرعتين اذا عرفنا الاخرى . ومثل هذا يحدث في كثير من المسائل العملية ، وفيما يلي بعض من الامثلة العديدة على ذلك .

مثال ٢ : وعاء للماء على هيئة المخروط الدائري القائم المبين بالشكل ٤ – ٢٤ يصب فيه الماء بسرعة ١٠ جالون في الدقيقة . أوجد بالتقريب سرعة ارتفاع سطح الماء عندما يكون هذا الارتفاع ٣ قدم (١ جالون $\approx$ ١٣٣٧ , ٠ قدم^{٣})



الشكل ٤ — ٢٤

الحـــل : اذا كان نق هو نصف قطر سطح الماء عندما يكون عمقه ع فان نق ، ع دالتان للزمن . واذا كان حجم الماء ح يكون ح = $\frac{١}{٣}$ × نق^{٢} ع

ومن تشابه المثلثات (الشكل ٤ – ٢٤) يتبين ان نق ، ع تربطهما العلاقة :

$$\frac{\text{نق}}{\text{ع}} = \frac{٦}{١٢} \quad \text{اي ان نق} = \frac{\text{ع}}{٢}$$

$$\text{فيكون ح} = \frac{١}{٣} \times \frac{\text{ع}^{٢}}{٤} \times \text{ع} \quad ، \quad \text{ع} = \frac{١}{١٢} \times \text{ع}^{٣}$$

ونعلم ان $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = ١٠ جالون / دقيقة ≈ ١,٣٣٧ قدم^{٣} / د . ونريد $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ فنفاضل المعادلة بالنسبة الى ن فيكون :

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٤} \times \text{ع}^{٢} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

$$\text{فيكون} \quad \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{٤}{\text{ع}^{٢} \times} \quad \frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$$

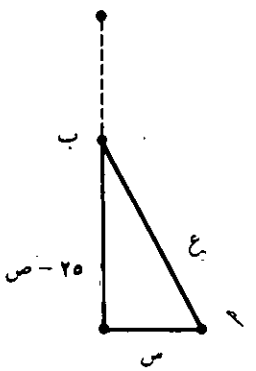
فاذا كان ع = ٣ يكون $\frac{د\ ع}{د\ ن} \approx \frac{٤}{(٩)\pi}$ (١,٣٣٧)

$\approx$ ١٨٩ , ٠ قدم / د .

وكما رأينا في المثال السابق : لحل مسائل السرعات المترابطة علينا ان نجد علاقات تربط مشتقات في الزمن ن قبل تعويض قيم معينة للمتغيرات .

مثـال ٣ : في الساعة الواحدة بعد الظهر كانت الباخرة أ على بعد ٢٥ ميلا من ب جنوبا ، فاذا كانت أ تسير غربا بسرعة ١٦ ميلا في الساعة وكانت ب تسير جنوبا بسرعة ٢٠ ميلا في الساعة فأوجد سرعة تغير المسافة بين الباخرتين في الساعة ٣٠ : ١ بعد الظهر

الحـــل : لتكن س ، ص المسافتين اللتين تقطعهما الباخرتان أ ، ب بالترتيب في ن ساعات بعد الواحدة بعد الظهر . فاذا كانت ع المسافة بينهما عندئذ فكما يظهر من الشكل ٤ – ٢٥ يكون



الشكل ٤ — ٢٥

$ع^{٢} = س^{٢} + (٢٥ - ص)^{٢}$

ونعرف ان د س /د ن = ١٦ ميلا / الساعة ، د ص /د ن = ٢٠ ميلا / الساعة . والمطلوب ان نجد د ع / د ن فنفاضل ويكون

$$ع^{٢} \frac{د ع}{د ن} = ٢ س \frac{د س}{د ن} + ٢ (٢٥ - ص) \left(- \frac{د ص}{د ن} \right)$$

$$\text{اي ان } ع \frac{د ع}{د ن} = س \frac{د س}{د ن} + (ص - ٢٥) \frac{د ص}{د ن}$$

فني الساعة ٣٠ : ١ بعد الظهر يكون س = ٨ ، ص = ١٠ ، ٢٥ − ص = ١٥

فيكون

$$ع^{٢} = ٦٤ + ٢٢٥ = ٢٨٩ \text{ أي أن } ع = ١٧$$

فنعوض في المعادلة السابقة ونجد ١٧ $\frac{د ع}{د ن}$ = ٨ (١٦) + (− ١٥) (٢٠)

$$\text{اي ان } \frac{د ع}{د ن} = - \frac{١٧٢}{١٧} = - ١٠,١٢ \text{ ميلا / الساعة}$$

والاشارة السالبة تشير الى ان المسافة بين الباخرتين تتناقص عند الساعة ٣٠ : ١ بعد الظهر .

وهنالك طريقة اخرى للحل : نكتب س = ١٦ن ، ص = ٢٠ن فيكون

$$ع = [س^{٢} + (٢٥ - ص)^{٢}]^{\frac{١}{٢}} = [٢٥٦ن^{٢} + (٢٥ - ٢٠ن)^{٢}]^{\frac{١}{٢}}$$

فنجد $\frac{د ع}{د ن}$ ونعوض ن = $\frac{١}{٢}$ فنجد السرعة المطلوبة .

وقد نبحث في سرعات تغير بالنسبة الى متغيرات غير الزمن فاذا كان ص = ق (س) حيث س اي متغير يكون [ق (س + هـ) − ق (س)] / هـ هو معدل سرعة تغير ص في الفترة [س ، س + هـ] فنهاية هذه السرعة عندما تقارب هـ الصفر ، اعني $\frac{د\ ص}{د\ س}$ هي سرعة تغير ص بالنسبة الى س . فاذا تغير س يتغير ص بسرعة $\frac{د\ ص}{د\ س}$ وحدات لكل وحدة تغير في س

فمثلا اذا كانت كمية من الغاز في بالون كروي الشكل ثم احمي الغاز او برد مع بقاء الضغط ثابتا فان البالون يتمدد او يتقلص ، فحجمه ح دالة لدرجة الحرارة س ، فتكون د ح \ د س هي سرعة تغير الحجم بتغير درجة الحرارة .

مثـال ٤ : اذا كان التيار ت بالأمبير في دورة كهربائية يعطى بالصيغة ت = ١٠٠ / ق حيث ق هي المقاومة (بالاوم) فأوجد سرعة تغيرت بالنسبة الى ق عندما تكون ق = ٢٠ اوم .

الحـل : لان $\frac{د\ ت}{د\ ق} = -\frac{١٠٠}{ق^{٢}}$ فعندما تكون ق = ٢٠ تكون د ت \ د ق = − ١٠٠ \ ٤٠٠ = $-\frac{١}{٤}$ فاذا كانت ق تتزايد فعند ق = ٢٠ يكون التيار يتناقص بسرعة $\frac{١}{٤}$ امبير لكل اوم .

تمارين :

١ ـ سلم طوله ٢٠ قدما يرتكز على حائط رأسي فاذا انزلق طرفه السفلي مبتعدا عن الحائط على ارض افقية بسرعة ٣ قدم \ ث فبأي سرعة ينخفض طرفه العلوي عندما يكون على ارتفاع ٨ أقدام ؟

٢ ـ سخن قرص معدني دائري فاخذ قطره يتمدد بسرعة ٠١ , ٠ انش \ د . فبأي سرعة تتزايد مساحة سطحه ؟

٣ ـ يضخ الغاز في بالون كروي بسرعة ٥ قدم^{٣}\ د مع بقاء الضغط ثابتا فبأي سرعة يتزايد نصف قطر البالون عندما يكون القطر ١٨ إنشا ؟

٤ ـ قام شخص من نقطة أ واتجه شرقا بسرعة ١٠ قدم\ ث ، وبعد دقيقة قام آخر من النقطة أ واتجه شمالا بسرعة ٨ قدم/ث فبأي سرعة تتغير المسافة بين الاثنين بعد قيام الثاني بدقيقة واحدة ؟

٥ ـ مصباح على رأس عمود يرتفع عن الارض مسافة ١٦ قدما وعلى الارض ولد طوله ٥ أقدام يسير بسرعة ٤ قدم\ ث مبتعداً عن المصباح . فبأي سرعة يتحرك طرف ظله عندما يكون بعده عن العمود ١٨ قدما ؟ وبأي سرعة يتزايد طول ظله ؟

٦ ـ يقف بحار على الشاطيء وهو يجر قاربا بحبل ربط بحلقة في القارب فوق سطح الماء بقدم واحدة وتدلى طرفه الآخر من بكرة ترتفع عن سطح الماء مسافة ٨ أقدام . فاذا كان البحار يجر الحبل بسرعة ٢ قدم / ث فبأي سرعة يقترب القارب من الشاطيء عندما يكون على بعد ٢٥ قدما عنه ؟

٧ ـ صومعة راسها على هيئة نصف كرة قطرها ٢٠ قدما تكسوها طبقة من الثلج سمكها ٢ انش . فاذا اخذ هذا السمك يتناقص بسرعة $\frac{١}{٤}$ انش\ الساعة فبأي سرعة يتغير حجم الثلج ؟

٨ ـ يقف لوري محملا بالرمل ولكن الرمل يتسرب من ثقب في قعره فيكون على الارض مخروطا ارتفاعه يساوي نصف قطر قاعدته . فاذا كان الارتفاع يتزايد بسرعة ٦ انش\ د . فبأي سرعة يتسرب الرمل من اللوري عندما يكون ارتفاع المخروط ١٠ انش ؟

٩ ـ طير ولد طيارة ورق حتى اذا وصلت الى ارتفاع ١٠٠ قدم اخذ الولد يمد في طول الخيط بسرعة ٢٧ قدم\ ث واخذت الطائرة تبتعد افقيا . فاذا اعتبرنا ان الخيط مستقيم فبأي سرعة تبتعد الطيارة عندما يكون طول الحبل ١٢٥ قدما ؟

١٠ ـ بالون ارصاد يرتفع رأسيا بسرعة ٢ قدم/ث ، وعلى الارض رجل يرقبه من نقطة تبتعد ١٠٠ ياردة عن نقطة على الارض تقع تحت البالون مباشرة . فبأي سرعة تتزايد المسافة بين البالون والرجل عندما يبلغ ارتفاع البالون ٥٠٠ قدم ؟

١١ ـ ينص قانون بويل للغازات على ان ح ض = جـ حيث ح هو الحجم ، ض الضغط ، جـ عدد ثابت . فني لحظة ما كان الحجم ٧٥ انش^{٣} وكان الضغط

٣٠ باوند \ انش^{٢} ولكنه كان يتناقص بسرعة ٢ باوند \ انش^{٢} كل دقيقة ، فكم كانت سرعة تغير الحجم عندئذ ؟

١٢ . قطعة مكعبة من الثلج تذوب بسرعة ثابتة . فاذا نقص ضلعها من ١٢ إنشاً الى ٨ انشات في مدة ٤٥ دقيقة فبأي سرعة يذوب الثلج ؟

١٣ . حوض ماء طرفه مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ٢ قدم . فاذا كان طول الحوض ٨ قدم وينصب فيه الماء بسرعة ٥ قدم^{٣} | د . فبأي سرعة يرتفع سطح الماء فيه عندما يكون عمقه ٨ انش .

١٤ . حل التمرين ١٣ اذا كان طرف الحوض على هيئة منحنى المعادلة ص = ٢| س | بين النقطتين (− ١ ، ٢) ، (١ ، ٢)

١٥ . تتحرك النقطة ن (س ، ص) على منحنى المعادلة ص = س^{٣} + س^{٢} + ١ فاذا تغير س بسرعة وحدتين في الثانية فبأي سرعة يتغير ص عند النقطة (١ ، ٣) ؟

١٦ . تتحرك النقطة ن (س ، ص) على منحنى المعادلة ص^{٢} = س^{٢} − ٩ فاذا كان $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{١}{\text{س}}$ فأوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ عند النقطة (٥ ، ٤)

١٧ . تتناسب شدة الاضاءة ش طرديا مع قوة المصباح ق وعكسيا مع مربع البعد ب عنه . فاذا كانت ش = ١٢٠ وحدة على بعد ٢ قدم لمصباح ما فأوجد سرعة تغير ش بالنسبة الى ب على بعد ٢٠ قدما عن هذا المصباح .

١٨ . اثبت ان سرعة تغير حجم الكرة بالنسبة الى نصف قطرها تساوي مساحة سطح الكرة .

١٩ . اثبت ان سرعة تغير مساحة الدائرة بالنسبة الى محيطها لا تعتمد على ابعاد الدائرة . وضح هذه العلاقة مستشهدا بدائرتين على سطح كرتين احداهما كرة تنس والثانية الكرة الارضية .

٢٠ . قانون تمدد الهواء ينص على ان ح ض$^{\frac{١}{٤}}$ = جـ حيث ح هو الحجم ، ض الضغط ، جـ ثابت . أوجد صيغة تعطي سرعة تغير الضغط بالنسبة الى الحجم .

٩ ــ مسائل اقتصاديـــة :

عندما تقوم شركة بصنع سلعة ما فانها عند تحديد سعر البيع تاخذ عدة امور بعين الاعتبار ، فبالاضافة الى سعر التكلفة ومقدار الربح المطلوب يأخذ البائع في حسابه كيف يتغير اقبال الشاري على البضاعة مع تزايد السعر . ففي بعض السلع يكون الطلب ثابتا ولا يؤثر تغير السعر على كمية المبيعات ، اما في الكماليات فقد يؤدي ارتفاع السعر الى انخفاض كمية المبيعات .

فاذا فرضنا ان شركة تعرف بالخبرة انه اذا جعل سعر السلعة س يصير الطلب ب سلع فالعلاقة بين س ، ب تعطي اقترانا ق بمجاله جميع الاسعار الممكنة . فنكتب ب = ق (س) . ونسمي ق **اقتران الطلب** لهذه السلعة . وبتحليل دقيق للاحصائيات يمكن احيانا ان نحدد العلاقة بين ب ، س باقتران متصل . وعندها نطبق قواعد التفاضل على المسائل الاقتصادية التي تجابهنا . والاقتران ق هو عادة متناقص اذ كلما زاد السعر س يتناقص الطلب ق (س) . وسنبين فيما بعد (انظر (٨ – ٤٣)) انه في هذه الحالة يكون للاقتران ق اقتران معاكس ف متصل ومتناقص فيمكن ان نكتب ب = ف (س) . لاحظ ان ف (س) هو سعر الوحدة عندما يكون الطلب س وحدات وفي الاقتصاد نسمي سرعة تغير السعر س بالنسبة الى الطلب ب دليل الطلب (marginal demand) واذا كان ف قابلا للاشتقاق يكون الدليل $\frac{د\ س}{د\ ب}$ ، ويسمى ف اقتران دليل الطلب .

واذا كان اقتران الطلب لسلعة ما قد عرف بالصيغة س = ف (ب) فيكون الدخل ل (ب) الوارد من بيع ب وحدات هو

ل (ب) = ب س = ب ف (ب)

وفي الاقتصاد نسمي ل اقتران الدخل الكلي للسلعة ، واذا كان ل قابلا للاشتقاق يكون $\frac{د\ ل}{د\ ب}$ هو سرعة تغير الدخل بالنسبة الى الطلب ويسمى اقتران دليل الدخل . ونسمي العدد ل(ب) دليل الدخل الذي يقابل ب وحدات من السلعة . وتتحقق القيمة العظمى عندما يكون دليل الدخل صفرا .

مثـال ١ : يرتبط طلب ب وحدات من سلعة ما بسعر البيع س بالمعادلة :

$س^{٢} + ٢٠ ب - ١٠٠ = ٠$ حيث تقدير س بالدولار، ب بالاف الوحدات ، أوجد وناقش اقتران الطلب واقتران دليل الطلب واقتران الدخل الكلي واقتران دليل الدخل .

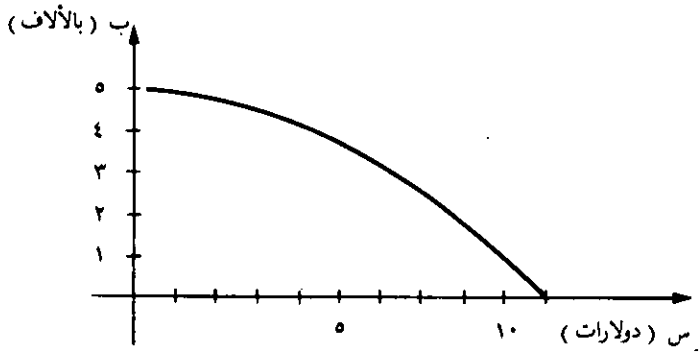
الحـــل : نجد ب من المعادلة فيكون ب = ٥ - $\frac{س^{٢}}{٢٠}$ فاقتران الطلب هو

$$ق (ب) = ٥ - \frac{س^{٢}}{٢٠}$$

ولان ب لا يكون سالبا فان مجال ق هو مجموعة كل الاسعار س حيث

$$٥ - \frac{س^{٢}}{٢٠} \geq ٠$$

اي ان $س^{٢} \leq ١٠٠$ ، ولان س موجب يكون مجال ق هو الفترة نصف المفتوحة (٠ ، ١٠] . واما مدى ق فهو الفترة [٠ ، ٥) . ومنحنى ق يظهر مخططه بالشكل ٤ - ٢٦ . ومنه يتبين انه اذا جعل السعر ١٠ دولارات ينعدم البيع واذا قارب السعر الصفر يقارب الطلب ٥٠٠٠ وحدة . والاقتران المعاكس ف نحصل عليه بايجاد س من المعادلة السابقة فنجد س $= \sqrt{١٠٠ - ٢٠ ب}$ فيكون س = ف (ب) = $\sqrt{١٠٠ - ٢٠ ب}$.



الشكل ٤ — ٢٦

واما دليل اقتران الطلب فهو ف = $\frac{\text{د س}}{\text{د ب}}$ = $\frac{-١٠}{\sqrt{١٠٠ - ٢٠ب}}$

حيث تشير الاشارة السالبة الى ان زيادة الطلب يرافقها نقصان في السعر . واما اقتران الدخل الكلي ل فهو

ل (ب) = ب ف (ب) = ب $\sqrt{١٠٠ - ٢٠ ب}$

ودليله لَ هو لَ (ب) = $\frac{١٠ (١٠ - ٣ب)}{\sqrt{١٠٠ - ٢٠ ب}}$

فيكون لَ ($\sqrt{١٠ \setminus ٣}$) = ٠ ويكون لَ (ب) موجبا في الفترة [٠ ، $\sqrt{١٠ \setminus ٣}$] وسالبا في الفترة ($\sqrt{١٠ \setminus ٣}$ ، ٥) . فيتأتى اعظم دخل عند ب = $\sqrt{١٠ \setminus ٣}$ اي عند انتاج ٣٣٣٣ وحدة . وهذا يقابل السعر ف (١٠ / ٣) = $\sqrt{١٠٠ \setminus ٣}$ ≈ ٥ , ٧٧٤ ≈ ٥ , ٧٧ دولار لأقرب سنت .

تجد بعض الشركات ان الكلفة ك (س) لانتاج س وحدات من احدى السلع

هي ك (س) = ﻫ + ب س + $\frac{\text{جـ}}{\text{س}}$ + ث س^{٢}

حيث ﻫ كلفة ثابتة اضافية لا تعتمد على عدد الوحدات التي تنتجها الشركة . واذا كانت تكاليف انتاج وحدة واحدة هي ب دولارات واهملنا كل العوامل الاخرى يكون ب س ، الحد الثاني في المعادلة ، يمثل تكاليف انتاج س وحدات . واذا كان موجبا فان $\frac{\text{جـ}}{\text{س}}$ يتناقص بتزايد س فيصبح افضل اقتصاديا ان يزداد عدد السلع المنتجة . ولكن اذا زاد س كثيرا فان الحد ث س^{٢} المسمى بالكابح يزيد من قيمة التكاليف . وما درسناه في هذا الفصل يمكننا من ايجاد عدد الوحدات التي تنتج باقل ما يمكن من تكاليف .

وبوجه عام اذا كان ك (س) هو كلفة انتاج س وحدات يسمى ك اقتران الكلفة لهذه السلعة . واذا كان ك اشتقاقيا كان $\frac{\text{د ك}}{\text{د س}}$ هو سرعة تغير الكلفة بالنسبة

الى الانتاج وهذا ما نسميه بدليل اقتران الانتاج . فالدليل الذي يقابل انتاج س وحدات هو ك (س) . وتكون الكلفة أقل ما يمكن عندما يكون هذا الدليل صفرا .

مثـال ٢ : قدرت احدى الشركات ان التكلفة ك (س) لصنع س وحدات من احدى السلع هي بالتقريب

$$\text{ك} (\text{س}) = ١٠٠ + \frac{١٠}{\text{س}} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢٠٠}$$

فكم وحدة تصنع حتى تكون الكلفة اقل ما يمكن ؟

الحـــل : بما ان معامل التكلفة = كَ (س) = $-\frac{١٠}{\text{س}^{٢}} + \frac{\text{س}}{١٠٠}$ فان التكلفة تكون لها ذروة اذا كان

$$-\frac{١٠}{\text{س}^{٢}} + \frac{\text{س}}{١٠٠} = ٠$$

فيكون س = ١٠ وباختبار المشتقة الثانية نجد ان ك يكون لها قيمة دنيا مطلقة عند س = ١٠

واذا كان اقتران الكلفة لسلعة ما ل وكان الانتاج س وحدات فان متوسط الكلفة

ك (س) لكل وحدة يعطى بالصيغة ك (س) = $\frac{\text{ل} (\text{س})}{\text{س}}$

ومشتقته كَ (س) تسمى معامل متوسط الكلفة ، وهو حسب قاعدة المقسومين :

$$\text{كَ} (\text{س}) = \frac{\text{س ل}\text{َ} (\text{س}) - \text{ل} (\text{س})}{\text{س}^{٢}}$$

فيكون لمتوسط الكلفة ذروة اذا كان س لَ (س) − ل (س) = ٠

اي اذا كان لَ (س) = $\frac{\text{ل (س)}}{\text{س}}$ = ك (س)

فاذا كانت الكلفة ل اقترانا اشتقاقيا يكون متوسط الكلفة اقل ما يمكن عندما يكون هذا المتوسط مساويا لمعامل الكلفة .

واخيرا اذا كان ك ،خ هما الكلفة والدخل على التوالي فان الربح ح يعطي بالصيغة

ح (س) = خ (س) − ك (س)

وهو يدل على قيمة الربح عند صنع س وحدات . واذا كان ك ، خ اشتقاقيين تكون اعداد ح الحاسمة هي حلول المعادلة حَ (س) = خَ (س) − كَ (س) = ٠

وهذا يدل على انه قد يكون هنالك قيمة عظمى او صغرى للربح عندما يكون خَ (س) = كَ (س) اي عندما يتساوي معاملا الدخل والتكلفة .

تمارين :

المعادلات في التمارين ١ − ٤ تبين العلاقة بين الطلب ب والسعر س لسلعة ما . ناقش اقتران الطلب ومعامله والدخل الكلي ومعامله كما في المثال ١ .

١ . ٣ ب + ٤ س − ٨ = ٠ ٢ . س^{٢} + ب + ٤ س − ٥ = ٠

٣ . ب^{٢} − ٨ ب − س + ١٦ = ٠ ٤ . س^{٢} + ٢ س ب − ١٠٠ = ٠

في التمرينين ٥ ، ٦ : ك (س) هي كلفة انتاج س وحدات من سلعة ما . أوجد اقتران متوسط الكلفة وقيمة س التي تعطى اقل كلفة .

٥ — ك (س) = ٨ + $\frac{١٢}{\text{س}}$ + $\frac{\text{س}^{٢}}{١٠٠}$

٦ . ك (س) = ١٠٠ + $\frac{١٠٠}{\sqrt{س}}$ + $\frac{\sqrt{س}}{١٠٠٠}$

٧ . باعت شركة احدى السلع بسعر ٥٠ دولارا للوحدة فكان الطلب ١٠٠٠ وحدة في الاسبوع . ثم رفع السعر الى ٧٠ دولارا فانخفض الطلب الى ٨٠٠ وحدة في الاسبوع . فعلى فرض ان اقتران الطلب خطي أوجد هذا الاقتران واقتران الدخل .

٨ . اذا كان اقتران الطلب ق يعرف بالصيغة ق (س) = أ س^{٢} + ب حيث أ < ٠ ، ب > ٠ ، فما قيمة س التي تعطي أكبر دخل ممكن ؟

٩ . اثبت انه اذا كان اقتران الطلب لسلعة ما خطيا ومتناقصا لكل س > ٠ يكون معامل اقتران الدخل خطيا ايضا ومتناقصاً .

١٠ . بين ان معامل الدخل لسلعة ما يمكن حسابه بان يضاف الى سعر البيع حاصل ضرب الوحدات التي بيعت بمعامل الطلب .

١٠ ـــ اصل المشتقة : (Antiderivative)

في الفصل الماضي جابهتنا مسائل من النوع : اذا عرفت الاقتران ق فأوجد مشتقته قَ . وسنعالج الان عكس هذه المسألة ، اعني اذا عرفت المشتقة قَ فما الاقتران ق ؟ واذا اشرنا الى قَ بالرمز ف والى ق بالرمز فـ يمكن ان نصوغ المسألة السابقة بقولنا :

اذا اعطينا الاقتران ف فكيف نجد الاقتران فـ حيث فـَ = ف

واليك مثالا بسيطا : اذا كان ف (س) = ٨ س^{٣} فهنا يسهل ان نجد اقترانا فـ مشتقته ف فنحن نعلم ان مفاضلة احدى قوى س ينقص هذه القوة واحدا ، فلايجاد فـ يجب ان نزيد الأس واحدا فيكون فـ (س) = أ س^{٤} حيث أ عدد له قيمة ما . فاذا فاضلنا أ س^{٤} ينتج

فـَ (س) = ٤ أ س^{٣} ، فلكي يكون هذا مساويا ف (س) يجب ان تكون أ = ٢

فاذن فـ يعرف بالصيغة فـ (س) = ٢ س^{٤}

وحسب التعريف التالي نسمي فـ اصل الاقتران ف .

(٤-٣٢) تعريف اصل المشتقة

يكون الاقتران ق أصلا للاقتران ه اذا كان قَ = ه

ونقول من قبيل التجاوز ان ق (س) هو اصل ه (س) ونعني ان ق هو اصل ه . ومجال المشتقة لا يحدد على الغالب ، وسنرى من النظرية (٥ - ٣١) في الفصل القادم ان اي فترة مغلقة [أ ، ب] يكون فيها ه متصلا هي مجال مناسب .

واصل اي مشتقة ليس فريدا ابدا ، فلان مشتقة اي عدد ثابت هي صفر ينتج انه اذا كان ق اصل المشتقة ه فكذلك يكون ج اصلا لها حيث ج (س) = ق (س) + جـ لاي عدد ثابت جـ

فمثلا اذا كان ه (س) = ٨ س^{٣} تكون جميع الاقترانات المعرفة بالصيغ ٢ س^{٤} ، ٢ س^{٤} - ٣ ، ٢ س^{٤} + ٢ / ٥ هي اصول للمشتقة ه . والنظرية التالية تنص على ان اصول المشتقة ه كلها من هذا النوع من الصيغ .

(٤-٣٣) اذا كان ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ اقترانين اشتقاقيين وكان قَ$_{١}$ (س) = قَ$_{٢}$ (س) لكل س في [أ ، ب] يكون ق$_{٢}$ (س) = ق$_{١}$ (س) + جـ لجميع قيم س في [أ ، ب] ، حيث جـ عدد ما .

البرهـــان : خذ الاقتران ج حيث ج (س) = ق$_{٢}$ - ق$_{١}$ (س) فينتج ان جَ (س) = قَ$_{٢}$ (س) - قَ$_{١}$ (س) = ٠

لجميع قيم س في [أ ، ب] . فاذا كان س اي عدد حيث أ < س ≤ ب فمن نظرية القيمة الوسطى (٤ - ١٥) للاقتران ج في الفترة المغلقة [أ ، س] نستنتج ان هنالك عدداً ما ، ى ، في الفترة المفتوحة (أ ، س) حيث : ج (س) - ج (أ) = جَ (ى) (س - أ) = ٠ × (س - أ) = ٠ فاذن ج (س) = ج (أ) لكل س في [أ ، ب] . فبالتعويض في المعادلة الاولى في هذا البرهان ينتج ان ج (أ) = ق$_{٢}$ (س) - ق$_{١}$ (س) . وباضافة ق$_{١}$ (س) الى الطرفين ينتج المطلوب وفيه جـ = ج (أ) .

فاذا كان ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ اصلين للمشتقة ه يكون قَ$_{١}$ = ه = قَ$_{٢}$. وحسب هذه النظرية يكون ق$_{٢}$ (س) = ق$_{١}$ (س) + جـ . وبعبارة اخرى : اذا كان ق (س) اصلا للمشتقة ه (س) كان كل اصل لها من النوع ق (س) + جـ

حيث جـ اي عدد اعتباطي ، اعني اي عدد حقيقي ، لا على التعيين . ونشير الى ق (س) + جـ على انه الاصل الاشتقاقي العام للمشتقة و (س) .

(٤ – ٣٤) **نظريـــة** : اذا كان و اقترانا حيث وَ (س) = ٠ لكل س في [أ ، ب] . يكون و اقترانا ثابتا على [أ ، ب]

البرهـــان : لنسم ق بالرمز ق$_{٢}$ وليكن الاقتران ق$_{١}$ معرفا بالصيغة ق$_{١}$ (س) = ٠ لكل س ، فينتج ان قَ$_{١}$ (س) = ٠ = قَ$_{٢}$ (س) في [أ ، ب] . وبتطبيق (٤ – ٣٣) نجد ان هنالك عددا ما جـ حيث ق$_{٢}$ (س) = ق$_{١}$ (س) + جـ اي ان ق (س) = جـ لكل س في [أ ، ب] .

وتستعمل نظريات المشتقة لايجاد صيغ لاصول المشتقات ، فمثلا : لاي عدد أ ولأي أ س^{ن} عدا – ١ يكون :

(٤ – ٣٥) و (س) = أ س^{ن} يقتضي ان يكون وَ (س) = $\frac{\text{أ}}{\text{ن} + ١}$ س$^{ن+١}$ + جـ هو الاصل العام للمشتقة ق (س) ، حيث جـ ثابت اعتباطي .

ولاثبات ذلك نفاضل باستعمال صيغة القوى (٣ – ٤٢) فنجد ان قَ (س) = و (س) . ونشير الى الصيغة (٤ – ٣٥) باسم قاعدة القوى لاصل المشتقة . وبالمثل اذا كان و (س) هو الحدودية :

و (س) = أ$_{ن}$ س^{ن} + أ$_{١}$ س$^{ن-١}$ + ... + أ$_{ن-١}$ س + أ$_{ن}$

حيث ن عدد صحيح غير سالب ، أ . اي عدد حقيقي . فالاصل الاشتقاقي العام ق للمشتقة و هو

$$(٤-٣٦)\quad ق(س) = \frac{أ_{٠}}{ن+١} س^{ن+١} + \frac{أ_{١}}{ن} س^{ن} + \ldots$$

$$+ \frac{أ_{ن+١}}{٢} س^{٢} + أ_{ن} س + جـ$$

حيث جـ ثابت اعتباطي .

اذكر (٣ – ٢٢) الذي منه ينتج ان مشتقة مجموع الاقترانات هي مجموع مشتقاتها . فمثل هذا يصح مع اصول المشتقات . فاذا كان $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ اصلين للاقترانين $و$ ، $و_{٢}$ يكون

$$(٤-٣٧)\quad د(ق_{١} + ق_{٢}) = د ق_{١} + د ق_{٢} = و_{١} + و_{٢}$$

اي ان $ق_{١} + ق_{٢}$ هو اصل اشتقاقي للاقتران $و_{١} + و_{٢}$

وهذه النتيجة يمكن توسيعها لتسري على مجموع اي عدد من الحدود المنتهية .

وهذا ما نعبر عنه بقولنا : الاصل الاشتقاقي للمجموع هو مجموع الاصول .

وكالمعتاد عندما نعالج عدة اقترانات نعتبر ان المجال هو تقاطع مجالاتها . ومثل هذا القول ينطبق على الفروق بين الاقترانات .

مثـال ١ :

اذا كان $و(س) = ٣س^{٤} - س + ٤ + (٥ / س^{٣})$ فأوجد اصله الاشتقاقي العام

الحـل : نكتب الحد الاخير بالصيغة $٥ س^{-٣}$ ثم نطبق قاعدة القوى لاصول المشتقات (٤ – ٣٥) على كل حد فينتج :

$$ق(س) = \frac{٣}{٥} س^{٥} - \frac{١}{٢} س^{٢} + ٤س - \frac{٥}{٢} س^{-٢} + جـ$$

ولتجنب الاخطاء يستحسن ان نتحقق بالمفاضلة لنجد ان $ق'(س) = و(س)$ وهذا ما نتركه للقاريء .

وفي التطبيقات الرياضية كثيرا ما نصادف معادلات تضم مشتقات لبعض الاقترانات المجهولة ومثل هذه المعادلات تسمى معادلات تفاضلية ، ويسمى

الاقتران حلا للمعادلة التفاضلية اذا حققها . ولحل المعادلة التفاضلية ينبغي ان نجد اقترانا يحققها . وقد تقتضي بعض المسائل بالاضافة الى ايجاد الحل العام ان نجد له قيما خاصة تسمى بالقيم الحاصرة (boundary Values) او شروط الحل .

مثـال ٢ : حل المعادلة التفاضلية $\frac{د ص}{د س} = ٦ س^{٢} + س - ٥$ علما بان $ص (٠) = ٢$

الحـــل : من بحثنا عن اصل المشتقة نجد ان $ص (س) = ٢ س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢} - ٥ س +$ جـ

حيث جـ عدد ما . ولتحقيق الشرط المفروض يكون $ص (٠) = ٠ + ٠ + ٠ +$ جـ $= ٢$

فيكون جـ $= ٢$ ويكون الحل $ص (س) = ٢ س^{٣} + \frac{١}{٢} س^{٢} - ٥ س + ٢$

اذا سارت النقطة ن على خط مستقيم يكون اقتران موقعها م الاصل الاشتقاقي لاقتران سرعتها ع اي ان $م (ن) = ع (ن)$. ولان $ع (ن) = ت (ن)$ تكون السرعة هي الاصل الاشتقاقي للتسارع ، فاذا عرفت السرعة او التسارع واعطيت الشروط او الحواصر الكافية امكن معرفة اقتران الموقع . والشروط الحاصرة التي تعطي القيمة عند ن $= ٠$ تسمى احيانا الشروط الابتدائية . واليك مثالا على ذلك :

مثـال ٣ : تتحرك نقطة على خط مستقيم فاذا علم ان $ت (ن) = ١٢ ن - ٤$ وان الشروط الابتدائية هي $ع (٠) = ٨$ ، $م (٠) = ١٥$ أوجد $م (ن)$.

الحـــل : بما ان $ع (ن) = ١٢ ن - ٤$ نجد ان الاصل الاشتقاقي

$ع (ن) = ٦ ن^{٢} - ٤ ن +$ جـ ، حيث جـ عدد ما

نعوض ن $= ٠$ علما بان $ع (٠) = ٨$ فينتج ان $٨ = - ٠ +$ جـ $=$ جـ

فيكون $ع (ن) = ٦ ن^{٢} - ٤ ن + ٨$

اي ان $م (ن) = ٦ ن^{٢} - ٤ ن + ٨$

فالاصل العام $م (ن) = ٢ ن^{٣} - ٢ ن^{٢} + ٨ ن +$ ء حيث ء عدد ما .

ونعوض $م (٠) = ١٥$ فينتج ان $١٥ = ٠ - ٠ + ٠ +$ ء $=$ ء

اي ان $م (ن) = ٢ ن^{٣} - ٢ ن^{٢} + ٨ ن + ١٥$

كل جسم على سطح الارض او قريب منه تؤثر عليه قوة تسمى الجاذبية وهذه القوة تحدث فيه تسارعا ثابتا نسميه ج وقيمة هذا التسارع التقريبية هي ٣٢ قدم / ث^{٢} . واليك مثالا فيه هذا التسارع الثابت .

مثـال ٤ : قذف حجر رأسيا الى اعلى من نقطة على ارتفاع ١٤٤ قدما فوق سطح الارض بسرعة ٩٦ قدم /ث أوجد بعده عن الارض بعد ن ثوان وحدد الفترة التي يظل فيها الحجر يصعد . متى يصل الى الارض ؟ (اهمل الاحتكاك بالهواء)

الحـــل : يمكن اعتبار حركة الحجر حركة نقطة تسير على خط مستقيم رأسي فيه نقطة الاصل على سطح الارض والاتجاه الموجب الى اعلى . فالبعد عن الارض في الزمن (ن) هو م (ن) والشروط الابتدائية هي م (٠) = ١٤٤ ، ع (٠) = ٩٦ . ولان السرعة تتناقص فان عَ (ن) < ٠ اي ان التسارع سالب . فاذن ت (ن) = − ٣٢

ولان ع هو اصل ت يكون ع (ن) = − ٣٢ن + جـ حيث جـ عدد ما
فنعوض ن = ٠ ، ع (٠) = ٩٦ فينتج ان ٩٦ = ٠ + جـ = جـ
اي ان ع (ن) = − ٣٢ ن + ٩٦

ولان مَ (ن) = ع (ن) ينتج بايجاد اصل المشتقة ان
م (ن) = − ١٦ن^{٢} + ٩٦ن + ء ، حيث ء عدد ما
نعوض ن = ٠ ، م (٠) = ١٤٤ فنجد ان ١٤٤ = ٠ + ٠ + ء = ء
فينتج ان بعد الحجر عن الارض في اللحظة ن هو
م (ن) = − ١٦ن^{٢} + ٩٦ن + ١٤٤

وسيصعد الحجر حتى تصل ع (ن) الى الصفر ، اي حتى يكون — ٣٢ن + ٩٦ = ٠ اي ان ن = ٣

وسيضرب الحجر الارض عندما يكون م (ن) = ٠ اي − ١٦ن^{٢} + ٩٦ن + ١٤٤ = ٠ اي ان ن^{٢} − ٦ن − ٩ = ٠ فنحل المعادلة التربيعية ونجد ان ن = ٣ ± ٣ $\sqrt{٢}$

اما الحل ٣ − ٣ $\sqrt{٢}$ فيستبعد (لماذا ؟)
والجواب ان الحجر يصدم الارض بعد ٣ + ٣ $\sqrt{٢}$ من الثواني .

مثـال ٥ : وجدت شركة ان معامل الكلفة (بالدولارات) عند انتاج س وحدات من سلعة ما يعطي بالصيغة ٣٠ – ٠٢ , ٠ س . فاذا كانت كلفة انتاج وحدة واحدة ٣٥ دولارا فأوجد اقتران الكلفة وكلفة انتاج ١٠٠ وحدة .

الحـــل : اذا كان ك هو اقتران الكلفة ، ينتج من البند السابق ان معامل الكلفة هو سرعة تغير ك بالنسبة الى س . فيكون كَ (س) = ٣٠ – ٠٢,٠ س

فيكون ك (س) = ٣٠س – ٠١ , ٠ س^{٢} + جـ ، حيث جـ عدد ما

نعوض س = ١ ، ك (١) = ٣٥ فينتج ان ٣٥ = ٣٠ – ٠١ , ٠ + جـ

اي ان جـ = ٩٩ , ٤ ، ك (س) = ٣٠س – ٠١ , ٠ س^{٢} + ٩٩ , ٤

فيكون ك (١٠٠) = ٣٠٠٠ – ١٠٠ + ٩٩ , ٤ = ٩٩ , ٢٩٠ دولار

تمارينـــن :

أوجد الاصل الاشتقاقي العام للاقترانات المعرفة بالتمارين ١ – ١٤

١ . ق (س) = ٩س^{٢} – ٤س + ٣

٢ . ق (س) = ٤س^{٢} – ٨س + ١

٣ . ق (س) = ٢س^{٣} – س^{٢} + ٣ س – ٧

٤ . ق (س) = ١٠س^{٤} – ٦س^{٣} + ٥

٥ . $ق(س) = \frac{١}{س^{٣}} - \frac{٣}{س^{٢}}$

٦ $ق(س) = \left(س - \frac{١}{س} \right)^{٢}$

٧ . ق (س) = (٣ س – ١)^{٢}

٨ . ق (س) = (٢س – ٥) (٣س + ١)

٩ . $ق(س) = \frac{٨س - ٥}{\sqrt[٣]{س}}$

١٠ . $\text{ن}(\text{س}) = (٢\text{س}^{-٢} - \text{س} + ٣) / \sqrt{\text{س}}$

١١ . $\text{ن}(\text{س}) = \sqrt[٥]{٣٢\text{س}^{٤}}$ ١٢ . $\text{ن}(\text{س}) = \sqrt[٣]{٦٤\text{س}^{٥}}$

١٣ . $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س} - ١}$

١٤ . $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ٩\text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$

حل المعادلات التفاضلية في التمارين ١٥ – ١٨ ضمن الشروط المبينة في كل منها :

١٥ . $\text{ن}'(\text{س}) = ١٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ١$ ، $\text{ن}(١) = ٥$

١٦ . $\text{ن}'(\text{س}) = ٩\text{س}^{٢} + \text{س} - ٨$ ، $\text{ن}(-١) = ١$

١٧ . $\text{ن}''(\text{س}) = ٤\text{س} - ١$ ، $\text{ن}'(٢) = -٢$. $\text{ن}(١) = ٣$

١٨ . $\text{ن}''(\text{س}) = ٦\text{س}$. $\text{ن}'(٠) = ٢$ ، $\text{ن}(٠) = -١$ ، $\text{ن}(٠) = ٤$

١٩ . تتحرك نقطة على خط مستقيم ، فاذا كان ت (ن) = ٢ – ٦ ن فأوجد م (ن) علما بان ع (٠) = – ٥ ، م (٠) = ٤

٢٠ . حل التمرين ١٩ على فرض ان ت (ن) = ٣ ن^{٢} ، ع (٠) = ١٠ ، م (٠) = ٥

٢١ . اطلقت قذيفة من الارض رأسياً الى اعلى بسرعة ٦٠٠ قدم / ث فأوجد بعدها م (ن) عن الارض في الثانية ن واقصى ارتفاع تصل اليه ، اهمل مقاومة الهواء .

٢٣ . اطلقت قذيفة رأسيا الى اعلى من ارتفاع م. قدماً عن سطح الارض بسرعة ع. اقدام / ث . اثبت انه اذا اهملنا مقاومة الهواء يكون بعدها م (ن) عن سطح الارض في الثانية ن هو م (ن) = $-\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} + ع. ن + م. حيث جـ تسارع الجاذبية .

٢٤ . تتدحرج كرة على سطح مائل بتسارع ٢ قدم / ث^{٢} فاذا بدأت من السكون فكم تقطع في ن ثوان ؟ اي سرعة اولية تعطيها حتى تقطع ١٠٠ قدم في ٥ ثوان ؟

٢٥ . بدأت سيارة تتحرك بتسارع ثابت فقطعت ٥٠٠ قدم في ١٠ ثوان . كم كان تسارعها ؟

٢٦ . تتحرك سيارة بسرعة ٦٠ ميلا / س فبأي تسارع (سالب) تتحرك حتى تقف في مدة ٩ ثوان ؟

٢٧ . اذا كان معامل التكلفة في صنع س وحدات من سلعة ما هو ٠,٠١٥ س^{٢} − ٢٠ دولارا وكانت تكلفة صنع وحدة واحدة من هذه السلعة ٢٥ دولارا فأوجد اقتران التكلفة وتكلفة صنع ٥٠ وحدة .

٢٨ . اذا كان اقتران معامل التكلفة هو ٢ / (س + ٦)$^{\frac{١}{٣}}$ وكانت تكلفة صنع وحدتين هي ٢٠ دولارا فما اقتران التكلفة وتكلفة صنع ١٢٠ وحدة .

٢٩ . تقول احدى الشركات ان معامل الدخل عندها س^{٢} − ٦ س + ١٥ ، أوجد الدخل الكلي ومعامل الطلب .

٣٠ . حل تمرين ٢٩ على اعتبار ان معامل الدخل ٤ / (س + ٢)$^{\frac{٣}{٣}}$

١١ — تمارين مراجعـــة :

شفهيـــة :

عرف او ناقش كلا مما يأتي :

١ . الخط العمودي على المنحنى

٢ . القيمة العظمى والصغرى المحليتان للاقتران

٣ . القيمة العظمى والصغرى المطلقتان للاقتران

٤ . اعداد الاقتران الحاسمة

٥ . نظريـــة رول

٦ . نظرية القيمة الوسطى

٧ . اختبار المشتقة الاولى

٨ . القيم العظمى والصغرى المتطرفة للاقتران

٩ . التحدب والتقعر

١٠ . اختبارات التحدب والتقعر

١١ . نقطة الانعطاف

١٢ . اختبار المشتقة الثانية

١٣ . السرعة والتسارع في الحركة على خط مستقيم

١٤ . الاصل الاشتقاقي للاقتران

١٥ . قاعدة القوى للاصل الاشتقاقي

١٦ . المعادلة التفاضلية

كتابـــة :

١ . أوجد معادلة المماس والعمود لمنحنى المعادلة ٦ س^{٢} − ٢ س ص + ص^{٣} = ٩ في النقطة ن (٢ ، − ٣) .

٢ . أوجد معادلات المماسات لمنحنى المعادلة س^{٢} + ص^{٢} = ١ التي تمر بالنقطة ن (٢ ، ١)

في التمرينين ٣ ، ٤ المطلوب ايجاد الاحداثيات السينية للنقاط التي يكون فيها المماس افقيا او عموديا .

٣ . ص = (س^{٢} + س + ٢)$^{\frac{١}{٣}}$

٤ . س^{٢} − ٢ س ص + ص^{٢} − ٤ = ٠

٥ . اذا كان ق (س) = س^{٣} + س^{٢} + س + ١ فأوجد عددا في الفترة [٠ ، ٤] يحقق نتيجة نظرية القيمة الوسطى .

في التمارين ٦ − ٨ أوجد الذرى المحلية للاقتران ق باستعمال اختبار المشتقة الأولى . ناقش ثم ضع مخططاً للاقتران وبين تزايد الاقتران وتناقصه

٦ . ق (س) = − س^{٣} + ٤ س^{٢} − ٣ س

٧ . ق (س) = ١ / (١ + س^{٢})

٨ . ق (س) = (٤ − س^{٢}) س$^{\frac{١}{٣}}$

في التمارين ٩ − ١١ أوجد القمم المحلية للاقتران ق باختبار المشتقة الثانية صف تحدبه وتقعره وعين الاحداثيات السينية لنقط الانعطاف ثم خطط بيان الاقتران .

٩ . ق (س) = − س^{٣} + ٤ س^{٢} − ٣ س

١٠ . ق (س) = ١ / (١ + س^{٢})

١١. $\text{ب}(س) = ٤٠س^{٣} - س^{٦}$

١٢. اذا كان اقتران الموقع لنقطة تتحرك على خط مستقيم هو م (ن) = (ن^{٢} + ٣ن + ١) (ن^{٢} + ١) فأوجد سرعتها وتسارعها في اللحظة ن ثم صف حركتها في الفترة [−٢ ، ٢]

١٣. رمي حجر رأسيا الى اسفل بسرعة ٣٠ قدم /ث من ارتفاع ٩٠٠ قدم . أوجد بعده عن الارض بعد م ثوان . ما سرعته بعد ٥ ثوان ؟ متى يصل الى الارض ؟

في التمارين ١٤ − ١٨ أوجد الأصل الاشتقاقي العام للاقتران .

١٤. $\text{ب}(س) = (٨س^{٢} - ٤س + ٥) / س^{٤}$

١٥. $\text{ب}(س) = ٣س^{٥} + ٢س^{٣} - ٨$

١٦. $\text{ب}(س) = ١٠٠$

١٧. $\text{ب}(س) = س^{\frac{٣}{٥}} (٢س - \sqrt{س})$

١٨. $\text{ب}(س) = (٢س + ١)^{٣}$

١٩. حل المعادلة التفاضلية $\text{ب}(س) = س^{\frac{١}{٣}} - ٥$ اذا كان ب (١) = ٢ ، ب (١) = − ٨ .

٢٠. يريد رجل ان يبني سياجا حول حقل مستطيل وان يقسمه الى ثلاث قطع مستطيلة بسياجين يوازيان احد جوانبه . فما ابعاد الحقل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن علما بأن مجموع طول السياج ١٠٠٠ قدم .

٢١. أوجد ارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر مساحة جانبية ممكنة التي يمكن اقتطاعها من كرة نصف قطرها نق .

٢٢. سلك طوله ٥ أقدام قطع قطعتين جعلت احداهما دائرة والثانية مربعا فما طول كل من القطعتين اذا كان مجموع مساحتي الدائرة والمربع (١) اقل ما يمكن ؟ (٢) أكبر ما يمكن ؟

٢٣. طريق لسباق نصف الميل يحيط بميدان على شكل مستطيل في كل من طرفيه نصف دائرة . ما الابعاد التي تجعل مساحة المستطيل اقل ما يمكن ؟

٢٤. مستطيل احد رؤوسه على محور س والثاني على محور ص والثالث على نقطة الاصل والرابع على منحنى ص = ٤ − س^{٢} . أوجد ابعاده علما بان مساحته أكبر ما يمكن .

٢٥ . صهريج ماء على هيئة مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ قدما ونصف قطر قاعدته ٤ اقدام ورأسه الى اسفل فاذا كان الماء ينصب من الصهريج بسرعة ١٠ قدم^{٣} /د فبأي سرعة ينخفض سطح الماء فيه عندما يكون عمقه ٥ أقدام ؟

٢٦ . حوض افقي طوله ١٠ اقدام وكل من طرفيه على هيئة شبه منحرف متساوي الساقين قاعدته السفلية ٣ اقدام والعلوية ٥ أقدام وارتفاعه قدمان . فاذا كان الماء يرتفع في الحوض بسرعة $\frac{١}{٢}$ انش /د عندما كان عمقه قدما واحدا فبأي سرعة ينصب الماء في الحوض ؟

٢٧ . سيارتان تسيران على طريقين مستقيمين متعامدين وتقربان من نقطة التقاطع فاذا كانت احداهما أ تسير بسرعة ٢٠ ميلا / س والثانية ب بسرعة ٤٠ ميلا / س وفي لحظة ما كانت أ على بعد $\frac{١}{٤}$ ميل من التقاطع وكانت ب على بعد $\frac{١}{٢}$ ميل فبأي سرعة تقترب السيارتان احداهما من الاخرى في تلك اللحظة ؟

٢٨ . تسير النقطة ن (س ، ص) على منحنى ص^{٢} = ٢ س^{٣} بحيث يكون

$\frac{د\ ص}{د\ ن}$ = س ، حيث ن هو الزمن . أوجد $\frac{د\ س}{د\ ن}$ عند النقطة (٢ ، ٤) .

٢٩ . ينص قانون بويل على ان ض ح = حـ حيث ض هو الضغط ، ج الحجم ، جـ عدد ثابت . أوجد قانونا يعطي سرعة تغير ض بالنسبة الى ح

٣٠ . جسر يمر فوق نهر معامدا لاتجاه النهر ويعلو عن سطحه مسافة ٢٠ قدما . ويمر على الجسر قطار يسير بسرعة ٦٠ ميلا / س ففي لحظة ما كان في القطار شخص موقعه في منتصف الجسر راسيا فوق شخص في قارب يمخر النهر بسرعة ٢٠ ميلا /س فبأي سرعة يبتعد الرجلان احدهما عن الاخر بعد تلك اللحظة بعشر ثوان ؟

الفصل الخامس

التكامل المحـدود

جرت العادة على اعتبار علم التفاضل والتكامل مكونا من جزأين رئيسيين ، حساب التفاضل وحساب التكامل . اما حساب التفاضل فيعتمد على الاشتقاق . وفي هذا الفصل سنعرف المبدأ الذي هو اساس حساب التكامل اي التكامل المحدود ، وكذلك سنناقش واحدة من اهم النتائج وهي « النظرية الاساسية في التفاضل والتكامل » . هذه النظرية تبين ان التفاضل والتكامل ليسا متباعدين بل على العكس هما مترابطان جدا .

١ — المساحـــة :—

في بداية الفصل الثالث تناولنا بعض الامثلة الهندسية والفيزيائية التي قادتنا بشكل طبيعي الى التعريف الشكلي للمشتقة ، وقد تناولت هذه الامثلة ميل مماس المنحنى وسرعة الجسم المتحرك على منحنى . وبنفس الاسلوب وقبل البدء بتعريف التكامل المحدود سيكون من المفيد ان نبحث في مساحة منطقة معينة في المستوى . ومن الممكن ايضا البحث في امثلة فيزيائية ولكن نفضل تأجيلها الى الفصل القادم ، ومن المهم ان نتذكر ان المناقشة في هذا البند لا يجب اعتبارها تعريفا للتكامل المحدود ، ولكنها ستساعدنا حتما في البند الثاني للتوصل الى التعريف ، بنفس الاسلوب الذي استخدم فيه ميل المماس للتوصل الى تعريف المشتقة .

من السهل ان نحسب مساحة منطقة في المستوى محدودة باضلاع مستقيمة . مثلاً : مساحة المستطيل تساوي الطول × العرض ، ومساحة المثلث تساوي نصف القاعدة × الارتفاع . ولأيجاد مساحة اي ضلع يمكن تقسيمه الى مثلثات . ولكن لكي نحسب مساحة المناطق المعقدة التي تحدها منحنيات اقترانات معينة فانه لابد من استعمال عملية النهايات وطرق التفاضل والتكامل .

مثلاً دعنا نعتبر المنطقة في مستوى الاحداثيات المحدودة بمحور السينات ومستقيمين يعامدانه في أ ، ب ومنحنى اقتران ما ، ق ، متصل وغير سالب على الفترة المغلقة [أ ، ب] ، كما في الشكل ٥ – ١ . فبما ان ق (س) ≥ صفراً لجميع قيم س في [أ ، ب] فانه لا يوجد اي جزء من المنحنى تحت محور السينات . وللتسهيل ستشير مـ الى المنطقة التي تحت ق من أ الى ب . وهدفنا الان ان نعرف مساحة مـ . لنبدأ بتجزئة الفترة [أ ، ب] الى ن من الفترات المتساوية ، على فرض ان ن عدد طبيعي موجب .

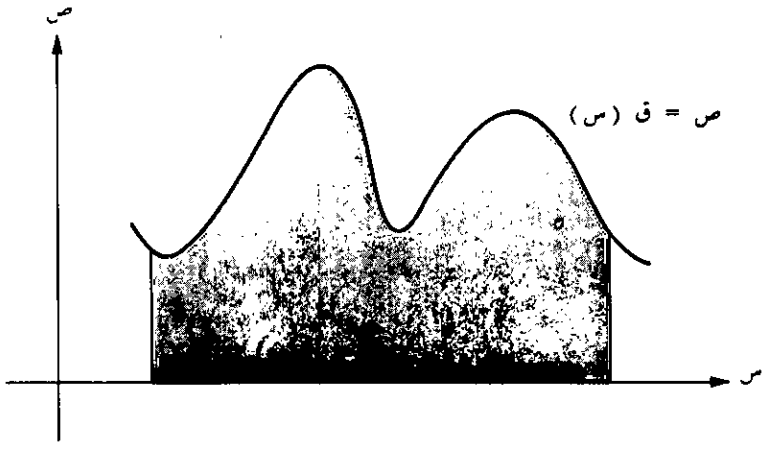
فيكون طول فترة يساوي $\frac{ب - أ}{ن}$ ويمكننا تحقيق ذلك باختيار الاعداد

$س_{.}$ ، $س_{١}$ ، ... ، $س_{ن}$ حيث ان $س_{.} = أ$ ، $س_{ن} = ب$ وان $س_{ر} - س_{ر-١} = \frac{ب - أ}{ن}$ (انظر الشكل ٥ – ٢) . فاذا رمزنا للطول $\frac{ب - أ}{ن}$ بالرمز $\Delta س$

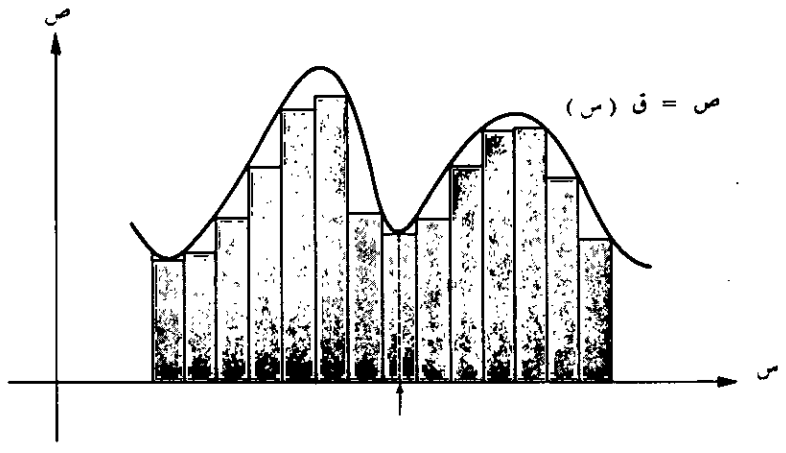
فان $س_{ر} = س_{ى-١} + \Delta س$ ، لذلك :

(٥ – ١) $س_{.} = أ + \Delta س$ ، $س_{٢} = أ + ٢ \Delta س$ ، ... $س_{ر} = أ + ر \Delta س$ ، ... ، $س_{ن} = أ + ن \Delta س = ب$. وبما ان ق متصل لجميع الفترات $[س_{ر-١} ، س_{ر}]$ فان ق تأخذ قيمة صغرى في نقطة ما ء في $[س_{ر-١} ، س_{ر}]$ ، وكما هو واضح في الشكل (٥ – ٢) فان بالامكان تكوين مستطيل في كل فترة $[س_{ر-١} ، س_{ر}]$ احد اضلاعه يساوي $س_{ر} - س_{ر-١}$ وضلعه الآخر هو القيمة الصغرى للاقتران في هذه الفترة ، اي ق (ء$_{ر}$) . ومساحة هذا

Δ س $\times$ ق ($ى_ر$) . ومحيط المضلع المكون من اتحاد هذه المستطيلات يسمى مضلع المستطيلات الداخلي وهو الناشيء من تقسيم [أ ، ب] الى ن من الفترات الجزئية . ومساحة هذا المضلع = ق ($ى_1$) Δ س + ق ($ى_2$) . Δ س + ... + ق ($ى_ن$) Δ س وباستعمال رموز المجموع يمكن كتابة المجموع السابق بالصيغة



الشكل ٥ — ١



الشكل ٥ — ٢

$$\sum_{ر=1}^{ن} ق(ء_ر) \cdot \Delta س \quad (٥-٢)$$

، والرمز Σ هو مقلوب الحرف اليوناني

(سيجما) ويستعمل لتمثيل المجموع ، واما ر فيسمى متغير المجموع . وهكذا فان (٥ – ٢) تعني ان الحدود التي هي على صيغة ق ($ء_ر$) Δ س تجمع عن طريق اخذ المتغير ر القيم من ١ الى ن . ويمكن استعمال اي رمز آخر بدلا من ر فمثلا

$$\sum_{م=1}^{ن} ق(ء_م) \Delta س$$

هو نفس المجموع (٥ – ٢) ويمكن تبيان ذلك بكتابة كل من المجموعين تفصيلا .

لنعد الى الشكل (٥ – ٢) : من الملاحظ انه اذا زادت قيمة ن او بمعنى اخر اذا اقتربت قيمة Δ س من الصفر ، فان مساحة هذه المستطيلات الصغيرة تقترب من المساحة المطلوبة ، اي مساحة المنطقة مـ ، وبعبارة بسيطة اذا وجد عدد ل حيث ان ل لها خاصية ان المجموع (٥ – ٢) يقترب شيئا فشيئا من ل عندما تقترب Δ س من الصفر عندها نسمي العدد ل مساحة مـ ونكتب

$$ل = \lim_{\Delta س \to 0} \sum_{ر=1}^{ن} ق(ء_ر) \Delta س \quad (٥-٣)$$

ان مفهوم نهاية المجموع ليس هو نفس مفهوم نهاية الاقتران التي رأيناها في الفصل الثاني .

ولكي نتخلص من الجملة الغامضة (تقترب شيئا فشيئا) ومن اجل ان نحصل على تقريب واف للصيغة (٥ – ٣) يحدد مفهومها ، لنأخذ وجهة نظر اخرى تختلف اختلافا بسيطا عما سبق .

نفرض ان ل تمثل مساحة المنطقة مـ فيكون الفرق

$$ل - \sum_{ر=1}^{ن} ق(ء_ر) \Delta س \quad (٥-٤)$$

هي المساحة غير المظللة في الشكل (٥ – ٢) والمحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) ومضلع المستطيلات الداخلي . وهذا الفرق يمكن اعتباره الخطأ الحاصل عند اعتبار مساحة المضلع مساوية تقريبا لقيمة ل ولو كان عندنا التعريف الدقيق للمساحة لكان بامكاننا جعل الفرق (٥ – ٤) صغيرا بالقدر الذي نريده ، باختيار Δ س صغيرة بما فيه الكفاية . وهذا هو الحافز للتعريف التالي ، حيث نستعمل الرموز نفسها المستعملة فيما سبق .

(٥–٥) تعريف : اذا كان ل عددا حقيقيا فان الرمز

$$\text{ل} = \text{نهـا}_{\Delta س \to ٠} \sum_{ر=١}^{ن} \text{ق} (ع_ر) \Delta س$$

تعني انه لاي $\varepsilon > ٠$

يوجد $\delta > ٠$ بحيث ان $\left| \text{ل} - \sum_{ر=١}^{ن} \text{ق} (ع_ر) \Delta س \right| < \varepsilon$ عندما

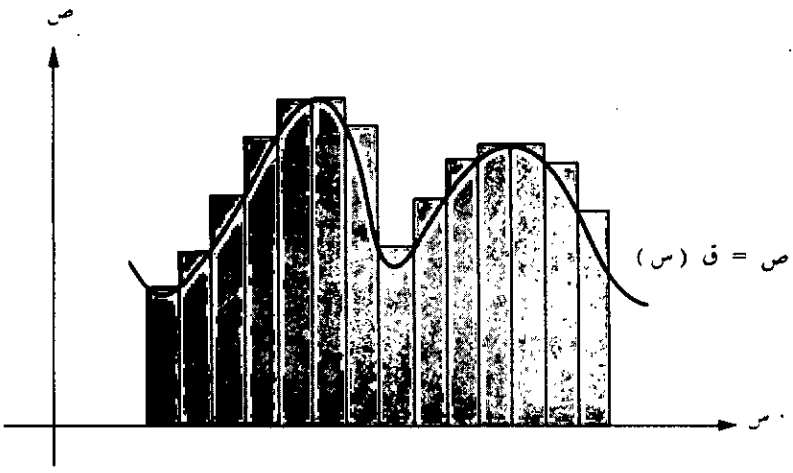
تكون $٠ < \Delta س < \delta$. وسنعتبر ε في التعريف السابق موجبة متناهية في الصغر

مثلاً على ذلك نفرض ان ل هي النهاية المشار اليها سابقا وان $\varepsilon = ١٠^{-٩}$ فان (٥ – ٥) ينص على انه باستعمال مستطيلات صغيرة الى حد كاف فان بالامكان جعل الفرق بين ل ومساحة مضلع المستطيلات الداخلي اقل من جزء من بليون من وحدة المساحة . وكذلك اذا كانت $\varepsilon = ١٠^{-١٢}$ فانه بالامكان جعل هذا الفرق اقل من جزء من تريليون من وحدة المساحة .. وهكذا .

اذا كان ق (س) متصلا على الفترة [أ ، ب] فان ل موجودة . هذا مثبت في كتب ذات مستوى متقدم . سنسمي ل المساحة تحت المنحنى ق (س) من أ الى ب . والمساحة ل يمكن الحصول عليها عن طريق مضلع المستطيلات الخارجي كما هو موضح في الشكل (٥ – ٣) . في هذه الحالة نختار نقطة ع في الفترة [س $_{ر-١}$ ، س $_ر$] بحيث ق (ع $_ر$) هي القيمة العظمى للاقتران ق في هذه الفترة .

وعلى هذا فان مساحة مضلع المستطيلات الخارجي هي

$$\sum_{ر=١}^{ن} \text{ق}(ع_ر)\ \Delta\ س \quad (٥-٦)$$



الشكل ٥ — ٣

ونهاية هذا المقدار عندما Δ س ← . تعرف كما هو الحال في التعريف

$$\text{(٥ – ٥)}\ \text{ولكن التغيير الوحيد هو اننا نستعمل}\quad \sum_{ر=١}^{ن} \text{ق}(ع_ر)\Delta\ س$$

– ل في التعريف لاننا نريد ان يكون الفرق غير سالب ، ومن الممكن اثبات اننا سنحصل على نفس العدد ل في الحالتين .

ومن المستحسن إن نضع بعض الملاحظات الاضافية على اشارة المجموع قبل ان نأخذ مثالا :

نفرض ان { م١ ، م٢ ، ... ، من } مجموعة من الاعداد . فحسب المعادلة

$$\text{(٥ – ٢)}\ \text{نكتب}\quad \sum_{ر=١}^{ن} م_ر = م_١ + م_٢ + ... + م_ن$$

اما اذا كانت م ر متساوية لجميع قيم ر ولنفرض ان م ر = جـ حيث جـ عدد ثابت فان

$$\sum_{ر=1}^{ن} م_ر = \sum_{ر=1}^{ن} جـ = جـ + جـ + \cdots + جـ = ن\ جـ$$

وبأخذ هذا بعين الاعتبار يمكن وضع القانون التالي

$$\sum_{ر=1}^{ن} جـ = ن\ جـ \qquad (٧-٥)$$

ليس من الضروري ان يبدأ متغير المجموع من ١ ، مثال على ذلك

$$\sum_{ر=٤}^{٨} م_ر = م_٤ + م_٥ + م_٦ + م_٧ + م_٨ .$$

وان الصيغ التالية ستكون مفيدة في تطبيقات قادمة

$$\sum_{ر=1}^{ن} ر = ١ + ٢ + ٣ + \cdots + ن = \frac{ن\ (ن + ١)}{٢} \qquad (٨-٥)$$

$$\sum_{ر=1}^{ن} ر^٢ = ١^٢ + ٢^٢ + \cdots + ن^٢ = \frac{ن\ (ن + ١)\ (٢ن + ١)}{٦} . \qquad (٩-٥)$$

$$\sum_{ر=1}^{ن} ر^٣ = ١^٣ + ٢^٣ + \cdots + ن^٣ = \frac{[ن\ (ن + ١)\ ]^٢}{٢} \qquad (١٠-٥)$$

ويمكن برهنة هذه الصيغ بطريقة الاستنتاج الرياضي (راجع الملحق ١) . وسيجد القاريء انه من المفيد التأكد من صحة الصيغ السابقة لقيم مختلفة للرمز ن . والنظرية التالية مهمة للحسابات التي تدخل فيها المجاميع

(٥-١١) نظريـــة : اذا كان ن اي عدد صحيح موجب وكانت { م١ ، م٢ ، ... ، مـن } ، { ب١ ، ب٢ ، ... ، بـن } مجموعتين من الاعداد فان

(١) $\sum_{ر=١}^{ن} (أ_ر + ب_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} أ_ر + \sum_{ر=١}^{ن} ب_ر$

(٢) $\sum_{ر=١}^{ن} جـ أ_ر = جـ \sum_{ر=١}^{ن} أ_ر$ ، حيث جـ اي عدد ثابت .

(٣) $\sum_{ر=١}^{ن} (أ_ر - ب_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} أ_ر - \sum_{ر=١}^{ن} ب_ر$

البرهـــان :

(١) $\sum_{ر=١}^{ن} (أ_ر + ب_ر) = (أ_١ + ب_١)(أ_٢ + ب_٢) + ...$

$(أ_ن + ب_ن)$ ،

والحدود التي على اليسار يمكن ترتيبها للحصول على

$$\sum_{ر=١}^{ن} (أ_ر + ب_ر) = أ_١ + أ_٢ + ... + أ_ن) + (ب_١ + ب_٢ + ... + ب_ن)$$

وباستعمال اشارة المجموع للطرف الايسر نحصل على برهان (١) .

(٢) $\sum_{ر=١}^{ن} جـ أ_ر = جـ أ_١ + جـ أ_٢ + ... + جـ أ_ن =$

$= جـ (أ_١ + أ_٢ + ... + أ_ن) = جـ \sum_{ر=١}^{ن} أ_ر$

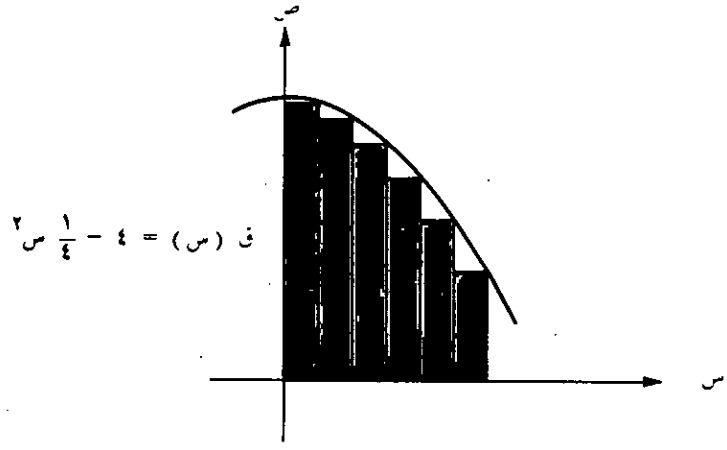
وبرهان (٣) متروك للطالب .

والمثال التالي يوضح كيف يمكن استعمال خواص المجموع مع (٥ – ٥) لايجاد مساحة منطقة معينة في المستوى .

مثـــال :ـــ اذا كان الاقتران ق (س) معرفا كما يلي :

ق (س) = ٤ − $\frac{١}{٤}$ س^{٢} ، أوجد المساحة تحت منحنى الاقتران من الصفر الى ٣ .

الحـــل : المنطقة مبينة في الشكل (٥ − ٤)



الشكل ٥ ـــ ٤

قسمت الفترة [٠ ، ٣] الى ن من الفترات الجزئية المتساوية ، وبذلك فان المسافة Δ س تساوي $\frac{٣}{ن}$ ، وباستعمال (٥ − ١) ، حيث أ = ٠ ، ب = ٣ فان س$_{٠}$ = ٠ ، س$_{١}$ = Δ س ، س$_{٢}$ = ٢ Δ س ، ٠٠٠ ، س$_{ن}$ = ن Δ س = ٣ وبتعويض قيمة Δ س نحصل على المقدار س$_{ر}$ = ر ($\frac{٣}{ن}$) ، وبما ان ق (س) متناقص على [٠ ، ٣] فان ء$_{ر}$ حيث تأخذ ق قيمتها الصغرى في الفترة [س$_{ر-١}$ ، س$_{ر}$] هي دائماً اكبر س في الفترة اي ان ء$_{ر}$ = س$_{ر}$ = $\frac{٣}{ن}$ ر. وبما ان ق (ء$_{ر}$) ق ($\frac{٣}{ن}$ ر) = ٤ − $\frac{١}{٤}$ ($\frac{٣}{ن}$ ر)^{٢} = ٤ − $\frac{٩ ر^{٢}}{٤ ن^{٢}}$ ، فالمجموع (٥ − ٢) يمكن ان يكتب على شكل :

$$\sum_{ر=١}^{ن} ق (ء_{ر}) \Delta س = \sum_{ر=١}^{ن} (٤ - \frac{٩ ر^{٢}}{٤ ن^{٣}}) \times \frac{٣}{ن} =$$

$$\sum_{ر=1}^{ن} \quad \frac{١٢}{ن} - \frac{٢٧\ ر^{٢}}{٤\ ن^{٣}}$$

وباستعمال خصائص المجاميع يختصر هذا الى

$$\sum_{ر=1}^{ن} = \frac{١٢}{ن} - \sum_{ر=1}^{ن} \cdot \frac{٢٧\ ر^{٢}}{٤\ ن^{٣}}$$

$$= \frac{١٢}{ن}\ ن - \frac{٢٧}{٤\ ن^{٣}} \sum_{ر=1}^{ن} ر^{٢}$$

وباستعمال (٥ – ٩) نحصل على

$$\sum_{ر=1}^{ن} ق\ (ى_{ر})\ \Delta\ س = ١٢ - \frac{٢٧}{٤\ ن^{٣}} \times \frac{ن\ (ن+١)\ (٢ن+١)}{٦}$$

$$= ١٢ - \frac{٩}{٨\ ن^{٣}}\ [٢ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ن]$$

ولكي نجد المساحة المطلوبة يجب ان نأخذ Δ س قريبة من الصفر. بما ان

$\Delta\ س = \frac{ب - ا}{ن}$ فانه يمكن تحقيق ذلك اذا ازدادت قيمة ن بدون حد ،

ومع مناقشتنا لموضوع النهايات في اللانهاية في البند ٦ من الفصل الثاني كان على اساس ان س متغير حقيقي ، فان مناقشة شبيهة يمكن اجراؤها عندما يكون المتغير عددا صحيحا . وبفرض ان هذا صحيح وبفرض انه يمكن ان تكتب ن $\to \infty$ بدل Δ س $\to$ ٠ فاننا نحصل على :

$$\text{نهـــا}_{\Delta\ س \to ٠} \sum ق\ (ى_{ر})\ \Delta\ س$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\left(٢ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ن \right) \frac{٩}{٨ن^{٣}} - ١٢ \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} - ١٢$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{٩}{٨} \left(\frac{٢ن^{٣}}{ن^{٣}} + \frac{٣ن^{٢}}{ن^{٣}} + \frac{ن}{ن^{٣}} \right)$$

$$= - ١٢ + \lim_{n \to \infty} \frac{٩}{٨} \left(٢ + \frac{٣}{ن} + \frac{١}{ن^{٢}} \right)$$

$$= - ١٢ + ٢ \times \frac{٩}{٨} = \frac{٣٩}{٤}$$

وبسبب الفروض التي سلمنا بصحتها فان الحل يبقى غير مكتمل والواقع ان احد الاسباب لوضع التكامل المحدود هو اعطاؤنا القدرة على حل مسائل من هذا النوع بطريقة مبسطة ودقيقة .

ان المساحة في المثال السابق يمكن ايجادها باستعمال مضلع المستطيلات الخارجي ، في هذه الحالة تختار في كل فترة جزئية [س$_{ر-١}$ ، س$_{ر}$] العدد ع$_{ر}$ بحيث ان ع$_{ر}$ = (ر − ١) $\frac{٣}{ن}$ حيث ان ق ياخذ قيمته العظمى عند هذه النقطة . وبقية الحل مشابه لما سبق .

تمارين :

في التمارين من ١ − ١٠ أوجد العدد المطلوب

(١) $\sum_{ر=١}^{٥}$ (٣ ر − ١٠) (٢) $\sum_{ر=١}^{٦}$ (٩ − ٢ ر)

(٣) $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^{٢} + ١)$ (٤) $\sum_{ر=١}^{١٠} [١ + (-١)^{ر}]$

(٥) $\sum_{ر=٠}^{٥} ر\,(ر - ١)$ (٦) $\sum_{ر=١}^{٤} (ر - ٢)\,(ر - ٣)$

(٧) $\sum_{ر=٣}^{٦} \frac{(ر + ١)}{(ر - ٢)}$ (٨) $\sum_{ر=١}^{٦} \frac{٥}{ر}$

(٩) $\sum_{ر=١}^{٥} ١٠$ (١٠) $\sum_{ر=١}^{١٠٠٠} ٢$

(١١) اثبت (٣) في النظرية (٥ – ١١)

(١٢) عمم النظرية (٥ – ١١) لتشمل $\sum_{ر=١}^{ن} (أ_ر + ب_ر + جـ_ر)$

(١٣) أوجد $\sum_{ر=١}^{ن} (ر^{٢} + ٣ ر + ٥)$، (اكتب المجموع بالصيغة

$\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} + ٣ \sum_{ر=١}^{ن} ر + \sum_{ر=١}^{ن} ٥$) ثم استعمل

(٥ – ٨) – (٥ – ١٠)

(١٤) أوجد $\sum_{ر=١}^{ن} (٣ ر^{٢} - ٢ ر + ١)$

(١٥) أوجد $\sum_{ر=١}^{ن} (٢ ر - ٣)^{٢}$

(١٦) أوجد $\sum_{ر=١}^{٥} (ر^٣ + ٢ ر^٢ - ر + ٤)$

في التمارين ١٧ – ٢٠ أوجد المساحة تحت منحنى الاقتران ق من أ الى ب

(١٧) ق (س) = ٩ – س^٢ أ = ٠ ، ب = ٣

(١٨) ق (س) = ٤س^٢ + ٣س + ٢ أ = ١ ، ب = ٥

(١٩) ق (س) = س^٣ + ٣ أ = ١ ، ب = ٢

(٢٠) ق (س) = ٤س – س^٣ أ = ٠ ، ب = ٢

٢ — تعريف التكامل المحدود :

ان عمليات نهايات كالتي استعملناها في البند السابق لايجاد المساحة يتكرر ظهورها في الرياضيات وتطبيقاتها ، والحالات التي تحدث تقودنا عادة الى نهايات كالتالية :

(٥–١٢) $\text{نهـا} \sum_{ر=١}^{ن} ق(جـ_ر) \Delta س$

وفي التعريف (٥ – ٥) حالة خاصة من هذا النوع . اما الحالة العامة ففيها اختلافات كثيرة وهامة عما عملناه في المساحات . وفي نقاشنا للمساحات في البند السابق افترضنا ما يلي :

١ . ق (س) متصل في الفترة [أ ، ب] .

٢ . ق (س) ≥ صفراً لجميع قيم س في [أ ، ب]

٣ . جميع الفترات الجزئية [س$_{ر-١}$ ، س$_ر$] التي وجدت بتقسيم [أ ، ب] ، لها نفس الاطوال Δ س .

٤ . الاعداد جـ$_ر$ تختار بحيث ان ق (جـ$_ر$) يأخذ القيمة الصغرى (او العظمى) للاقتران ق على [س$_{ر-١}$ ، س$_ر$] .

هذه الشروط الاربعة لا تتحقق دائما في المسائل التي تتطلب طرقا مشابهة لتلك المستعملة في ايجاد المساحة . ولهذا السبب فمن الضروري تعميم النهاية (٥ – ١٢) لتشمل الحالات التالية :—

(١) ق (س) قد يكون غير متصل على نقاط ما في [أ ، ب]

(٢) ق (س) قد يكون اقل من الصفر على نقاط ما في [أ ، ب]

(٣) العدد جـ$_ر$ يمكن ان يكون اي عدد في [س$_{ر-١}$ ، س$_ر$]

(٤) اطوال الفترات الجزئية [س$_{ر-١}$ ، س$_ر$] قد لا تكون متساوية

وما نحصل عليه بهذه الطريقة لا يعطي بالضرورة مساحة منطقة ما ، ولكن يمكن تطبيقه لايجاد المساحات .

ولنبدأ الآن ببعض المصطلحات والرموز

التجزئة ج للفترة [أ ، ب] هي اي تقسيم للفترة [أ ، ب] الى فترات جزئية [س ، س$_١$] ، [س$_١$ ، س$_٢$] ، ... [س$_{ن-١}$ ، س$_ن$] ، حيث ن اي عدد صحيح موجب ، س$_ر$ اعداد حقيقية لها الخاصية التالية : أ = س .

س$_١$ < س$_٢$ < ... < س$_ن$ = ب ، طول الفترة الجزئية [س$_{ر-١}$ ، س$_ر$] يرمز له بالرمز Δ س$_ر$ وأكبر الاعداد Δ س$_١$ ، Δ س$_٢$ ، ... ، Δ س$_ن$ يسمى مقياس التجزئة ج ويرمز له بالرمز || ج || . والمبدأ التالي هو الاساس لتعريف التكامل المحدود ، وقد سمي باسم الرياضي ج . ريمان (١٨٢٦ - ١٨٦٦) .

(٥ - ١٣) تعريف مجموع ريمان

اذا كان ق (س) معرفا على الفترة المغلقة [أ ، ب] وكانت ج تجزئة لهذه الفترة فان مجموع ريمان للاقتران ق على هذه التجزئة هو اي تعبير م$_ج$ على الشكل

$$م_ج = \sum_{ر=١}^{ن} ق(جـ_ر) \Delta س_ر$$

حيث جـ$_ر$ في [س$_{ر-١}$ ، س$_ر$]

لكل قيم ر = ١ ، ... ، ن .

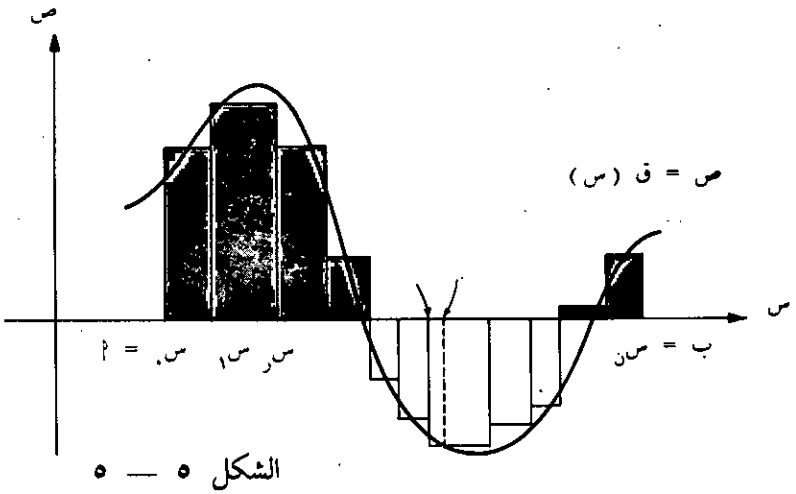
والمجاميع الظاهرة في (٥ - ٢) ، (٥ - ٦) وهي التي تمثل مساحة المستطيلات هي حالات خاصة لمجاميع ريمان . وبصورة عامة بما ان ق (س) قد يأخذ قيما سالبة فان بعض حدود م$_ج$ قد تكون سالبة وبالتالي فان م$_ج$ لا تمثل

دائماً مجموع مساحات المستطيلات . وعلى اي حال فانه بالامكان تفسير المجاميع هندسيا كالاتي :—

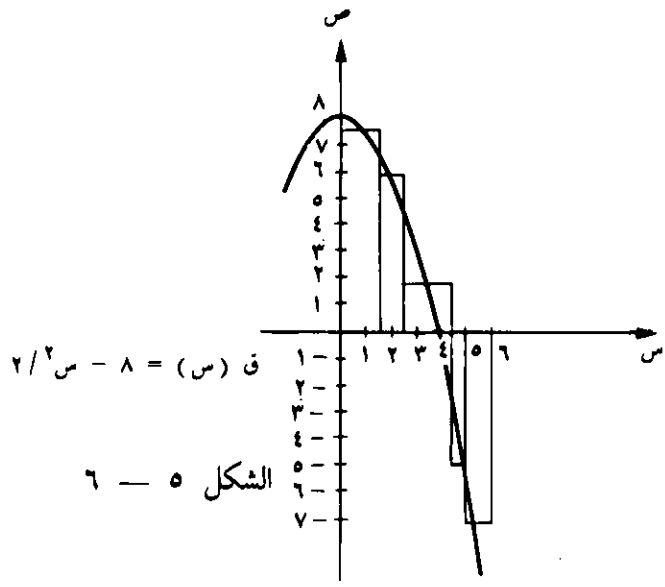
اذا كانت م$_{ج}$ معرفة كما في (٥ – ١٣) فانه لكل فترة جزئية [س$_{ر-١}$ ، س$_{ر}$] يمكن ان نرسم المستقيم الافقي المار بالنقطة (جـ$_{ر}$ ، ق (جـ$_{ر}$)) وبذلك نحصل على مجموعة من المستطيلات . واذا كان ق (جـ$_{ر}$) موجبا فان المستطيلات تقع فوق محور السينات وهي المظللة في الشكل ٥ – ٥ . ويكون حاصل ضرب ق (جـ$_{ر}$)Δ س$_{ر}$ هو مساحة هذا المستطيل . واذا كان ق (جـ$_{ر}$) < ٠ فان المستطيلات تقع تحت محور السينات وهي غير المظللة في الشكل ٥ – ٥ . في هذه الحالة فان حاصل الضرب ق (جـ$_{ر}$)Δ س$_{ر}$ هو القيمة السالبة لمساحة المستطيل . وبهذا فان م$_{ج}$ يمثل مساحة المستطيلات الموجودة فوق محور السينات مطروحا منها مساحة المستطيلات الموجودة تحت محور السينات والمثال العددي التالي يوضح هذه الملاحظات .

مثـــال :

اذا كان ق (س) = ٨ – $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ وكانت ج هي التجزئة على الفترة [٠ ، ٦] المكونة من خمس فترات جزئية كما يلي : س$_{٠}$ = صفراً ، س$_{١}$ = ١,٥ ، س$_{٢}$ = ٢,٥ ، س$_{٣}$ = ٤,٥ ، س$_{٤}$ = ٥ ، س$_{٥}$ = ٦ . فأوجد مقياس التجزئة والمجموع م$_{ج}$ اذا كانت جـ$_{١}$ = ١ ، جـ$_{٢}$ = ٢ ، جـ$_{٣}$ = ٥ و٣ ، جـ$_{٤}$ = ٥ ، جـ$_{٥}$ = ٥,٥ .



الشكل ٥ — ٥



الشكل ٥ — ٦

الحـــل :

الشكل (٥ – ٦) يبين منحنى الاقتران ق (س) ويبدو في الشكل النقاط س$_ر$ على محور السينات والمستطيلات التي اطوال اضلاعها | ق (جـ$_ر$) | لقيم ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، Δ س$_١$ = ١,٥ ، Δ س$_٢$ = ١ ، Δ س$_٣$ = ٢ ، Δ س$_٤$ = ٠,٥ ، Δ س$_٥$ = ١ . ولذا فان $\|ج\|$ = Δ س$_٣$ = ٢ ، م$_ج$ = ق (جـ$_١$) Δ س$_١$ + ق (جـ$_٢$) Δ س$_٢$ + ق (جـ$_٣$) Δ س$_٣$ + ق (جـ$_٤$) Δ س$_٤$ + ق (جـ$_٥$) Δ س$_٥$ = (١) (١,٥) + (٢) (١) + (٣,٥) (٢) + (٥) (١,٥) + (٥ي) (١) = (٧,٥) (١,٥) + (٦) (١) + (١,٨٧٥) (٢) + (− ٤,٥) (٠,٥) + (− ٧,١٢٥) (١) = ١١,٦٢٥ .

وفي الصفحات القادمة قد لا يعين عدد الفترات الجزئية ن في التجزئة . وفي هذه الحالة فان مجموع ريمان (٥ – ١٣) يكتب على النحو التالي :

وفي الصفحات القادمة قد لا يعين عدد الفترات الجزئية ن في التجزئة . وفي هذه الحالة فان مجموع ريمان (٥ – ١٣) يكتب على النحو التالي :

(٥–١٤) م$_ج$ = $\sum$ ق (جـ$_ر$) Δ س$_ر$ ، ويكون من المفهوم ان الحدود التي على صورة ق (جـ$_ر$) Δ س$_ر$ تجمع لجميع الفترات الجزئية [س$_{ر-١}$ ، س$_ر$] للتجزئة ج .

وبطريقة مشابهة لتلك التي استعملت في (٥ – ٥) سنعرف الان ماذا تعني

$$\text{نهـا}_{\|ج\| \to 0} \sum_{ر} و\,(\text{جـ}_ر)\,\Delta\,\text{س}_ر = \text{ت}\ ؛\ \text{حيث ت عدد}$$

حقيقي . ومعنى ذلك انه اذا اقترب المقياس $\|ج\|$ للتجزئة ج من الصفر فان اي م ج لهذه التجزئة يقترب من ت .

(٥–١٥) تعريف نهاية المجموع

اذا كان و (س) معرفا على الفترة المغلقة [أ ، ب] وكان ت اي عدد حقيقي فان التعبير $\text{نهـا}_{\|ج\| \to 0} \sum_{ر} \text{ق}\,(\text{جـ}_ر)\,\Delta\,\text{س}_ر = \text{ت}$ يعني انه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ حيث انه عندما تكون ج اي تجزئة للفترة [أ ، ب] وتكون $\|ج\| < \delta$ فان $|\sum_{ر} \text{ق}\,(\text{جـ}_ر)\,\Delta\,\text{س} - \text{ت}| < \varepsilon$ لجميع قيم $\text{جـ}_ر$ في [$\text{س}_{ر-1}$ ، $\text{س}_ر$] للتجزئة ج . والعدد ت يسمى نهاية المجموع .

لاحظ انه لكل قيمة $\delta > 0$ يوجد عدد لا نهائي من التجزئات ج بحيث ان $\|ج\| < \delta$ ، وايضا فانه لاي تجزئة من هذه التجزئات ج يوجد عدد لا نهائي من الطرق لاختيار الاعداد $\text{جـ}_ر$ في [$\text{س}_{ر-1}$ ، $\text{س}_ر$] .

ولذلك فانه يوجد عدد لا نهائي من مجاميع ريمان المختلفة التي ترتبط بالتجزئة ج .

وعلى العموم فانه ان وجدت النهاية ت فانه لاي $\varepsilon > 0$ كل مجموع من مجاميع ريمان هذه يكون الفرق بينه وبين ت لايزيد عن ε وذلك باختيار مقياس التجزئة صغيرا صغرا كافيا .

ومع ان (٥ – ١٥) تختلف عن تعريف نهاية الاقتران فان بامكاننا استعمال برهان شبيه بذلك المعطى في الفصل الثاني لاثبات انه اذا وجدت ت تكون وحيدة .

اما الان فسنعرف التكامل المحدود .

(٥-١٦) تعريف التكامل المحدود :

اذا كان ق (س) معرفا على الفترة المغلقة [أ ، ب] ، فان التكامل المحدود للاقتران ق (س) من أ الى ب ، ونرمز له بالرمز

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س ، يعطي بالعلاقة :ـــ

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د\,س = \lim_{\|ج\| \to 0} \sum_{ر} ق(جـ_ر)\,\Delta س_ر$$

وذلك بفرض ان النهاية موجودة .

واذا كان التكامل المحدود للاقتران ق من أ الى ب موجودا ، فانه يقال بان ق قابل للتكامل او تكاملي على الفترة [أ ، ب] المغلقة .

والاشارة $\int$ يقال لها اشارة التكامل المحدود وهي اصلا حرف S مطولا وهو الحرف الاول لكلمة "Sum" وقد استعملت لتشير الى العلاقة بين التكامل المحدود ومجموع ريمان . والقيمتان أ ، ب تسميان طرفي التكامل او حديه فيسمى أ الطرف او الحد الاسفل ، ويسمى ب الطرف او الحد الاعلى ، وتستعمل لفظة حد او طرف هنا للدلالة على القيمتين الصغرى والعظمى في الفترة [أ ، ب] . والاقتران ق (س) الذي يظهر الى يسار اشارة التكامل يسمى المكامل (integrand) اما د س فلا ينبغي ربطها بتفاضلة س التي عرفناها في الفصل الثالث . بل انها في هذه المرحلة من دراستنا انما تدل على المتغير س . وفيما بعد في هذا الكتاب سنستعمل رمز التفاضلة لغايات عملية معينة .

ويمكن استعمال حروف اخرى غير س للتعبير عن التكامل المحدود ، ذلك انه عند تعريف الاقتران لا يهم اي رمز نستعمله للمتغير المستقل ، لذلك اذا كان ق (س) قابلا للتكامل على [أ ، ب] فان

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د\,س = \int_{أ}^{ب} ق(ص)\,د\,ص = \int_{أ}^{ب} ق(ع)\,د\,ع ،$$

وهكذا ولذلك فان س في (٥ – ١٦) تسمى احيانا بالمتغير الاسمي . وعندما نستعمل اي فترة [أ ، ب] فاننا نفترض ان أ < ب . لذلك فان (٥ – ١٦) لا تأخذ بعين الاعتبار الحالات التي يكون فيها الحد الاسفل للتكامل أكبر من الحد الاعلى ، ولكن التعريف يمكن ان يعمم ليشمل الحالات التي يكون فيها أ > ب كما يلي :

(٥–١٧) تعريف

اذا كان أ> ب فاننا نعرف $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) ء س =

$$- \int_{ب}^{أ} \text{ق}(\text{س})\,\text{ء س}\,،$$

وذلك بفرض وجود التكامل $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) ء س .

وبالكلمات فان تبديل طرفي التكامل يغير اشارته . تبقى الحالة أ = ب وهذه تعطي بالتعريف التالي :—

(٥–١٨) تعريف

اذا كان ق معرفا على أ فان $\int_{أ}^{أ}$ ق (س) ء س = صفراً

وليست جميع الاقترانات قابلة للتكامل . فمثلا اذا كان ق (س) ياخذ قيمة لا نهائية سالبة او موجبة في الفترة [أ ، ب] ، فان التكامل المحدود يكون غير موجود . ولتوضيح ذلك اذا كان ق (س) معرفا على [أ ، ب] وكانت

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \to \text{أ}^+} \quad \text{ق}(\text{س}) = \infty$$

فانه في الفترة الجزئية الاولى [س ، ص$_1$] لاي تجزئة [أ ، ب] يمكن ايجاد عدد جـ$_1$ بحيث يكون ق (جـ$_1$) Δ س$_1$ أكبر من اي عدد ع مثلا ، من هذا يتبع انه لاي تجزئة ج يمكننا ايجاد م$_ج$ = $\sum_{ر}$ ق (جـ$_ر$) Δ س$_ر$ بحيث تكون قيمتها كبيرة بالقدر

الذي نريده . ولهذا اذا كان ت اي عدد حقيقي وكانت ج اي تجزئة على [أ ، ب] فانه يوجد مجاميع م ج بحيث ان م ج – ت تكون كبيرة بالقدر الذي نريده .

وهذا يعني ان ق (س) غير قابل للتكامل . ومناقشة كهذه يمكن اجراؤها اذا اخذت ق قيما لا نهائية على اي نقطة في [أ ، ب] وبالتالي فانه اذا كان ق (س) قابلا للتكامل على [أ ، ب] فانه يكون محدودا على [أ ، ب] ، اي انه يوجد عدد معين ع بحيث ان | (ق (س) | ≤ ع لاي قيمة س في [أ ، ب] .

وقد يظن القاريء انه اذا كان ق منفصلا في نقطة ما في [أ ، ب] ، فان ق يكون غير قابل للتكامل . ولكن هذا غير صحيح ، فالاقترانات المنفصلة قد تكون اولا تكون قابلة للتكامل . ويعتمد ذلك على طبيعة الانفصال . اما الاقترانات المتصلة فهي دائما قابلة للتكامل . ويظهر ذلك في النظرية التالية :

(٥–١٩) نظريـــة :

اذا كان ق متصلا على الفترة [أ ، ب] فانه يكون قابلا للتكامل على [أ ، ب] . هذه النظرية تعطينا مجموعة كبيرة من الاقترانات القابلة للتكامل . والبرهان يذكره العديد من الكتب المتقدمة .

اذا كان ق قابلا للتكامل فان النهاية المذكورة في (٥ – ١٦) موجودة لجميع قيم جـ ر المختارة في [س ر–١ ، س ر] ، وهذه الحقيقة تعطينا الفرصة لاختيار قيم خاصة ل جـ ر اذا رغبنا بذلك . فمثلا يمكن ان نختار العدد الاصغر س ر–١ في الفترة الجزئية او العدد الأكبر س ر او منتصف الفترة او العدد الذي يعطينا قيمة صغرى او عظمى للاقتران في [س ر–١ ، س ر] .

وبالاضافة الى ذلك وبما ان النهاية لا تعتمد على التجزئة ج للفترة [أ ، ب] ، طالما ان ‖ج‖ صغير فان بامكاننا جعل التجزئة بحيث تكن الفترات الجزئية [س ر–١ ، س ر] ذات اطوال متساوية Δ س ، وهذه التجزئة تدعى التجزئة المنتظمة . وسنرى في الفصل القادم بان تجزئات خاصة كهذه تستعمل عادة في التطبيقات . وكمثال مباشر اذا كان ق متصلا وغير سالب في الفترة [أ ، ب] وكانت ل مساحة المنطقة تحت منحنى الاقتران من أ الى ب فان :

(٥-٢٠) $\text{ل} = \lim_{\Delta س \to 0} \sum_{ر} \text{ق}(\text{د}_ر) \Delta س = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(س) \, \text{د} س$ ،

حيث ق ($\text{د}_ر$) هي القيمة الصغرى للاقتران في الفترة [$س_{ر-١}$ ، $س_ر$] ، فاذا اخذنا هذا بعين الاعتبار نجد ان في المثال المذكور في البند الاول

$$\int_{٠}^{٣} (٤ - \frac{س^٢}{٤}) \, \text{د} س = \frac{٣٩}{٤}$$

تمارين :

١ ــ اذا كان ق (س) = $٨ - \frac{س^٢}{٢}$ فأوجد مجموعة م$_ج$ حيث ج تجزئة منتظمة للفترة [٠ ، ٦] الى ٦ فترات جزئية ، $جـ_ر$ تقع في منتصف الفترة [$س_{ر-١}$ ، $س_ر$] .

٢ ــ اذا كان ق (س) = $٨ - \frac{س^٢}{٢}$ أوجد م$_ج$ حيث ان التجزئة ج للفترة [٠ ، ٦] هي كما يلي س. = ٠ ، $س_١ = \frac{١}{٢}$ ١ ، $س_٢$ = ٣ ، $س_٣ = \frac{١}{٢}$ ٤ ، $س_٤$ = ٦ ، وان $جـ_١$ = ١ ، $جـ_٢$ = ٢ ، $جـ_٣$ = ٤ ، $جـ_٤$ = ٥ .

٣ ــ افرض ان ق (س) = $س^٣$ وان ج هي تجزئة للفترة [ــ ٢ ، ٤] مقسمة الى اربع فترات جزئية ، وهي كما يلي س. = ــ ٢ ، $س_١$ = ٠ ، $س_٢$ = ١ ، $س_٣$ = ٣ ، $س_٤$ = ٤ . أوجد م$_ج$ اذا كانت $جـ_١$ = ــ ١ ، $جـ_٢$ = ١ ، $جـ_٣$ = ٢ ، $جـ_٤$ = ٤ .

٤ ــ افرض ق (س) = $\sqrt{س}$ وان ج هي تجزئة للفترة [١ ، ١٦] مقسمة الى خمس فترات جزئية هي كما يلي : س = ١ ، $س_١$ = ٣ ، $س_٢$ = ٥ ، $س_٣$ = ٧ ، $س_٤$ = ٩ ، $س_٥$ = ١٦ . أوجد م$_ج$ اذا كانت $جـ_١$ = ١ ، $جـ_٢$ = ٤ ، $جـ_٣$ = ٥ ، $جـ_٤$ = ٩ ، $جـ_٥$ = ١٦ .

استعمل التمارين من ١٧ ــ ٢٠ الموجودة في البند الاول لايجاد ما يلي :

٥ ــ $\int_{٠}^{٣} (٩ - س^٢) \, \text{د} س$

٦ ــ $\int_{٠}^{٥} (٤س^٢ + ٣س + ٢) \, \text{د} س$

٧ — $\int_{0}^{٢}$ (س^{٣} + ١) ء س

٨ — $\int_{٥}^{٢}$ (٤س − س^{٣}) ء س

٩ — هات مثالا لاقتران يكون متصلا على الفترة (٠ ، ١) ويكون $\int_{٠}^{١}$ ق (س) ء س غير موجود . لماذا لا يتعارض هذا مع (٥ − ١٩) ؟

١٠ — اعط مثالا لاقتران غير متصل على [٠ ، ١] وبحيث يكون $\int_{٠}^{١}$ ق (س) ء س موجودا .

٣ — خواص التكامل المحدود :

يحتوي هذا البند على الخواص الاساسية للتكامل المحدود ، الا ان معظم براهين هذه الخواص معقدة . ونجدها في الملحق الثاني .

اذا كان ق (س) ثابتا اي ان ق (س) = جـ لجميع قيم س في [أ ، ب] ، وكانت ج تجزئة للفترة [أ ، ب] فانه لكل مجاميع ريمان لهذا الاقتران :—

$\sum_{ر}$ ق (جـ$_{ر}$) Δ س$_{ر}$ = $\sum_{ر}$ جـ Δ س$_{ر}$ = جـ $\sum_{ر}$ Δ س

= جـ (ب − أ) لان المجموع $\sum_{ر}$ Δ س$_{ر}$

هو طول الفترة [أ ، ب] وبالتالي فان

$\sum_{ر}$ ق (جـ$_{ر}$) Δ س − جـ (ب − أ) | = | جـ (ب − أ) − جـ (ب − أ) |

= صفرا ، وهو اصغر من اي قيمة موجبة و مهما كانت التجزئة ج ولهذا فان

نهـا $\sum_{ر}$ ق (جـ$_{ر}$) ء س = نهـا $\sum_{ر}$ جـ (Δ س$_{ر}$) = جـ (ب − أ)

‖ج‖ ← ٠ ر ‖ح‖ ← ٠ ر

اي ان

(٥ − ٢١) $\int_{أ}^{ب}$ جـ ء س = جـ (ب − أ)

وهذه النتيجة هي ما حصلنا عليه عند ايجاد المساحة في البند الاول لانه اذا كان جـ موجبا فان منحنى الاقتران هو خط افقي يقع على بعد جـ وحدات فوق محور السينات . والمنطقة تحت المنحنى من أ الى ب هي مستطيل بعداه جـ ، ب − أ فمساحة المستطيل = جـ (ب − أ) . وفي الحالة الخاصة المبينة في (٥ − ٢١) جـ = ١ فيكون $\int_{أ}^{ب}$ ء س = ب − أ .

اذا كان ق قابلا للتكامل على [أ ، ب] وكان جـ عددا حقيقيا فباستعمال (٥ – ١١) يكتب المجموع م للاقتران جـ ق على النحو :

$$\sum_{ر} \text{جـ ق } (\text{جـ}_ر) \Delta \text{ س}_ر = \text{جـ} \sum_{ر} (\text{جـ}_ر) \Delta \text{ س}_ر$$

وقد برهنا في الملحق الثاني . ان نهاية المجموع في الطرف الايمن هي جـ مضروبا في نهاية المجموع في الطرف الايسر ، وبوضع هذه الحقيقة بدلالة التكامل المحدود تنتج النظرية التالية :

(٥–٢٢) نظريـــة :

اذا كان ق (س) قابلا للتكامل على [أ ، ب] وكان جـ اي عدد ، كان جـ ق (س) قابلا للتكامل وكان

$$\int_{أ}^{ب} \text{جـ ق } (\text{س}) \text{ د س} = \text{جـ} \int_{أ}^{ب} \text{ق } (\text{س}) \text{ د س} .$$

وهذه النظرية تعني ان العامل الثابت في المكامل يمكن اخراجه من داخل اشارة التكامل . ولكن لا يجوز اخراج المتغيرات من اشارة التكامل بهذه الطريقة .

اذا كان ق ، هـ معرفين على [أ ، ب] فحسب (٥ – ١١) يكتب م$_ج$ للاقتران ق + هـ على الصيغة التالية :

$$\sum_{ر} [\text{ق } (\text{جـ}_ر) + \text{هـ } (\text{جـ}_ر)] \Delta \text{ س}_ر = \sum_{ر} \text{ق } (\text{جـ}_ر) \Delta \text{ س}_ر + \sum_{ر} \text{هـ } (\text{جـ}_ر) \Delta \text{ س}_ر$$

ويمكن اثبات انه اذا كان ق ، هـ قابلين للتكامل فان نهاية المجموع الايمن هي مجموع نهايتي الجانب الايسر من المعادلة . وقد وصفت هذه الحقيقة بصيغة التكامل كما يلي :

(٥–٢٣) نظريـــة

اذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] كان ق + هـ قابلا للتكامل على [أ ، ب] . وكذلك :

$$\int_{أ}^{ب} (ق(س) + هـ(س))\, د س = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س - \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, د س$$

وبرهان هذه النظرية في الملحق الثاني . وكذلك فان الفرق بين ق ، هـ يتبع نفس المبدأ اي ان

$$\int_{أ}^{ب} (ق(س) - هـ(س))\, د س = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س - \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, د س$$

وذلك على فرض ان ق ، هـ قابلان للتكامل على [أ ، ب] . ويمكن تعميم النظرية (٥ – ٢٣) بحيث تشمل اي عدد محدود من الاقترانات ، وبالتحديد اذا كانت $ق_1$ ، $ق_2$ ، ... $ق_ن$ اقترانات قابلة للتكامل فان مجموعها قابل للتكامل وكذلك .

$$\int_{أ}^{ب} (ق_1(س) + ق_2(س) + \cdots + ق_ن(س))\, د س =$$

$$\int_{أ}^{ب} ق_1(س)\, د س + \int_{أ}^{ب} ق_2(س)\, د س + \cdots$$

$$+ \int_{أ}^{ب} ق_ن(س)\, د س$$

واذا كان ق متصلا على [أ ، ب] ، ق (س) ≥ . لجميع قيم س في [أ ، ب] فان التكامل يساوي المساحة تحت منحنى الاقتران ق من أ الى ب كما رأينا في البند الاول .

وبالمثل اذا كانت أ < جـ < ب فان التكاملين

$$\int_{أ}^{جـ} ق(س)\, د س ، \int_{جـ}^{ب} ق(س)$$ يعطيان المساحة تحت منحنى

الاقتران من أ الى جـ ومن جـ الى ب وهذا يؤدي الى النتيجة التالية :ـ

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\, د س + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\, د س$$

وتبين النظرية التالية ان هذه المعادلة تصح ايضا في حالة اعم اما البرهان ففي الملحق الثاني .

(٥ – ٢٥) نظريـــة :

اذا كانت أ < جـ < ب وكان ق (س) قابلا للتكامل على الفترتين [أ ، جـ] ، [جـ ، ب] كان ق قابلا للتكامل على [أ ، ب] وكان

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,د س + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,د س$$

والنتيجة التالية توضح ان (٥ – ٢٥) يمكن تعميمها بحيث لا تكون جـ بالضرورة بين أ ، ب .

(٥ – ٢٦) نظريـــة :

اذا كان ق قابلا للتكامل على اي فترة مغلقة وكانت أ ، ب ، جـ اي ثلاث نقاط في هذه الفترة ، فان

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س = \int_{أ}^{جـ} ق(س) + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,د س$$

البرهـــان :

اذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاثة اعداد مختلفة فانه يوجد ستة احتمالات مختلفة لترتيب هذه الاعداد . والنظرية يجب ان تثبت لجميع هذه الحالات بالاضافة الى حالات تساوي اثنين او ثلاثة من هذه الاعداد . سنثبت حالة واحدة واما الباقي فيترك كتمارين للطالب . لذا نفترض ان الاعداد مرتبة كما يلي :

جـ < أ < ب .

فباستعمال (٥ – ٢٥) ينتج ان

$$\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = \int_{\text{جـ}}^{\text{م}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} + \int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س}$$

$$\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = -\int_{\text{جـ}}^{\text{م}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س}$$

وبذلك يتحقق المطلوب لان تبديل النهايات يغير الاشارة . راجع (٥ – ١٧) .

اذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين على [م ، ب] وكان ق (س) ≥ هـ (س) ≥ ٠ لجميع قيم س في [م ، ب] فان المساحة تحت منحنى الاقتران ق من م الى ب أكبر من المساحة تحت منحنى الاقتران هـ من م الى ب . والنتيجة التي تلي هذه النظرية هي تعميم لهذه الحقيقة لاي اقتران قابل للتكامل . والبرهان في الملحق الثاني .

(٥ – ٢٧) نظريـــة :

اذا كان ق قابلا للتكامل على [م ، ب] وكان ق (س) ≥ صفر لجميع قيم س في [م ، ب] كان

$$\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} \geq \text{صفر}$$

(٥ – ٢٨) نتيجـــة :

اذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للتكامل على [م ، ب] وكان ق (س) ≥ هـ (س) لجميع قيم س في [م ، ب] كان

$$\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} \geq \int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{د س}$$

البرهـــان :

بما ان ق – هـ قابل للتكامل وان ق – هـ ≥ صفر لجميع قيم س في [م ، ب] ، فحسب النظرية (٥ – ٢٧) يكون :

$\int_{م}^{ب}$ [ق (س) − هـ (س)] ء س ≤ صفر ، وباستعمال (٥ − ٢٤)

نحصل على النتيجة $\int_{م}^{ب}$ ق (س) ء س ≤ $\int_{م}^{ب}$ هـ (س) ء س .

تمارين :

أوجد قيمة كل مما يلي :

(١) $\int_{-٥}^{٤}$ ٥ ء س (٢) $\int_{٦}^{٢}$ ٣ ء س

(٣) $\int_{١}^{١٠}$ $\sqrt{٢٧}$ ء س (٤) $\int_{٤}^{-٣}$ ء س

(٥) $\int_{-١}^{١}$ ء س (٦) $\int_{٢}^{٣}$ ١٠٠ ء س

(٧) اثبت (٥ − ٢٤) (ملاحظة : اكتب ق (س) − هـ (س) + (− هـ (س)) ثم استعمل (٥ − ٢٣) ، (٥ − ٢٢)) .

(٨) اذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للتكامل على [م ، ب] وكان جـ ، ك عددين حقيقيين ، اثبت ان

$\int_{م}^{ب}$ [جـ ق (س) + ك هـ (س)] ء س =

جـ $\int_{م}^{ب}$ ق (س) ء س + ك $\int_{م}^{ب}$ هـ (س) ء س

(ملاحظة : — استعمل (٥ − ٢٣) ، (٥ − ٢٢)) .

(٩) اكمل برهان نظرية (٥ − ٢٦) بأخذ كل الترتيبات الممكنة للاعداد م ، ب ، جـ

(١٠) استعمل (٥ − ٢٦) لاثبات انه اذا كان ق قابلا للتكامل على اي فترة مغلقة واذا كانت جـ$_١$ ، جـ$_٢$ ، ... ، جـ$_ن$ اعداداً في هذه الفترة ، فان

$\int_{جـ_١}^{جـ_ن}$ ق (س) ء س = $\sum_{ر=١}^{ن-١}$ $\int_{جـ_ر}^{جـ_{ر+١}}$ ق (س) ء س

(١١) اذا كان ق قابلا للتكامل على [م ، ب] وكان ق (س) ≥ صفراً

لجميع قيم س في [أ ، ب] . اثبت ان $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) ء س ≥ صفراً

(ملاحظة : اذا كان ق (س) ≥ صفراً يكون − ق (س) ≤ ٠)

(١٢) اذا كان ق متصلا على [أ ، ب] وكان ق (س) > ٠ لجميع قيم س ، اثبت ان

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) ء س > ٠

(ملاحظة :— نفرض ان ق (ء) هي القيمة الصغرى للأقتران على [أ ، ب] ، اثبت ان م ج > ق (ء) × (ب − أ) حيث م ج هو اي من مجاميع ريمان للتجزئة ج على [أ ، ب] .

٤ — نظرية القيمة المتوسطة للتكامل المحدود :

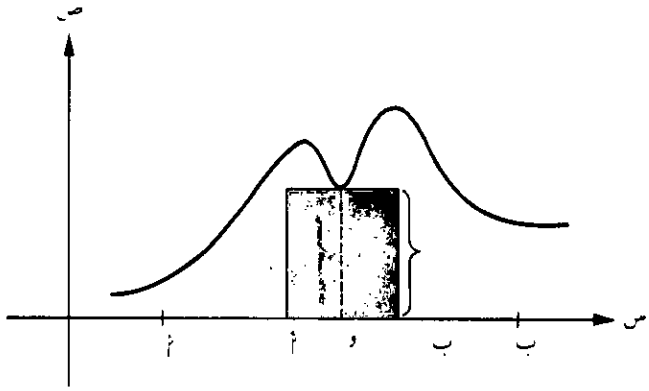
نفرض ان الاقتران ق متصل وان ق (س) ≥ ٠ لجميع قيم س في [أ ، ب] ، فاذا كان ق (جـ) > ٠ لقيمة معينة جـ في [أ ، ب] فان ذلك يعني ان

نهـا ق (س) > ٠ وبمثل الحجة التي بها برهنا على (٥ − ١١) نثبت ان
س ← جـ

هنالك فترة [أَ ، بَ] محتواة في [أ ، ب] بحيث ان ق (س) موجب في هذه الفترة . فنفرض ان ق (ء) هي القيمة الصغرى للاقتران ق في الفترة [أَ ، بَ] كما هو موضح في الشكل (٥ − ٧) . من ذلك ينتج ان المساحة تحت منحنى الاقتران من أ الى ب تكون على الاقل مساوية للمقدار ق (ء) × (بَ − أَ) التي هي مساحة المستطيل المبين ، وبالتالي فان

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) ء س .

ومن الممكن اثبات هذه الحقيقة من خلال تعريف التكامل المحدود ، واذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين على [أ ، ب] وكان ق (س) ≥ هـ (س) لجميع قيم س في [أ ، ب] ، لكن ق ≠ هـ ، فان ق (س) − هـ (س) > صفر لبعض قيم س في [أ ، ب] .



الشكل ٥ — ٧

اذن $\int_{أ}^{ب}$ [ق (س) − هـ (س)] د س > ٠

اي ان $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س > $\int_{أ}^{ب}$ هـ (س) د س

وسنستعمل هذه الحقيقة لاثبات النظرية التالية :

(٥–٢٩) نظرية القيمة المتوسطة للتكامل المحدود

اذا كان ق اقترانا متصلا على الفترة [أ ، ب] فانه يوجد قيمة معينة ز في [أ ، ب] بحيث ان

$$\int_{أ}^{ب} ق (س) د س = ق (ز) \times (ب - أ) .$$

البرهـــان : اذا كان ق ثابتا فان المطلوب ينتج مباشرة ، وتكون ز اي قيمة في (أ ، ب) . لنفرض ان ق غير ثابت ، ولنفرض ان ع هي القيمة العظمى للاقتران ق ، وان غ هي القيمة الصغرى . ولنفرض ان
ق (س $_{١}$) = ع ، ق (س $_{٢}$) = غ حيث س $_{١}$ ، س $_{٢}$ عددان في [أ ، ب]
بما ان ق غير ثابت فان ع > ق (س) > غ لنقطة ما س في [أ ، ب] .
وباستعمال الملاحظة التي سبقت هذه النظرية ينتج ان

$$\int_{أ}^{ب} ع د س > \int_{أ}^{ب} ق (س) د س > \int_{أ}^{ب} غ د س ،$$

وباستعمال (٥ – ٢١) نحصل على ع (ب – أ) > $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) ء س

> (ب أ) . وبالقسمة على (ب – أ) وبالتعويض عن غ ، ع بالصيغتين ق (س$_{٢}$) ، ق (س$_{١}$) على الترتيب نحصل على

ق (س$_{١}$) > $\frac{١}{ب - أ}$ $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) ء س > ق (س$_{٢}$)

وبما ان $\frac{١}{ب - أ}$ $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) ء س هو عدد يقع بين ق (س$_{١}$) ، ق (س$_{٢}$) ، فانه ينتج من نظرية القيم الوسطى انه يوجد

عدد ز بين س$_{١}$ ، س$_{٢}$ بحيث ان ق (ز)

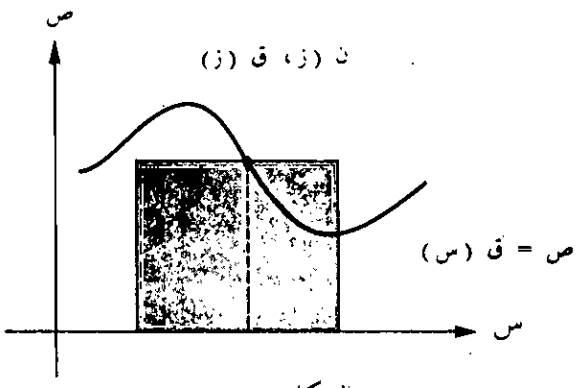
$$= \frac{١}{ب - أ} \int_{أ}^{ب} ق (س) ء س .$$

بالضرب في (ب – أ) نحصل على القيمة المطلوبة للنظرية . وليس من الضروري ان يكون العدد ز في (٥ – ٢٩) وحيدا ، ففي الاقتران الثابت كما وضحنا في البرهان فان ز يمكن ان يكون اي عدد . الا ان النظرية تضمن وجود عدد واحد على الاقل لتحقيق النظرية .

ولنظرية القيمة المتوسطة تفسير هندسي شيق عندما ق (س) > ٠ لجميع قيم س في [أ ، ب] . ففي هذه الحالة يكون $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) ء س هو المساحة تحت منحنى الاقتران ق من أ الى ب . والعدد ق (س$_{١}$) في (٥ – ٢٩) هو الاحداثيّ الصادي للنقطة ي على منحنى الاقتران التي احداثيها السيني ز (انظر الشكل ٥ – ٨) .

فاذا رسم مستقيم افقي عند النقطة ي فان مساحة المستطيل المحدد بهذا المستقيم ومحور السينات ، س = أ ، س = ب تساوي ق (ز) (ب – أ) وهي كما

تنص (٥ – ٢٩) تساوي مساحة المنطقة تحت منحنى الاقتران ق من أ الى ب وفي الاشكال كشكل (٥ – ٨) تبدو وهذه الحقيقة بديهية .



الشكل ٥ — ٨

مثـــال : من الجملة الاخيرة في البند الثاني ينتج ان

$$\int_{0}^{3} \left(4 - \frac{س^2}{4} \right) ء س = \frac{39}{4}$$

أوجد العدد الذي يحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة .

الحـــل : من (٥ – ٢٩)

$$\int_{0}^{3} \left(4 \frac{س^2}{4} \right) ء س = \left(4 - \frac{ز^2}{4} \right) \left(3 - 0 \right) ، \text{ اي ان}$$

$$\frac{39}{4} = \frac{16 - ز^2}{4} \times 3 \text{ ويضرب طرفي المعادلة}$$

الاخيرة في $\frac{4}{3}$ ينتج $16 - ز^2 = 13$ ، $ز^2 = 3$

فإذن $ز = \sqrt{3}$ يحقق نتيجة (٥ – ٢٩) .

وتستخدم نظرية القيمة المتوسطة للتكامل المحدود في برهنة كثير من النظريات المهمة ، ومن اهمها النظرية الاساسية في التفاضل والتكامل ، التي سندرسها في البند التالي .

تمارين :

التكاملات المحدودة المعطاة في التمارين ١ – ٤ وجدت قيمها بطرق سياتي شرحها . أوجد اعدادا تحقق (٥ – ٢٩) . لهذه التكاملات :

١) $\int_{0}^{3} ٣س^{٢}\ د\ س = ٢٧$

٢) $\int_{1}^{3} (٣س^{٢} - ٢س + ٣)\ د\ س = ٣٢$

٣) $\int_{1}^{8} ٣\sqrt{س + ١}\ د\ س = ٥٤$

٤) $\int_{2}^{1} ٨س^{٣}\ د = -٣$

٥) اذا كان ق (س) = جـ لجميع قيم س في [أ ، ب] فبرهن على ان اي عدد ز في [أ ، ب] يحقق (٥ – ٢٩) . علل ذلك هندسيا .

٦) اذا كان ق (س) = س ، وكان ٠ < أ < ب أوجد (بدون اجراء عملية التكامل) عددا ز في [أ ، ب] بحيث ان

$$\int_{أ}^{ب} ق\ (س)\ د\ س = ق\ (ز) \times (ب - أ)$$

٥ ــ النظرية الاساسية في التفاضل والتكامل :

ان ايجاد قيمة التكامل المحدود بواسطة التعريف (٥ – ١٦) عملية صعبة حتى في ابسط الحالات . ففي هذا البند نقدم نظرية يمكن استعمالها لايجاد التكامل المحدود بدون استعمال نهاية المجموع . وبسبب اهمية هذه النظرية في حساب التفاضل والتكامل فقد سميت بحق النظرية الاساسية في التفاضل والتكامل وقد اكتشف هذه النظرية في وقت واحد اثنان كل على انفراد ، هما السير اسحق نيوتن (١٦٤٢ – ١٧٢٧) في انجلترا وجتفرد لينبز (١٦٤٦ – ١٧١٦) في المانيا . وبسبب هذا الاكتشاف يعزي لهذين الرياضيين ابتكار علم التفاضل والتكامل . ورفعا للالتباس سنستعمل ص بدلا من س . وسنشير الى التكامل المحدود للاقتران ق من أ الى ب بالصيغة $\int_{أ}^{ب} ق\ (ص)\ د\ ص$.

اذا كان ق متصلا على [أ ، ب] وكانت س في [أ ، ب] كان ق متصلا على [أ ، س] ولذلك فان ق قابل للتكامل على [أ ، س] وبالتالي فان المعادلة :

(٥ - ٣٠) هـ (س) = $\int_{م}^{س}$ ق (ص) ء ص تعرف اقترانا هـ مجاله [أ ، ب] ، لانه لكل س في [أ ، ب] يوجد عدد واحد هـ (س) يعطي بالمعادلة (٥ - ٣٠)

والنظرية التالية تبين الحقيقة الهامة ان هـ هي اصل المشتقة ق وهي ايضا ترينا كيف ان كل اصل مشتقة يمكن استعماله لايجاد تكامل محدود لاقتران ما .

(٥ - ٣١) النظرية الاساسية في التفاضل والتكامل :

نفرض ان ق متصل على الفترة [أ ، ب]

الجزء الاول : اذا كان هـ اقترانا معرفا بالعلاقة

هـ (س) = $\int_{م}^{س}$ ق (ص) ء ص لجميع قيم س في [أ ، ب] ، فان هـ هي اصل المشتقة ق على [أ ، ب]

الجزء الثاني : اذا كان م اصل مشتقة ق فان

$\int_{م}^{ب}$ ق (س) ء س = م (ب) - م (أ) .

البرهـــان :

لاثبات الجزء الاول لابد من اثبات ان هـ (س) = ق (س) لجميع قيم س في [أ ، ب] . اذا كانت س ، س + و في [أ ، ب] فباستعمال تعريف هـ مع (٥ - ١٧) نحصل على

هـ (س + و) - هـ (س) = $\int_{م}^{س+و}$ ق (ص) ء ص

- $\int_{م}^{س}$ ق (ص) ء ص

= $\int_{م}^{س+و}$ ق (ص) ء ص

+ $\int_{س}^{م}$ ق (ص) ء ص

$$= \int_{س}^{س+و} ق\ (ص)\ ء\ ص$$

لذلك اذا كانت و ≠ صفراً فان

$$\frac{هـ\ (س+و) - هـ\ (س)}{و} = \frac{١}{و} \int_{س}^{س+و} ق\ (ص)\ ء\ ص$$

واذا كانت و> صفر فباستعمال نظرية القيمة المتوسطة (٥ – ٢٩) ينتج انه يوجد عدد ز (يعتمد على و) في الفترة المفتوحة (س ، س + و) بحيث ان

$$\int_{س}^{س+و} ق\ (ص)\ ء\ ص = ق\ (ز)\ (و)$$ ولذلك

$$\frac{هـ\ (س+و) - هـ\ (س)}{و} = ق\ (ز)$$

بما ان س < ز < س + و فانه ينتج ان

(٥–٣٢) $$نهـا_{و \leftarrow ٠^+} ق\ (ز) = نهـا_{ز \leftarrow س^+} ق\ (ز) = ق\ (س)$$

$$نهـا_{و \leftarrow ٠^+} \frac{هـ\ (س+و) - هـ\ (س)}{و} = ق\ (س)$$

واذا كانت و < ٠ فانه باستعمال برهان مماثل نحصل على

$$نهـا_{و \leftarrow ٠^-} \frac{هـ\ (س+و) - هـ\ (س)}{و} = ق\ (س)$$

وبأخذ النهايتين ينتج ان

$$هـ\ (س) = نهـا_{و \leftarrow ٠} \frac{هـ\ (س+و) - هـ\ (س)}{و} = ق\ (س)$$

وهو ما اردنا اثباته .

ولاثبات الجزء الثاني لنفرض ان م اصل المشتقة ق ولنفرض ان هـ هو اصل المشتقة المعرف بالعلاقة (٥ – ٣٠) فينتج من (٤ – ٣٣) ان هـ ، م الفرق بينهما عدد ثابت . اي انه يوجد عدد ثابت جـ بحيث ان هـ (س) – م (س) = جـ لجميع قيم س في [أ ، ب] ، فمن تعريف هـ

$$\int_{أ}^{ب} ق\,(ص)\,د\,ص - م\,(س) = جـ \text{ لجميع قيم س في } [\,أ\,،\,ب\,]$$

. فاذا فرضنا س = أ واستخدمنا (٥ – ١٨) نجد ان – م (أ) = جـ ، ولذلك فان

$$\int_{أ}^{س} ق\,(ص)\,د\,ص - م\,(س) = - م\,(أ)$$

وبما ان هذه المتطابقة صحيحة لجميع قيم س في [أ ، ب] فاننا نعوض قيمة ب بدلا من س فنحصل على

$$\int_{أ}^{ب} ق\,(ص)\,د\,ص - م\,(ب) = - م\,(أ)$$

وباضافة م (ب) لطرفي المعادلة ووضع س بدلا من ص نحصل على المطلوب .

وبدلالة المؤثر التفاضلي $د_س$ يكتب الجزء الاول من (٥ – ٣١)

$$د_س\,(هـ\,،\,س) = هـ\,(س) = ق\,(س)$$

وهذا يعطينا الصيغة التالية :

$$د_س \left(\int_{أ}^{س} ق\,(ص)\,د\,ص \right) = ق\,(س) \qquad (٥-٣٣)$$

وقد جرت العادة على كتابة الفرق م (ب) – م (أ) على الصورة $م\,(س)\Big]_{أ}^{ب}$

او $\Big[\ م\,(س)\ \Big]_{أ}^{ب}$ فتكتب

$$\int_{أ}^{ب} ق\,(س)\,د\,س = م\,(س)\Big]_{أ}^{ب} \text{ حيث } مَ\,(س) = ق(س) \qquad (٥-٣٤)$$

وتصح الصيغة السابقة ايضا اذا كانت أ ≥ ب لانه اذا كانت أ > ب فمن (٥ – ١٧) :

$$\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = -\int_{\text{ب}}^{\text{م}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = -[\text{م}(\text{م}) - \text{م}(\text{ب})]$$

$$= \text{م}(\text{ب}) - \text{م}(\text{م}) .$$

واذا كانت م = ب فمن (٥ – ١٨)

$$\int_{\text{م}}^{\text{م}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = \text{صفراً} = \text{م}(\text{م}) - \text{م}(\text{م})$$

مثال (١) احسب $\int_{-٢}^{٣} (٦\text{س}^{٢} - ٥)\,\text{د س}$

الحـــل : ان م (س) = ٢س^{٣} – ٥س هي اصل للمشتقة ٦س^{٢} – ٥ ، فباستعمال (٥ – ٣٤) فان :

$$\int_{-٢}^{٣} (٦\text{س}^{٢} - ٥)\,\text{د س} = [٢\text{س}^{٣} - ٥\text{س}]_{-٢}^{٣} = [٢(٣)^{٣} - ٥(٣)] - [٢(-٢)^{٣} - ٥(-٢)] = [٥٤ - ١٥] - [-١٦ + ١٠]$$

$$= ٤٥$$

لاحظ انه لو استخدمنا م (س) + جـ بدلا من م (س) في (٥ – ٣٤) فسنحصل على نفس النتيجة لان

$$\left[\text{م}(\text{س}) + \text{جـ}\right]_{\text{م}}^{\text{ب}} = (\text{م}(\text{ب}) + \text{جـ}) - (\text{م}(\text{م}) + \text{جـ})$$

$$= \text{م}(\text{ب}) - \text{م}(\text{م}) = \left[\text{م}(\text{س})\right]_{\text{م}}^{\text{ب}}$$

وهذا يدل على ان اي اصل للاقتران ق يمكن استخدامه في النظرية الاساسية للتفاضل والتكامل . لاحظ ايضا انه لاي عدد

$$\left[\text{ك م}(\text{س})\right]_{\text{م}}^{\text{ب}} = \text{ك م}(\text{ب}) - \text{ك م}(\text{م})$$

$$= \text{ك}(\text{م}(\text{ب}) - \text{م}(\text{م})) = \text{ك}\left[\text{م}(\text{س})\right]_{\text{م}}^{\text{ب}}$$

اي ان أي معامل ثابت يمكن اخراجه خارج القوس عند استعمال هذه الصيغة . وهذه النتيجة شبيهة بالنظرية (٥ – ٢٢) للتكامل المحدود .

اذا كان ق معرفا كالاتي : ق (س) = جـ س^{ن} حيث جـ عدد حقيقي ، ن عدد نسبي لا يساوي – ١ . فان الاقتران م حيث

م (س) = $\frac{\text{جـ}}{\text{ن} + ١}$ س$^{\text{ن} + ١}$ هو اصل للمشتقة ق معرف على المدى

المعرف عليه وبتطبيق (٥ – ٣٤) تنتج المعادلة التالية :

$$\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{جـ س}^{\text{ن}}\ \text{د س} = \left[\frac{\text{جـ}}{\text{ن} + ١} \text{س}^{\text{ن}+١} \right]_{\text{م}}^{\text{ب}} \qquad (٥-٣٥)$$

$$= \frac{\text{جـ}}{\text{ن} + ١} \left[\text{ب}^{\text{ن} + ١} - \text{م}^{\text{ن} + ١} \right]$$

بشرط ان تكون ن $\neq$ | – ١ .

واذا كان المكامل مجموعة حدود كل منها على صورة جـ س^{ن} حيث ن $\neq$ – ١ فان (٥ – ٣٥) يمكن تطبيقها لكل حد .

مثال ٢ : احسب $\int_{١}^{٤} \left(٥\text{س} - ٢\sqrt{\text{س}} + \frac{٣٢}{\text{س}^{٣}} \right) \text{د س}$

الحل : نبدأ بتغيير شكل المكامل حتى يمكن تطبيق (٥ – ٣٥) لكل حد فيكون :

$$\int_{١}^{٤} \left(٥\text{س} - ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ٣٢\text{س}^{-٣} \right) \text{د س}$$

$$= \left[\frac{٥}{٢} \text{س}^{٢} - \frac{٢}{\frac{٣}{٢}} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٣٢}{-٢} \text{س}^{-٢} \right]_{١}^{٤}$$

$$= \left[\frac{٥}{٢} \text{س}^{٢} - \frac{٤}{٣} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١٦}{\text{س}^{٢}} \right]_{١}^{٤}$$

$$= \left[\frac{١٦}{١} - \frac{٤}{٣} - \frac{٥}{٢} \right] - \left[\frac{١٦}{٢٤} - \frac{٣}{٢}(٤) \frac{٤}{٣} - ٢٤ \times \frac{٥}{٢} \right]$$

$$= ٦/٢٥٩$$

انه من المهم ان نلاحظ ان اي صيغة من صيغ المشتقات يمكن استخدامها لايجاد صيغة تقابلها للتكامل المحدود . فمثلا

$$\text{د}_{س} \left(\sqrt{س^{٢} + ١} \right) = \frac{س}{س^{٢} + ١} \quad \text{تعطينا}$$

$$\int_{أ}^{ب} \frac{س}{س^{٢} + ١} \, \text{د} س = \left[\sqrt{س^{٢} + ١} \right]_{أ}^{ب}$$

$$\text{د}_{س} (س - ٥)^{١٠} = ١٠ (س - ٥)^{٩} \quad \text{تعطينا}$$

$$\int_{أ}^{ب} ١٠ (س - ٥)^{٩} \, \text{د} س = \left[(س - ٥)^{١٠} \right]_{أ}^{ب}$$

وهكذا . ولا يجب حفظ هذه الصيغ . ففي البند التالي سنشرح طريقة تمكننا من حساب التكاملات التي من الانواع السابقة .

تمارين :

احسب التكاملات التالية من ١ — ٢٠

١) $\int_{١}^{٤} (س^{٢} - ٤س - ٣) \, \text{د} س$

٢) $\int_{٢}^{٣} (٥ + س - ٦س^{٢}) \, \text{د} س$

٣) $\int_{٢}^{٣} (٨ص^{٢} + ٣ص - ١) \, \text{د} ص$

٤) $\int_{٠}^{٢} (ص^{٤} - ٢ص^{٢}) \, \text{د} ص$

٥) $\int_{٧}^{١٢}$ ى ع

٦) $\int_{-٦}^{-١}$ ٨ ى س

٧) $\int_{١}^{٢}$ $٨ع^{٦}$ ى ع

٨) $\int_{١}^{٤}$ $\sqrt{١٦ س^{٥}}$ ى س

٩) $\int_{٤}^{٩}$ $\frac{ز - ٣}{\sqrt{ز}}$ ى ز

١٠) $\int_{-١}^{-٢}$ $\frac{٢س - ٧}{س^{٣}}$ ى س

١١) $\int_{-٨}^{٨}$ $\sqrt[٣]{ع^{٢}} + ٢)$ ى ع

١٢) $\int_{١}^{٠}$ $م^{٢}$ $(\sqrt[٣]{م} - \sqrt{م})$ ى م

١٣) $\int_{٠}^{١}$ $(٢س - ٣)$ $(٥س + ١)$ ى س

١٤) $\int_{-١}^{١}$ $(س^{٢} + ١)^{٢}$ ى س + ١٥) $\int_{-١}^{٠}$ $(٢ص + ٣)^{٢}$ ى ص

١٦) $\int_{٠}^{٥}$ $\sqrt{س^{٢} + \sqrt{س^{٥}} + ١}$ ى س

١٧) $\int_{٣}^{٢}$ $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ ى س

١٨) $\int_{0}^{-١} \frac{س^{٣} + ٨}{س + ٢}$ د س

١٩) $\int_{١}^{١} (٤س^{٢} - ٥)^{١٠٠}$ د س

٢٠) $\int_{١}^{٢} (٤س^{-٥} + ٦س^{-٤})$ د س

تحقق من صحة المتطابقتين في التمرينين ٢١ ، ٢٢ اولا باستعمال النظرية الاساسية للتفاضل والتكامل وثانيا بطريقة الاشتقاق :

٢١) $د_{س} \int_{0}^{س} (ص^{٣} - ٤\sqrt{ص} + ٥)$ د ص $= س^{٣} - ٤\sqrt{س} + ٥$

٢٢) $د_{س} \int_{0}^{س} (٥ص + ٣)^{٢}$ د ص $= (٥س + ٣)^{٢}$

٢٣) أوجد $د_{س} \int_{١}^{س} \frac{١}{ص}$ د ص ، اذا كانت س > .

٢٤) أوجد $د_{س} \int_{0}^{س} \frac{١}{\sqrt{١ - ص^{٢}}}$ د ص اذا كانت | س | < ١

٢٥) اذا كان ق (س) = $س^{٢}$ + ١ ، أوجد المساحة تحت منحنى الاقتران ق من − ١ الى ٢ .

٢٦) اذا كان ق (س) = $س^{٣}$ أوجد مساحة المنطقة تحت منحنى الاقتران من ١ الى ٣ .

تحقق من صحة الصيغ التالية :

٢٧) $\int_{م}^{ب} \frac{س}{\sqrt{(س^{٢} + ١)^{٣}}}$ د س $= \left[\frac{-١}{\sqrt{س^{٢} + ١}} \right]_{م}^{ب}$

٢٨) $\int_{م}^{ب} \frac{س^{٣}}{\sqrt{س^{٢}+١}}$ د س =

$$\frac{١}{٣}\left[\sqrt{(س^{٢}+١)^{٣}} - \sqrt{س^{٢}+١}\right]_{م}^{ب}$$

أوجد القيمة التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة (٥ – ٢٩) للتكاملات المحدودة التالية :

٢٩) $\int_{٠}^{٤} (\sqrt{س}+١)$ د س

٣٠) $\int_{-١}^{١} (٢س+١)^{٢}$ د س

٦ — التكامل غير المحدود ، وتغيير المتغيرات :

نظرا للعلاقة بين اصل المشتقة والتكامل المحدود التي تبينت بالنظرية الاساسية الاولى للتفاضل والتكامل ، جرت العادة على استعمال اشارة التكامل للدلالة على اصل المشتقة ، فللتمييز بينهما نهمل حدي التكامل . فاذا كانت م اصل المشتقة ق نكتب

(٥-٣٦) $\int$ ق (س) د س = م (س) + جـ . حيث جـ ثابت عشوائي .

وهذا ما نسميه بالتكامل غير المحدود للاقتران ق ، وهو مجرد طريقة اخرى لتعيين اصل للمشتقة . وسنستعمل لفظ التكامل غير المحدود بدل اصل المشتقة لايجاد م عندما تعطى ق . والعدد الثابت جـ يسمى ثابت التكامل ، ق (س) يسمى المكامَل والمتغير س هو متغير التكامل . ان مجال م لا يعطي عادة ولكننا نفترض ان التكامل جرى على فترة مناسبة هو فيها قابل للتكامل . فاي فترة مغلقة يكون عندها ق متصلا يمكن اختيارها مجالا للتكامل ، وكما في حالة التكامل المحدود ان المتغير س المستخدم هو مجرد رمز يمكن استبداله باي رمز اخر فنقول

$\int$ ق (س) د س = $\int$ ق (ص) د ص = $\int$ ق (ع) د ع

وهكذا وجميعها تعطينا نفس الاقتران م . ولنأخذ المثالين التاليين

$$\int س^{٢}\ ء\ س = \frac{١}{٣}\ س^{٣} + جـ .$$

$$\int \left(٨ص^{٣} - ٥ + \frac{١}{ص^{٢}} \right) ء\ ص = ٢ص^{٤} - ٥ص - \frac{١}{ص} + جـ$$

وللتأكد من صحة متطابقات من هذا النوع نجد مشتقة الطرف الايسر لنرى اذا كنا نحصل على المكامل ام لا .

والصيغ التالية هي نتائج مباشرة لتعريف التكامل غير المحدود .

$$(٥ - ٣٧)\quad د_{س} \int ق\ (س)\ ء\ س = ق\ (س) + جـ ،$$

$$\int د_{س}\ (ق\ (س))\ ء\ س = ق\ (س) + جـ$$

فمن (٥ – ٣٦)

$$د_{س} \int ق\ (س)\ ء\ س = د_{س}\ [م\ (س) + جـ] = ق\ (س) .$$

وبما ان التكامل غير المحدود هو اصل مشتقة فالنظرية الاساسية للتفاضل والتكامل تعطينا العلاقة التالية بين التكامل المحدود وغير المحدود . فاذا عرفنا التكامل غير المحدود للاقتران ق ، فان التكاملات المحدودة يمكن حسابها وفي الفصول القادمة سوف نطور طرقا لايجاد التكاملات غير المحدودة لاقترانات مختلفة . اما الان فانه من الممكن وضع عدة قوانين مفيدة ،

مثال : قانون القوة للتكامل غير المحدود :

$$(٥ - ٣٩)\quad \int س^{ن}\ ء\ س = \frac{١}{ن + ١}\ س^{ن+١} + جـ ، \text{ حيث ن اي عدد}$$

نسبي ، ن ≠ – ١

والصيغة (٤ – ٣٧) التي تنص على ان اصل مجموع المشتقات يساوي مجموع اصولها يمكن تحويلها الى علاقة للتكامل غير المحدود كما يلي :

(٥-٤٠) $\int$ [ق (س) + هـ (س)] ء س = $\int$ ق (س) ء س + $\int$ هـ (س) ء س وهذه صيغة تكامل اخرى :

(٥-٤١) $\int$ جـ ق (س) ء س = جـ $\int$ ق (س) ء س ، حيث جـ اي عدد حقيقي . ولاثبات (٥ - ٤١) تفاضل الطرف الايسر :

$د_س$ [جـ $\int$ ق (س) ء س] = جـ د $\int$ ق (س) ء س = جـ ق (س) .

وهذا هو المكامل في الطرف الايمن .

وفي جميع هذه القوانين نفترض ان المشتقات المستخدمة لها اصول . وبتجميع النتائج الثلاث السابقة يمكن الحصول على التكامل غير المحدود لاي حدودية . ويمكن وضع التكامل غير المحدود كما يلي :

(٥-٤٢) $\int$ ق (س) ء س = هـ (س) + جـ اذا وفقط اذا كان

$د_س$ (هـ (س)) = ق (س) .

وكما هو الحال في التكامل المحدود ، فكل قاعدة للتفاضل يمكن تحويلها الى قاعدة مماثلة للتكامل غير المحدود ، واليك مثالا على ذلك :

$د_س \sqrt{(س^٢ + ٥)}$ = $\frac{س}{س^٢ + ٥}$ تعطينا $\int \frac{س}{س^٢ + ٥}$ ء س

= $\sqrt{س^٢ + ٥}$ + جـ

$د_س$ (س^٣ + ٢ س)^{١٠} = ١٠ (س^٣ + ٢ س)^٩ (٣ س^٢ + ٢) تعطينا

$\int$ ١٠ (س^٣ + ٢ س)^٩ (٣ س^٢ + ٢) ء س =

(س^٣ + ٢ س)^{١٠} + جـ

ونفس الاسلوب يمكن استخدامه مع قانون السلسلة لايجاد صيغة عامة للتكامل غير المحدود ، فلنفرض ان م هو اصل المشتقة ق ، اي ان مَ = ق ، ولنفرض

ان هـ اقتران اخر قابل للتفاضل بحيث ان هـ (س) تقع في مجال م لجميع قيم س في فترة ما مغلقة [أ ، ب] . فهنا ناخذ الاقتران المركب م (هـ (س)) لجميع قيم س في [أ ، ب] ونستخدم قانون السلسلة (٣ – ٣٩) ، وان مَ = ق ، فنحصل على :

$$د_س [م (هـ(س))] = مَ (هـ (س)) هـَ (س)$$

$$= ق (هـ (س)) هـَ (س)$$

فباستخدام (٥ – ٤٢) نحصل على الصيغة التالية للتكامل .

$$(٥-٤٣) \quad \int ق (هـ (س)) (هـَ (س)) ء س = م (هـ (س)) + جـ ،$$

حيث مَ = ق

وهنالك طريقة سهلة لتذكر هذه الصيغة :

نفرض ان ص = هـ (س) ونعوض شكليا عن هـَ (س) ء س = ء ص ومنها نحصل على :

$$(٥-٤٤) \quad \int ق (هـ (س)) هـَ (س) ء س = \int ق (ص) ء ص$$

$$= م (ص) + جـ$$

$$= م (هـ (س)) + جـ$$

وهذا يشير الى ان هـ (س) يمكن اعتبارها تفاضلة ص . والواقع ان (٥ – ٤٤) هي احد الاسباب الرئيسية لاستعمال الرمز ء س من رموز التكامل .

ونشير الى اسلوب ايجاد التكامل غير المحدود باستعمال (٥ – ٤٤) بطريقة التعويض او طريقة تغيير المتغير .

مثـال (١) : أوجد $\int (٢س^{٣} + ١)^{٧} س^{٢}$ ء س .

الحـــل : اذا فرضنا ان ص = ٢ س^{٣} + ١ فباستخدام (٣ – ٣٦) يكون ء ص = ٦ س^{٢} ء س . ولكي نحصل على الصورة (٥ – ٤٤) يجب ان ندخل العامل

٦ في التكامل . وهذا يقضي ان نضرب في $\frac{١}{٦}$ (وهذا يمكن عمله بالرجوع الى (٥ - ٤١)) فنحصل على

$$\int (٢س^{٣} + ١)^{٧} س^{٢} \, د س = \frac{١}{٦} \int (٢س^{٣} + ١)^{٧} \, ٦ س^{٢} \, د س ،$$

وبالتعويض يكون :

$$\int (٢س^{٣} + ١)^{٧} س^{٢} \, د س = \frac{١}{٦} \int ص^{٧} \, د ص$$

$$= \frac{١}{٦} [\frac{١}{٨} ص^{٨} + جـ] ،$$

حيث جـ ثابت . والان نعود الى المتغير الاصلي س ، فبما ان ص = ٢س^{٣} + ١ فان المعادلة الاخيرة تصبح :

$$\int (٢س^{٣} + ١)^{٧} س^{٢} د س = \frac{١}{٦} [\frac{١}{٨} (٢س^{٣} + ١)^{٨} + جـ]$$

$$= \frac{١}{٤٨} (٢س^{٣} + ١)^{٨} + \frac{١}{٦} جـ .$$

وبدلا من استخدام ثوابت مثل $\frac{١}{٦}$ جـ للتكامل جرت العادة على كتابة

$$\int (٢س^{٣} + ١)^{٧} س^{٢} د س = \frac{١}{٤٨} (٢س^{٣} + ١)^{٨} + ك ، \text{ حيث}$$

$$ك = \frac{١}{٦} جـ .$$

ولكن ليس هناك اي فائدة عملية من تذكر هذه العلاقة بين ثابتين عشوائيين ، ففي المستقبل سنتعلم عدة طرق لايجاد ثوابت التكامل دون ذكر ما بينها من علاقات . وبدلا من اجراء العملية كما سبق يجب ان يكون واضحا انه من الممكن اجراء التكامل كما يلي :

$$\int ص^{٧} \, د ص = \frac{١}{٦} [ص^{٨}] + جـ$$

ويجري التعويض في التكامل بعدة طرق . ولتوضيح ذلك اليك طريقة اخرى لحل المثال ١ . نفرض ان ص = (٢ س^{٣} + ١) فيكون ء ص = ٦ س^{٢} ء س ، اي $\frac{١}{٦}$ ء ص = س^{٢} ء س . وعندها نعوض كما يلي :

$$\int (٢س^{٣} + ١)^{٧} س^{٢} ء س = \int ص^{٧} \frac{١}{٦} ء ص = \frac{١}{٤٨} ص^{٨} + جـ$$

$$= \frac{١}{٤٨} (٢س^{٣} + ١)^{٨} + جـ$$

ان تغيير المتغيرات في التكامل غير المحدود اداة قوية شريطة ان يضع الطالب المكامل بالصيغة :

ق (هـ (س)) هَ (س) او ق (هـ (س)) جـ هَ (س) ، حيث جـ ثابت . ومقدرة الطالب على ذلك تتناسب طرديا مع عدد المسائل التي يحلها .

وتستعمل طريقة التعويض لحساب التكاملات المحدودة فنستخدم (٥ – ٤٤) لايجاد التكامل غير المحدود (اي اصل المشتقة) ثم نستخدم النظرية الاساسية للتفاضل والتكامل . وثمة طريقة اخرى هي احيانا اقصر ، وهي تغيير حدود التكامل كما يتضح فيما يلي باستخدام (٥ – ٤٢) جنبا الى جنب مع النظرية الاساسية للتفاضل والتكامل فنحصل على الصيغة التالية حيث مَ = ق

$$\int_{م}^{ب} ق (هـ (س)) هَ (س) ء س = م (هـ (س)) \Big]_{م}^{ب}$$

ويكتب الطرف الايسر من هذه المتطابقة على النحو :

$$م (هـ (ب)) - م (هـ (أ)) = م (ص) \Big]_{هـ (أ)}^{هـ (ب)}$$

$$\int ق (ص) ء ص$$

ولذلك فان

$$\int_{أ}^{ب} ق(هـ(س)) هـَ(س)\, د س = \int_{هـ(أ)}^{هـ(ب)} ق(ص)\, د ص \qquad (٥-٤٥)$$

وهذه الصيغة تنص على انه بعد التعويض ص = هـ (س) ،

د ص = هـَ (س) د س

يمكننا استعمال قيم هـ التي تقابل س = أ ، ب ، س = ب على الترتيب حدودا للتكامل . ولذلك يكون من غير الضروري الرجوع الى المتغير الاصلي س .

مثـال ٢ : احسب $\int_{٢}^{١٠} \frac{٣}{\sqrt{٥س - ١}}\, د س$

الحـــل : نحل هذه المسائل اولا بايجاد التكامل غير المحدود ثم نطبق (٥ – ٣٤) :
اذا كانت ص = ٥س – ١ فان د ص = ٥ د س ، فيكون :

$$\int \frac{٣}{\sqrt{٥س - ١}}\, د س = \int \frac{٣}{٥} \cdot \frac{١}{\sqrt{٥س - ١}}\, ٥ د س$$

$$= \int \frac{٣}{٥} ص^{-\frac{١}{٢}}\, د ص .$$

$$= \frac{٦}{٥} ص^{\frac{١}{٢}} + جـ$$

$$= \frac{٦}{٥} (٥س - ١)^{\frac{١}{٢}} + جـ$$

وبتطبيق النظرية الاساسية للتفاضل والتكامل نحصل على

$$\int_{2}^{10} \frac{3}{\sqrt{5س - 1}}\, ء س = \frac{6}{5} (5س - 1)^{\frac{1}{2}} \Big]_{2}^{10}$$

$$= \frac{6}{5} (49^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{24}{5}$$

وهناك طريقة اخرى هي تغيير حدود التكامل بعد التعويض ، فقيم ص التي تقابل س = ٢ ، س = ١٠ هي ٥ × ٢ − ١ = ٩ ، ٥ × ١٠ − ١ = ٤٩ على الترتيب .

فالحل يأخذ الشكل التالي :

$$\int_{2}^{10} \frac{3}{\sqrt{5س - 1}}\, ء س = \frac{3}{5} \int_{9}^{49} ص^{\frac{1}{2}}\, ء ص$$

$$= \frac{6}{5} ص^{\frac{1}{2}} \Big]_{9}^{49}$$

$$= \frac{6}{5} [49^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}] = \frac{24}{5}$$

وهو نفس الجواب الذي حصلنا عليه سابقًا .

تمارين :

أوجد التكاملات ١ − ١٦

١ . $\int (3س + 1)^{4}\, ء س$

٢ . $\int (2س^{2} - 3)^{5} س\, ء س$

٣ . $\int س^{2} \sqrt{س^{3} - 1}\, ء س$

٤ . $\int ص \sqrt{9 - ص^{2}}\, ء ص$

٥. $\int \frac{س - ٢}{(س^{٢} - ٤س + ٣)^{٣}}$ د س

٦. $\int \frac{س^{٢} + س}{(٤ - ٣س^{٢} - ٢س^{٣})^{٤}}$ د س

٧. $\int \frac{س}{\sqrt[٣]{١ - ٢س^{٢}}}$ د س

٨. $\int (\sqrt[٤]{س^{٤} - س^{٢}})\ (١٠س^{٣} - ٥س)$ د س

٩. $\int \frac{(\sqrt{ص} + ٣)^{٤}}{\sqrt{ص}}$ د ص

١٠. $\int (١ + \frac{١}{ص})^{٣} (\frac{١}{ص^{٢}})$ د ص

١١. $\int_{١}^{٤} \sqrt{٥ - س}$ د س

١٢. $\int_{١}^{٥} \sqrt[٣]{(٢س - ١)}$ د س

١٣. $\int_{-١}^{١} (س^{٢} - ١)^{٣} س$ د س

١٤. $\int_{-٢}^{٠} \frac{ص^{٢}}{(ص^{٣} - ٢)^{٢}}$ د ص

١٥. $\int_{-١}^{١} \frac{١}{(٣ - ٢ع)^{٢}}$ د ع

١٦. $\int_{٠}^{٤} \frac{ص}{\sqrt{ص^{٢} + ٩}}$ د ص

أوجد التكاملات في ١٧ ، ١٨ (أ) بطريقة التعويض (ب) بطريقة فك المكامل . بأي طريقة تختلف ثوابت التكامل ؟

١٧ . $\int (س + ٤)^{٢}$ د س

١٨ . $\int (س^{٢} + ٤)^{٢}$ س د س

اثبت صحة المتطابقتين في التمرينين ١٩ ، ٢٠ اولا بطريقة التكامل ثانيا بالتفاضل :

١٩ . $\frac{د}{د س} \int س^{٣} \sqrt{س^{٤} + ٥}$ د س $= س^{٣} \sqrt{س^{٤} + ٥}$

٢٠ . $\frac{د}{د س} \int (٣ س + ٢)^{٧}$ د س $= (٣ س + ٢)^{٧}$

٢١ . أوجد $\frac{د}{د س} \int \frac{١}{\sqrt{س^{٣} + س + ٥}}$ د س

٢٢ . أوجد $\frac{د}{د س} \int \frac{س}{س + ١}$ د س

٢٣ . اذا كان ق (س) $= \sqrt{س + ١}$ ، أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى ق من ٠ الى ٣ .

٢٤ . اذا كان ق (س) $= \frac{س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$ ، فأوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى من ١ الى ٢ .

في التمرينين ٢٥ ، ٢٦ أوجد اعدادا تحقق نظرية القيمة المتوسطة

٢٥ . $\int \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + ٩}}$ د س

٢٦ . $\int_{-٢}^{\cdot} \sqrt[٣]{س + ١)}$ د س

تحقق من صحة التمرينين ٢٧ ، ٢٨

$$٢٧ .\quad \int \frac{\sqrt{س^{٢} - ٢ب}}{س^{٤}}\, د س = \frac{\sqrt{(س^{٢} - ٢ب)^{٣}}}{٣ \cdot ٢ب \cdot س^{٣}} + جـ$$

$$٢٨ .\quad \int \frac{١}{س^{٢}\sqrt{س^{٢} - ٢ب}}\, د س = \frac{\sqrt{س^{٢} - ٢ب}}{ب^{٢} س} + جـ$$

٧ — التكامل العددي :

لايجاد قيمة التكامل المحدود $\int_{م}^{ب}$ ق (س) د س بواسطة النظرية

الاساسية للتكامل والتفاضل لابد من ايجاد اصل المشتقة ق . فاذا لم نستطع ايجاد هذا الاصل فان هناك طرقا عددية يمكن استعمالها لتقريب التكامل لاي درجة من الدقة . فمثلا اذا كان مقياس التجزئة للفترة [م ، ب] صغيرا جدا فانه باستعمال (٥ — ١٦) يمكن تقريب التكامل بواسطة اي م ج للاقتران ق . وبالتحديد يمكن استعمال التجزئة المنتظمة حيث

$$\Delta س = \frac{ب - م}{ن} \text{ . فيكون :}$$

$$(٤٦-٥) \qquad \int_{م}^{ب} ق (س) د س \approx \sum_{ر=١}^{ن} ق (جـ_ر) \Delta س \text{ حيث } جـ$$

اي عدد في [س . س] وتعتمد دقة التقريب على طبيعة الاقتران وعلى مقدار ر ر-١
Δ س . ويمكن ان نجعل Δ س صغيرة جدا من اجل ان نحصل على الدقة المطلوبة وهذا يعني ان تزداد ن وبالتالي فان المجموع في (٥ — ٤٦) يحتوي على حدود كثيرة ويبين الشكل (٥ — ٢) الحالة التي يكون فيها ق (جـ) القيمة ر
الصغرى للاقتران في الفترة [س . س] ففي هذه الحالة يكون الخطأ العددي ر-١ ر
في التقريب هو مساحة المنطقة غير المظللة والواقعة تحت المنحنى وفوق المضلع الداخلي .

واذا جعلنا جـ$_{ر}$ = س أي اخذنا قيمة ق على الطرف الايسر في الفترة [س$_{ر-١}$ ، س$_{ر}$] فان (٥ — ٤٦) تصبح

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د\,س \approx \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_{ر-١})\,\Delta\,س .$$

واذا جعلنا ق على الطرف الايمن للفترة [س$_{ر-١}$ ، س$_{ر}$] فعندها تصبح (٥ — ٤٦).

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د\,س \approx \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_{ر})\,\Delta\,س$$

وهناك طريقة تقريب اخرى هي عادة ادق وهي اخذ معدل التقريبين السابقين

$$\text{اي } \frac{١}{٢}\left[\sum_{ر=١}^{ن} ق(س_{ر-١})\,\Delta\,س + \sum_{ر-١}^{ن} ق(س_{ر})\,\Delta\,س\right]$$

ويمكن كتابة هذا المجموع على صورة

$$\frac{\Delta\,س}{٢}\left[\sum_{ر=١}^{ن-١} ٢\,ق(س_{ر}) + ق(س_{٠}) + ق(س)\right]$$

وهذا يعطينا القاعدة التالية :

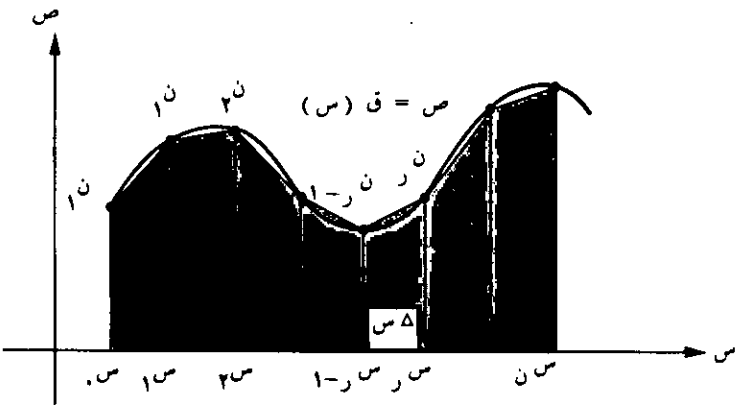
(٥-٤٧) قاعدة شبه المنحرف

اذا كان ق متصلا على [أ ، ب] وكانت التجزئة المنتظمة لهذه الفترة على شكل أ = س$_{٠}$ < س$_{١}$ < س$_{٢}$ < ... < س$_{ن}$ = ب ، فان :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د\,س \sim \frac{ب-أ}{٢}\left[ق(س_{٠}) + ٢\,ق(س_{١}) + ٢\,ق(س_{٢}) + ... + ٢\,ق(س_{ن-١}) + ق(س_{ن})\right]$$

وتأتي تسميتها بقاعدة شبه المنحرف من الحالة الخاصة عندما يكون ق غير سالب على [أ ، ب] فكما هو موضح في الشكل (٥ — ٩) اذا كانت ط$_{ر}$ هي

النقطة التي احداثيها السيني س$_ر$ على منحنى الاقتران فلكل قيم ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن فان النقطتين س$_{ر-١}$ ، س$_ر$ على محور السينات والنقطتين ط$_{ر-١}$ ، ط$_ر$ هي رؤوس لشبه المنحرف ومساحته هي



الشكل ٥-٩

$\frac{\Delta س}{٢}$ [ق (س$_{ر-١}$) + ق (س$_ر$)] ومجموع مساحات اشباه المنحرفات هذه هي نفس المجموع (٥ - ٤٧)

لذلك استعمل الاصطلاح الهندسي ، قاعدة شبه المنحرف ليدل على طريقة لتقريب المساحة تحت منحنى الاقتران من م الى ب باستعمال اشباه المنحرفات بدلا من المستطيلات التي تتضمن مجاميع ريمان .

مثـــال : قرب $\int_{١}^{٢٠} \frac{١}{س}$ د س

الحـــل : لاحظ اننا في هذه المرحلة لا نستطيع ايجاد اقتران م بحيث ان مَ (س) = $\frac{١}{س}$. فلنقرب التكامل المحدود باستعمال قاعدة شبه المنحرف واخذ ن = ١٠ . وللسهولة نرتب عملنا كالاتي حيث ق (س$_ر$) مقربة لاربع منازل عشرية .

ر	س ر	ق (س ر)	المعامل	المعامل × ق (س ر)
٠	١	١,٠٠٠	١	١,٠٠٠
١	١,١	,٩٠٩١	٢	١,٨١٨٢
٢	١,٢	,٨٣٣٣	٢	١,٦٦٦٦
٣	١,٣	٠,٧٦٩٢	٢	١,٥٣٨٤
٤	١,٤	,٧١٤٣	٢	١,٤٢٨٦
٥	١,٥	,٦٦٦٧	٢	١,٣٣٣٤
٦	١,٦	,٦٢٥٠	٢	١,٢٥٠٠
٧	١,٧	,٥٨٨٢	٢	١,١٧٦٤
٨	١,٨	,٥٥٥٦	٢	١,١١١٢
٩	١,٩	,٥٢٦٣	٢	١,٠٥٢٦
١٠	٢	,٥٠٠٠	١	٠,٥٠٠

ومجموع الارقام في العمود الاخير يساوي ١٣,٨٧٥٤ ، ولان

$$\frac{ب - أ}{٢ن} = \frac{٢ - ١}{٢٠} = ٠,٠٥$$ فمن (٥ — ٤٧) ينتج ان

$$\int_{١}^{٢} \frac{١}{س}\, د\, س \approx (٠,٠٥)\ (١٣,٨٧٥٤) = ٠,٦٩٣٧٧$$

$$\int_{١}^{٢} \frac{١}{س}\, د\, س \approx ٠,٦٩$$ مقربا لمنزلتين عشريتين

ويمكن اثبات ان التكامل في المثال ١ يساوي ٠,٦٩٣١٦ مقربا لخمس منازل عشرية ولكي نحصل على هذا التقريب يجب ان نختار عدداً أكبر للرمز ن . ومنازل عشرية أكثر للرمز ق (س ر) .

والقاعدة التالية هي على الغالب أكثر دقة من قاعدة شبه المنحرف :

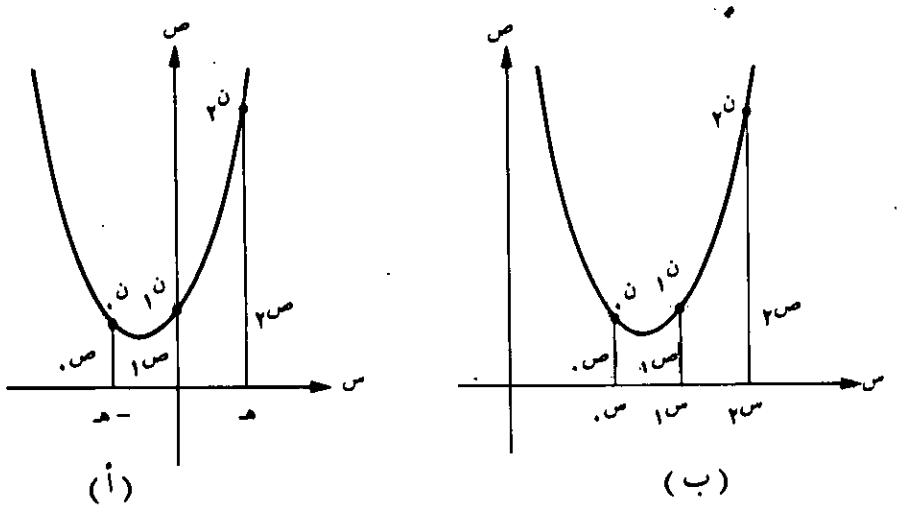
(٥—٤٨) قاعدة سيمبسون :

افرض ان ق متصل على [أ ، ب] وان ن عدد زوجي فاذا كانت التجزئة أ =

س. > س١ > س٢ > ... > سن = ب هي تجزئة منتظمة ، فان

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س \approx \frac{ب - أ}{٣ن} [ق(س.) + ٤ق(س١) + ٢ق(س٢) + ٤ق(س٣) + ... + ٢ق(س_{ن-٢}) + ٤ق(س_{ن-١}) + ق(سن)]$$

والفكرة التي يكمن وراءها البرهان هي انه بدلا من استعمال اشباه المنحرفات فاننا نستعمل اجزاء من منحنيات معادلات على شكل ص = جـ١ س٢ + جـ٢ س + جـ٣ حيث جـ١ ≠ ٠ ويكون شكل المنحنى لهذه المعادلة قطعا مكافئا . فاذا كانت ط. (س. ، ص.) ، ط١ (س١ ، ص١) ، ط٢ (س٢ ، ص٢) نقاطا حيث س. < س١ < س٢ فانه بتعويض احداثيات ط. ، ط١ ، ط٢ على الترتيب في هذه المعادلة نحصل على ثلاث معادلات يمكن حلها لايجاد جـ١ ، جـ٢ ، جـ٣ . وكحالة خاصة افرض ان ص. ، ص١ ، ص٢ ، و : ارقام موجبة ولتكن ط. (- و ، ص.) ، ط١ (٠ ، ص١) ، ط٢ (و ، ص٢) كما في الشكل ٥ - ١٠ أ



الشكل ٥-١٠

فالمساحة ج تحت منحنى الاقتران من −و الى و هي

$$ج = \int_{-و}^{و} (ج_1 س^2 + ج_2 س + ج_3) \, د س = \frac{ج_1 س^3}{3}$$

$$+ \frac{ج_2 س^2}{2} + ج_3 س \Big]_{-و}^{و} = \frac{و}{3} (2 ج_1 و^2 + 6 ج_3)$$

وبما ان احداثيات النقاط ط$_0$ ، ط$_1$ ، ط$_2$ تحقق المعادلة

ص = ج$_1$ س^2 + ج$_2$ س + ج$_3$ فان

ص$_0$ = ج$_1$ س^2 + ج$_2$ س + ج$_3$ = ج$_1$ و^2 − ج$_2$ و + ج$_3$.

ص$_1$ = ج$_3$

ص$_2$ = ج$_1$ و^2 + ج$_2$ و + ج$_3$

ومنها نحصل على التالي :—

ص$_0$ + ٤ ص$_1$ + ص$_2$ = ٢ ج$_1$ و^2 + ٦ ج$_3$ وبالتالي فان

ج = $\frac{و}{3}$ (ص$_0$ + ٤ ص$_1$ + ص$_2$) .

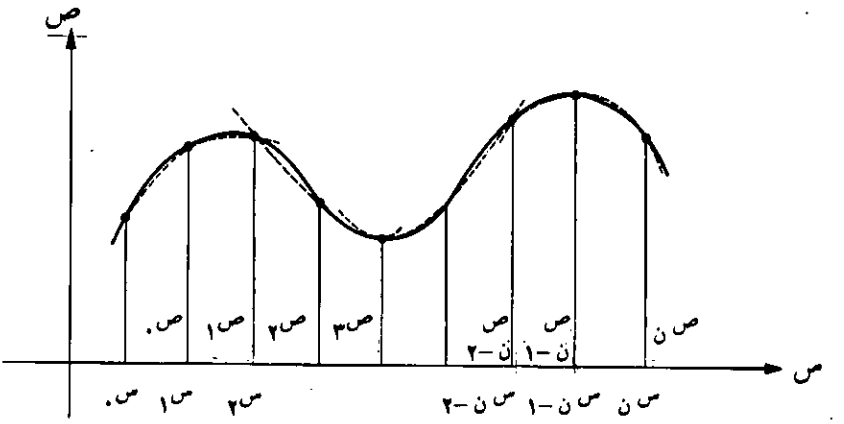
فاذا ازيحت النقاط ط$_0$ ، ط$_1$ ، ط$_2$ افقيا كما هو موضح في الشكل (٥ − ١٠) ب فان المساحة تحت المنحنى لا تتغير ولذلك فان

(٥−٤٩) تصح لاي ثلاث نقاط ط$_0$ ، ط$_1$ ، ط$_2$ طالما ان س$_1$ − س$_0$ = س$_2$ − س$_0$.

اذا كان ق (س) ≥ ٠ على [أ ، ب] فان قاعدة سيمبسون يمكن اشتقاقها باعتبار التكامل المحدود كمساحة تحت منحنى الاقتران ق من أ الى ب وهكذا

نفرض ان ق عدد زوجي وان و = $\frac{ب - أ}{ن}$ ، نجزىء [أ ، ب] الى ن من الفترات الجزئية طول كل منها و . وباختيار الاعداد أ = س$_0$ ، س$_1$ ، ٠٠٠ ، س$_ن$ = ب ، نفرض ان ط$_ر$ (س$_ر$ ، ص$_ر$) هي نقطة على منحنى الاقتران ق لها احداثي سيني مقداره س$_ر$ كما هو واضح في الشكل (٥ − ١١) . فاذا قرب القوس المار بالنقاط ط$_0$ ، ط$_1$ ، ط$_2$ بمنحنى المعادلة

ص = ج$_1$ س^2 + ج$_2$ س + ج$_3$ فان المساحة تحت منحنى الاقتران من س$_0$ الى س$_2$ تساوي بالتقريب ما تعطيه (٥ − ٤٩) . واذا قرب القوس المار



الشكل ٥ – ١١

بالنقاط ط٢ ، ط٣ ، ط٤ بنفس الطريقة فان المساحة تحت منحنى الاقتران ق من س٢ الى س٤ تكون ج = $\frac{و}{٣}$(ص١ + ٤ ص٣ + ص٤) واذا اكملنا بهذه الطريقة نحصل على آخر ثلاث نقاط وتكون المساحة المطلوبة هي بالتقريب

واذا اكملنا بهذه الطريقة نحصل على آخر ثلاث نقاط وتكون المساحة المطلوبة هي بالتقريب

$$\frac{و}{٣}\left(ص_{ن-٢} + ٢ص_{ن-١} + ص_{ن}\right)$$

ونجمع هذه المساحات المقربة فنجد ان

$$\int_{أ}^{ن} ق(س)\,د س \simeq \frac{و}{٣}\left(ص_{.} + ٤ص_{١} + ٢ص_{٢} + ٤ص_{٣} + \cdots + ٢ص_{ن-٢} + ٤ص_{ن-١} + ص_{ن}\right)$$

وهي نفس المجموع في (٥ – ٤٨) .

واذا كان ق سالبا في [أ ، ب] فان سالب المساحات يمكن استعماله للحصول على قاعدة سيمبسون .

وباستعمال طرق اكثر تطوراً يمكن تقدير الخطأ الحاصل في التكامل العددي بالطرق السالفة وبالتحديد : اذا كان ع عددا معينا بحيث ان $|ق^{(٤)}(س)| \leq ع$ لجميع قيم س في [أ ، ب] فان الخطأ الذي نحصل عليه في قاعدة سيمبسون لا يزيد عن $\frac{ع(ب-أ)^{٥}}{١٨٠\ ن^{٤}}$. اما في قاعدة شبه المنحرف

فاذا كانت | قً (س) | ≤ ع لجميع قيم س في [ﻫ ، ب] فان الخطأ لا يزيد

عن $\frac{ع\ (ب-ﻫ)^{٣}}{١٢\ ن^{٢}}$

مثـال ٢ : حل المثال ١ باستعمال قاعدة سيمبسون واجعل ن = ١٠ .

الحـــل : نرتب العمل كالتالي :

ر	س ر	ق (س ر)	المعامـــل	المعامل × ق (س ر)
٠	١	١,٠٠٠	١	١,٠٠٠
١	١,١	,٩٠٩١	٤	٣,٦٣٦٤
٢	١,٢	,٨٣٣٣	٢	١,٦٦٦٦
٣	١,٣	,٧٦٩٢	٤	٣,٠٧٦٨
٤	١,٤	,٧١٤٣	٢	١,٤٢٨٦
٥	١,٥	,٦٦٦٧	٤	٢,٦٦٦٨
٦	١,٦	٠,٦٢٥٠	٢	,٦٢٥٠
٧	١,٧	٠,٥٨٨٢	٤	١,٢٥٠٠
٨	١,٨	٠,٥٥٥٦	٢	٢,٣٥٢٨
٩	١,٩	٠,٥٢٦٣	٤	١,١١١٢
١٠	٢,٠	٠,٥٠٠٠	١	٢,١٠٥٢
				,٥٠٠٠

ان مجموع الاعداد في العمود الاخير يساوي ٢٠,٧٩٤٤ ولأن :

$\frac{ب-ﻫ}{٣ن} = \frac{٢-١}{٣٠} = \frac{١}{٣٠}$ فان ذلك يعني ان

$\int_{١}^{٢} \frac{١}{س}\ د\ س \simeq \frac{١}{٣٠} \times ٢٠,٧٩٤٤ = ٠,٦٩٣١٥$

لاحظ ان الجواب اقترب من الجواب المقرب لخمس منازل عشرية ، اي ٦٩٣١٦, أكثر مما اعطاه الحل السابق .

ومن فوائد التكامل العددي انه يمكن ان يستعمل لايجاد تكامل تقريبي لاقترانات تعطي على شكل جدول . ولتوضيح ذلك نفرض انه وجد بالتجربة ان هناك متغيرين س ، ص بينهما العلاقة التالية :

س	١,٠	١,٥	٢,٠	٢,٥	٣	٣,٥	٤
ص	٣,١	٤	٤,٢	٣,٨	٢,٩	٢,٨	٢,٧

فاذا افترضنا ان ص هو اقتران متصل للمتغير س اي ان ص = ق (س) فان التكامل المحدود

$\int_{1}^{4}$ ق (س) ء س قد يأخذ معنى فيزيائيا مهما ففي المثال الحالي يمكن تقريب التكامل دون معرفة الصيغة الواضحة للاقتران ق (س) . فاذا استخدمت قاعدة شبه المنحرف (٥ — ٤٧) بأخذ ن = ٦ ، فان

$$\frac{ب - أ}{٢ ن} = \frac{٤ - ١}{١٢} = ٠,٢٥ \text{ فيكون :}$$

$$\int_{1}^{4} \text{ق (س) ء س} = ٠,٢٥ [٣,١ + ٢ \times ٤ + ٢ \times ٣,٨ + ٢ \times$$

$$٢,٩ + ٢ \times ٢,٨ + ٢,٧] = ١٠,٣$$

وبما ان عدد الفترات الجزئية زوجي يمكن ايضا استخدام قاعدة سيمبسون

تمارين :

من التمارين ١ — ٦ استعمل (أ) قاعدة شبه المنحرف (ب) قاعدة سيمبسون لتقريب التكامل المحدود المعطى لقيم ن المعطاة . استعمل التقريب ق (س) لاربعة ارقام عشرية ثم قرب الجواب لمنزلتين عشريتين .

١) $\int_{١}^{٤} \frac{١}{س}$ د س ، ن = ٦

٢) $\int_{١}^{٣} \frac{١}{١ + س}$ د س ، ن = ٨

٣) $\int_{٠}^{١} \frac{١}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$ د س ، ن = ٤

٤) $\int_{٢}^{٣} \sqrt{١ + س^{٣}}$ د س ، ن = ٤

٥) $\int_{٠}^{٢} \frac{١}{\sqrt{٤ + س^{٢}}}$ د س ، ن = ١٠

٦) $\int_{٠}^{٠,٦} \frac{١}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ د س ، ن = ٦

٧) استعمل قاعدة شبه المنحرف حيث $\frac{ب - أ}{ن}$ = ٠,١ لاثبات ان

$$\int_{١}^{٢,٧} \frac{١}{س} \text{ د س} < ١ < \int_{١}^{٢,٨} \frac{١}{س} \text{ د س}$$

٨) أوجد اعلى حد للخطأ عند استعمال قانون سيمبسون في التمرين ١ .

افرض ان الجداول في تمارين ٩ ، ١٠ تمثل العلاقة بين متغيرين فيزيائيين س ، ص وافرض ان ص = ق (س) متصل . قرب التكامل $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) د س باستعمال (أ) قاعدة شبه المنحرف (ب) قاعدة سيمبسون .

٩)

س	٢	٢,٢٥	٢,٥	٢,٧٥	٣	٣,٢٥	٣,٥	٣,٧٥	٤
ص	٣,٧٦	٤,١٢	٣ ٢١	٣,٥٨	٣,٩٤	٤,١٥	٤,٦٩	٤,٤٤	٧,٥٢٥

١٠) س	٢	٢,٢	٢,٤	٢,٦	٢,٨	٣,٢٣	٣,٤٣,٦	٣,٨٣,٨	٤
ص	١.	٤١٢,	١١ ٧,	٩ ٤,	٨ ٣,	٦ ٣,	٢ ٨٦,	٥ ٤,	١٥, ٥	٩ ٥,٦٥, ٥

٨ — تمارين للمراجعـــة :

شفهيـــة : عرف او ناقش كلا مما يلي

١ . المساحة تحت منحنى ق غير السالب والمتصل من أ الى ب

٢ . التجزئة للفترة [أ ، ب]

٣ . مقياس التجزئة

٤ . مجموع ريمان

٥ . نهـــا $\sum_{ر}$ ق (جـ ر) Δ س ر = ل

٦ . التكامل المحدود للاقتران من أ الى ب

٧ . الحدان الاعلى والاسفل للتكامل

٨ . المكامل

٩ . خواص التكامل المحدود

١٠ . نظرية القيمة المتوسطة

١١ . النظرية الاساسية في التفاضل والتكامل .

١٢ . التكامل غير المحدود

١٣ . ثابت التكامل

١٤ . قانون القوة للتكامل غير المحدود

١٥ . طريقة التعويض

١٦ . التكامل العددي

كتابيـــة :

أوجد القيم المبينة في التمارين ١ — ٣

١. $\sum_{ر=١}^{٤} (ر^{٢} + ٣)$ ٢ . $\sum_{ر=١}^{٥٠} ٨$

٣ . $\sum_{ر=٠}^{٤} \left(\frac{-١}{٢}\right)^{ر-٢}$

٤ . افرض ان الاقتران ق معرف على الفترة [— ٢ ، ٣] حسب المعادلة ق (س) = ١ — س^{٢} وان ج هي تجزئة للفترة [— ٢ ، ٣] الى خمس فترات جزئية متساوية . أوجد مجموع ريمان م$_{ج}$ اذا كانت قيم ق محسوبة على منتصف كل فترة جزئية .

٥ . احسب م$_{ج}$ في التمرين السابق اذا كانت قيم ق محسوبة على الطرف الايسر .

٦ . اذا اعطينا $\int$ (س^{٢} + ٢ س + ٥) ء س . اوجد العدد الذي يحقق نظرية القيمة المتوسطة .

أوجد ما يلي (تمارين ٧ — ٢٥)

٧ . $\int_{١}^{\cdot} \sqrt[٣]{٨ س^{٧}}$ ء س

٨ . $\int \sqrt[٤]{٥ ص + ١}$ ء ص

٩ . $\int \frac{س^{٢}}{(١ + س^{٣})^{٢}}$ ء س

١٠ . $\int (س^{٢} + ٤)^{٢}$ ء س

١١ . $\int (١ — ٢ س^{٢})^{٣} س$ ء س

١٢ . $\int \frac{(١ + \sqrt{س})^{٢}}{\sqrt[٣]{س}}$ ء س

١٣ . $\int_{\cdot}^{٢} \frac{ص + ١}{\sqrt{ص^{٢} + ٢ ص}}$ ء س

١٤ . $\int_{1}^{2} \frac{(ص^{٢} + ٢)}{ص^{٢}}$ د ص

١٥ . $\int \frac{د س}{\sqrt{س}\,(١ + \sqrt{س})^{٢}}$

١٦ . $\int_{١}^{١} \frac{٢س^{٢} - س - ٦}{س + ٢}$ د س

١٧ . $\int$ (٣ − ٢س − ٥س^{٣}) د س

١٨ . $\int$ (س + س$^{-١}$)^{٢} د س

١٩ . $\int_{.}^{٢}$ س^{٢} $\sqrt{١ + س^{٣}}$ د س

٢٠ . $\int$ ٣س^{٢} $\sqrt{س^{٣} + س}$ د س

٢١ . $\int$ (٤ص + ١) (٤ص^{٢} + ٢ص − ٧)^{٢} د ص

٢٢ . $\int \frac{\sqrt[٤]{١ - ص^{-١}}}{ص^{٢}}$ د ص

٢٣ . $\int$ (٢س$^{-٣}$ − ٣س$^{-٢}$) د س

٢٤ . $\int_{١}^{٩} \sqrt{٢ص + ٧}$ د ص

٢٥ . $\int_{د س}^{} \sqrt[٥]{س^{٤} + ٢س^{٢} + ١}$ د س

٢٦ . $\int_{د س}^{ص}$ (س^{٢} + ١)^{١٠} د س

٢٧ . $\int_{0}^{1} (س^{٣} + س^{٢} - ٧)^{٥}$ د س

٢٨ . احسب $\int_{0}^{10} \sqrt{١٧ + س^{٤}}$ د س بواسطة

أ) قاعدة شبه المنحرف باخذ ن = ٥

ب) قاعدة سيمبسون بأخذ ن = ٨ استعمل التقريب لاربع منازل عشرية عند ايجاد ق (س) ثم قرب الجواب لمنزلتين عشريتين .

٢٩ . اذا كان (س) = س^{٤} $\sqrt{س^{٥} + ٤}$ ، أوجد المساحة تحت منحنى الاقتران من . الى ٢ .

٣٠ . استعمل التكامل المحدود لاثبات ان مساحة المثلث القائم الزاوية الذي ارتفاعه أ وقاعدته ب تعادل $\frac{أ\ ب}{٢}$

« ملاحظة : خذ رؤوس المثلث عند النقاط (٠ ، ٠) ، (أ ، ٠) ، (أ ، ب) » .

الفصل السادس

تطبيقات على التكامل المحدود

يفيد التكامل المحدود لحل انواع مختلفة من المسائل التطبيقية ، وسنناقش في هذا الفصل كثيرا من هذه التطبيقات ، كما سنناقش تطبيقات اخرى في فصول لاحقة من هذا الكتاب .

١ — المساحـــة :

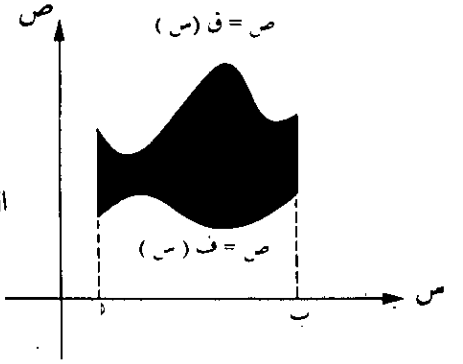
اذا كان الاقتران ق متصلا على الفترة [أ ، ب] ، وغير سالب ، فباستخدام (٥ - ٢٠) نجد ان المساحة تحت منحنى ق من أ الى ب تساوي $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س$.

واذا كان الاقتران ف متصلا ايضا على الفترة [أ ، ب] وغير سالب ، وكان ق (س) ≥ ف (س) لجميع قيم س في [أ ، ب] ، فان المساحة م للمنطقة المحدودة بمنحنيات الاقترانين ق ، ف والمعادلتين س = أ ، س = ب (انظر الشكل ٦-١) تعطى بالصيغة :

$$(٦-١) \quad م = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س - \int_{أ}^{ب} ف(س)\,د س$$

$$= \int_{أ}^{ب} [ق(س) - ف(س)]\,د س$$

ويمكن تعميم الصيغة للحالات التي تكون فيها ق او ف سالبة لبعض قيم س في [أ ، ب] ، كما هو موضح في الشكل ٦ - ٢ . ولايجاد مساحة المنطقة المشار



الشكل ٦-١

اليها نختار عددا سالبا د اقل من القيمة الصغرى للاقتران ف على الفترة [أ ، ب] ، ونأخذ الاقترانين ق$_1$ ، ف$_1$ المعرفين كما يلي :

(٦-٢) ق$_1$ (س) = ق (س) - د ، ف$_1$ (س) = ف (س) - د

لجميع قيم س في [أ ، ب] ، ولان د عدد سالب فان قيم ق$_1$ ، ف$_1$ توجد باضافة العدد الموجب |د| لكل من ق ، ف على الترتيب . وهذا يكافئ هندسيا رفع منحنى الاقترانين ق ، ف مسافة تساوي |د| كما هو موضح في الشكل ٦ - ٢ (ب) . وهذا يعطينا منطقة لها نفس شكل المنطقة الاولى ولكنها تقع جميعا فوق محور السينات . واذا كانت م مساحة المنطقة ، فباستخدام (٦ - ١) ، (٦ - ٢) نجد ان :

$$م = \int_{أ}^{ب} [ق_1 (س) - ف_1 (س)] \, د س =$$

$$\int_{أ}^{ب} [(ق (س) - د) - (ف (س) - د)] \, د س$$

وتبسيط هذا التكامل يقودنا الى التعريف التالي :

(٦-٣) تعريف المساحة : اذا كان كلا الاقترانين ق ، ف متصلا على الفترة [أ ، ب] وكان ق (س) ≥ ف (س) لجميع قيم س في [أ ، ب] ، فان المساحة م للمنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانين ق ، ف ، س = أ ، س = ب تعطي بالصورة :

$$م = \int_{أ}^{ب} [ق (س) - ف (س)] \, د س$$

واذا كان ف (س) = صفرا لجميع قيم س في [أ ، ب] فان منحنى الاقتران ف يقع على محور السينات وتصبح الصيغة (٦ - ٣) مطابقة للصيغة

(٥ – ٢٠) . واذا كان ق (س) = صفرا لجميع قيم س في [أ ، ب] فان منحنى الاقتران ق يقع على محور السينات ويصبح الوضع كما هو موضح في الشكل ٦ – ٣ (ب) وفي هذه الحالة تأخذ الصيغة (٦ – ٣) الصورة التالية

$$(٦-٤)\quad م = \int_{أ}^{ب} [٠ - ف(س)]\, د س = -\int_{أ}^{ب} ف(س)\, د س$$

ويمكن اشتقاق هذه الصيغة بملاحظة ان منحنى المعادلة ص = – ف (س) هو انعكاس منحنى ص = ف (س) في محور السينات (انظر الشكل ٦ – ٣ (ب)) . وينتج ان مساحة المنطقة المحدودة بمحور السينات ومنحنيات ف س = أ ، س = ب هي نفس مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى – ف من الى ب المعطاة بالصيغة (٦ – ٤) .

مثـال ١ : أوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنيات ص + س^{٢} = ٦ ، ص + ٢ س – ٣ = صفرا .

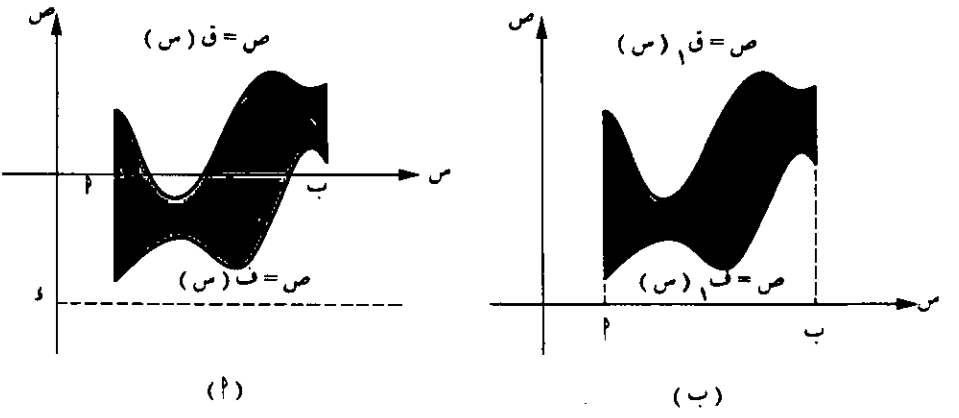
الحـــل : في الشكل ٦ – ٤ نجد رسما للمنحنيين والمنطقة . ونقطتا تقاطع المنحنين هما (– ١ ، ٥) ، (٣ ، – ٣) ويمكن ايجادهما بحل المعادلتين آنيا . والمعادلتان تكافئان المعادلتين ص = ٦ – س^{٢} ، ص = ٣ – ٢ س . فاذا وضعنا ق (س) = ٦ – س^{٢} ، ف (س) = ٣ – ٢ س ، تتحقق شروط تطبيق الصيغة (٦ – ٣) حيث ان مجال الاقترانين ق ، ف هو [– ١ ، ٣ فينتج ان

$$م = \int_{-١}^{٣} [(٦ - س^{٢}) - (٣ - ٢س)]\, د س =$$

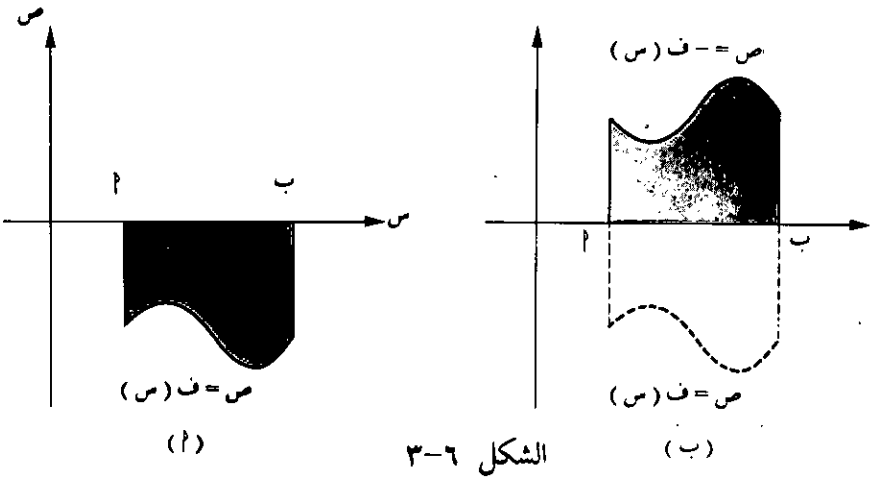
$$\int_{-١}^{٣} (٣ - س^{٢} + ٢س)\, د س$$

$$= \left[٣س - \frac{١}{٣} س^{٣} + س^{٢} \right]_{-١}^{٣}$$

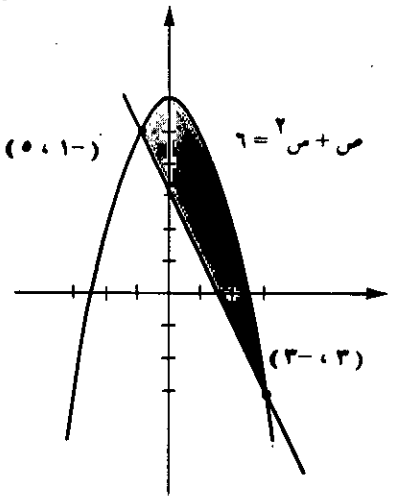
$$= [٩ - \frac{٢٧}{٣} + ٩] - [-٣ - \frac{(-١)}{٣} + ١] = \frac{٣٢}{٣}$$



الشكل ٦-٢



الشكل ٦-٣



الشكل ٦-٤

في بعض الحالات نحتاج لتقسيم المنطقة واستخدام الصيغة (٦ – ٣) أكثر من مرة لايجاد المساحة وذلك كما هو موضح في المثال التالي :

مثـال ٢ : أوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنيات ص – س = ٦ ، ص – س^{٣} = ٠ ، ٢ص + س = ٠

الحـل : في الشكل ٦ – ٥ رسم للمنحنيات والمنطقة ، وقد حولت كل معادلة لتعطي ص بدلالة س وذلك لايجاد الاقترانات المناسبة وتلاحظ انه لا يمكن ايجاد مساحة المنطقة بتطبيق الصيغة (٦ – ٣) مرة واحدة . ولكن اذا قسمت المنطقة الى منطقتين جزئيتين ط$_{١}$ ، ط$_{٢}$ كما هو موضح في الشكل فيمكن استخدام (٦ – ٣) لايجاد مساحة كل من المنطقتين وبجمع المساحتين نحصل على المساحة المطلوبة . فالمنطقة ط$_{١}$ محدودة من اعلى بمنحنى ص = س + ٦ ومن اسفل بمنحنى ص = $-\frac{١}{٢}$ س ، ومجال س هو [– ٤ ، ٠] ، فبتطبيق (٦ – ٣) نجد ان مساحة ط$_{١}$ هي :

$$م_{١} = \int_{-٤}^{٠} [س + ٦) - (-\frac{١}{٢} س)] د س =$$

$$\int_{-٤}^{٠} (\frac{٣}{٢}س + ٦) د س = \left[\frac{٣ س^{٢}}{٤} + ٦ س \right]_{-٤}^{٠}$$

$$= ٠ - (٢٤ - ١٢) = ١٢$$

والمنطقة ط$_{٢}$ محدودة من اعلى بمنحنى ص = س + ٦ ومن اسفل بمنحنى ص = س^{٣} ومجال س هو [٠ ، ٢] وهكذا فان مساحة ط$_{٢}$ هي :

$$م_{٢} = \int_{٠}^{٢} [(س + ٦) - س^{٣}] د س$$

$$= \left[\frac{س^{٢}}{٢} + ٦ س - \frac{س^{٤}}{٤} \right]_{٠}^{٢}$$

$$= (٢ + ١٢ - ٤) - ٠ = ١٠$$

وبهذا تصبح مساحة المنطقة جميعها = $م_{١}$ + $م_{٢}$ = ١٢ + ١٠ = ٢٢

ونحتاج احيانا الى ايجاد مساحة منطقة محدودة بمنحنيات ص = جـ ، ص = ء ومعادلتين على الصورة س = ق (ص) ، س = ف (ص) حيث ق ، ف متصلان على الفترة [جـ ، ء] و ق (ص) ≥ ف (ص) لجميع قيم ص في [جـ ، ء] (انظر الشكل ٦ – ٦) . من السهل ايجاد صيغة للمساحة بطريقة تشبه ما سبق ان ناقشناه وذلك بتبديل أدوار س ، ص فنحصل على الصيغة :

$$م = \int_{جـ}^{ء} [ق(ص) - ف(ص)] \, د ص \qquad (٦-٥)$$

وفي تمارين من هذا النوع تعتبر ص المتغير المستقل .

مثـال ٣ : جد مساحة المنطقة المحدودة بمنحني المعادلتين س = ٢ ص^{٢} – ٤ ، س = ص^{٢} .

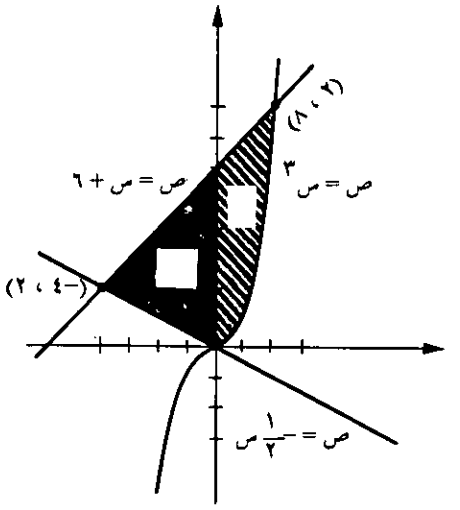
الحـــل : المنطقة مرسومة في الشكل ٦ – ٧ ، فاذا استخدمنا الصيغة (٦ – ٣) نحتاج لحساب عدة تكاملات لايجاد المساحة المطلوبة . ولكن اذا اعتبرنا ص المتغير المستقل يمكن استخدام الصيغة (٦ – ٥) لحل المسألة باستخدام تكامل واحد فقط وذلك بوضع ق (ص) = ص^{٢} ، ف (ص) = ٢ ص^{٢} – ٤ لينتج :

$$م = \int_{-٢}^{٢} [ص^{٢} - (٢ص^{٢} - ٤)] \, د ص = \int_{-٢}^{٢} (٤ - ص^{٢}) \, د ص$$

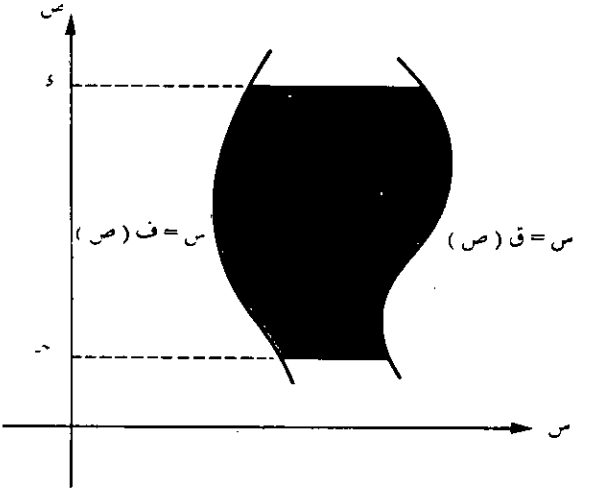
$$= \left[٤ص - \frac{١}{٣} ص^{٣} \right]_{-٢}^{٢}$$

$$= [٨ - \frac{٨}{٣}] - [(-٨) - \frac{(-٨)}{٣}] = \frac{٣٢}{٣}$$

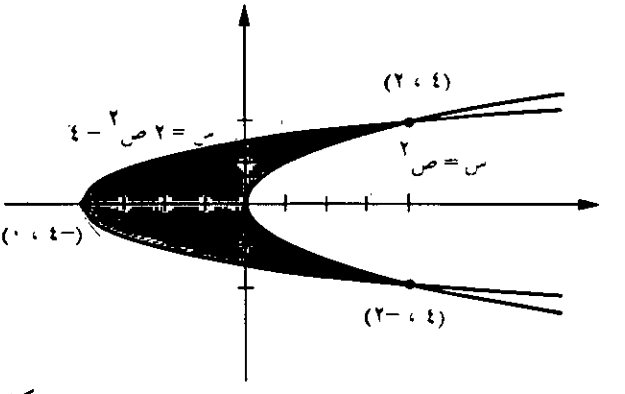
ويمكن تسهيل التكامل بملاحظة ان محور السينات ينصف المنطقة فيكفي حساب



شكل ٦-٥



شكل ٦-٦



شكل ٦-٧

مساحة جزء المنطقة الواقع فوق محور السينات ومضاعفته لنحصل على

$$م = ٢ \int_{٠}^{٢} [ص^{٢} - (٢ص^{٢} - ٤)] \, ء ص$$

ومن المفيد اعتبار صيغة المساحة بمثابة نهاية لمجموع . فلنفرض ق ، ف كما في (٦ – ٣) ، وليكن ك (س) = ق (س) – ف (س) لجميع قيم س في [أ ، ب] . يفسر هذا هندسيا بان ك (س) هي المسافة بين منحني الاقترانين ق ، ف اي المسافة بين النقطتين (س ، ق (س)) ، (س ، ف (س)) – وكما ورد في تكامل ريمان في الفصل الخامس ، لنفرض ت تجزئة للفترة [أ ، ب] معرفة بالاعداد أ = س$_{٠}$ < س$_{١}$ < س$_{٢}$ < ... < س$_{ن}$ = ب ، ولكل ي لتكن Δ س$_{ي}$ = س$_{ي}$ – س$_{ي-١}$ ، ولتكن و$_{ي}$ نقطة اختيارية في الفترة [س$_{ي-١}$ ، س$_{ي}$] . فمن تعريف ك :

(٦–٦) ك (و$_{ي}$) Δ س$_{ي}$ = [ق (و$_{ي}$) – ف (و$_{ي}$)] Δ س$_{ي}$

وهذه هي مساحة مستطيل طوله ق (و$_{ي}$) – ف (و$_{ي}$) وعرضه Δ س$_{ي}$ (انظر الشكل (٦ – ٨)) . ومجموع ريمان يساوي

(٦–٧) $\sum_{ي}$ ك (و$_{ي}$) Δ س$_{ي}$ = $\sum_{ي}$ [ق (و$_{ي}$) – ف (و$_{ي}$)] Δ س$_{ي}$ وهو

مجموع مساحات المستطيلات الموضحة في الشكل ٦–٨ ، ويمكن اعتباره تقريبا لمساحة المنطقة بين منحنيي ق ، ف من أ الى ب . ومن تعريف التكامل المحدود ينتج ان :

$$\text{نهـا}_{\|ت\| \to ٠} \sum_{ي} ك (و_{ي}) \Delta س_{ي} = \int_{أ}^{ب} ك (س) \, ء س$$

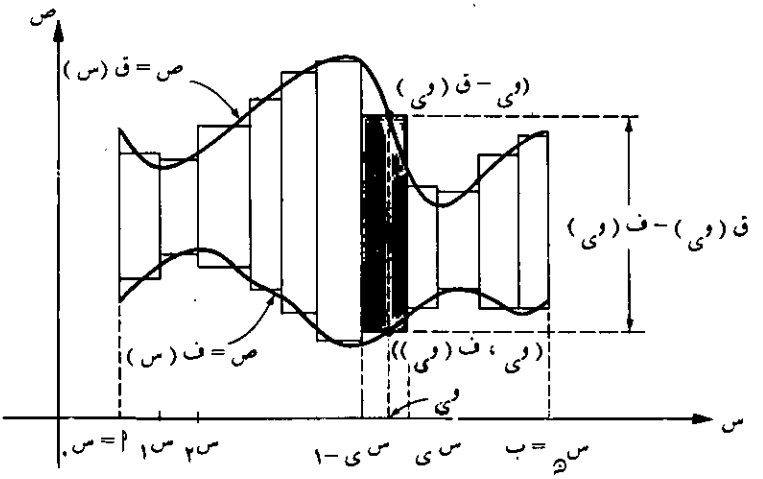
او بعبارة اخرى :

(٦–٨) $$\text{نهـا}_{\|ت\| \to ٠} \sum_{ي} [ق (و_{ي}) - ف (و_{ي})] \Delta س_{ي} = \int_{أ}^{ب} [ق (س) - ف (س)] \, ء س = م$$

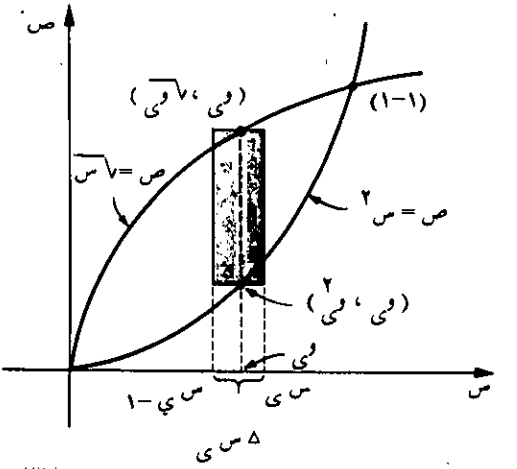
وهذه الصيغة تمكننا من الاخذبوجهة نظر تختلف عن تلك التي اعطيت في (٦ – ٣) . فعند استخدام (٦ – ٨) نفكر بتقريب المنطقة باستخدام مستطيلات من النوع الموضح في الشكل ٦ – ٨ ، وبعد كتابة صيغة لمساحة مستطيل نموذجي ، كما في (٦ – ٦) ، نجمع مساحات هذه المستطيلات ، وكما في (٦ – ٨) نحسب نهاية مجموعها لايجاد مساحة المنطقة .

مثـال ٤ : أوجد مساحة المنطقة المحدودة بين منحنيي المعادلتين ص = س^{٢} ، ص = $\sqrt{\text{س}}$.

الحـــل : يمكن ايجاد المساحة بالتعويض المباشر في الصيغة (٦ – ٣) ، حيث ق (س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، ف (س) = س^{٢} . ولكننا سنستخدم طريقة مجموع ريمان المذكورة أعلاه . ففي الشكل ٦–٩ نجد رسما للمنطقة ولمستطيل نموذجي



شكل ٦–٨



شكل ٦–٩

من مجموع ريمان . ومساحة المستطيل هي $(\sqrt{\text{و}_ي} - \text{و}_ي^2)\Delta \text{س}_ي$ ، وكما في (٦ – ٨) يكون :

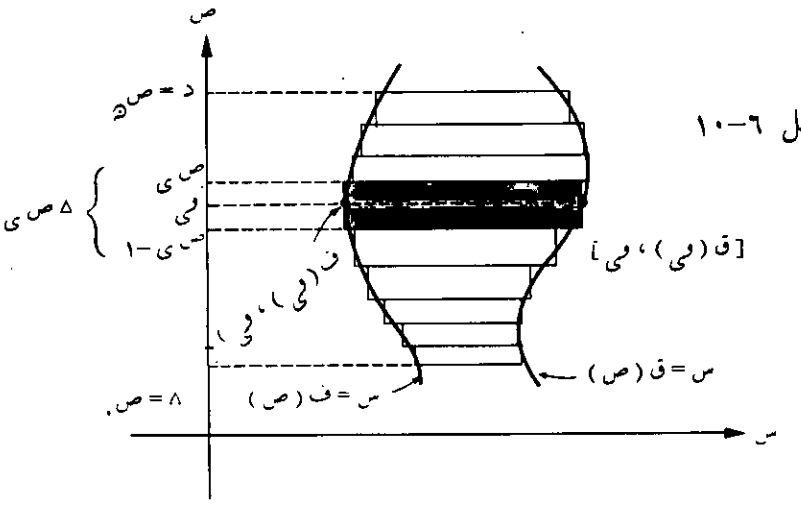
$$\text{م} = \text{نهـا}_{\|\text{ت}\| \to 0} \sum_{ي} (\sqrt{\text{و}_ي} - \text{و}_ي^2)\Delta \text{س}_ي = \int_{0}^{1} (\sqrt{\text{س}} - \text{س}^2)\, \text{د س}$$

$$= \left[\frac{2}{3} \text{س}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \text{س}^3 \right]_{0}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

ويمكن استخدام اساليب مماثلة للمناطق التي من النوع المبين في الشكل ٦ – ٦ . وفي هذه الحالة نختار نقطا على محور الصادات احداثياتها : (٠ ، ص$_0$) ، (٠ ، ص$_1$) ، ... ، (٠ ، ص$_ن$) ، حيث ص$_0$ = جـ ، ص$_ن$ = د ، وبذا نحصل على تجزئة للفترة [جـ ، د] الى فترات جزئية عرضها $\Delta \text{ص}_ي = \text{ص}_ي - \text{ص}_{ي-1}$ ، ولكل ي نختار عددا و في $[\text{ص}_{ي-1} ، \text{ص}_ي]$ ونأخذ مستطيلات مساحتها ق (و$_ي$) – ف (و$_ي$)]Δ ص$_ي$ ، كما هو موضح في الشكل ٦ – ١٠ مما يؤدي الى :

$$(٦ - ٩) \quad \text{م} = \text{نهـا}_{\|\text{ت}\| \to 0} \sum_{ي} [\text{ق} (\text{و}_ي) - \text{ف} (\text{و}_ي)]\, \Delta \text{ص}_ي$$

$$= \int_{\text{جـ}}^{\text{د}} [\text{ق} (\text{ص}) - \text{ف} (\text{ص})]\, \text{د ص}$$



شكل ٦–١٠

حيث تنتج المساواة الاخيرة من تعريف التكامل المحدود ، وهذا يوافق ما جاء في (٦ – ٥) .

ويعود سبب تأكيدنا على طريقة المجموع هذه الى ان طرقا مماثلة تستعمل بكثرة لحساب كميات رياضية وفيزيائية اخرى ، والعديد من هذه ستناقش في البنود الباقية من هذا الفصل .

تمارين :

في التمارين ١ – ٢٠ ارسم المنطقة المحدودة بمنحنيات المعادلات المعطاة ثم أوجد مساحتها :

١ . ص = ١ / س^{٢} ، ص = – س^{٢} ، س = ١ ، س = ٢ .

٢ . ص = $\sqrt{س}$ ، ص = – س ، س = ١ ، س = ٤ .

٣ . ص^{٢} = – س ، س – ص = ٤ ، ص = – ١ ، ص = ٢ .

٤ . ص = ص^{٢} ، ص – س = ٢ ، ص = – ٢ ، ص = ٣ .

٥ . ص = س^{٢} + ١ ، ص = ٥ .

٦ . ص = ٤ – س^{٢} ، ص = – ٤ .

٧ . ص = س^{٢} ، ص = ٤ س .

٨ . ص = س^{٣} ، ص = س^{٢} .

٩ . ص = ١ – س^{٢} ، ص = س – ١ .

١٠ . س + ص = ٣ ، ص + س^{٢} = ٢

١١ . ص^{٢} = ٤ + س ، ص^{٢} + س = ٢ .

١٢ . س = ص^{٢} ، س – ص – ٢ = ٠ .

١٣ . ص = س ، ص = ٣س ، س + ص = ٤ .

١٤ . س – ص + ١ = ٠ ، ٧س – ص – ١٧ = ٠ ، ٢س + ص + ٢ = ٠

١٥ . ص = س^{٣} – س ، ص = ٠ .

١٦ . ص = س^{٣} – س^{٢} – ٦س ، ص = ٠ .

١٧ . س = ٤ص – ص^{٣} ، س = ٠ .

١٨ . س = ص$^{٣/٢}$ س = ٠ ، ص^{٢} .

١٩ . ص = س $\sqrt{٤ – س^{٢}}$ ، ص = ٠ .

٢٠ . ص = س $\sqrt{س^{٢} – ٩}$ ، ص = ٠ ، س = ٥ .

٢١ ــ اذا كانت ط هي المنطقة المحدودة بالمنحنيات ٢ س + ٣ ص = ٦ ، س = ٠ ، ص = ٠ ، فعبر عن مساحة ط كنهاية مجموع . أوجد المساحة بدون اجراء عملية التكامل .

٢٢ ــ اذا كانت ط هي المنطقة المحدودة بالمنحنيات ٢ س + ٣ ص = ٦ ، س = ٠ ، ص = ٠ فعبر عن مساحة المنطقة ط كنهاية مجموع واحسب هذه المساحة بدون اجراء عملية التكامل .

يمثل كل من التمارين ٢٣ – ٢٦ نهاية مجموع لاقتران ق على الفترة [٠ ، ١] فسر كل نهاية كمساحة وأوجد قيمتها :

٢٣ ــ $\lim_{\text{ت} \to 0} \sum_{\text{ى}} (٤ \text{ و}_{\text{ى}} + ١) \Delta \text{س}_{\text{ى}}$

٢٤ ــ $\lim_{\text{ت} \to 0} \sum_{\text{ى}} (\text{و}_{\text{ى}} - \text{و}_{\text{ى}}^{٢}) \Delta \text{س}_{\text{ى}}$

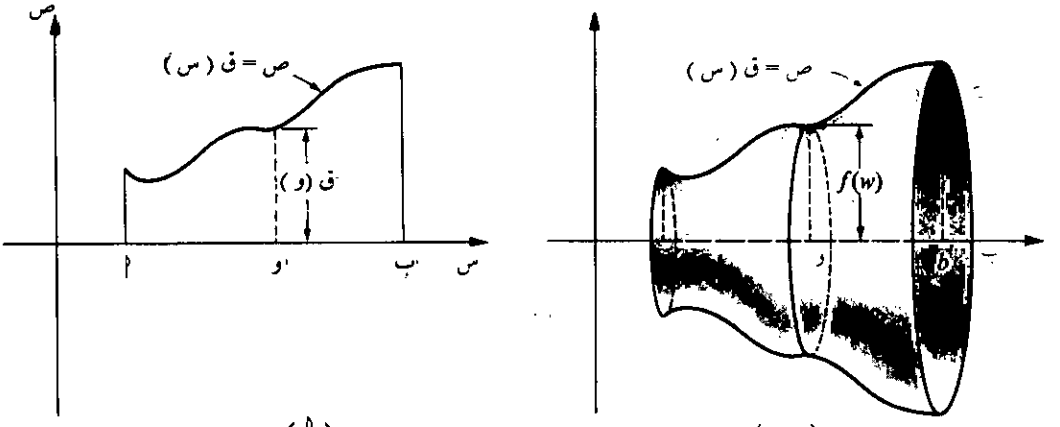
٢٥ ــ $\lim_{\text{ت} \to 0} \sum_{\text{ى}} (٤ - \text{و}_{\text{ى}}^{٢}) \Delta \text{ص}_{\text{ى}}$

٢٦ ــ $\lim_{\text{ت} \to 0} \sum_{\text{ى}} \sqrt{٣ \text{ و}_{\text{ى}} + ١} \Delta \text{ص}_{\text{ى}}$

٢ ــ الحجوم الدورانية :

عند دوران منطقة مستوية حول مستقيم في نفس المستوى فان الجسم الناتج يسمى جسما دورانيا ، ويقال ان الجسم تولد من دوران المنطقة ، كما يسمى المستقيم الذي تم الدوران حوله محور الدوران . فاذا اعتبرنا المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران المتصل ف الذي قيمه ليست سالبة ، ومحور السينات ومنحنيي س = أ ، س = ب (انظر الشكل ٦ – ١١ (أ) ، فعندما تدور هذه المنطقة حول محور السينات يتولد جسم من النوع الموضح في الشكل ٦ – ١١ (ب) . وكمثال على ذلك اذا كان ق اقترانا ثابتا فان المنطقة مستطيلة والجسم المتولد اسطوانة دائرية قائمة . واذا كان منحنى الاقتران ق نصف دائرة

طرفا قطرها هما النقطتان (أ ، ٠) ، (ب ، ٠) حيث أ < ب فان الجسم الدوراني كرة قطرها أ – ب . واذا كانت المنطقة المعطاة مثلثا قائم الزاوية قاعدته على محور السينات وراسان من رؤوسه هما النقطتان (أ ، ٠) ، (ب ، ٠) ، والزاوية القائمة هي احدى زاويتي القاعدة يكون الجسم المتولد مخروطا دائريا قائما .



(أ) (ب)

شكل ٦–١١

واذا قطع مستو عمودي على محور السينات الجسم الذي تراه في الشكل ٦ – ١١ (ب) فاننا نحصل على مقطع دائري ، واذا مر المستوى بالنقطة التي احداثيها السيني و ، كما هو موضح في الشكل ، فان نصف قطر الدائرة يساوي ق (و) ومساحتها

$\pi[ق(و)]^2$ ومنه نتوصل الى تعريف لحجم الجسم الدوراني باستخدام مجاميع ريمان ، وذلك بطريقة مشابهة لتلك التي استخدمت لايجاد المساحات في البند السابق .

لنفرض ان الاقتران ق متصل على [أ ، ب] وقيمه ليست سالبة ولنأخذ مجموع ريمان $\sum_{ى}$ ق ($و_ى$) $\Delta س_ى$ ، حيث $و_ى$ اي عدد في الفترة الجزئية [$س_{ى-١}$ ، $س_ى$] من تجزئة ما ، ت ، للفترة [أ ، ب] . وهذا يعطينا مجموع مساحات مستطيلات من النوع الموضح في الشكل ٦ – ١٢ أ والجسم المتولد من الضلع المتكون من هذه المستطيلات له المظهر الموضح في الشكل ٦ – ١٢ ب . لاحظ ان المستطيل اليائي يولد قرصا دائريا (اي اسطوانة دائرية قائمة مبسطة) نصف قطر قاعدته يساوي ق ($و_ى$) وارتفاعه (او سمكه) $\Delta س_ى = س_ى - س_{ى-١}$ ، وحجم هذا القرص هو مساحة قاعدته مضروبة في الارتفاع اي π [ق ($و_ى$] $^2 \Delta س_ى$. ومجموع حجوم هذه الاقراص هو حجم الجسم المبين في الشكل ٦ – ١٢ ب ويساوي .

$$\sum_{ى} \pi \; [\text{ق} (\text{و}\,)]^{2} \Delta \text{س}_{ى} \qquad (٦-١٠)$$

ويمكننـــا اعتبـــار (٦-١٠) مجموع ريمان للاقتران هـ حيث هـ(س) = π [ق (س)]^{2} . فبديهي انه كلما اقتربت ||ت|| من الصفر فان المجموع (٦-١٠) يقترب من حجم الجسم . وطبيعي ان نعرف الحجم كنهاية هذا المجموع كما يلي :

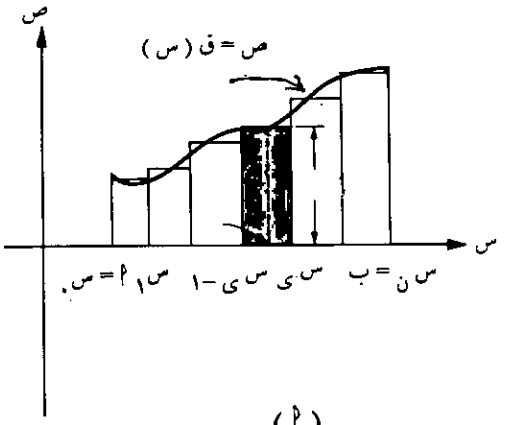
(٦-١١) تعريف الحجم : اذا كان الاقتران ق متصلا على [أ ، ب] فان ح ، الحجم الدوراني المتولد من دوران المنطقة المحدودة بين منحنيات الاقتران ق ، س = أ ، س = ب ومحور السينات ، حول محور السينات يعطي بالصيغة التالية :

$$\text{ح} = \text{نهـــا}_{\|\text{ت}\| \to ٠} \sum_{ى} \pi \; [\text{ق} (\text{و}_{ى})]^{2} \Delta \text{س}_{ى}$$

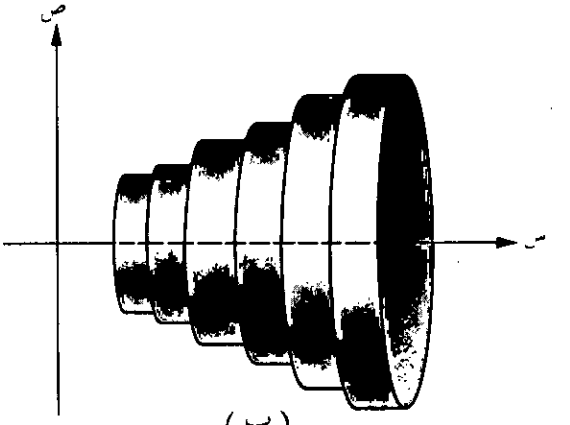
$$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \pi \; [\text{ق} (\text{س})]^{2} \, \text{د س}$$

وتساوي المجموع في (٦ - ١١) مع $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \pi$[ق (س)]^{2} د س يأتي من تعريف التكامل المحدود . وعند ذكر نهايات مجاميع ريمان بعد الان لن تذكر معاني الرموز جميعها بل سنفترض ان القاريء يعرف دور كل من ت ، و$_{ى}$ ، س$_{ى}$ ، وغيرها .

نلاحظ ان الافتراض بان قيم ق غير سالبة لجميع قيم س في [أ ، ب] قد حذف في (٦ - ١١) . فلو كان ق سالبا لبعض قيم س ، كما يظهر في الشكل ٦-١٣ أ ودارت المنطقة المحدودة بمنحنيات ق ، س = أ ، س = ب ، ومحور السينات حول محور السينات لحصلنا على جسم كالمبين في الشكل ٦-١٣ ب . وهذا هو نفس الجسم المتولد من دوران المنطقة التي تحت منحنى ص = | ق (س)| من أ الى ب حول محور السينات . وحيث ان | ق (س)|^{2} = [ق (س)]^{2} فان النهاية في (٦-١١) هي الحجم المطلوب .

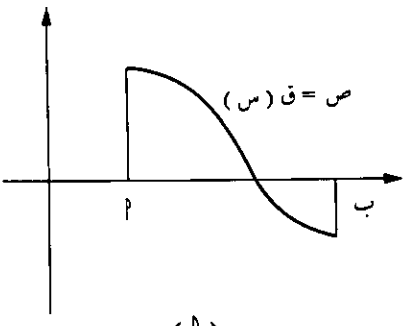


(أ)

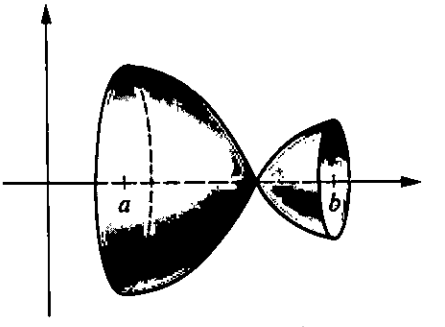


(ب)

شكل ٦-١٢

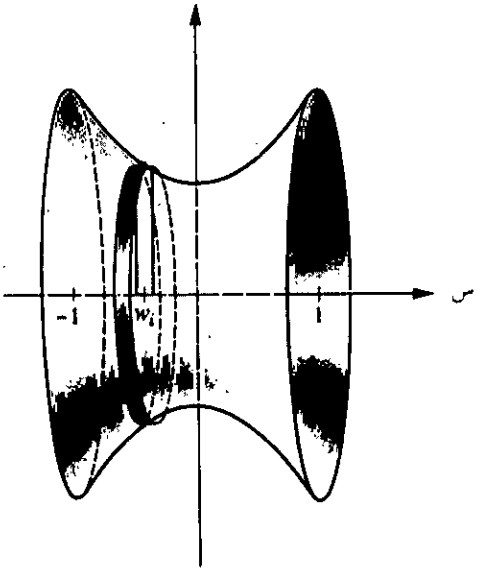


(أ)



(ب)

شكل ٦-١٣



شكل ٦-١٤

مثـال ١ : اذا كان ق (س) = س^{٢} + ١ ، أوجد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة الواقعة تحت منحنى ق من − ١ الى + ١ ، حول محور السينات

الحـــل : في الشكل ٦ − ١٤ تجد رسما توضيحيا للجسم . ويتضمن الرسم مستطيلا نموذجيا والقرص المتولد منه . ومن الواضح ان حجم القرص يساوي

π (و$^{٢}_{ى}$ + ١)^{٢} Δ س$_{ى}$ ، **ويتبع** ذلك :

$$ح = \lim_{||ت|| \to ٠} \sum_{ى} (و^{٢}_{ى} + ١)^{٢} \Delta س_{ى}$$

$$= \int_{-١}^{١} \pi (س^{٢} + ١)^{٢} \, د س$$

$$= \pi \left[\frac{١}{٥} س^{٥} + \frac{٢}{٣} س^{٣} + س \right]_{-١}^{١} = \frac{\pi ٥٦}{١٥}$$

ومن الممكن حساب الحجم بالتكامل من صفر الى ١ ومضاعفة النتيجة . كما يمكن حل المثال السابق بتعويض س^{٢} + ١ بدل ق (س) في الصيغة

$$ح = \int_{م}^{ب} \pi [ق (س)]^{٢} \, د س$$

. وقد استخدمت مجاميع ريمان لتأكيد الطريقة التي اشتقت بها صيغة الحجم ح . وعند حساب الحجم لن نعين وحدات القياس ، فاذا كانت وحدة قياس الطول هي البوصة فان الحجم يعبر عنه بالبوصات المكعبة ، وهكذا .

لنأخذ الان المنطقة المحدودة بمستقيمين افقيين احداثياهما الصاديان هما جـ ، ء ، وبين محور الصادات ومنحنى س = ق (ص) ، حيث ق اقتران متصل على [جـ ، ء] وليست له قيم سالبة . فعند دوران هذه المنطقة حول محور الصادات فان حجم الجسم المتولد ح يمكن ايجاده بتبديل ادوار س ، ص في (٦ − ١١) وذلك باعتبار ص المتغير المستقل ، وهذا يعطينا :

$$ح = \int_{م}^{ب} \pi [ق (ص)]^{٢} \, د ص \qquad (٦ - ١٢)$$

ويمكن تفسير هذه الصيغة كنهاية مجموع ، وذلك بفرض ت تجزئة للفترة [جـ ، ء] معرفة بالاعداد جـ = ص$_{0}$ ، ص$_{1}$ ، ص$_{2}$ ، ... ، ص$_{ن}$ = ء واعتبار Δ ص$_{ى}$ = ص$_{ى}$ − ص$_{ى-1}$ ، اي نقطة في [ص$_{ى-1}$ ، ص$_{ى}$] . وبأخذ المستطيلات ذات الطول ق (و$_{ى}$) والعرض Δ ص$_{ى}$ ، كما هو موضح بالشكل ٦ − ١٥ أ فان الجسم المتولد من دوران هذه المستطيلات حول محور الصادات موضح في الشكل ٦ − ١٥ ب . وحجم القرص المتولد من دوران المستطيل البائي هو π [ق (و$_{ى}$)]^{٢} Δ ص$_{ى}$ ، وتجميع هذه الحدود وأخذ النهاية يعطينا

$$(٦-١٣)\quad ح = \text{نهـا}_{||ت||\to 0} \sum_{ى} \pi\,[ق(و_{ى})]^{٢}\,\Delta ص_{ى}$$

ومن تعريف التكامل المحدود ينتج ان هذه الصيغة هي نفس الصيغة (٦ − ١٢) .

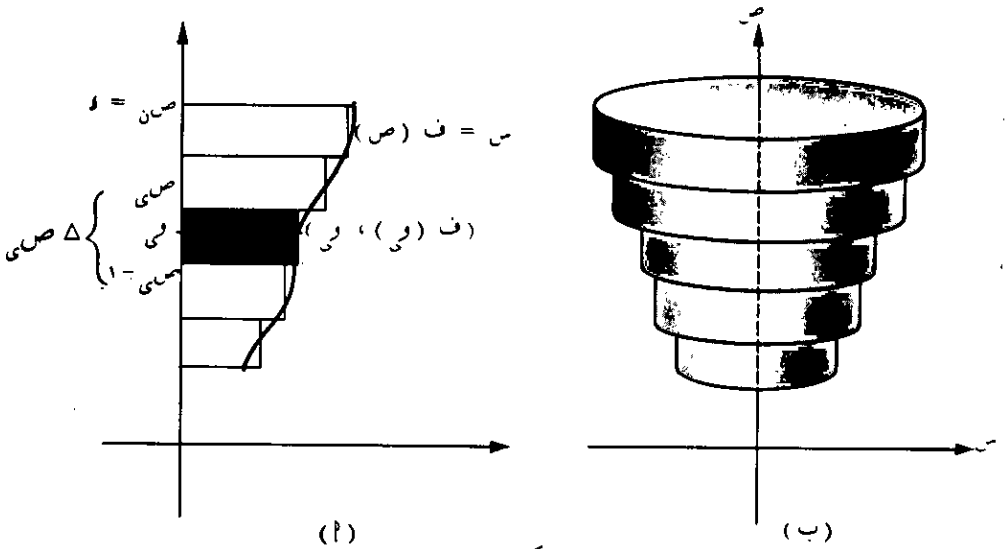
مثال ٢ : دارت المنطقة المحدودة بمحور الصادات ومنحنيات ص = س^{٣} ، ص = ١ ، ص = ٨ حول محور الصادات . أوجد حجم الجسم الناتج .

الحل : ترى المنحنى مرسوما في الشكل ٦ − ١٦ حيث تلاحظ ان المعادلة ص = س^{٣} قد حولت للمتغير س بدلالة المتغير ص ، وهكذا يمكن اعتبار ص المتغير المستقل . وبفرض س = ق (ص) = $\sqrt[٣]{ص}$ وتطبيق (٦ − ١٣) ينتج

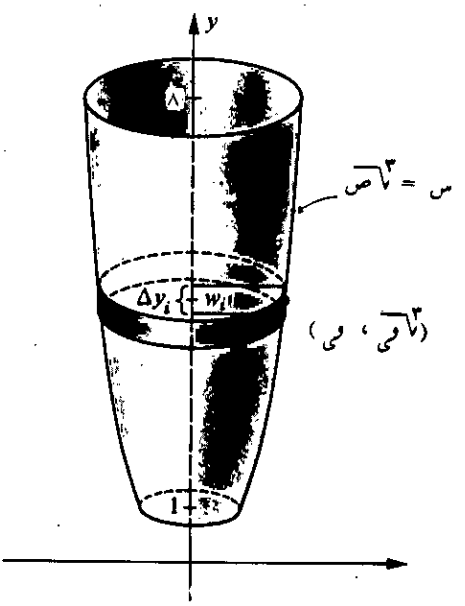
$$ح = \text{نهـا}_{||ت||\to 0} \sum_{ى} \pi\,(\sqrt[٣]{و_{ى}})^{٢}\,\Delta ص_{ى} = \int_{١}^{٨} \pi\,[\sqrt[٣]{ص}\,]^{٢}\,ء ص$$

$$= \pi \int_{١}^{٨} ص^{٣/٢}\,ء ص = \pi\,(\frac{٣}{٥})\,[\,ص^{\frac{٥}{٣}}\,]_{١}^{٨}$$

$$= \frac{\pi\,٣}{٥}\,[\,٨^{٣/٥} - ١\,] = \frac{\pi\,٩٣}{٥}$$



الشكل ٦ — ١٥



الشكل ٦ — ١٦

واخيرا لنأخذ المنطقة المحدودة بمنحنيات س = ﻫ ، س = ب واقترانين متصلين ق . ، ف حيث ق (س) ≤ ف (س) . لجميع قيم س في [ﻫ ، ب] . فعند دوران هذه المنطقة حول محور السينات يتكون جسم من النوع الموضح في الشكل ٦ – ١٧ . وتلاحظ انه اذا كان ف (س) > ٠ لجميع قيم س في [ﻫ ، ب] فان نفقا يتكون داخل الجسم . ويمكن ايجاد الحجم ح

بطرح حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة الصغرى من حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة الكبرى . وباستخدام (٦ – ١١) ينتج :

$$ح = \int_{م}^{ب} \pi [ق(س)]^{٢} \, ء س - \int_{م}^{ب} \pi [ف(س)]^{٢} \, ء س$$

الذي يمكن كتابته بالصورة :

$$(٦ - ١٤) \quad ح = \int_{م}^{ب} \pi \{[ق(س)]^{٢} - [ف(س)]^{٢}\} \, ء س$$

وللصيغة الاخيرة تفسير مهم باعتبارها نهاية مجموع . فكما هو موضح في الشكل ٦ – ١٧ ب فان المستطيل اليائي الممتد من المنحنى ف الى المنحنى ق يولد جسما كالحلقة او الخاتم حجمه :

$$\pi [ق(ص_ى)]^{٢} \Delta س_ى - \pi [ف(ص_ى)]^{٢} \Delta س_ى$$

وهذه العبارة يمكن كتابتها بالصورة :

$$(٦ - ١٥) \quad \pi \{[ق(ص_ى)]^{٢} - [ف(ص_ى)]^{٢}\} \Delta س_ى$$

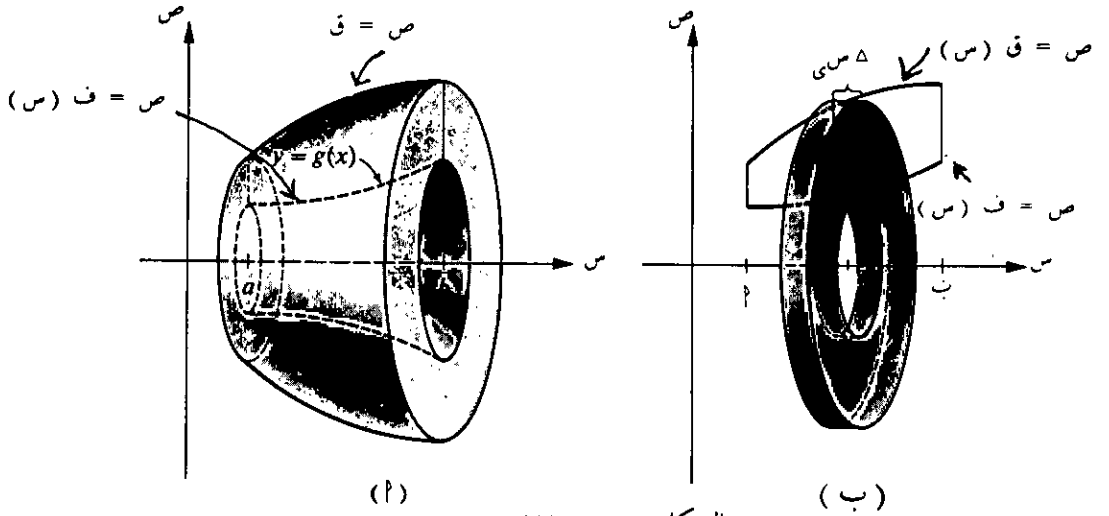
وبتجميع حجوم هذه الاجسام وأخذ النهاية نحصل على (٦ – ١٤) . وهكذا يمكن التفكير بالحجم باعتباره نهاية مجموع حجوم حلقات بعضها بجانب بعض .

مثـال ٣ : دارت المنطقة المحدودة بمنحنيات $س^{٢} = ص - ٢$ ، $٢ص - س - ٢ = ٠$ ، $س = ٠$ ، $س = ١$ حول محور السينات . أوجد حجم الجسم الناتج .

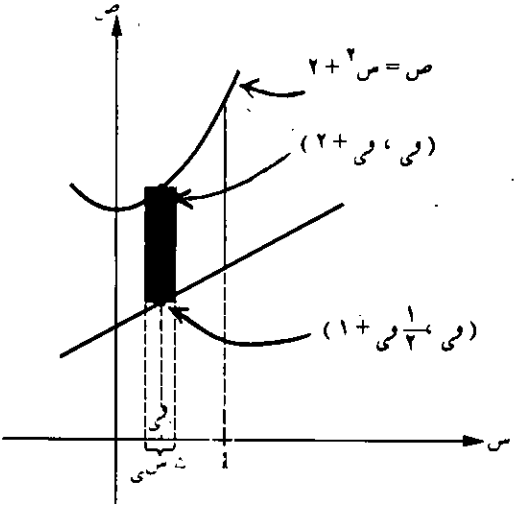
الحـــل : بحل المعادلتين الاوليين للمتغير ص بدلالة س نحصل على $ص = س^{٢} + ٢$ ، $ص = \frac{١}{٢} س + ١$. وتجد المنطقة مع مستطيل نموذجي في الشكل ٦ – ١٨ . فباستخدام الصيغة (٦ – ١٥) نجد ان حجم الحلقة المتولدة من هذا المستطيل هو

$$\pi [(ص_ى + ٢)^{٢} - (\frac{١}{٢} ص_ى + ١)^{٢}] \Delta س_ى$$

وبأخذ نهاية مجموع هذه الحجوم نحصل على :



الشكل ٦ — ١٧



الشكل ٦ — ١٨

$$ح = \int_{0}^{1} \pi \left[(س^{2} + 2)^{2} - (\tfrac{1}{2} س + 1)^{2} \right] د س$$

$$= \pi \int_{0}^{1} \left(س^{4} + \frac{15}{4} س^{2} - س + 3 \right) د س$$

$$= \pi \left[\tfrac{1}{5} س^{5} + \frac{5}{4} س^{3} - \tfrac{1}{2} س^{2} + 3 س \right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{\pi \, 79}{20}$$

ويمكن اشتقاق صيغة مماثلة للصيغة (٦ – ١٤) للدوران حول محور الصادات .

تمارين :

في التمارين ١ – ١٢ ارسم المنطقة المحدودة بمنحنيات المعادلات المعطاة وأوجد حجم الجسم المتولد من دوران هذه المنطقة حول المحور المطلوب :

١ . ص = ١ / س ، س = ١ ، س = ٣ ، ص = ٠ ، حول محور السينات .
٢ . ص = √س ، ص = ٠ ، س = ٤ حول محور السينات .
٣ . ص = س^{٢} ، ص = ٢ ، حول محور الصادات .
٤ . ص = ١ / س ، س = ٠ ، ص = ١ ، ص = ٣ حول محور الصادات .
٥ . ص = س^{٢} – ٤س ، ص = ٠ حول محور السينات .
٦ . ص = س^{٣} ، س = – ٢ ، ص = ٠ حول محور السينات .
٧ . ص^{٢} = س ، ٢ص = س حول محور الصادات .
٨ . ص = ٢س ، ص = ٤س^{٢} حول محور الصادات .
٩ . ص = س^{٢} ، ص = ٤ – س^{٢} حول محور السينات .
١٠ . س = ص^{٣} ، س^{٢} + ص = ٠ حول محور السينات .
١١ . س = ص^{٢} ، ص – س + ٢ = ٠ حول محور الصادات .
١٢ . س + ص = ١ ، ص = س + ١ ، س = ٢ حول محور الصادات .
١٣ . جد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة المحدودة بمنحني ص = س^{٢} ، ص = ٤ كالتالي :
أ) حول المستقيم س = ٤ .
ب) حول المستقيم س = ٦ .
جـ) حول المستقيم ص = ٢ .

في كل من التمارين ١٤ – ١٧ استخدم تكاملا محدودا لاشتقاق صيغة لحجم الجسم المطلوب :

١٤ . مخروط دائري قائم ارتفاعه ع ونصف قطر قاعدته نق .
١٥ . كرة نصف قطرها نق .

١٦ . مخروط دائري قائم ناقص ارتفاعه ع ونصف قطر قاعدته السفلى نق$_{١}$ ، ونصف قطر قاعدته العليا نق$_{٢}$.

١٧ . حجم القطعة الكروية التي ارتفاعها ع ونصف قطر كرتها نق .

في كل من التمرينين ١٨ ، ١٩ نهاية مجموع لاقتران ق معرف على الفترة [٠ ، ١] . فسر كل نهاية باعتبارها حجما وأوجد قيمتها :

١٨ . $\lim_{\|ت\| \to ٠} \sum_{ى} (و_{٤ى} - و_{٦ى}) \Delta س_{ى}$

١٩ . $\lim_{\|ت\| \to ٠} \sum_{ى} \pi (و_{ى} - و_{٨ى}) \Delta ص_{ى}$.

٣ ــ ايجاد الحجم باستخدام القشرة الاسطوانية :

هناك طريقة اخرى لايجاد حجوم الاجسام الدورانية وهي – في حالات معينة – اسهل في تطبيقها من الطرق التي ناقشناها في البند ٢ . وفي هذه الطريقة نستخدم اسطوانة دائرية مجوفة كالقشرة الاسطوانية المبينة في الشكل (٦ – ١٩) . فحجم القشرة التي نصف قطرها الخارجي ر$_{٢}$ ونصف قطرها الداخلي ر$_{١}$ وارتفاعها ع هو

π ر$_{٢}^{٢}$ ع – π ر$_{١}^{٢}$ ع وهذا يمكن كتابته بالصيغة :

$$\pi (ر_{٢}^{٢} - ر_{١}^{٢}) ع = \pi (ر_{٢} + ر_{١}) (ر_{٢} - ر_{١}) ع$$

$$= ٢ \pi \frac{(ر_{١} + ر_{٢})}{٢} ع (ر_{٢} - ر_{١})$$

واذا وضعنا ر = $\frac{ر_{١} + ر_{٢}}{٢}$ (متوسط نصف القطر)

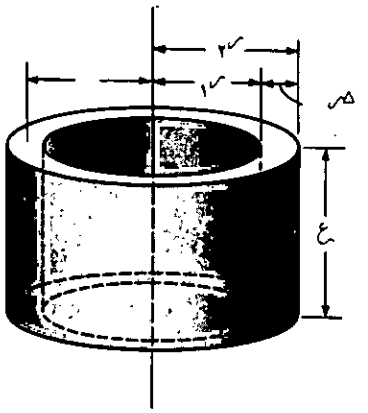
Δ ر = ر$_{٢}$ – ر$_{١}$ (سمك القشرة)

فان حجم القشرة يمكن وضعه بالصيغة ٢ π ر ع Δ ر أو

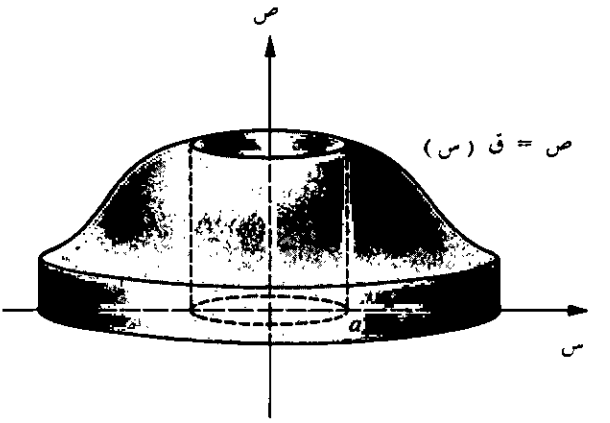
(٦ – ١٦) ٢ π × (متوسط نصف القطر) × (الارتفاع) × (السمك) .

لنأخذ المنطقة ط المحدودة بين منحنى الاقتران ق المتصل على الفترة [أ ، ب] والذي قيمه ليست سالبة وبين محور السينات ، س = أ ، س = ب ، حيث ب > أ ≥ . ويوضح الشكل ٦ – ٢١ أ الجسم المتولد من دوران المنطقة ط حول محور الصادات . لاحظ انه اذا كان أ > . فانه يوجد نفق داخل الجسم .

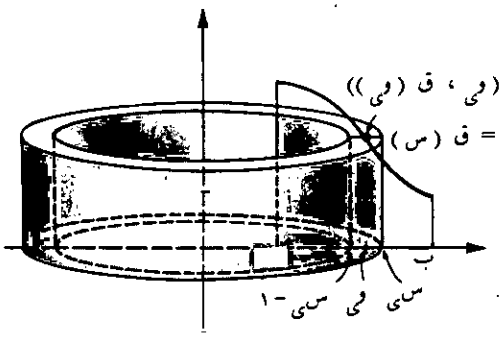
لتكن ت تجزئة للفترة [أ ، ب] ولنأخذ مستطيلا قاعدته الفترة [س ى – ١ ، س ى] وارتفاعه ق (و ى) ، حيث و ى نقطة في [س ى – ١ ، س ى] . فعند دوران هذا المستطيل حول محور الصادات (كما هو موضح في الشكل ٦ – ٢١) (أ) تتولد قشرة اسطوانية حجمها ٢ π و ى ق (و ى) Δ س ى ، وباعادة هذه العملية لكل فترة جزئية من فترات التجزئة ، وجمع هذه الحجوم نحصل على :



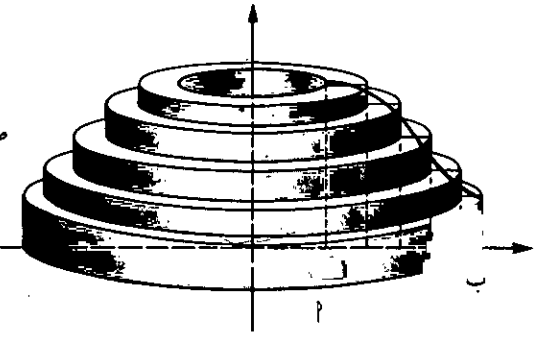
الشكل ٦ — ١٩



الشكل ٦ — ٢٠



(أ)



(ب)

الشكل ٦ — ٢١

$$(٦-١٧) \quad \sum_{ى} ٢ \pi \, و_ى \, ق \, (و_ى) \, \Delta \, س_ى .$$

وتمثل (٦ – ١٧) حجم جسم من النوع الموضح في الشكل ٦ – ٢١ ب ، ومن الواضح انه كلما صغر القياس المطلق || ت || كلما كان المجموع ٦ – ١٧ اقرب الى حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة ط ، وينتج ان :

$$(٦-١٨) \quad ح = \lim_{||ت|| \to ٠} \sum_{ى} ٢ \pi \, و_ى \, ق \, (و_ى) \, \Delta \, س_ى$$

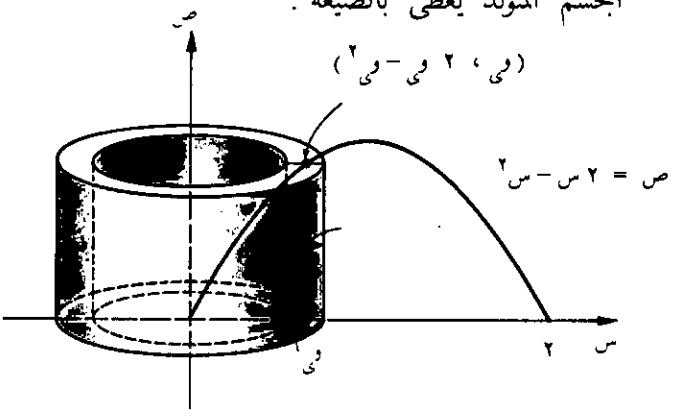
$$= \int_{م}^{ب} ٢ \pi \, س \, ق \, (س) \, د \, س$$

وتنتج المساواة الاخيرة من تعريف التكامل المحدود .

ان الحجج السابقة لم تكتمل ، فنحن لم نبرهن على انه اذا استخدمنا الطريقة الموضحة في البند ٢ فان الطريقتين تؤديان الى نفس الجواب .

مثال ١ : دارت المنطقة المحدودة بمنحنى ص = ٢ س – س^{٢} ومحور السينات حول محور الصادات . أوجد الجسم الناتج .

الحل : يبين الشكل ٦ – ٢٢ هذه المنطقة وقشرة اسطوانية متولدة من دوران مستطيل نموذجي ، حيث و$_ى$ منتصف [س$_{ى-١}$ ، س$_ى$] ، وبوضع ق (س) = ٢ س – س^{٢} فان حجم القشرة المتولدة من المستطيل النموذجي هو ٢ π و$_ى$ (٢ و$_ى$ – و$_ى^{٢}$)Δ س$_ى$. وباستخدام (٦ – ١٨) ينتج ان حجم الجسم المتولد يعطى بالصيغة :



$$ح = \text{نهـا}_{\|ت\| \to 0} \sum_{ى} ٢\pi (و_ى - و_{ى}^{٢}) \Delta س_ى$$

$$= \int_{.}^{٢} ٢\pi \, س (٢س - س^{٢}) \, د س$$

$$= ٢\pi \int_{.}^{٢} (٢س^{٢} - س^{٣}) \, د س$$

$$= ٢\pi \left[\frac{٢}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٤} س^{٤} \right]_{.}^{٢}$$

$$= \frac{٨\pi}{٣}$$

ويمكن ايجاد الحجم ح باستخدام الحلقات ، ولكن هذا يتضمن حسابات أكثر تعقيدا لانه يقتضي تحويل المعادلة لتعطي س بدلالة ص .

ويمكن استخدام طريقة القشرة الاسطوانية لايجاد حجم الجسم المتولد من دوران منطقة مثل تلك الموضحة في الشكل ٦ – ١ حول محور الصادات . وذلك بطرح مجموع حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة تحت منحنى ف من حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة تحت منحنى ق ، فنحصل على :

$$ح = \int_{م}^{ب} ٢\pi \, س \, ق (س) \, د س - \int_{م}^{ب} ٢\pi \, س \, ف (س) \, د س$$

أو

$$(٦ - ١٩) \quad ح = ٢\pi \int_{م}^{ب} س [ق (س) - ف (س)] \, د س$$

واذا قربت المنطقة بمستطيلات كما في الشكل ٦ – ٨ ، حيث و ى منتصف $[س_{ى-١} ، س_ى]$ فان حجم الجسم هو نهاية مجموع الحجوم ، اي انه

$$(٦ - ٢٠) \quad ح = \text{نهـا}_{\|ت\| \to 0} \sum_{ى} ٢\pi \, و_ى [ق (و_ى) - ف (و_ى)] \Delta س_ى$$

وهذه تؤدي الى (٦ – ١٩) .

مثـال ٢ : دارت المنطقة المحدودة بمنحنيات $س^{٢} = ص - ٢$ ، $٢ص - س - ٢ = ٠$ ، $س = ٠$ ، $س = ١$ ، حول محور الصادات . أوجد حجم الجسم المتولد .

الحـــل : المنطقة هي نفسها التي اخذت في المثال ٣ من البند السابق . وبالرجوع الى شكل ٦ – ١٨ حيث ان حجم القشرة الاسطوانية المتولدة من المستطيل المبين في الصورة يساوي :

$$٢\ \pi\ و_{ى}\ [(و_{ى}\ ٢ + ٢) - (\frac{١}{٢}\ و_{ى} + ١)]\ \Delta\ س_{ى}$$

وبأخذ نهاية مجموع هذه الحدود نحصل على :

$$ح = ٢\ \pi \int_{.}^{١} س\ [(س^{٢} + ٢) - (\frac{١}{٢}\ س + ١)]\ د\ س$$

$$= ٢\ \pi \int_{.}^{١} (س^{٣} - \frac{١}{٢}\ س^{٢} + س)\ د\ س$$

$$= ٢\ \pi \left[\frac{١}{٤}\ س^{٤} - \frac{١}{٦}\ س^{٣} + \frac{١}{٢}\ س^{٢} \right]_{.}^{١}$$

$$= \frac{٧\ \pi}{٦} .$$

وبتبديل الادوار بين س ، ص نستطيع ايجاد الحجم ح للجسم المتولد من دوران منطقة من النوع الموضح في الشكل ٦ – ٦ حول محور السينات ، فينتج :

$$(٦ - ٢١)\quad ح = \int_{جـ}^{د} ٢\ \pi\ ص\ [ق\ (ص) - ف\ (ص)]\ د\ ص$$

تمارين :

في التمارين ١ – ١٠ ارسم المنطقة ط المحدودة بمنحنيات المعادلات المعطاة واستخدم الطرق الموضحة في هذا البند لايجاد الاجسام المتولدة من دوران المنطقة ط حول المحور المشار اليه :

١ . ص = $\sqrt{س}$ ، س = ٤ ، ص = ٠ حول محور الصادات .

٢ . ص = ١ / س ، س = ١ ، س = ٢ ، ص = ٠ ، حول محور الصادات .

٣ . ص = $س^{٢}$ ، ص = ٨ س حول محور الصادات

٤ . ص = $س^{٢}$ – ٥ س ، ص = ٠ حول محور الصادات .

٥ . ٢س − ص − ١٢ = ٠ ، س − ٢ ص − ٣ = ٠ ، س = ٤ حول محور الصادات .

٦ . ص = س^{٣} + ١ ، س + ٢ص = ٢ ، س = ١ حول محور الصادات .

٧ . س^{٢} = ٤ص ، ص = ٤ ، حول محور السينات .

٨ . ص^{٣} = س ، ص = ٣ ، س = ٠ حول محور السينات .

٩ . ص = ٢س ، ص = ٦ ، س = ٠ حول محور السينات .

١٠ . ٢ص = س ، ص = ٤ ، س = ١ حول محور السينات .

١١ . جد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة المحدودة بمنحنيات :

ص = س^{٢} + ١ ، س = ٠ ، س = ٢ ، ص = ٠ كالتالي

أ) حول المستقيم س = ٣ .

ب) حول المستقيم س = − ١ .

١٢ . جد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين ص = ٤ − س^{٢} ، ص = ٠ كالتالي :

أ) حول المستقيم س = ٢ .

ب) حول المستقيم س = − ٣ .

١٣ . ١٨ استخدم الطرق الموضحة في هذا البند لحل التمارين ١٣ − ١٨ من بند ٢ .

يمثل كل من التمرين ١٩ والتمرين ٢٠ نهاية مجموع لاقتران ق على الفترة [٠ ، ١] فسر كل نهاية كحجم وأوجد قيمتها .

١٩ .
$$\text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty} \sum_{\text{ى}} ٢ \, (\text{و}_{\text{ى}}^{٢} - \text{و}_{\text{ى}}^{٣}) \, \Delta \text{س}_{\text{ى}}$$

٢٠ .
$$\text{نهـا}_{\text{ن}\to\infty} \sum_{\text{ى}} ٢ \, \pi \, (\text{و}_{\text{ى}}^{٥} + \text{و}_{\text{ى}}^{\frac{٣}{٢}}) \, \Delta \text{س}_{\text{ى}}$$

٤ ــ الحجوم بطريقة الشرائح :

اذا تقاطع مستو وجسم فان المنطقة المشتركة بين المستوى والجسم تسمى مقطعا . وقد مر معنا في البند ٢ مقاطع على شكل دوائر او حلقات . وسنناقش الان الاجسام التي لها الخاصية التالية :

لكل س في الفترة المغلقة [أ ، ب] على خط الاعداد ل فان المستوى العمودي العمودي على ل ، في النقطة التي احداثيها س ، يقطع من الجسم مقطعا مساحته م (س) ، حيث م اقتران متصل على [أ ، ب] ، ويوضح الشكلان ٦ – ٢٣ ، ٦ – ٢٤ ، اجساما من هذا النوع الذي سنناقشه .

يسمى الجسم اسطوانة اذا كانت جميع مقاطعه متطابقة كما في الشكل ٦ – ٢٣ ، اي ان كل مقطع فيه يمكن ان ينطبق على اي مقطع اخر بتحريك المستوى الذي يقع فيه (مع الاحتفاظ بنفس صفة التقاطع مع ل) . ولنحصر الان اهتمامنا بذلك الجزء من المنحنى المحدود بالمستويين اللذين يمران بالنقطتين أ و ب ، فان المقطعين اللذين يتعينان بهما يسميان قاعدتي الاسطوانة ، والمسافة بينهما تسمى الارتفاع .

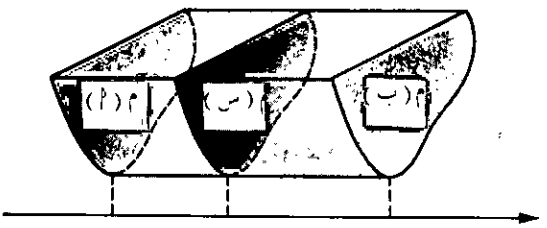
وحسب التعريف فان حجم الاسطوانة التي من هذا النوع هو حاصل ضرب مساحة قاعدة الاسطوانة في الارتفاع ، ومن الحالات الخاصة الاسطوانة الدائرية القائمة فاذا كان نصف قطر قاعدتها نق وارتفاعها ع فان حجمها يساوي π نق^{٢} ع .

والجسم المبين في الشكل ٦ – ٢٤ ليس اسطوانة لان المقاطع بالمستويات العمودية على ل ليست متطابقة . ولايجاد حجم نبدأ بالتجزئة ت للفترة [أ ، ب] فنأخذ من الاعداد المتزايدة أ = س$_{٠}$ ، س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، ... س$_{ن}$ = ب ، فالمستويات العمودية على ل في النقط التي احداثياتها س$_{٠}$ ، س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، ... ، س$_{ن}$ تشرح الجسم الى شرائح رقيقة ، والشكل ٦ – ٢٤ يبين الشريحة اليائية . وكالمعتاد نأخذ $\Delta_{ى}$ = س$_{ى}$ – س$_{ى-١}$ ونختار اي عدد و$_{ى}$ في [س$_{ى-١}$ ، س$_{ى}$] فينتج انه كلما كانت Δ س$_{ى}$ صغيرة يمكن تقريب حجم الشريحة من حجم الاسطوانة التي مساحة قاعدتها م (و$_{ى}$) وارتفاعها Δ س$_{ى}$ اي م (و$_{ى}$) Δ س$_{ى}$. وبالنتيجة يكون الحجم الكلي للجسم هو تقريبا مجموع ريمان $\sum_{ى}$ م (و$_{ى}$) Δ س$_{ى}$. وبما ان التقريب يصبح أكثر دقة كلما صغرت ||ت|| فان تعريف الحجم ح لهذا الجسم هو نهاية هذا المجموع .

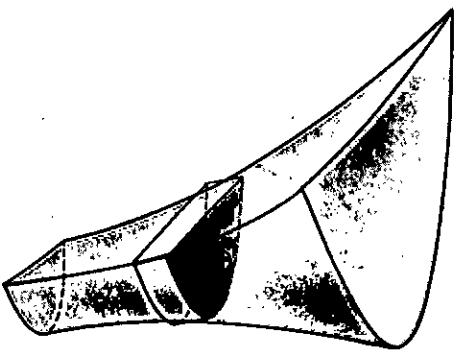
$$(٦-٢٢) \quad ح = \lim_{||ت|| \to ٠} \sum_{ى} م (و_{ى}) \Delta س_{ى}$$

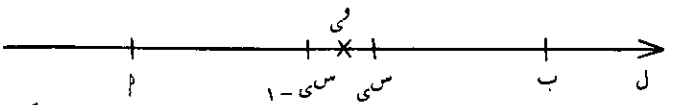
$$= \int_{أ}^{ب} م (س) \, د س$$

مثال ١ : أوجد حجم الهرم القائم الذي ارتفاعه ع وقاعدته مربع طول ضلعه يساوي أ

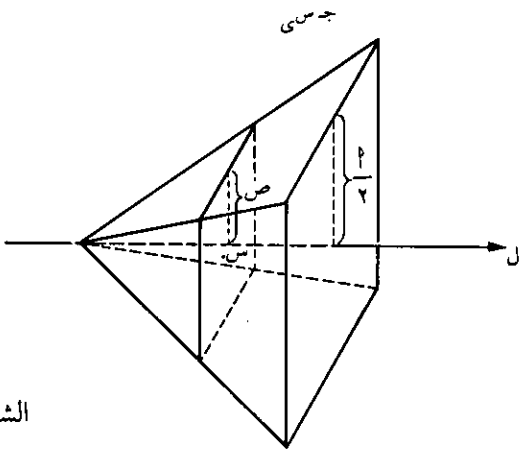


الشكل ٦ — ٢٣





الشكل ٦ — ٢٤



الشكل ٦ — ٢٥

الحـــل : (كما في الشكل ٦ – ٢٥) اذا اعتبرنا محور الهرم خطا للاعداد نقطة الاصل

فيه هي راس الهرم و . فان المقاطع بمستويات عمودية على ل تكون مربعات ، واذا كان م (س) هو مساحة المقطع المعين بالمستوى العمودي على المحور عند النقطة التي تبعد س عن نقطة الاصل و فان م (س) = (٢ ص)^{٢} = ٤ ص^{٢} حيث ص هي المسافة الموضحة في الشكل . ومن تشابه المثلثات نجد ان ،

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{أ} / ٢}{\text{ع}} \quad \text{أو}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{أ س}}{\text{٢ع}} \quad \text{وهكذا فان}$$

$$\text{م (س)} = ٤\,\text{ص}^{٢} = \frac{٤\,\text{أ}^{٢}\,\text{س}^{٢}}{٤\,\text{ع}^{٢}} = \frac{\text{أ}^{٢}\,\text{س}^{٢}}{\text{ع}^{٢}}$$

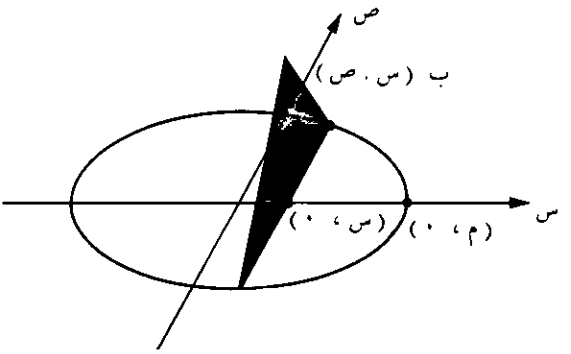
وبتطبيق (٦ – ٢٢) ينتج :

$$\text{ح} = \int_{٠}^{\text{ع}} \left(\frac{\text{أ}}{\text{ع}^{٢}} \right) \text{س}^{٢}\ \text{د س} = \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ع}^{٢}} \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{\text{ع}}$$

$$= \frac{\text{أ}^{٢}\,\text{ع}}{٣}$$

مثـال ٢ : جسم قاعدته المنطقة الدائرية في المستوى س ص المحدودة بمنحنى س^{٢} + ص^{٢} = أ^{٢} ، حيث أ > ٠ أوجد حجم الجسم اذا كان كل مقطع بمستو عمودي على محور السينات مثلثا متساوي الاضلاع احد اضلاعه في القاعدة .

الحـــل : يوضح الشكل ٦ – ٢٦ مقطعا نموذجيا بمستوى على بعد س وحدات من نقطة الاصل . واذا كانت النقطة ب (س ، ص) على الدائرة فان طول ضلع المثلث ٢ ص وارتفاعه ٣ ص . وبذا تصبح المساحة م (س) للمثلث المبين في الشكل هي :



الشكل ٦ — ٢٦

$$م\ (س) = \frac{١}{٢}\ (٢ص)\ (\sqrt{٣}\ ص) = \sqrt{٣}\ ص^{٢}$$

وبما ان $ص^{٢} = ف^{٢} - س^{٢}$ فباستخدام (٦ – ٢٢) يكون الحجم :

$$ح = \int_{-ف}^{ف} \sqrt{٣}\ (ف^{٢} - س^{٢})\ ء س = \sqrt{٣}\left[ف^{٢} س - \frac{١}{٣} س^{٣}\right]_{-ف}^{ف}$$

$$= \frac{٤\sqrt{٣}\ ف^{٣}}{٣}$$

تمارين :

١ . جسم قاعدته دائرة في المستوى س ص محدودة بمنحنى $س^{٢} + ص^{٢} = ف^{٢}$ حيث ف > ٠ جد حجم الجسم اذا كان كل مقطع فيه بمستو عمودي على محور السينات مربعا .

٢ . حل تمرين (١) اذا كان كل مقطع مثلث متساوي الساقين ارتفاعه ثابت يساوي ث .

٣ . جسم قاعدته في المستوى الديكارتي في كل منطقة محدودة بمنحنيي ص = ٤ ، ص = $س^{٢}$. جد حجم الجسم اذا كان كل مقطع فيه بمستو عمودي على محور السينات مثلثا قائما متساوي الساقين وتره على المستوى الديكارتي .

٤ . حل تمرين (٣) اذا كان كل مقطع مربعا .

٥ . جد حجم هرم من النوع الموضح في الشكل ٦ – ٢٥ اذا كان ارتفاعه ع وقاعدته مستطيلا بعداه ف ، ٢ ف .

٦ . جسم قاعدته المنطقة في المستوى الديكارتي المحدودة بمنحنيي ص = س ، ص^{٢} = س . جد حجم الجسم اذا كان كل مقطع فيه بمستوى عمودي على محور السينات نصف دائرة قطرها على المستوى الديكارتي .

٧ . جسم قاعدته المنطقة في المستوى الديكارتي المحدودة بمنحنيي ص^{٢} = ٤ س ، س = ٤ . فاذا كان كل مقطع فيه بمستوى عمودي على محور الصادات نصف دائرة جد حجم الجسم .

٨ . جسم قاعدته المنطقة في المستوى الديكارتي المحدودة بمنحنيي س^{٢} = ١٦ ص ، ص = ٢ ، فاذا كان كل مقطع فيه بمستو عمودي على محور الصادات مستطيلا ارتفاعه ضعف طول ضلعه الموجود في المستوى الديكارتي . فجد حجم الجسم .

٩ . جسم على شكل اسفين حصل من مقطع اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها أ ، بمستويين احدهما عمودي على محور الاسطوانة والثاني يلاقي المستوى الاول في قطر المقطع ويعمل معه زاوية قياسها ٤٥° . جد حجم الجسم .

١٠ . يتقاطع محورا اسطوانتين دائريتين قائمتين ، نصف قطر كل منهما يساوي أ على زاوية قائمة . جد حجم الجسم المحدود بالاسطوانتين .

٥ — الشغل :

يمكن التفكير بمفهوم القوة على انها الكمية الفيزيائية المستخدمة لوصف دفع شيء ما او سحبه . فنحن نحتاج للقوة لدفع شيء ما أو سحبه على المستوى الافقي ، او لرفع جسم عن الارض ، او لنقل جسم مشحون عبر مجال الكترومغناطيسي ، وما الى ذلك .

وتقاس القوى بالباوند والغرام والطن ، الخ . فاذا كان وزن جسم ما عشر باوندات فان القوة اللازمة لرفعه (او لحمله) هي عشر باوندات . وتسمى القوة من هذا النوع بالقوة الثابتة ، لان مقدارها ثابت لا يتغير وهي تؤثر على الجسم .

وعند شد سلك مرن او ضغطه لتغيير طوله الطبيعي فاننا نحتاج الى قوة . وكتجربة فيزيائية تقريبية يمكننا وصل ميزان بالسلك واعتبار قراءة الميزان قياسا للقوة اللازمة لابقاء السلك مشدودا ، او مضغوطا بمقدار معين . ان قوة من هذا النوع قد تكون متغيرة ، بمعنى انه قد يلزم قوى مختلفة لابقاء السلك باطوال مختلفة .

اذا اثرت قوة ثابتة ق على جسم وحركته مسافة م في اتجاهها فاننا نعرف الشغل المبذول لتحريك الجسم على انه المقدار المعطى بالصيغة :

(٦-٢٣) ش = ق م

واذا قيست ق بالباوندات ، م بالاقدام فان وحدة الشغل هي الباوند قدم .

مثال ١ : رفع جسم وزنه ١٥٠ باوندا مسافة ٥ أقدام . جد مقدار الشغل المبذول لتحريك الجسم .

الحل : بتعويض ١٥٠ بدل ق ، ٥ بدل م في (٦ – ٢٣) نحصل على
ش = ١٥٠ × ٥ = ٧٥٠ باوند . قدم .

اذا اثرت قوة متغيرة على جسم وحركته مسافة معينة باتجاهها فاننا نحتاج لطرق التفاضل والتكامل لايجاد الشغل المبذول . وسنناقش في هذا الفصل حركة الاجسام في خط مستقيم ل . اما الاجسام المتحركة في مسارات ليست مستقيمة فسنناقشها في الفصل الرابع عشر .

نبدأ بوضع نظام احداثي على المستقيم ل ونفرض ان الجسم تحرك من النقطة التي احداثيها أ الى النقطة التي احداثيها ب حيث ب > أ . ومن الضروري لمعالجة المسألة معرفة القوة ق عند النقطة التي احداثيها على المستقيم ل هو س وذلك لجميع النقط س في [أ ، ب] . وسيرمز لهذه القوة بالرمز ق (س) . ولتسهيل الامر ، سنفرض ان الاقتران ق الذي حصلنا عليه بهذه الطريقة متصل على الفترة [أ ، ب] . فاذا كانت ت تجزئة للفترة [أ ، ب] معرفة بالاعداد أ = $س_0$ ، $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، $س_ن$ = ب ، فان $\Delta س_ى = س_ى - س_{ى-1}$ (انظر الشكل ٦ – ٢٧) . واذا كان $و_ى$ عددا في $[س_{ى-1} ، س_ى]$ ، فان القوة عند النقطة التي احداثيها $و_ى$ هي ق ($و_ى$) . واذا كانت $\Delta س_ى$ صغيرة فان ق لا تتغير الا قليلاً في الفترة $[س_{ى-1} ، س_ى]$ لان ق اقتران متصل . فيمكن اعتبار ق ثابتا تقريبا على الفترة $[س_{ى-1} ، س_ى]$. ويقرب الشغل المبذول لتحريك الجسم خلال هذه الفترة الجزئية كما يلي :

(٦ – ٢٤) $ش_ى$ = ق ($و_ى$) $\Delta س_ى$

وكلما صغرت $\Delta س_ى$ كلما كانت (٦ – ٢٤) اقرب الى الدقة ، واذا افترضنا ان الشغل تجميعي اي ان الشغل المبذول لتحريك الجسم من أ الى ب يمكن ايجاده بجمع الشغل المبذول على كل فترة جزئية فان :

$$(٦-٢٥)\quad س \approx \sum_{ى=١}^{ن} ق\,(ف_ى)\,\Delta س_ى$$

وكما هو متوقع فان هذا التقريب يصبح ادق كلما صغر القياس المطلق $||ت||$ للتجزئة ت . ومن الطبيعي تعريف الشغل س كنهاية المجموع (٦ – ٢٥) وهذه النهاية تقودنا الى التكامل المحدود .

(٦ – ٢٦) تعريف الشغل : اذا كانت القوة عند النقطة التي احداثيها س على خط الاعداد ل هي ق (س) ، حيث ق اقتران متصل على [أ ، ب] ، وكان تأثير القوة في اتجاه الخط الاحداثي ، فان الشغل س المبذول لتحريك جسم من النقطة التي احداثيها أ الى النقطة التي احداثيها ب يعطى بالصيغة :

$$ش = \lim_{||ت||\to ٠} \sum_{ى} ق\,(ف_ى)\,\Delta س_ى$$

$$= \int_{أ}^{ب} ق\,(س)\,د\,س$$

مثـال ٢ : شد سلك مرن طوله الطبيعي ٦ بوصات بقوة ٩ باوند فصار طوله ٨ بوصات

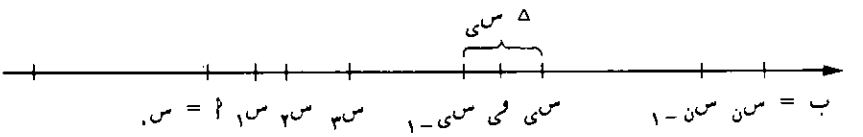
(أ) جد الشغل الذي يبذل لشد السلك من طوله الطبيعي الى طول ١٠ بوصات .

(ب) جد الشغل المبذول لشده من طول ٧ بوصات الى طول ٩ بوصات .

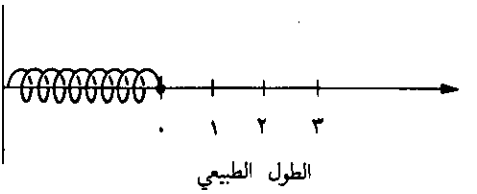
الحـــل : (أ) نضع نظاما للاحداثيات كما هو موضح في شكل ٦ – ٢٨ ، حيث وصل احد طرفي السلك بنقطة الى يسار نقطة الاصل وترك الطرف الذي سيشد منه الزنبرك عند نقطة الاصل . وباستخدام قانون هوك فان القوة اللازمة لشد السلك س وحدات زيادة على طوله الطبيعي تعطى بالصيغة :

$$(٦-٢٧)\quad ق\,(س) = ك\,س$$

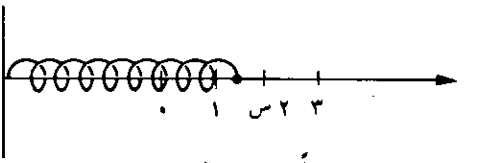
حيث ك عدد ثابت . وبالاعتماد على البيانات المعطاة فان قيمة ق تساوي ٩ عندما س = ٢ ، اي ان ق (٢) = ٩ . وبالتعويض في (٦ – ٢٧) نجد ان



الشكل ٦ — ٢٧



الشكل ٦ — ٢٨



٩ = ك × ٢ ، اي ان ك = ٩ / ٢ وهكذا فان ق (س) = (٩ / ٢) س

وباستخدام (٦ – ٢٦) نجد ان الشغل المبذول لشد السلك ٤ بوصات هو :

$$\text{س} = \int_{٠}^{٤} (٩ / ٢)\ \text{س}\ \text{ء س} = \frac{٩}{٤}\left[\ \text{س}^{٢}\ \right]_{٠}^{٤} = ٣٦ \text{ باوند . بوصة}$$

(ب) نستخدم نفس الاقتران ق ولكنا نغير الفترة الى [١ ، ٣] لنحصل على

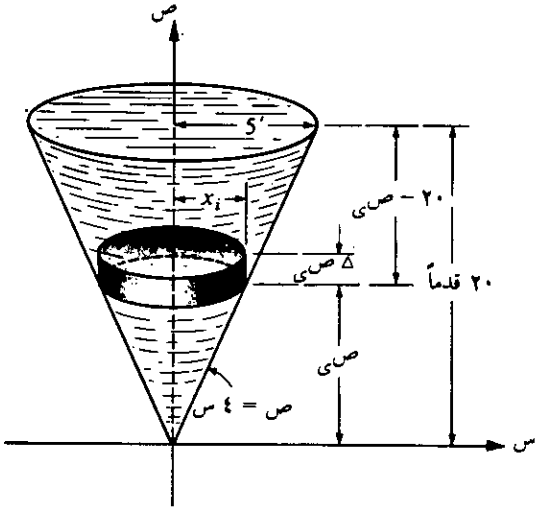
$$\text{ش} = \int_{١}^{٣} (٩ / ٢)\ \text{س}\ \text{ء س} = \frac{٩}{٤}\left| \text{س}^{٢} \right|_{١}^{٣}$$

$$= \frac{٩}{٤}\ [\ ٩ - ١\ ] = \ ١٨ \text{ باوند بوصة}$$

مثـال ٣ : خزان على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه ٢٠ قدما ونصف قطر قاعدته ٥ أقدام ، وراسه في مستوى سطح الارض ومحوره رأسي . فاذا كان الخزان مليئا بالماء ، جد الشغل المبذول لضخ الماء من فوق حافة الخزان .

الحـــل : نبدأ بوضع محاور الاحداثيات كما هو موضح في الشكل ٦ – ٢٩ حيث يقطع المستوى الديكارتي هذا المخروط على طول المستقيم ل الذي ميله ٤ مارا بنقطة الاصل ، وهكذا فان معادلة ل هي ص = ٤ س . فاذا كانت ت تجزئة للفترة [٠ ، ٢٠] معطاة بالنقط ٠ = ص$_{٠}$ ، ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ ، ٠٠٠ ص$_{ن}$ = ٢٠ فان Δ ص$_{ى}$ = [ص$_{ى}$ – ص$_{ى - ١}$] ، وليكن س$_{ى}$ هو الاحداثي السيني للنقطة على ل التي احداثيها الصادي ص$_{ى}$. فاذا قسم الخزان بمستويات عمودية على محور ص عند كل ص$_{ى}$ فيمكن اعتبار ان الماء قد جعل شرائح عددها ن . وكما هو موضح في الشكل ٦ – ٢٩ فان حجم الشريحة اليائية هو بالتقريب بحجم قرص دائري π س$_{ى}^{٢}$ Δ ص$_{ى}$. وبما ان س$_{ى} = \frac{ص_{ى}}{٤}$ ،

ويفرض ان الماء يزن ٦٢,٥ باوند / القدم المكعب ، فان وزن هذا القرص يساوي تقريبا ٦٢,٥ $\pi \left(\frac{ص_{ى}}{٤} \right)^{٢} \Delta$ ص$_{ي}$. وباستخدام (٦ – ٢٣) فان الشغل المبذول لرفع القرص الى قمة الخزان يساوي (٢٠ – ص$_{ى}$) × ٦٢,٥ $\pi \frac{ص_{ى}^{٢}}{١٦} \Delta$ ص$_{ى}$ وهذا العدد هو تقريب للشغل المبذول لرفع الشريحة اليائية الى قمة الخزان . وهكذا فان الشغل المبذول لتفريغ الخزان يساوي تقريبا :



الشكل ٦ — ٢٩

$$\sum_{ى=1}^{ن} (٢٠ - ص_ى) \times ٦٢,٥ \pi \left(\frac{ص_ى^٢}{١٦} \right) \Delta ص_ى$$

والشغل الحقيقي ش نحصل عليه بأخذ نهاية المجموع عندما تقترب || ت || من الصفر ، وهذا يعطينا :

$$ش = \int_{٠}^{٢٠} (٢٠ - ص) \times ٦٢,٥ \pi \left(\frac{ص^٢}{١٦} \right) د ص$$

$$= \frac{٦٢,٥ \pi}{١٦} \int_{٠}^{٢٠} (٢٠ ص^٢ - ص^٣) د ص$$

$$= \frac{٦٢,٥ \pi}{١٦} \left[\frac{٢٠ ص^٣}{٣} - \frac{١}{٤} ص^٤ \right]_{٠}^{٢٠}$$

= ١٦٣٦٢٥ باوند . قدم

مثـال ٤ : عند تمدد كمية من الغاز المحصور فان ضغط الغاز ض وحجمه ح يرتبطان بالصيغة ض $ح^{ك}$ = جـ ، حيث ك ، جـ ثابتان . فاذا تمدد الغاز من ح = أ الى ح = ب اثبت ان الشغل المبذول يعطى بالصيغة :

$$ش = \int_{أ}^{ب} ض د ح$$

الحـــل : بما ان الشغل المبذول مستقل عن شكل الوعاء المحتوى للغاز ، يمكننا ان نفترض ان الغاز محتوى في اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها نق وان التمدد يتم بالضغط على مكبس في اعلاه . فاذا كانت ت تجزئة للفترة [أ ، ب] معرفة بالنقط أ = $ح_٠$ ، $ح_١$ ، $ح_٢$ ، ... $ح_ن$ = ب فان $\Delta ح_ى = ح_ى - ح_{ى-١}$. واذا اعتبرنا الحجم يتمدد على دفعات كل منها $\Delta ح_ى$ فان المسافة التي يتحركها رأس

المكبس في الزيادة اليائية للحجم Δ ح$_{ى}$ تساوي $\frac{1}{\pi \text{ نق}^{2}} = \Delta$ ح$_{ى}$. واذا كانت ص$_{ى}$ تمثل قيمة الضغط في هذه الزيادة فان القوة المؤثرة على المكبس تساوي ص$_{ى}$ π نق^{2} . وهكذا فان الشغل المبذول للزيادة اليائية في الحجم يساوي تقريبا

$$\text{ص}_{ى}\ \pi\ \text{نق}^{2} \left(\frac{1}{\pi\ \text{نق}^{2}} \right) \Delta\ \text{ص}_{ى} = \text{ص}_{ى}\ \Delta\ \text{ح}_{ى} \text{ . وهكذا}$$

فان :

$$\text{ش} \approx \sum_{ى} \text{ص}_{ى}\ \Delta\ \text{ح}_{ى}$$

ولان التقريب يصبح افضل كلما صغرت Δ ص$_{ى}$ فان

$$\text{ش} = \lim_{\Delta \text{ت} \to 0} \sum_{ى}^{\text{نهـا}} \text{ص}_{ى}\ \Delta\ \text{ح}_{ى}$$

$$= \int_{\text{م}}^{\text{ب}} \text{ص}\ \text{د ح}$$

تمارين :

١ . سلك طوله الطبيعي ١٠ بوصات ، ويزداد طوله ٠,٥ ١ بوصة اذا اثرت عليه قوة مقدارها ٨ باوندات .

(أ) جد الشغل المبذول لزيادة طوله من الوضع الطبيعي الى طول ١٤ بوصة .

(ب) جد الشغل المبذول لشده من طول ١١ بوصة الى طول ١٣ بوصة .

٢ . اذا احتجنا لقوة ٤٠٠ باوند لضغط سلك طوله الطبيعي ١٢ بوصة الى طول ١٠ بوصات . جد الشغل المبذول لضغطه من طوله الطبيعي الى طول ٨ بوصات .

٣ . خزان اسطواني رأسي قطره ٣ أقدام وارتفاعه ٦ أقدام وهو ممتلىء بالماء .

(أ) جد الشغل المبذول لضخ الماء من فوق حافة الخزان .

(ب) جد الشغل المبذول لضخ الماء خارج الخزان خلال انبوب يرتفع ٤ أقدام فوق حافة الخزان .

٤ . اجب جزئي (أ) ، (ب) من التمرين (٣) اذا كان الخزان مملوء بالماء الى منتصفه .

٥ . حوض ماء طوله ٨ أقدام وطرفاه مثلثان متساويا الاضلاع طول كل ضلع فيهما يساوي قدمين . فاذا كان الحوض مملوء بالماء ، جد الشغل المبذول لضخ الماء من فوق حافة الحوض .

٦ . حوض على شكل نصف كرة قطرها ١٠ أقدام وقاعدتها الدائرية ترتكز الى اعلى في وضع افقي . فاذا كان الحوض مليئا بالماء فجد الشغل المبذول لضخ الماء خارجه الى نقطة ارتفاعها ٤ أقدام فوق سطحه .

٧ . يتنافر كل الكترونين بقوة تتناسب عكسيا مع مربع البعد بينهما . فعلى فرض ان القوة تقاس بالداين والمسافة بالسنتيمترات اجب عما يلي :

(أ) اذا ثبت الكترون في النقطة (٥ ، ٠) جد الشغل المبذول لتحريك الكترون اخر على امتداد محور السينات من نقطة الاصل حتى النقطة (٣ ، ٠) .

(ب) اذا ثبت الكترونان في النقطتين (٥ ، ٠) ، (− ٥ ، ٠) جد الشغل المبذول لتحريك الكترون ثالث على امتداد محور السينات من نقطة الاصل حتى النقطة (٣ ، ٠) .

٨ . حبل منتظم طوله ٤٠ قدما ووزنه ٦٠ باوندا وهو يتدلى راسيا من قمة بناية . فاذا ثبت وزن قدره ٥٠٠ باوند في اسفل الحبل فما الشغل المبذول لرفع هذا الوزن الى القمة .

٩ . يتغير حجم غاز وضغطه تبعا للقانون $ض ح^{\frac{1}{2}} = ٠١١٥$ ووحدات القياس هي البوصات والباوندات . جد الشغل المبذول اذا تمدد الغاز من ٣٢ الى ٤٠ بوصة مكعبة (ملاحظة انظر المثال ٤) .

١٠ . يرتبط ضغط كمية من البخار المحصور وحجمها بالصيغة $ض ح^{١,١٤} = جـ$ ، حيث جـ ثابت فاذا كان الضغط والحجم في لحظة معينة هما $ض_{.}$ ، $ح_{.}$ بالترتيب . جد الشغل المبذول اذا تمدد البخار الى ضعف حجمه .

٦ — قوة ضغط السائل :

اذا احتوى خزان قاعدته مستطيلة وجدرانه راسية سائلا ما ، فان القوة التي يؤثر بها السائل على قاعدة الخزان تساوي وزن السائل المحتوى في الخزان . ويعرف ضغط السائل على قاعدة الخزان بانه القوة المؤثرة على وحدة المساحة . فاذا كانت كثافة السائل ث فان الضغط ص عند اي نقطة تقع على عمق د وحدة من سطح السائل يعطي بالصيغة :

(٦ – ٢٨) ص = ث د

فمثلا كثافة الماء تساوي تقريبا ٥ , ٦٢ باوند / القدم^{٣} ، فعلى عمق اربعة اقدام يكون ضغطه مساويا ٥ , ٦٢ × ٤ أو ٢٥٠ باوند / القدم^{٢} . ويمكن البرهنة عمليا على انه عند اي نقطة في السائل يكون الضغط متساويا في جميع الاتجاهات .

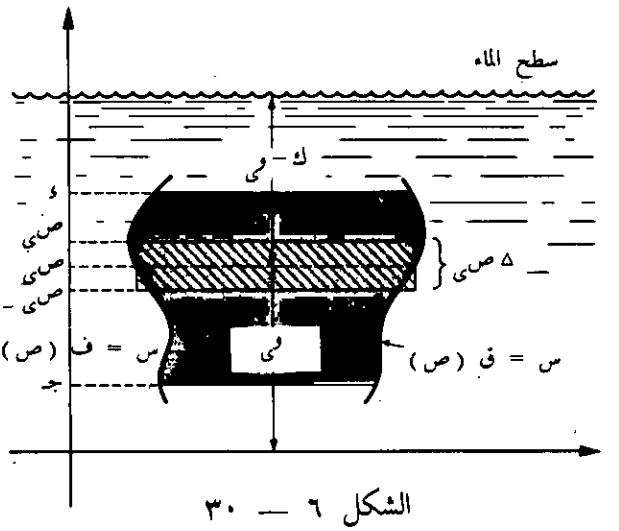
ولايجاد القوة الكلية التي يؤثر بها السائل على قاعدة الخزان المشار اليه سابقا ، يكفي ضرب مقدار الضغط عند القاع في مساحة قاعدة الخزان . ويصبح الامر اكثر تعقيدا اذا اردنا حساب القوه المؤثرة على احد جدران الخزان لان الضغط ليس ثابتا هناك ولكنه يزداد بزيادة العمق . وبدل معالجة هذه الحالة الخاصة سنقوم بمعالجة الحالة العامة :

لنفرض اننا اخذنا صفيحة مستوية وغمرناها في سائل كثافته ث بحيث كان سطح الصفيحة عموديا على سطح السائل ، وان شكل الصفيحة كشكل منطقة في مستوى س ص محدودة بمنحنيات المعادلات ص = جـ ، ص = د ، س = ق (ص) ، س = ف (ص) ، حيث ق ، ف اقترانان متصلان على [جـ ، د] ، ق (ص) ≤ ف (ص) لجميع قيم ص في [جـ . د] . ولنفرض ان سطح السائل يحوى المستقيم ص = ك ، ويوضح شكل ٦ – ٣٠ منطقة من هذا النوع .

وليس من الضروري بصورة عامة ان تكون المنطقة فوق محور السينات كما في الشكل . فاذا كانت ت تجزئة للفترة [جـ : د] معينة بالنقط جـ = ص$_{٠}$ ، ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ ، ٠٠٠ ، ص$_{ن}$ = د . فان Δ ص$_{ى}$ = ص$_{ى}$ – ص$_{ى – ١}$. فاذا كانت و$_{ى}$ نقطة في الفترة الجزئية [ص$_{ى – ١}$ ، ص$_{ى}$] ، نأخذ المستطيل الذي مساحته [ق (و$_{ى}$) – ف (و$_{ى}$)] Δ ص$_{ى}$. وعندما تكون Δ ص$_{ى}$ صغيرة

تبعد جميع النقط في المنطقة المستطيلة الشكل بعدا واحدا من سطح السائل هو ك – وى ، وهكذا فان الضغط عند كل نقطة من هذه المنطقة يمكن تقريبه بالمقدار ث [ك – وى] ، فالقوة المؤثرة على المستطيل اليائي تساوي تقريبا :

ث (ك – وى) [ق (وى) – ف (وى)] Δ صى



الشكل ٦ — ٣٠

وبالتالي يمكن تقريب القوة المؤثرة على المنطقة جميعها بمجموع ريمان

$$\sum_{ى} \text{ث (ك – وى) [ق (وى) – ف (وى)] } \Delta \text{ صى}$$

وكما هو متوقع فان هذا التقريب يكون أكثر دقة كلما صغر القياس المطلق || ت|| للتجزئة ، وهكذا نصل الى التعريف التالي :

(٦ – ٢٩) تعريف القوة التي يؤثر بها سائل : ان القوة ه الناتجة عن تأثير سائل كثافته ثابته تساوي ث على منطقة ط من النوع الموضح في شكل (٦ – ٣٠) حيث يكون الاقترانات ق ، ف متصلين على [جـ ، د] ، يساوي :

$$\text{ه} = \text{نهـا}_{\| ت \| \to 0} \sum_{ى} \text{ث (ك – وى) [ه (وى) – ف (وى)] } \Delta \text{ صى}$$

$$= \int_{\text{جـ}}^{ء} \text{ث (ك – ص) [ق (ص) – ف (ص)] ء ص}$$

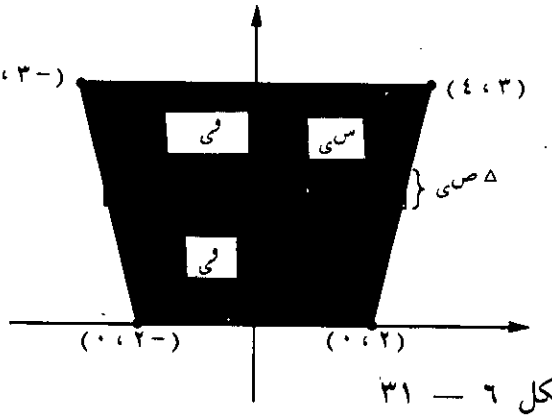
واذا قسمت منطقة أكثر تعقيدا الى مناطق جزئية من النوع الموضح سابقا يمكن تطبيق الصيغة (٦ – ٢٩) لكل منطقة جزئية ، وجمع القيم الناتجة .

كما يمكن وضع نظام الاحداثيات بطرق اخرى ، فمثلا يمكن اختيار محور السينات في مستوى سطح السائل او يمكن تبديل ادوار محوري س ، ص وفي هذه الحالة يجب تغيير (٦ – ٢٩) تبعا لذلك .

مثـال : قناة طولها ٨ أقدام وطرفاها شكل شبه منحرف متساوي الساقين طول قاعدته السفلى ٤ أقدام وطول قاعدته العليا ٦ أقدام وارتفاعه ٤ أقدام . جد القوة الكلية المؤثرة على احد طرفي القناة اذا كانت مليئة بالماء .

الحـــل : يوضح الشكل ٦ – ٣١ احد طرفي القناة وقد وضع عليه نظام للاحداثيات . ومعادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٣ ، ٤) هي ص = ٤ س – ٨ أو بصورة اخرى مكافئة س = $\frac{١}{٤}$ (ص + ٨) ، كما ينتج ان مساحة المستطيل الموضح في الشكل تساوي :

$$٢ \text{ س}_ى \Delta \text{ ص}_ى = ٢ \times \frac{١}{٤} (\text{ى} + ٨) \Delta \text{ ص}_ى = \frac{١}{٢} (\text{ى} + ٨) \Delta \text{ ص}_ى$$



الشكل ٦ — ٣١

وكما مر معنا في المناقشة السابقة فان قوة السائل المؤثرة على هذا المستطيل تساوي :

$$٦٢,٥ (٤ - \text{ى}) (\frac{١}{٢}) (\text{ى} + ٨) \Delta \text{ ص}_ى$$

وبالجمع وأخذ النهاية نجد ان القوة الكلية المؤثرة تساوي :

$$و = \int_{0}^{٤} (٦٢,٥)\ (٤ - ص)\ (\frac{١}{٢})\ (ص + ٨)\ د ص$$

$$= ٣١,٢٥ \int_{0}^{٤} (٣٢ - ٤ص - ص^{٢})\ د ص$$

$$= ٤١,٢٥\ [٣٢ ص - ٢ص^{٢} - \frac{١}{٣} ص^{٣}]_{0}^{٤}$$

$$= ٣١,٢٥ \left[\frac{٦٤}{٣} - ٣٢ - ١٢٨ \right] = \frac{٧٠٠٠}{٣} \text{ باوند}$$

تمارين :

١ . حوض زجاجي لتربية الاسماك طوله ٣ أقدام وطرفاه مربعان وعمقه قدم واحد فاذا مليء الحوض بالماء ، جد قوة تأثير الماء على (أ) احد طرفيه ، (ب) احد الجانبين .

٢ . اذا قسمت طرف الخزان في التمرين (١) بقطره الى جزأين . جد القوة المؤثرة على كل جزء .

٣ . قناة مائية طولها ٦ أقدام وطرفاها على شكل مثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه ٢ قدم وضلعه ٢ $\sqrt{٣}$ قدم في اعلى القناة :
(أ) جد القوة المؤثرة على احد طرفي القناة اذا كانت ممتلئة بالماء .
(ب) جد هذه القوة اذا كانت القناة ممتلئة الى نصفها .

٤ . اجب على (أ) ، (ب) من التمرين السابق اذا كان الارتفاع ع قدما حيث $٠ < ع < ٢$.

٥ . خزان اسطواني قطره ٤ أقدام وطوله ٥ أقدام . موضوع على جانبه . فاذا كان الخزان ممتلئا الى نصفه بالزيت الذي كثافته ٦٠ باوند / القدم^{٣} . جد القوة المؤثرة على أحد طرفي الخزان .

٦ . في أحد السدود بوابة مستطيلة الشكل طولها ٥ أقدام وارتفاعها ٣ أقدام . فاذا كانت البوابة رأسية وضلعها الاعلى مواز لسطح الماء وعلى عمق ٦ أقدام . جد قوة الماء المؤثرة على البوابة .

٧ . بركة سباحة مستطيلة الشكل . عرضها ٢٠ قدما وطولها ٤٠ قدما . فاذا كان الماء في البركة يتزايد بانتظام من ٣ أقدام عند أحد الطرفين الى ٩ اقدام عند الطرف الاخر . جد القوة المؤثرة على قاع البركة .

٨ . جد القوة المؤثرة على احد جانبي بركة السباحة المذكورة في التمرين السابق .

٩ . صفيحة على شكل شبه منحرف متساوي الساقين طول قاعدته العليا ٤ أقدام وطول قاعدته السفلى ٨ أقدام غطست راسيا في الماء بحيث كانت قاعدتاها موازيتين لسطح الماء . فاذا كان عمق قاعدتيها تحت سطح الماء يساوي ١٠ و ٦ أقدام ، جد قوة الماء المؤثرة على احد وجهي الصفيحة .

١٠ . صفيحة دائرية نصف قطرها قدمان ، غطست راسيا في الماء فاذا كانت المسافة بين سطح الماء ومركز الصفيحة ٦ أقدام ، جد قوة الماء المؤثرة على احد وجهي الصفيحة .

٧ — طول القوس :

يقال للاقتران ق على فترة ما انه ممهد اذا كانت له مشتقة قَ متصلة على الفترة . وبصورة تقريبية ، فان هذا يعني ان تغيرا صغيرا في س يؤدي الى تغير صغير في الميل قَ (س) لمماس منحنى ق . وهكذا لا توجد اركان حادة على منحنى الاقتران الممهد . وفي هذا البند سنعرف ماذا يعني بطول القوس بين نقطتين $ق_1$ ، $ق_2$ على منحنى ممهد

اذا كان الاقتران ق ممهدا على فترة مغلقة [أ ، ب] فان النقطتين (أ ، ق (أ)) ، (ب ، ق (ب)) تسميان طرفي المنحنى واذا اخذنا التجزئة ت للفترة [أ ، ب] المعرفة بالنقط أ = $س_0$ ، $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، $س_ن$ = ب ، ووضعنا $ك_ى$ لتعني النقطة ($س_ى$ ، ق ($س_ى$)) فاننا نحصل على ن + ١ من النقط $ك_0$ ، $ك_1$ ، ... ، $ك_ن$ الواقعة على منحنى ق . كما هو موضح في الشكل ٦ — ٣٢ وعند وصل كل $ك_{ى-١}$ مع $ك_ى$ بقطع خطوط مستقيمة طولها م ($ك_{ى-١}$ ، $ك_ى$) فان طول الخط المتكسر يساوي :

$$ل_ت = \sum_{ى=١}^{ن} م (ك_{ى-١} ، ك_ى)$$

وباستخدام (١ – ٦) ينتج ان :

(٦ – ٣٠) م (ك$_{ى-١}$ ، ك$_{ى}$) =

$$\sqrt{(س_{ى} - س_{ى-١})^{٢} + [ق(س_{ى}) - ق(س_{ى-١})]^{٢}}$$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة (٤ – ١٥) ينتج :

$$ه(س_{ى}) - ه(س_{ى-١}) = ه'(ى)(س_{ى} - س_{ى-١})$$

حيث ى نقطة في الفترة (س$_{ى-١}$ ، س$_{ى}$) وبالتعويض في (٦ – ٣٠) ووضع $\Delta س_{ى} = س_{ى} - س_{ى-١}$ نحصل على :

$$م(ك_{ى-١}، ك_{ى}) = \sqrt{(\Delta س_{ى})^{٢} + [ه'(ى)\Delta س_{ى}]^{٢}}$$

$$= \sqrt{١ + [ه'(ى)]^{٢}}\ \Delta س_{ى}$$

وينتج من ذلك ان :

(٦ – ٣١) $ل_{ت} = \sum_{ى=١}^{ن} \sqrt{١ + [ه'(ى)]^{٢}}\ \Delta س_{ى}$

لاحظ ان ل هي مجموع ريمان للاقتران ج المعرف بالقاعدة

ج (س) $= \sqrt{١ + [ه'(س)]^{٢}}$ ، كما ان ج متصل على [أ ، ب] لان ه' متصل على هذه الفترة . واذا كان القياس المطلق || ت || صغيرا فان ل ، طول الخط المنكسر يجب ان يكون قريبا من طول منحنى ه من م$_{١}$ الى م$_{٢}$ ، ويزداد التقريب دقة كلما صغرت ت . وهكذا فمن الطبيعي تعريف طول القوس لمنحنى ه من م$_{١}$ الى م$_{٢}$ كنهاية للمجموع (٦ – ٣١) . وبما ان (٦ – ٣١) هو مجموع ريمان للاقتران المتصل ج $= \sqrt{١ + [ه']^{٢}}$ فان النهاية موجودة وتساوي التكامل المحدود $\int_{أ}^{ب} \sqrt{١ + [ق(س)]^{٢}}\ د س$. وسيرمز لطول القوس هذا بالرمز ل .

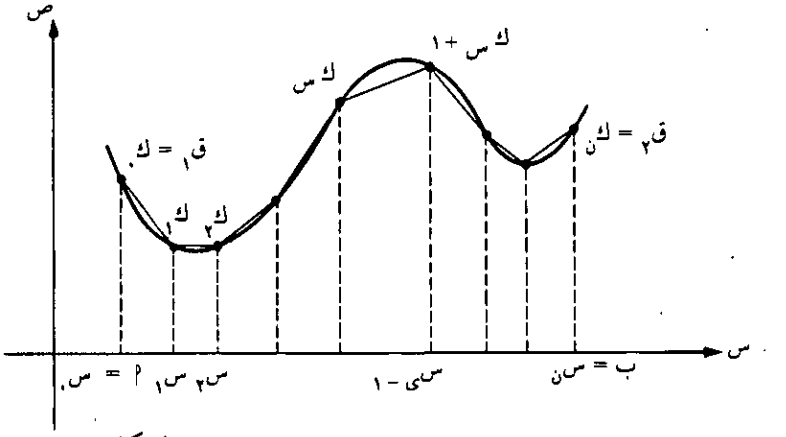
(٦ -- ٣٢) تعريف طول القوس : اذا كان الاقتران ق ممهدا على الفترة المغلقة [أ ، ب] فان طول القوس المنحنى ق من ن١ (أ ، ق (أ)) الى ن٢ (ب ، ق (ب)) يعطي بالصيغة :

$$ل = \int_{أ}^{ب} \sqrt{١ + [ق'(س)]^٢}\ د س$$

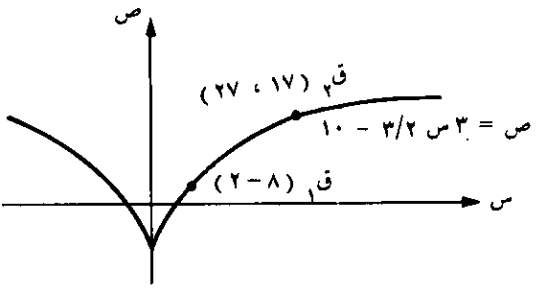
وفي الفصل الخامس عشر سيوسع التعريف الاخير ليشمل منحنيات اكثر . والمنحنى الذي تتوافر فيه شروط هذا التعريف اي له طول قوسي يقال له منحنى عديل rectifiable ، حتى اذا عرف الاقتران ق ضمنيا بمعادلة في س و ص فاننا نتكلم عن طول القوس لمنحنى هذه المعادلة .

مثال ١ : اذا كان ق (س) = $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} − ١٠ ، جد طول القوس لمنحنى ق من النقطة ن١ (٨ ، ٢) الى النقطة ن٢ (٢٧ ، ١٧) .

الحل : منحنى ق مخطط في الشكل ٦ − ٣٣ ، وبما ان



الشكل ٦ — ٣٢



الشكل ٦ — ٣٣

$$\text{فـ}'(\text{س}) = ٢\ \text{س}^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{\text{س}^{\frac{١}{٣}}} \quad \text{فان :}$$

$$\text{ل}_{٨}^{٢٧} = \int_{٨}^{٢٧} \frac{\sqrt{\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + ٤}}{\text{س}^{\frac{١}{٣}}}\ \text{د س}$$

ولايجاد قيمة التكامل نضع ع = $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + ٤$ ومنها ينتج ان د ع = $\frac{٢}{٣}\ \text{س}^{-\frac{١}{٣}}\ \text{د س}$ ،

ويمكن التعبير عن التكامل السابق كما يلي :

$$\text{ل}_{٨}^{٢٧} = \frac{٣}{٢} \int_{٨}^{٢٧} \sqrt{\text{س}^{٢/٣} + ٤} \left(\frac{٢}{٣}\ \text{س}^{-\frac{١}{٣}} \right) \text{د س}$$

فعند س = ٨ فان ع = $٨^{\frac{٢}{٣}} + ٤ = ٨$ وعند س = ٢٧ فان ع = $٢٧^{\frac{٢}{٣}} + ٤ = ١٣$

وباجراء التعويض وتغيير حدود التكامل فان :

$$\text{ل}_{٨}^{٢٧} = \frac{٣}{٢} \int_{٨}^{١٣} \text{ع}^{\frac{١}{٢}}\ \text{د ع} = \left[\frac{٣}{٢}\ \text{ع}^{\frac{٣}{٢}} \right] = \frac{٣}{٢}(١٣)^{\frac{٣}{٢}} - ٢٨$$

اذا عرف الاقتران ج بالقاعدة س = ج (ص) ، حيث ج متصل على الفترة [جـ ، د] فبمناقشة شبيهة بما سبق مع اعتبار ص المتغير المستقل نتوصل الى الصيغة التالية لطول القوس لمنحنى ج من (ج (جـ) ، جـ) الى (ج (د) ، د) :

$$(٦ - ٣٣) \quad \text{ل} = \int_{\text{جـ}}^{\text{د}} \sqrt{١ + [\text{جَ}(\text{ص})]}\ \text{د ص}$$

وبصورة عامة اذا امكن تقسيم منحنى ما الى عدد من الاجزاء كل منها منحنى اقتران ممهد ، فان طول المنحنى يمكن ان يعرف على انه مجموع الاطوال القوسية لكل من المنحنيات الجزئية . واقتران من هذا النوع يسمى ممهد الاجزاء (Piecewise Smooth) على الفترة [أ ، ب] .

وفي المناقشة التالية جعلنا المتغير ع دفعا للالتباس ، وهكذا فان صيغة الطول القوسي (٦ - ٣٢) تصبح :

$$\text{ل}_{\text{م}}^{\text{ب}} = \int_{\text{م}}^{\text{ب}} \sqrt{١ + [\text{ه}'(\text{ع})]^{٢}}\ \text{د ع}$$

فاذا كان ق ممهدا على [م ، ب] فانه يكون ممهدا ايضا على [م ، س] لجميع قيم س في [م ، ب] ، وطول المنحنى من النقطة ه (م ، ه (م)) الى النقطة ك (س ، ه (س)) يعطي بالصيغة :

$$\text{ل}_{\text{م}}^{\text{س}} = \int_{\text{م}}^{\text{س}} \sqrt{١ + [\text{ه}'(\text{ع})]^{٢}}\ \text{د ع}$$

فاذا وضعنا ل (س) بدل $\text{ل}_{\text{م}}^{\text{س}}$ ، يمكن اعتبار ل اقترانا مجاله [م ، ب] وذلك لانه لكل س في [م ، ب] يوجد عدد وحيد ل (س) ، ويسمى ل اقتران الطول القوسي لمنحنى ه ، بالنسبة للنقطة الثابتة ه ، وقيم ل (س) تمثل هندسيا بالطول القوسي لمنحنى ق من ق (م)) الى ك (س ، ق (س)) .

واقتران الطول القوسي ل قابل للتفاضل على [م ، ب] ومن تعريف ل (س) ، فان :

$$\text{ل}'(\text{س}) = \text{د}_{\text{س}} \left[\int_{\text{م}}^{\text{س}} \sqrt{١ + [\text{ه}'(\text{ع})]^{٢}}\ \text{د ع} \right]$$

$$= \sqrt{١ + [\text{ه}'(\text{س})]^{٢}}$$

وزيادة على ذلك فان تفاضلة ل هي :

(٦-٣٤) $\text{د ل} = \text{لَ}(\text{س})\ \text{د س} = \sqrt{١ + [\text{ه}'(\text{س})]^{٢}}\ \text{د س}$

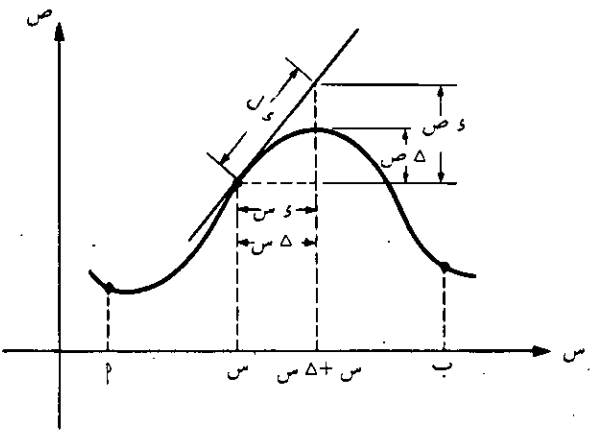
وبوضع ص = ه (س) واستخدام د ص = ه' (س) د س ، يمكن كتابة المعادلة الاخيرة بالشكل :

(٦-٣٥) $\text{د ل} = \sqrt{(\text{د س})^{٢} + (\text{د ص})^{٢}}$

ويوجد تفسير هندسي هام للصيغة الاخيرة ، فبتربيع الطرفين ينتج ان :

$$(\text{د ل})^{2} = (\text{د س})^{2} + (\text{د ص})^{2} \qquad (٦-٣٦)$$

فنجعل ص = ق (س) ثم نعطي س زيادة مقدارها Δ س ، حيث Δ ص ، Δ ل هما المتغيران المناظران في ص ، ل على الترتيب . وهذه الزيادات موضحة في شكل (٦ – ٣٤) حيث د ص هي مقدار ارتفاع المماس او انخفاضه عندما تتغير س من س الى س + Δ س . وينتج من (٦ – ٣٦) ان د ل يمكن اعتباره طول وتر مثلث قائم الزاوية طولا ضلعيه الاخرين | د س | ، | د ص | كما هو موضح في الشكل ٦ – ٣٤ . ويوضح الشكل ايضا انه عندما تكون Δ س صغيرة فان د ل يمكن الاخذ به كتقريب للزيادة في طول القوس Δ ل .



الشكل ٦ — ٣٤

مثـال ٢ : استخدم التفاضلات لتقريب طول القوس لمنحنى ص = س^{3} + ٢ س من هـ (١ ، ٣) الى هـ (١,٤ ، ٤,١٢٨) .

الحـــل : اذا وضعنا ق (س) = س^{3} + ٢ س واستخدمنا (٦ – ٣٤) ينتج ان :

$$\text{د ل} = \sqrt{١ + (٣\text{س}^{2} + ٢)^{2}}\ \text{د س}$$

ونحصل على التقريب المطلوب بوضع س = ١ ، د س = ٠,٢ ، وهكذا فان :

$$\text{د ل} = \sqrt{١ + ٥^{2}}\ (٠,٢) = \sqrt{٢٦}\ (٠,٢)$$

$$\approx ١,٠٢$$

تمارين :

في التمارين ١ – ٤ جد طول القوس لمنحنى المعادلة المعطاة من ه الى $\text{ه}_{\text{ن}}$

١ . $٨س^{٢} = ٢٧ص^{٣}$ ، $\text{ه}(١ ، \frac{٢}{٣})$ ، $\text{ه}_{\text{ن}}(٨ ، \frac{٨}{٣})$.

٢ . $(ص + ١)^{٢} = (س - ٤)^{٣}$ ، $\text{ه}(٥ ، ٠)$ ، $\text{ه}_{\text{ن}}(٨ ، ٧)$.

٣ . $ص = ٥ - \sqrt{س^{٣}}$ ، $\text{ه}(١ ، ٤)$ ، $\text{ه}_{\text{ن}}(٤ ، -٣)$.

٤ . $ص = ٦\sqrt[٣]{س^{٢}} + ١$ ، $\text{ه}(-١ ، ٧)$ ، $\text{ه}_{\text{ن}}(-٨ ، ٢٥)$.

٥ . حل التمرين (١) باستخدام الصيغة (٦ – ٣٣) .

٦ . حل التمرين (٢) باستخدام الصيغة (٦ – ٣٣) .

٧ . جد طول القوس لمنحنى $س^{\frac{٢}{٣}} + ص^{\frac{٢}{٣}} = ١$.

٨ . جد طول القوس لمنحنى ص = $(٨س^{٣} + ٥) / (٣٠س^{٣})$ من النقطة التي احداثيها السيني ١ الى النقطة التي احداثيها السيني ٢ .

٩ . اذا عرف ه بالقاعدة $\text{ه}(س) = \sqrt[٣]{س^{٢}}$ ، جد قاعدة اقتران الطول القوسي ل بالنسبة للنقطة (١ ، ١) . واذا زادت س من ١ الى ١,١ جد Δ ل ، ع ل .

١٠ . حل تمرين (٩) اذا كان $\text{ه}(س) = \sqrt{س^{٣}}$

١١ . استخدم التفاضلات لتقريب طول القوس لمنحنى $ص = س^{٢}$ من $\text{ه}(٢ ، ٤)$ الى قَ (٢,١ ، ٢١ ، ٤,٤١) . وضح هذا التقريب بيانيا وقارنه بالمسافة م (ه ، $\text{ه}_{\text{ن}}$)

١٢ . استخدم التفاضلات لتقريب طول القوس لمنحنى $ص + س^{٣} = ٠$ من $\text{ه}(١ ، -١)$ الى $\text{ه}_{\text{ن}}$ (= ١,١ ، ١,٣٣١) . وضح هذا التقريب بيانيا وقارنه مع م(ه . $\text{ه}_{\text{ن}}$) .

٨ ــ تطبيقات اخرى :

نعالج في هذا البند تطبيقات متنوعة لاعطاء القاريء فكرة عن الاستعمالات المتعددة للتكامل المحدود . ويستطيع القاريء المهتم ان يجد تطبيقات اخرى كثيرة . وتدخل التطبيقات الثلاث الاولى في علم الاقتصاد بينما التطبيق الرابع من العلوم الحياتية .

١ ــ ان من الاهمية بمكان لرجل الاعمال ان يأخذ بعين الاعتبار استهلاك اجهزته وادواته ، اي انخفاض قيمتها بالاستعمال . وابسط طريقة لذلك هي طريقة الخط المستقيم ، حيث يعتبر معدل الاستهلاك ثابتا . وكمثال على ذلك ، اذا كان الاستهلاك ٢٠٠ دينار في السنة فان الاستهلاك الكلي في نهاية ع من السنوات يعطي بالاقتران ق (ع) = ٢٠٠ ع ، ومنه تلاحظ ان معدل الاستهلاك يساوي ق' (ع) . وفي حالات كثيرة لا يكون معدل الاستهلاك ثابتا . فمثلا تستهلك السيارة سريعا خلال السنوات الاولى من استعمالها ثم تستهلك ببطء يزيد كلما اصبحت السيارة اقدم . ولكن استهلاك اشياء اخرى قد يزداد من سنة لسنة اخرى . وبصورة عامة اذا اعتبرنا ان معدل الاستهلاك لقطعة معينة من المعدات خلال الفترة الزمنية [٠ ، ع] هو بالتقريب ج (ع) ، حيث ج اقتران متصل ، فان الاستهلاك الكلي خلال الفترة [٠ ، ع] يساوي ق (ع) حيث ق' (ع) = ج (ع) . ويمكن كتابة ق (ع) بالصورة .

$$\text{ق}(\text{ع}) = \int_{٠}^{\text{ع}} \text{ق}'(\text{س})\, د\,\text{س} = \int_{٠}^{\text{ع}} \text{ج}(\text{س})\, د\,\text{س}$$

٢ . واذا فرضنا ان مبلغا ثابتا من المال ك يلزم لعمل اصلاح شامل لهذه القطعة بعد زمن ع ، ففي الفترة الزمنية [٠ ، ع] يبلغ مجموع ما ينفق على هذه القطعة هـ (ع) حيث :

$$\text{هـ}(\text{ع}) = \text{ك} + \int_{٠}^{\text{ع}} \text{ج}(\text{س})\, د\,\text{س}$$

اما متوسط الانفاق ، اي ما ينفق سنويا فهو :

$$م\ (ع) = \frac{هـ\ (ع)}{ع} \qquad (٦-٣٨)$$

واذا لم يكن هناك عوامل اخرى فان احسن وقت لعمل الاصلاح الشامل لهذه القطعة هو بعد الزمن ع حيث تكون م (ع) نهاية صغرى نسبية وهذا يحصل عندما

$$مَ(ع) = \frac{ع\ هـَ(ع) - هـ(ع)}{ع^{٢}} = صفراً$$

$$اي\ عندما\ هـَ(ع) = \frac{هـ(ع)}{ع} = م\ (ع)$$

وبما ان هـَ(ع) = ج (ع) فان افضل وقت للاصلاح الشامل للقطعة يحدث عندما يكون ج (ع) = م (ع) اي عندما يكون معدل الاستهلاك يساوي متوسط النفقة .

مثال ١ : باستخدام الاصطلاحات والرموز الواردة في المناقشة السابقة ، لنفرض ان معدل استهلاك قطعة من المعدات ج (ع) = ٣٠٠√ع ، ونفقات الاصلاح الشامل ك = ٥٠٠ حيث ع بالسنوات ، متى يجب عمل اصلاح شامل للقطعة لجعل متوسط النفقة اصغر ما يمكن .

الحل : باستخدام (٦ - ٣٨) ، (٦ - ٣٧) ، يعطى متوسط النفقة بالصيغة

$$م\ (ع) = (٥٠٠ + \int_{٠}^{ع} ٣٠٠\sqrt{س}\ د\ س) \div ع$$

$$= (٥٠٠ + ٢٠٠\ ع^{\frac{٣}{٢}}) \div ع$$

ومن المناقشة السابقة فان م لها قيمة صغرى عندما

$$(٥٠٠ + ٢٠٠\ ع^{\frac{٣}{٢}}) / ع = ٣٠٠\ ع^{\frac{١}{٢}}$$

ومن المعادلة السابقة ينتج ان ع = ٥ $^{\frac{٢}{٣}}$ = ٢,٩٢٤

اذن ع = سنتين و ١١ شهرا ، لأقرب شهر .

٣ . في علم الاقتصاد ، تسمى الطريقة التي تستخدمها المؤسسة لزيادة راسمالها ببناء راس المال . فاذا كان مقدار راس المال ص في الزمن ع يعطي بالتقريب بدلالة اقتران ما ف ، اي ان ص = ف (ع) ، حيث ف اقتران قابل للتفاضل ، فان معدل تغير ص بالنسبة للزمن ع يقال له سرعة نمو راس المال . فاذا رمزنا لسرعة النمو هذه بالرمز ى فان :

$$ى = \frac{د\ ص}{د\ ع} = ف' (ع)$$

وبالعكس اذا اعطيت ى بالاقتران ج (ع) ، حيث ج متصل على الفترة [أ ، ب] فان ازدياد راس المال في الفترة الزمنية [أ ، ب] هو

$$(٦-٣٩) \qquad \int_{أ}^{ب} ج (ع)\ د\ ع = ف (ب) - ف (أ)$$

مثال ٢ : ترغب احدى المؤسسات ان تكون سرعة نمو راسمالها ج (ع) = ع $^{\frac{١}{٣}}$ على وجه التقريب ، حيث ع بالسنوات ، ج (ع) بملايين الدولارات . فاذا كانت ع = صفرا تمثل الزمن الحاضر . فما قيمة راس المال المكون في نهاية السنوات الثماني القادمة .

الحل : بتطبيق (٦ - ٣٩) نحصل على :

$$\int_{٠}^{٨} ع^{\frac{١}{٣}}\ د\ ع = \frac{٣}{٤} \left[ع^{\frac{٤}{٣}} \right]_{٠}^{٨} = ١٢$$

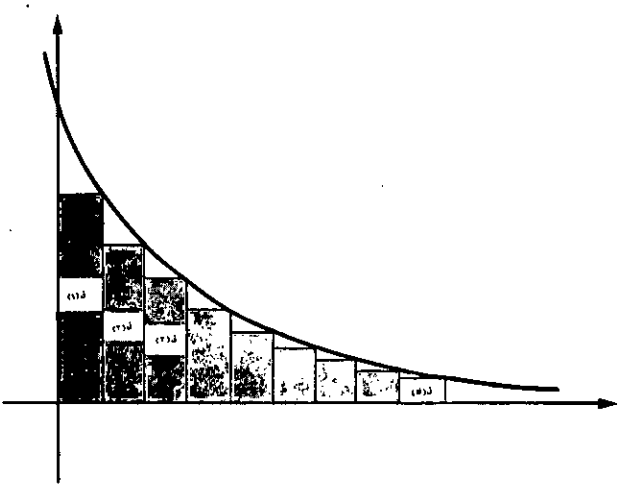
وهكذا فان قيمة راس المال المتكون تساوي ١٢ مليون دولار .

٤ . في الكثير من الوظائف يطلب من الموظف القيام بواجب محدد باستمرار . فمثلا ولد يعمل في متجر لبيع الدراجات وواجبه ان يقوم بتركيب الدراجات الجديدة الواحدة بعد الاخرى . فمع تكرار العمل حتى نقطة معينة فان الزمن الذي يستغرقه تركيب كل دراجة يكون اقل من الزمن الذي يحتاجه تركيب الدراجة

التي سبقتها . واليك مثالا اخر على طريقة التعليم بالتكرار هذه ، مثقب البطاقات الذي يترجم المعلومات المكتوبة الى بطاقات مثقبة ، فان الزمن الذي يحتاجه لتثقيب كل بطاقة ينقص كلما زاد عدد البطاقات المثقبة . ومثال اخير ، الزمن الذي يحتاجه شخص ليتتبع طريقا في دهليز معقد يقل بالمران . لنأخذ موقفا عاما ولنفرض ان هناك واجبا يجب تكراره مرات عديدة . ولنفرض ان التجربة دلت على ان الزمن اللازم لانجاز هذا الواجب في المرة النونية هو بالتقريب ن (ق) ، حيث ق اقتران متصل متناقص على فترة مناسبة . فالزمن الكلي لاجراء المهمة ك من المرات يساوي

$$\sum_{ق=1}^{ك} \text{ن}(ق) = \text{ن}(1) + \text{ن}(2) + \cdots + \text{ن}(ك) . \qquad (٦-٤٠)$$

واذا اخذنا منحنى الاقتران ، فكما هو موضح في الشكل ٦ – ٣٥ فان المجموع (٦ – ٤٠) يساوي مجموع مساحات المستطيلات الداخلية التي يمكن تقريبها بالتكامل المحدود :



الشكل ٦ — ٣٥

$\int_{0}^{ك}$ ن (س) د س ، ويكون التقريب اقرب الى الصحة اذا كان متناقصا ببطء على [٠ ، ك] ، اما اذا كان ق يتغير بسرعة في كل وحدة من وحدات س فلا يجوز استخدام التكامل في التقريب .

مثـال ٣ : شركة تعمل الاستفتاءات عن طريق مقابلات هاتفية ، وجدت ان الزمن الذي يلزم موظفا عندها لاجراء مقابلة كاملة يعتمد على عدد المقابلات التي اتمها قبل ذلك . فاذا فرضنا انه قدر بحساب معين ان عدد الدقائق اللازمة لاكمال المقابلة النونية يعطى بالصيغة ق (س) = ٦ (١ + س)$^{-\frac{١}{٥}}$ استخدم التكامل المحدود لتقريب الزمن اللازم ليتم الموظف اجراء (أ) ١٠٠ مقابلة ، (ب) ٢٠٠ مقابلة . واذا كان الموظف يحصل على ٣,٦ دولارا في الساعة ، احسب كم الزيادة التي تتكلفها الشركة لو طلبت من موظفين ان يتم كل منهما ١٠٠ مقابلة بدلا من ان يقوم موظف واحد بمأتي مقابلة .

الحـــل : الزمن اللازم لاجراء ١٠٠ مقابلة يساوي تقريبا :

$$\int_{٠}^{١٠٠} ٦ (١ + س)^{-\frac{١}{٥}} \, د س = ٦ \times \frac{٥}{٤} \left[(١ + س)^{\frac{٤}{٥}} \right]_{٠}^{١٠٠}$$

$$= \frac{١٥}{٢} \left[(١٠١)^{\frac{٤}{٥}} - ١ \right]$$

$$\approx ٢٩٣,٥ \text{ دقيقة}$$

والزمن اللازم لاجراء ٢٠٠ مقابلة يساوي تقريبا

$$\int_{٠}^{٢٠٠} ٦ (١ + س)^{\frac{١}{٥}} \, د س = ٦ \times \frac{٥}{٤} \left[(١ + س)^{\frac{٤}{٥}} \right]_{٠}^{٢٠٠}$$

$$= \frac{١٥}{٢} \left[(٢٠١)^{\frac{٤}{٥}} - ١ \right]$$

$$\approx ٥١٤,٤ \text{ دقيقة}$$

وحيث ان الموظف يأخذ ٠,٠٦ دولارا في الدقيقة فان التكلفة لموظف واحد لاجراء ٢٠٠ مقابلة تساوي = ٠,٠٦ × ٥١٤,٤ = ٣٠,٦٦ دولارا في حين ان تكلفة اثنين يجرى كل منهما ١٠٠ مقابلة تساوي = ٠,٠٦ × ٢٩٣,٥ × ٢ = ٣٥,٢٢ دولارا

وهي اكثر بـ ٣٦ , ٤ دولارا من تكلفة موظف واحد . لاحظ ان الزمن الذي وفر باستخدام موظف واحد بلغ حوالي ٢٢٠ دقيقة واذا استخدمنا آلة حاسبة نجد ان :

$$\sum_{ن=1}^{100} ٦ (١ + ن)^{\frac{١}{٥}} = ٢٩١ , ٧٥$$

$$\sum_{ن=1}^{200} ٦ (١ + ن)^{\frac{١}{٥}} = ٥١٢ , ٥٧$$

وهكذا فان النتيجة التي حصلنا عليها بالتكامل (المساحة تحت المنحنى) أكثر بوحدتين تقريبا من قيمة المجموع المناظر (مجموع مساحات المستطيلات الداخلية) .

٥ . والتطبيق التالي للتكامل المحدود مأخوذ من حقل العلوم الحياتية : عند تدفق سائل بسرعة ثابتة ع في انبوب اسطواني فان كمية السائل التي تمر في وحدة الزمن تساوي ع ح ، حيث ح مساحة مقطع الانبوب (انظر الشكل ٦ – ٣٦) . ولكن عند دراسة جريان الدم في شريان دقيق فاننا نحتاج لصيغة أكثر تعقيدا . وذلك لانه في هذه الحالة الاخيرة يكون تدفق الدم في طبقات كما هو موضح في الشكل ٦ – ٣٧ . فالطبقة الاكثر قربا من جدار الشريان يميل الدم فيها الى الالتصاق بالجدار ويمكن اعتبار سرعته صفرا . وتزداد السرعة كلما قربت الطبقات من مركز الشريان . ولاغراض حسابية يمكن اعتبار ان الدم يتدفق على هيئة طبقات او قشرات اسطوانية رقيقة تنزلق بعضها داخل بعض والقشرة الخارجية ثابتة وتزداد سرعة القشرة كلما صغر قطرها (انظر الشكل ٦ – ٣٧) . فان السرعة ع (ر) لقشرة نصف قطرها ر تعطي بالصيغة :

$$ع (ر) = \frac{ص}{٤ ن ل} (نق^{٢} - ر^{٢})$$

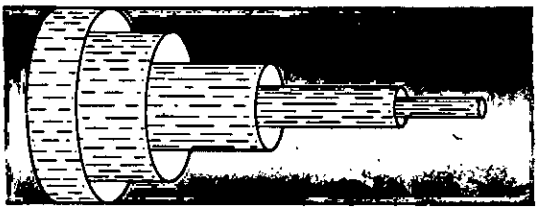
حيث نق نصف قطر الشريان بالسنتيمترات ، ل طوله بالسنتيمترات ، ص فرق الضغط بين طرفيه بالداين / سم^{٢} ، ن لزوجة الدم بالداين .

ثانية / سم^{2} . لاحظ ان السرعة صفر عندما $ر$ = نق ولها قيمة عظمى $\frac{ص\ نق^{2}}{٤\ ز\ ل}$

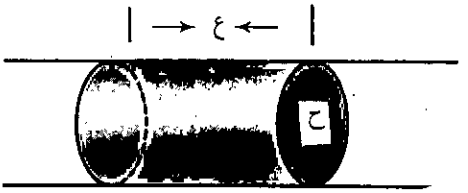
عندما تقترب $ر$ من الصفر . فاذا كان نصف قطر القشرة $ك$ هو $ر_{ك}$ وسمكها $\Delta ر_{ك}$ ، فباستخدام (٦ - ١٦) نجد ان حجم الدم في هذه القشرة يساوي

$$٢\ \pi\ ر_{ك}\ ع\ (ر_{ك})\ \Delta\ ر_{ك} = \frac{٢\ \pi\ ر_{ك}^{٤}\ ص}{٤\ ز\ ل}\ (نق^{٢} - ر_{ك}^{٢})\ \Delta ر_{ك}$$

واذا كان هناك $ن$ قشرة فان التدفق الكلي في الشريان في وحدة الزمن يساوي تقريبا :



شكل ٦ — ٣٧



الشكل ٦ — ٣٦

$$\sum_{ك=١}^{ن} \frac{٢\ \pi\ ر_{ك}^{٤}\ ص}{٤\ ز\ ل}\ (نق^{٢} - ر_{ك}^{٢})\ \Delta\ ر_{ك}$$

ولتقدير التدفق الكلي ق اي حجم الدم الجاري في وحدة الزمن نأخذ نهاية المجموع عندما تزداد $ن$ بدون حصر ، وهذا يؤدي الى التكامل التالي :

$$\text{ق} = \int_{0}^{\text{نق}} \frac{2\ \pi\ \text{ر}\ \text{ص}}{\text{ن}\ \text{ل}} (\text{نق}^2 - \text{ر}^2)\ \text{د ر}$$

$$= \frac{\pi\ \text{ص}}{\text{ن}\ \text{ل}} \int_{0}^{\text{نق}} (\text{نق}^2\ \text{ر} - \text{ر}^3)\ \text{د ر}$$

$$= \frac{\pi\ \text{ص}}{\text{ن}\ \text{ل}} \left[\frac{1}{2}\ \text{نق}^2\ \text{ر}^2 - \frac{1}{4}\text{ر}^4 \right]_{0}^{\text{نق}}$$

$$\text{ق} = \frac{\pi\ \text{ص}\ \text{نق}^4}{8\ \text{ن}\ \text{ل}}\ \text{سم}^3 \qquad (٦-٤١)$$

وهذه الصيغة ليست دقيقة لأن سمك القشرة لا يمكن ان نجعله صغيراً كما نختار ، فاصغر سمك ممكن هو سمك الكرة الدموية الحمراء الذي يقارب ٢×١٠^{-١} سم . ولكن يمكن اعتبار ان الصيغة (٦ – ٤١) تعطي تقديرا معقولا .

ومن المهم ان نلاحظ ان تغيرا صغيرا في نصف قطر الشريان يسبب تغييرا كبيرا في التدفق وذلك لان ق تتناسب طرديا مع القوة الرابعة لنصف القطر نق ، كما ان تغيرا في فرق الضغط له تأثير اقل لان ص تظهر في (٦ – ٤١) للقوة الاولى فقط .

تمارين :

١ . سرعة استهلاك قطعة من المعدات في الفترة الزمنية [٠ ، ٣] يمكن تقريبه بالصيغة

ج (ع) = ١ – $\frac{\text{ع}^2}{9}$ حيث ع بالسنوات ، ج (ع) بمئات الدولارات . جد الاستهلاك الكلي في نهاية الفترات التالية (أ) ٦ أشهر ، (ب) سنه واحدة ، (جـ) ١٨ شهرا ، (د) سنتان .

٢ . معدل استهلاك قطعة من المعدات في الفترة الزمنية [٠ ، ٦] يمكن تقريبه بالصيغة ج (ع) = $\sqrt{١٠ - ع}$ ، حيث ع بالسنوات ، ج (ع) بآلاف الدولارات . فاذا كنا ننفق بعد ب سنوات مبلغا اضافيا قدره ٤٢٠ دولارا للاصلاح الشامل ، ما متوسط الانفاق في السنوات الست ؟

٣ . في المثال (١) ، اذا كان ج (ع) = $١٠٠ع^{\frac{٢}{٣}}$. ك = ٤٠٠ ، جد احسن وقت لتصليح القطعة .

٤ . في المثال (٢) اذا كان معدل الاستثمار ج (ع) = ٢ع (٣ع + ١) تقريبا ، حيث ج (ع) بالاف الدولارات . كم يبلغ راس المال المتكون في الفترات [٠ ، ٥] ، [٥ ، ١٠] .

٥ . مثقب يحول بيانات التسجيل من الاوراق المكتوبة الى بطاقات مثقبة . فاذا اعطي عدد الدقائق اللازمة لتثقيب البطاقة النونية بالصيغة ف (ن) = ٦ (١ + ن)$^{\frac{١}{٣}}$ فاستخدم تكاملا محدودا لتقدير الزمن اللازم (أ) لمثقب واحد كي يثقب ٦٠٠ بطاقة ، (ب) لمثقبين كي يثقب كل منهما ٣٠٠ بطاقة .

٦ . قدر عدد الدقائق التي يستغرقها شخص كي يتبع طريقا في دهليز معقد بدون خطأ بالصيغة ف (ن) = ٥ ن$^{\frac{١}{٢}}$ ، حيث ن عدد المحاولات التامة السابقة ، كم من الوقت يلزم لاتمام ١٠ محاولات .

٧ . في مصنع للأجزاء الصغيرة قدر أنّ الزمن الذي يحتاجه العامل لتجميع قطعة معينة يعتمد على عدد القطع التي قام بتجميعها سابقا . فاذا كان عدد الدقائق اللازم لتجميع القطعة ن يساوي بالتقريب ف (ن) = ٢٠ ن$^{-٠,٤}$ + ٣ ما الزمن الذي يستغرقه تجميع الكميات التالية :

(أ) قطعة واحدة ، (ب) ٤ قطع ، (جـ) ٨ قطع ، (د) ١٦ قطعة .

٨ . استخدم تكاملا محدودا لتقريب المجموع

$$\sum_{ك=١}^{١٠٠} ك \left(ك^{٢} + ١\right)^{-\frac{١}{٤}}$$

٩ — تمارين مراجعـة :

شفوية : عرف او ناقش كلا مما يلي :

١ . المساحة بين منحنيات اقترانات متصلة .
٢ . الجسم الدوراني .
٣ . طرق ايجاد احجام الاجسام الدورانية .
٤ . الشغل .
٥ . قوة ضغط السائل .
٦ . اقتران ممهد .
٧ . اقتران ممهد بالتجزئة .
٨ . الطول القوسي لمنحنى .
٩ . اقتران الطول القوسي .

كتابيـــة :

في التمرينين ١ ، ٢ ارسم المنطقة المحدودة بمنحنيات المعادلات المعطاة ، وجد المساحة بطريقتين الاولى بالتكامل بالنسبة للمتغير س والثانية بالتكامل بالنسبة للمتغير ص .

١ . ص = − س^{٢} ، ص = س^{٢} − ٨ .

٢ . ص^{٢} = ٤ − س ، س + ٢ص − ١ = ٠ .

في التمرينين ٣ ، ٤ جد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنيات المعادلات المعطاة :

٣ − س = ص^{٢} ، س + ص = ١ .

٤ . ص + س^{٣} = ٠ ، ص = $\sqrt{س}$ ، ٣ص + ٧س − ١٠ = ٠ .

في التمارين ٥ − ٨ ارسم المنطقة المحدودة بمنحنيات المعادلات المعطاة وجد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة حول المحور المعين .

٥ . ص = $\sqrt{٤س + ١}$ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ٢ ، حول محور ص .

٦ . ص = س^{٤} ، ص = ٠ ، س = ١ ، حول محور ص .

٧ . ص = س^{٣} + ١ ، س = ٠ ، ص = ٢ ، حول محور ص .

٨ . ص = $\sqrt[٣]{س}$ ، ص = $\sqrt{س}$ ، حول محور س .

٩ . جد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة المحدودة بمنحنيات ص = ٤ س^{٢} ، ٤س + ص = ٨ ، كما يلي :

أ) حول محور س .
ب) حول المستقيم س = ١ .
جـ) حول المستقيم ص = ١٦ .

١٠ . جد حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة المحدودة بمنحنيات كل من ص = س^{٣} س = ٢ ، ص = ٠ كما يلي :
أ) حول محور س .
ب) حول محور ص .
جـ) حول المستقيم س = ٢ .
د) حول المستقيم س = ٣ .
هـ) حول المستقيم ص = ٨ .
و) حول المستقيم ص = − ١ .

١١ . جد الطول القوسي لمنحنى المعادلة (س + ٣)^{٢} = ٨ (ص − ١)^{٣} من النقطة (− ٢ ، ٣ / ٢) الى النقطة (− ٣ ، ١) .

١٢ . جسم قاعدته منطقة في مستوى س ص محدودة بمنحنيات ص^{٢} = ٤ س ، س = ٤ . جد حجم الجسم اذا كان كل مقطع منه بمستو عمودي على محور السينات مثلثا متساوي الساقين قائم الزاوية واحد اضلاعه المتساوية على قاعدة الجسم .

١٣ . بركة سباحة فوق الارض لها شكل اسطوانة دائرية قائمة قطرها ١٢ قدما وارتفاعها ٥ أقدام . فاذا كان عمق الماء في البركة ٤ أقدام ، جد الشغل الذي يبذل لتفريغ البركة بنضح الماء من فوق حافة البركة .

١٤ . اثناء ارتفاع دلو مسافة ٣٠ قدما من قاع بئر يسيل الماء منه بمعدل ثابت . جد الشغل المبذول اذا كان الدلو يحتوي اصلا ٢٤ باوندا من الماء ويسيل ثلثه اثناء سحبه . وذلك بفرض ان وزن الدلو الفارغ ٤ باوندات واهمال وزن الحبل .

١٥ . صفيحة مربعة الشكل طول ضلعها ٤ أقدام غطست راسيا في الماء بحيث كان احد قطريها موازيا للسطح . فاذا كانت المسافة بين السطح ومركز الصفيحة ٦ أقدام ، جد القوة التي يضغط بها الماء على احد سطحي الصفيحة .

١٦ . استخدم التفاضلات لتقريب الطول القوسي لمنحنى ص = ٣ س^{٢} − ٤ س + ٢ من (١ ، ١) الى (١,١ ، ١,٢٣) .

اذا كانت $\lim_{\|ت\| \to 0} \sum_{ى} \pi \, و^{2}_{ى} \Delta س_{ى}$ تمثل نهاية مجموع

الاقتران ف على الفترة [٠ ، ١] ، حل التمارين ١٧ – ٢٠ :

١٧ . جد قيمة النهاية .

١٨ . فسر النهاية كمساحة منطقة في مستوى س ص .

١٩ . فسر النهاية كحجم جسم دوراني .

٢٠ . فسر النهاية على انها شغل تبذله قوة .

الفصل السابع

موضوعات في الهندسة التحليلية

تتضمن دراسة الهندسة المستوية دراسة الاشكال المختلفة كالخطوط المستقيمة والدوائر والمثلثات التي تقع في مستوى واحد وتبرهن النظريات بطريقة الاستنتاج ابتداء ببديهيات معينة .

اما في الهندسة التحليلية فتدرس الاشكال المستوية بواسطة استحداث نظام احداثيات ديكارتي ثم استعمال قوانين ومعادلات مختلفة . واذا اردنا تلخيص دروس الهندسة التحليلية بجملة واحدة فلربما كان التلخيص المناسب كما يلي « تعطى معادلة ما لتجد بيانها ، أو بالعكس تعطى بيانا لمعادلة ما فتجد هذه المعادلة » .

وفي هذا الفصل سنستعمل طريقة الاحداثيات لدراسة بعض الاشكال المستوية الاساسية .

١ — القطوع المخروطيـــة : (Conic Sections)

ان جميع الاشكال التي سندرسها في هذا الفصل يمكن الحصول عليها من تقاطع مستوى معين مع مخروط دائري قائم كما في الشكل ٧ – ١ .

ولهذا سميت بالقطوع المخروطية . ويمكن تلخيص الحالات المختلفة كما يلي : —

(أ) اذا كان المستوى يقطع جزءا واحدا من المخروط كليا وليس عموديا على المحور كما في الشكل ٧ – ١ أ فان المقطع يسمى قطعا ناقصا (Ellipse) اما اذا كان المستوى عموديا على المحور فان المقطع يكون دائرة

(ب) واذا كان المستوى لا يقطع أي جزء من المخروط كليا ولا يقاطع الجزأين كما في الشكل ٧ – ١ ب فان المقطع يسمى قطعا مكافئا (Parabola)

(جـ) واذا كان المستوى يقطع جزأي المخروط كما في الشكل ٧ – ١ جـ فان المقطع يسمى قطعا زائدا (Hyperbola)

وبتغيير موضع المستوى أو شكل المخروط يمكننا تغيير الاشكال المخروطية الناتجة الى حد كبير . فاذا جعل المستوى في اوضاع معينة فاننا نحصل على ما يسمى بالقطوع المخروطية المنحلة (Degenerate Conics) وعلى سبيل المثال ، اذا قطع المستوى المخروط عند الرأس فان الشكل المخروطي الناتج يصبح نقطة واحدة فقط . اما اذا وقع محور المخروط على المستوى فان الشكل المخروطي الناتج يصبح خطين مستقيمين واخيرا اذا كان موضع المستوى كما في الشكل ٧ – ١ ب ثم حركنا المستوى موازيا لنفسه حتى ينطبق على أحد المستقيمات المولدة للمخروط فان ما ينتج في هذا الوضع هو خط مستقيم .

لقد درست المقاطع المخروطية دراسة واسعة أيام الرياضيين الاغريق القدماء ولقد استخدموا لدراستها اساليب الهندسة الاقليدية ، ولقد اكتشفوا خواص الاشكال المخروطية التي استطعنا بواسطتها تعريف المقاطع المخروطية بدلالة نقاط تسمى بؤرات (Foci) وواحدتها بؤرة (Focus) وبدلالة خطوط مستقيمة تسمى الادلة (Directrices) وواحدها دليل (Directrix) ومن اجل مطابقة هذه التعريفات مع ما ناقشناه سابقا نحتاج الى براهين لن نخوض فيها هنا .

وهناك حقيقة مهمة وهي أن الاشكال المخروطية رغم انها قد درست قبل آلاف السنين ، لم يتطرق اليها الاهمال لانها في الواقع من أهم الوسائل للدراسة الحديثة للفضاء الخارجي ولدراسة الجزئيات الذرية . لقد اثبت في الفيزياء أنه اذا تحركت كتلة في مجال قوة تحت تأثير قانون التربيع العكسي (Inverse Square Force Field) فان مسارها يكون شكلا مخروطيا ومن امثلة مجال القوة الذي يؤثر بقانون التربيع العكسي مجال الجاذبية والمجال الالكترومغناطيسي ، وكذلك ان مسارات الكواكب هي قطوع ناقصة ، فاذا استطال القطع الناقص كثيرا صار يشبه مسار المذنب (Comet) اما القطع الزائد فانه يهمنا اذ به نصف مسار جزئيات الفا (Alpha Particles) في المجال

الكهربائي لنواة الذرة وان الشخص المهتم ليجد العديد من التطبيقات الاخرى للمقاطع المخروطية .

٢ — القطع المكافىء (Parabola)

ان القطوع المكافئة مهمة وذلك لتطبيقاتها العديدة في العالم الفيزيائي فاذا اطلقت قذيفة تحت تأثير الجاذبية الارضية فانه يمكننا ان نثبت أن مسارها هو قطع مكافيء وذلك اذا اهملنا مقاومة الهواء والعوامل الاخرى . وتفيد خواص القطع المكافيء في صناعة مرايا المراصد الفلكية والكشافات الضوئية وهذه بعض من تطبيقات القطوع المكافئة .

القطع المكافيء هو مجموعة النقاط التي تقع في مستوى واحد وعلى ابعاد متساوية من نقطة ثابتة ب تسمى البؤرة ومن خط مستقيم معين ل يسمى الدليل يقعان في المستوى نفسه .

سنفرض أن النقطة ب لا تقع على الدليل ل والا انحل القطع المكافيء واصبح خطا مستقيما . فاذا كانت هـ اي نقط في المستوى وكانت النقطة هَ هي موقع العمود النازل من النقطة هـ على الدليل ل فحسب التعريف (٧ — ١) تقع النقطة هـ على القطع المكافيء اذا وفقط اذا كان ل (هـ ، ب) = ل (هـ ، هَ) والشكل ٧ — ٢ يمثل ذلك حيث ان الخط المتقطع يمثل المواقع الممكنة للنقطة هـ . والخط المستقيم الذي يمر بالبؤرة عموديا على الدليل يسمى محور القطع المكافيء . والنقطة ر التي تقع على المحور في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل تسمى رأس القطع المكافيء .

ويمكننا اشتقاق معادلة بسيطة للقطع المكافيء كما يلي :— اجعل محور الصادات ينطبق على محور القطع المكافيء بحيث يكون رأسه في نقطة الاصل كما في الشكل ٧ — ٣ . فاذا كانت احداثيات البؤرة ب (صفر ، ﻫ) حيث أن ﻫ عدد حقيقي ، ﻫ ≠ صفراً كانت معادلة الدليل ص = — ﻫ وكانت النقطة هـ (س ، ص) تقع على القطع المكافيء اذا وفقط اذا كان

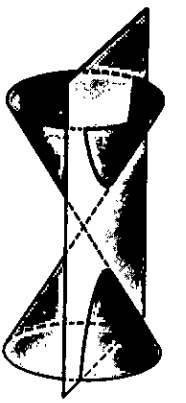
$$\sqrt{(\text{س} - \text{صفر})^2 + (\text{ص} - \text{ﻫ})^2} = \sqrt{(\text{س} - \text{س})^2 + (\text{ص} + \text{ﻫ})^2}$$

وبتربيع طرفي المعادلة وتبسيطها نحصل على

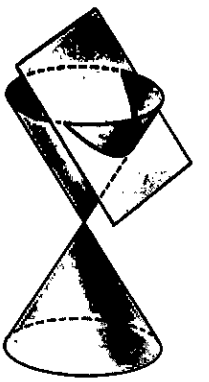
$$\text{س}^2 = 4\text{ﻫ ص} \quad (٧ - ٢)$$

تسمى المعادلة (٧ – ٢) الصيغة القياسية او المعيارية لمعادلة قطع مكافيء بؤرته ب (صفر ، أ) ومعادلة دليلة ص = – أ .

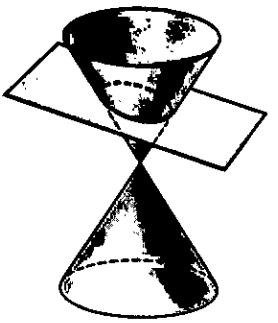
وفي المعادلة (٧ – ٢) اذا كانت أ > صفر فان فتحة القطع المكافيء تكون للاعلى كما في الشكل ٧ – ٣ ، واذا كانت أ < صفر فان فتحة القطع المكافيء تكون للاسفل .



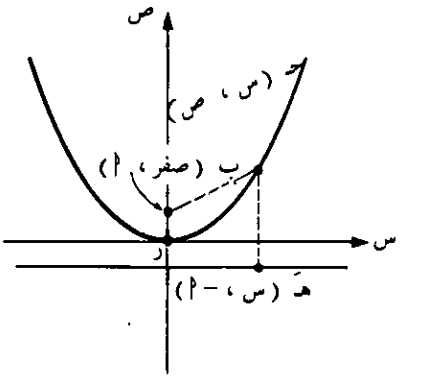
الشكل ٧ — ١ جـ



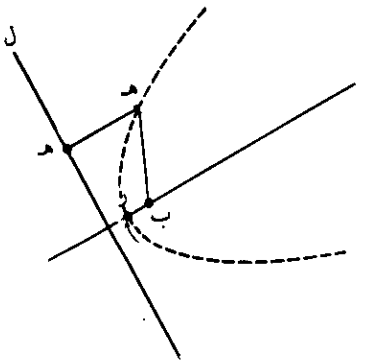
الشكل ٧ — ١ ب



الشكل ٧ — ١ أ



الشكل ٧ — ٣



الشكل ٧ — ٢

ويقع وضع مشابه اذا جعلنا محور السينات محور القطع المكافيء والنقطة ر (صفر ، صفر) راسه ، فلنفرض أن البؤرة هي ب (أ ، صفر) فتكون معادلة الدليل س = – أ وتكون معادلة القطع المكافيء هي

(٧ – ٣) ص^{٢} = ٤ أ س ، انظر الشكل ٧ – ٤ .

فاذا كانت أ > صفر فان فتحة القطع المكافيء في (٧ – ٣) تكون لليمين واذا كانت أ < صفر فان فتحته لليسار .

مثـال ١ : جد احداثيات البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافيء الذي معادلته ص^{٢} = − ٦ س ثم ارسم بيانه .

الحـــل : المعادلة ص^{٢} = − ٦ س لها شكل المعادلة (٧ − ٣) ، لذلك فان ٤ أ = − ٦ أو أ = − ٣ / ٢ ، لذلك فان البؤرة هي ب (− ٣ / ٢ ، صفر) ومعادلة الدليل س = ٣ / ٢ ، انظر الشكل ٧ − ٥ الذي يمثل بيان المعادلة .

مثـال ٢ : جد معادلة القطع المكافيء الذي راسه نقطة الاصل وفتحته للاعلى ويمر

الحـــل : الشكل العام للمعادلة هوكما في (٧ − ٢) فيما ان النقطة هـ (− ٣ ، ٧) تقع على القطع المكافيء فانها تحقق معادلته لذلك فان

(− ٣)^{٢} = ٤ أ (٧) أو أ = ٩ / ٢٨

لذلك فان المعادلة المطلوبة هي

س^{٢} = بالنقطة هـ (− ٣ ، ٧) . س^{٢} $\frac{٩}{٧}$

أو ٧ س^{٢} = ٩ ص

ان بيانات هذه المعادلات التي درسناها كلها متماثلة بالنسبة لاحد المحورين الاحداثيين كما سنوضحه الان : نقول ان بيان معادلة ما متماثل بالنسبة لمحور الصادات اذا تحقق ما يلي : − عندما تقع النقطة هـ (س ، ص) على بيان المعادلة فان النقطة هـ (− س ، ص) تقع ايضا على بيان نفس المعادلة ، فمن البديهي أنه اذا طوي المستوى على محور الصادات بحيث ينطبق نصف المستوى الايمن على نصف المستوى الايسر فان جزئي القطع المكافيء في نصفي المستوى ينطبقان احدهما على الآخر .

وبنفس الطريقة نقول أن بيان معادلة ما متماثل بالنسبة لمحور السينات اذا تحقق ما يلي : عندما تقع النقطة هـ (س ، ص) على بيان القطع المكافيء فان النقطة هـ (س ، − ص) تقع ايضا على بيان نفس القطع المكافيء . ان النتيجة التالية مهمة لايجاد تماثل معادلة ما حول المحاور .

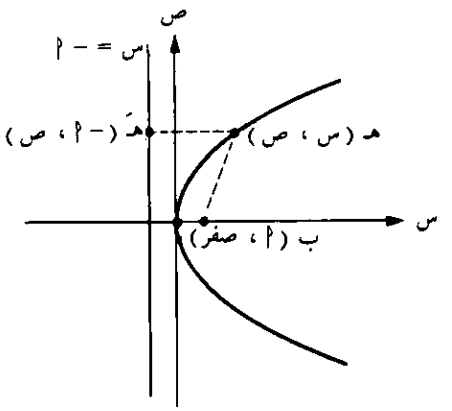
(٧ − ٤) اختبار التماثل :

(أ) اذا عوضنا − س بدلا من س في معادلة ما ولم تتغير مجموعة الحلول للمعادلة فان بيان المعادلة متماثل بالنسبة لمحور الصادات .

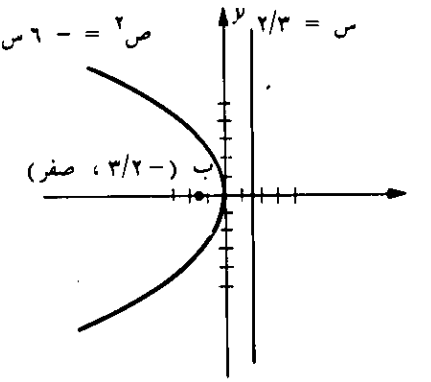
(ب) اذا عوضنا − ص بدلا من ص في معادلة ما ولم تتغير مجموعة الحلول

للمعادلة فان بيان المعادلة متماثل بالنسبة لمحور السينات .
والبرهان مباشر وسوف نحذفه .
والآن حسب (٧ – ٤) فان المعادلة س^{٢} = ٤ ﻫ ص متماثلة بالنسبة لمحور الصادات والمعادلة ص^{٢} = ٤ ﻫ س متماثلة بالنسبة لمحور السينات وهذا واضح كما في شكلين ٧ – ٣ ، ٧ – ٤ .

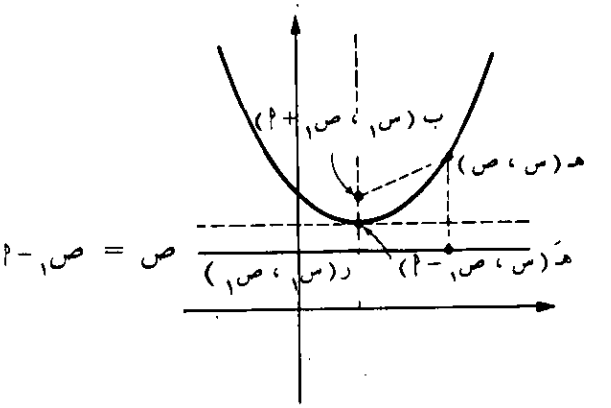
وليس من الصعب أن نعمم ما عملناه سابقا بالنسبة لاشتقاق معادلة القطع المكافيء الذي محوره مستقيم مواز لاحد المحورين الديكاريتيين ، ففي الشكل ٧ – ٦ اذا كانت النقطة ر (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) رأس المكافيء والنقطة ب (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ + ﻫ) بؤرته ومعادلة دليله ص = ص$_{١}$ – ﻫ فان النقطة هـ (س ، ص) تقع على القطع المكافيء اذا وفقط اذا كان ل (هـ ، ب) = ل (هـ ، هَـ) ، لذلك فان



الشكل ٧ — ٤



الشكل ٧ — ٥



الشكل ٧ — ٦

$\sqrt{(س - س_1)^2 + (ص - ص_1 - ا)^2} = \sqrt{(س - س_1)^2 + (ص - ص_1 + ا)^2}$

سوف نترك للقاريء تبسيط هذه المعادلة ليحصل على

(٧ – ٥) $(س - س_1)^2 = ٤ ا (ص - ص_1)$

ان المعادلة (٧ – ٥) تسمى الصيغة القياسية لمعادلة قطع مكافيء رأسه النقطة $(س_1 ، ص_1)$ ومحوره مواز لمحور الصادات . وفي الحالة الخاصة حيث $(س_1 ، ص_1)$ = (صفر ، صفر) فان (٧ – ٥) هي (٧ – ٢) . وبتربيع الطرف الأيسر في (٧ – ٥) فاننا نحصل على معادلة على الصيغة التالية :—

(٧ – ٦) $ص = ا س^2 + ب س + جـ$ حيث ا ، ب ، جـ اعداد حقيقية ، لاحظ أن ا في (٧ – ٦) تختلف عن ا في (٧ – ٥) ، وبالعكس اذا اعطينا معادلة على صيغة (٧ – ٦) بحيث أن ا ≠ صفراً فبأكمال المربع نحصل على معادلة على صيغة (٧ – ٥) ، وبنفس الطريقة ان المعادلة :

(٧ – ٧) $(ص - ص_1)^2 = ٤ ا (س - س_1)$ هي معادلة قطع مكافيء رأسه النقطة $(س_1 ، ص_1)$ ومحوره افقي . وتكون فتحة القطع المكافيء في (٧ – ٧) لليمين او اليسار حسب كون ا موجبة او سالبة

مثـال ٣ : ناقش بيان المعادلة $٢ ص = س^2 + ٨ س + ٢٢$ ثم جد معادلة المماس عند النقطة هـ (– ٢ ، ٥) .

الحـــل : المعادلة هي معادلة قطع مكافيء محوره رأسي ، وبكتابة المعادلة بالصيغة $س^2 + ٨ س = ٢ ص - ٢٢$

ثم باضافة ١٦ الى كل من الطرفين تحصل على

$س^2 + ٨ س + ١٦ = ٢ ص - ٦$ أو $(س + ٤)^2 = ٢ (ص - ٣)$ اتجا الآن على صيغة المعادلة (٧ – ٥) وبالمقارنة فان $س_1 = - ٤$ ، $ص_1 = ٣$ ، $ا = ١ / ٢$ ، لذلك يكون رأس القطع المكافيء في النقطة و (– ٤ ، ٣) ولان $ا = ١ / ٢ > ٠$ صفر فان فتحة القطع المكافيء للأعلى ، اما البؤرة فهي النقطة ب $(- ٤ ، ٣ + ١ / ٢)$ أو ب $(- ٤ ، ٧ / ٢)$ اما معادلة دليله فهي $ص = ص_1 - ا = ٢/٥$ ولانه يمكن كتابة المعادلة على صيغة $ص =$

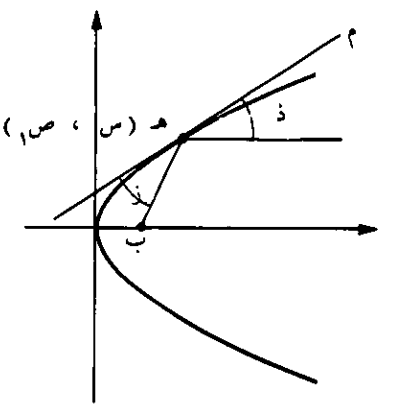
فهي $ص = ص_1 - ا = ٢/٥$ ولانه يمكن كتابة المعادلة على صيغة ص =

(٢/١) $س^2 + ٤ س + ١١$ ، فان $\frac{د ص}{د س} = س + ٤$.

لهذا يكون ميل المماس عند النقطة (– ٢ ، ٥) هو – ٢ + ٤ = ٢ لذلك فان معادلة المماس هي ص – ٥ = ٢ (س + ٢) أو ٢ س – ص + ٩ = صفراً .

لاحظ ان المماس يكون افقيا اذا كان $\frac{د ص}{د س}$ صفرا اي ان س = – ٤ وهذا يؤيد الحقيقة ان الاحداثي السيني للرأس هو – ٤ .

وسوف ننهي هذا البند بالاشارة الى خاصية مهمة للقطع المكافيء : افرض أن الخط المستقيم م هو المماس للقطع المكافيء ص^{٢} = ٤ أ س عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) وافرض ان ب هي البؤرة كما في الشكل ٧ – ٧ . افرض أن ز هي الزاوية المحصورة بين المماس والخط المستقيم ب هـ وافرض أن ذ هي الزاوية المحصورة بين المماس م والخط الأفقي الذي طرفه هـ ، وفي السؤال ٢٨ يطلب من القاريء البرهنة على أن ز = ذ ، ان هذه الخاصية لها تطبيقات مهمة فعلى سبيل المثال تستعمل في صناعة المرايا للكشافات الضوئية فنحصل على المرآة المطلوبة بأن ندور القطع المكافيء حول محوره . فاذا وقع مصدر ضوئي في البؤرة فحسب القوانين الفيزيائية سينعكس الشعاع الضوئي على خط أفقي مواز للمحور . وعلى نفس المبدأ تصنع مرايا المراصد الفلكية والأفران الشمسية حيث أن اي شعاع ضوئي قادم الى المرآة المصنوعة من القطع المكافيء موازيا للمحور ينعكس ليمر في البؤرة ب كذلك فان هوائيات الرادار والميكروفونات المثبتة والمستعملة في ملاعب كرة القدم تعتمد على الخاصية السابقة .



الشكل ٧ — ٧

تمارين :

في كل من التمارين ١ – ١٠ جد الرأس والبؤرة والدليل للقطع المكافيء المعطى ثم ارسم بيانه .

١) $س^{٢} = -١٢ ص$ ٢) $ص^{٢} = (١ / ٢) س$

٣) $٢ص^{٢} = -٣س$ ٤) $س^{٢} = -٣ص$

٥) $٨س^{٢} = ص$ ٦) $ص^{٢} = -١٠٠ س$

٧) $ص^{٢} - ١٢ = ١٢س$ ٨) $ص = ٤٠س - ٩٧ - ٤س^{٢}$

٩) $ص = س^{٢} - ٤س + ٢$ ١٠) $ص = ٨س^{٢} + ١٦س + ١٠$

(١) باستعمال المشتقة الاولى صف طريقة لتحديد رأس القطع المكافيء المعطى في المعادلة $ص = أس^{٢} + ب س + جـ$ ، ثم استخدم هذه الطريقة لتحديد رؤوس القطوع المكافئة المعطاة في التمارين من ٨ الى ١٠ ثم صف طريقة مشابهة للمعادلات التي على شكل $س = أص^{٢} + ب ص + جـ$.

١٢) صف كيف يمكن استخدام المشتقة الثانية لتحديد فتحة بيان القطع المكافيء $ص = أس^{٢} + ب س + جـ$ للاعلى هي ام للاسفل ، ثم وضح هذه الطريقة بتطبيقها على التمارين ٨ – ١٠ .

في كل من التمارين ١٣ – ١٨ جد معادلة القطع المكافيء الذي يحقق الشروط المعطاة .

١٣) البؤرة (٢ ، صفر) ، الدليل $س = -٢$

١٤) البؤرة (صفر ، – ٤) ، الدليل $ص = ٤$

١٥) البؤرة (٦ ، ٤) ، الدليل $ص = -٢$

١٦) البؤرة (– ٣ ، – ٢) ، الدليل $ص = ١$

١٧) الرأس في نقطة الاصل والقطع متماثل بالنسبة لمحور الصادات ويمر في النقطة $أ$ (٢ ، – ٣)

١٨) الرأس ر (– ٣ ، ٥) ، المحور مواز لمحور السينات ويمر في النقطة $أ$ (٥ ، ٩) .

١٩) كشاف ضوئي عاكس مصنوع بحيث أن أي مقطع عرضي خلال محوره هو قطع مكافيء فاذا كان المصدر الضوئي في بؤرته فجد بؤرة العاكس اذا كان عرضه عند فتحته ٣ أقدام وعمقه قدم واحد .

٢٠) برهن على أن اقرب نقطة للبؤرة على قطع مكافيء هي الرأس .

٢١) جد معادلة القطع المكافيء الذي محوره رأسي ويمر في النقاط أ (٢ ، ٣) ، ب (– ١ ، ٦) جـ (١ ، صفر) .

٢٢) اشتق (٧ – ٧)

٢٣) برهن على أن معادلة المماس للقطع المكافيء $س^{٢} = ٤ أ ص$ في النقطة هـ ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) هي $س_{١} س - ٢ أ ص - ٢ أ ص_{١} =$ صفرا .

٢٤) برهن على ان القطع المكافيء $ص = أ س^{٢} + ب س + جـ$ ، ليس له اي نقطة انعطاف .

٢٥) افرض أن م هي المساحة المحصورة في المستوى س ص بين بيان القطع المكافيء $س^{٢} = ٤ أ ص$ والخط المستقيم الذي يمر في البؤرة عموديا على المحور .

أ) جد المساحة م .

ب) جد الحجم الدوراني الناتج من تدوير المساحة حول محور الصادات

جـ) جد الحجم الدوراني الناتج من تدوير المساحة م حول محور السينات .

٢٦) افرض أن م هي المنطقة المحصورة بين بيانات المعادلات $ص^{٢} = ٢ س - ٦$ ، س = ٥

أ) جد مساحة م .

ب) جد الحجم الدوراني الناتج من تدوير المنطقة م حول محور الصادات .

جـ) جد الحجم الدوراني الناتج من تدوير المنطقة م حول محور السينات .

٢٧) سد له بوابة رأسية على شكل المنطقة م في السؤال ٢٥ فاذا وقع الخط المستقيم على سطح الماء فجد قوة ضغط الماء على البوابة .

٢٨) في الشكل ٧ – ٧ برهن على أن ز = ذ

٢٩) القطعة الخطية التي تمر ببؤرة القطع المكافيء ويقع طرفاها عليه تسمى الوتر البؤري (Focal Chord) ، اذا كان أ ب عبارة عن وتر بؤري فبرهن على أن المماسين عند النقطتين أ ، ب متعامدان .

٣٠) اذا كان أ ب وترا بؤريا (انظر التمرين ٢٩) فبرهن على أن المماسين عند النقطتين أ ، ب يتقاطعان على دليل القطع المكافيء .

٣ — القطع الناقص (Ellipse)

يمكننا تعريف القطع الناقص على النحو التالي :—

(٧ – ٨) تعريف القطع الناقص :— القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في مستوى معين التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (تسميان البؤرتين) يساوي مقدارا ثابتا .

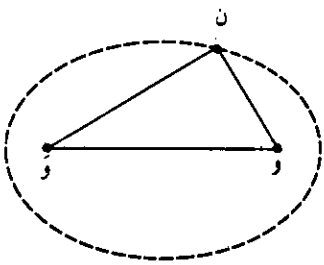
من المعروف ان مدارات الكواكب في النظام الشمسي هي قطوع ناقصة تقع الشمس في احد بؤرتيها ، فهذه واحدة من التطبيقات المهمة للقطوع الناقصة .

وهناك طريقة سهلة لرسم قطع ناقص على ورقة : ثبت دبوسين في ورقة في النقطتين و ، وَ ثم اربط طرفي خيط في الدبوسين وخد قلم رصاص ضعه بحيث يمر الخيط حول القلم ثم شد الخيط بالقلم حتى يقع رأس القلم عند النقطة ن بينما أنت تدير القلم دورة كاملة ، ان الشكل الناتج هو قطع ناقص بؤرتاه و ، وَ لان

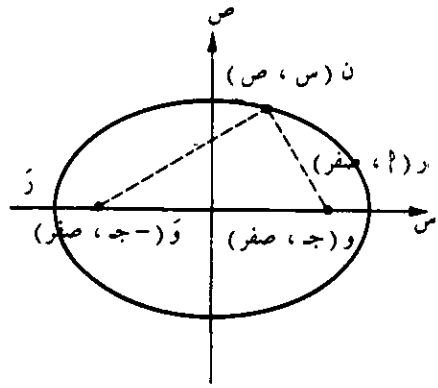
ل (ن ، و) + ل (ن ، وَ) هو طول الخيط فهو ثابت .

فاذا غيرنا و ، وَ مع بقاء طول الخيط ثابتا فاننا نستطيع ان نغير كثيرا في شكل القطع فاذا تباعد ما بين و ، وَ كان ل (و ، وَ) يساوي طول الخيط تقريبا فان القطع الناقص يستطيل ، واذا جعلنا ل (و . وَ) قصيرا بحيث تساوى صفرا تقريبا فان الشكل الناتج يكون دائريا وفي الواقع اذا كان و = وَ كان الشكل الناتج دائرة .

والآن سنشتق معادلات القطع الناقص الديكارتيه في الحالات السهلة : خذ محور السينات بحيث يمر في النقطتين و ، وَ وتكون نقطة الاصل في منتصف المسافة بينهما . تسمى النقطة التي في منتصف المسافة بين و ، وَ بمركز القطع الناقص . فاذا كانت و (جـ ، صفر)،جـ> صفر فان النقطة وَ هي (– جـ ، صفر) كما في الشكل ٧ – ٩ ، لذلك فان المسافة بين و ، وَ تساوي ٢ جـ ، افرض أن مجموع بعدي النقطة ن عن و ، وَ هو ٢ ﻫ . فلكي تحصل على شكل قطع ناقص يجب أن يكون ٢ ﻫ> ٢ جـ أي ﻫ> جـ ، لماذا ؟ فالنقطة ن (س ، ص) تقع على القطع الناقص اذا وفقط كان :



الشكل ٧ — ٨



الشكل ٧ — ٩

ل (ن ، و) + ل (ن ، وَ) = ٢ أ ، كما في التعريف (٧ − ٨) . وحسب قانون المسافة فان

$$\sqrt{(س - جـ)^2 + (ص - صفر)^2} + \sqrt{(س + جـ)^2 + (ص - صفر)^2} = ٢أ$$

وبالنقل نحصل على

$$\sqrt{(س - جـ)^2 + ص^2} = ٢أ - \sqrt{(س + جـ)^2 + ص^2}$$

وبعد تبسيط المعادلة نحصل على

$$أ\sqrt{(س + جـ)^2 + ص^2} = أ^2 + جـ س$$

وبتربيع طرفي المعادلة ينتج :

$$أ^2 (س^2 + ٢ جـ س + جـ^2 + ص^2) = أ^4 + ٢ أ^2 جـ س + جـ^2 س^2$$

وبتبسيطها نحصل على

$$س^2 (أ^2 - جـ^2) + أ^2 ص^2 = أ^2 (أ^2 - جـ^2)$$

وبقسمة الطرفين على $أ^2 (أ^2 - جـ^2)$ نحصل على

$$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{أ^2 - جـ^2} = ١$$

ولتبسيط المعادلة افرض أن

(٧ − ٩) $أ^2 - جـ^2 = ب^2$ ، $ب > ٠$

ولهذا فان شكل المعادلة النهائي هو :

$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١ \qquad (٧ - ١٠)$$

وحيث ان جـ > صفر ينتج من (٧ – ٩) أن أ^{٢} > ب^{٢} أي أن أ > ب

ان المعادلة (٧ – ١٠) هي الصيغة القياسية لمعادلة قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .

يمكننا ايجاد نقاط تقاطع معادلة القطع الناقص في (٧ – ١٠) مع محور السينات بأن نعوض ص = صفرا ، لذلك فان $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} = ١$ أي ان س^{٢} = أ^{٢}

لذلك فان الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع هي أ ، – أ . لذلك فان هاتين النقطتين هما ر (أ ، ٠) ، رَ (– أ ، ٠) تسمى هاتان النقطتان برأسي القطع الناقص ويسمى الخط المستقيم ر رَ بالمحور الكبير (Major Axis) للقطع الناقص وطوله ٢ أ . والآن افرض أن س = صفرا في (٧ – ١٠) نجد ان نقطتي تقاطع القطع الناقص مع محور الصادات هما زَ (٠ ، ب) ، زَ (٠ ، – ب) ويسمى الخط المستقيم ز زَ بالمَحور الصغير (Minor Axis) للقطع الناقص وطوله ٢ ب . ويلاحظ ان المحور الكبير أطول من المحور الصغير لان أ > ب . وباستعمال (٧ – ٤) لاختبار التماثل لمعادلة ما بالنسبة للمحورين نستنتج أن القطع الناقص متماثل بالنسبة لمحوري السينات والصادات . وكذلك فان القطع الناقص متماثل حول نقطة الاصل بمعنى أنه اذا كانت النقطة هـ (س ، ص) تقع على بيان المعادلة فان النقطة هـَ (– س ، – ص) تقع ايضا على بيان نفس المعادلة . ويلاحظ أنه يمكننا ايجاد هـَ بأن نصل هـ مع نقطة الاصل م . ثم نمد المستقيم م هـ على استقامته مسافة تساوي ل (هـ ، م) فبذلك نحصل على النقطة هـَ .

والنتيجة التالية مهمة لاختبار تماثل معادلة ما حول نقطة الاصل .

(٧ – ١١) **اختبار التماثل حول نقطة الاصل** :— يقال أن بيان معادلة ما متماثل حول

نقطة الاصل اذا عوضنا – س بدلا من س وعوضنا – ص بدلا من ص فبقيت مجموعة الحلول للمعادلة على حالها لا تتغير.

مثـال ١ : ناقش وارسم بيان المعادلة ٤س^{٢} + ١٨ص^{٢} = ٣٦ .

الحـــل : بقسمة طرفي المعادلة على ٣٦ نحصل على الصيغة القياسية
س^{٢} / ٩ + ص^{٢} / = ١ ، وهذا هو نفس شكل المعادلة (٧ – ١٠) . اذن
أ^{٢} = ٩ ، ب^{٢} = ٢ أي ان أ = ٣ ، ب = ٢ .

لهذا فان نهايتي المحور الكبير هما (± ٣ ، ٠) ونهايتي المحور الصغير (٠ ، ± ٢)
ومن (٧ – ٩) نحصل على جـ^{٢} = أ^{٢} – ب^{٢} = ٩ – ٢ = ٧ ، اذن جـ = $\sqrt{٧}$ لذلك فان البؤرتين هما (±$\sqrt{٧}$ ، ٠٠) وبيان المعادلة هو الشكل ٧ – ١٠ .

مثـال ٢ : جد معادلة القطع الناقص الذي رأساه النقطتان (± ٤ ، ٠) وبؤرتاه هما (± ٢ ، ٠) .

الحـــل : بتعويض أ = ٤ ، جـ = ٢ في (٧ – ٩) نحصل على ب^{٢} = ١٦ – ٤ = ١٢ ، لذلك فان المعادلة هي س^{٢} / ١٦ + ص^{٢} / ١٢ = ١ وبضرب طرفي المعادلة في ٤٨ نحصل على ٣س^{٢} + ٤ص^{٢} = ٤٨ .

قد يفيد احيانا ان نختار المحور الكبير على محور الصادات فاذا كانت البؤرتان هما (٠ ، ± جـ) فاننا بنفس الطريقة التي استخدمناها لاشتقاق (٧ – ١٠) نحصل على

(٧ – ١٢) س^{٢} / ب^{٢} + ص^{٢} / أ^{٢} = ١ ، حيث أن أ > ب . وكما سبق فان العلاقة بين أ ، ب ، جـ هي ب^{٢} = أ^{٢} – جـ^{٢} = أ^{٢} – ب^{٢} وفي هذه الحالة يكون رأسا القطع الناقص هما ر (٠ ، أ) ، رَ (٠ ، – أ) . ونهايتا المحور الصغير هما ز (ب ، ٠) ، زَ (ب ، ٠) وبيان المعادلة التي من هذا النوع هو كما في الشكل ٧ – ١١ .

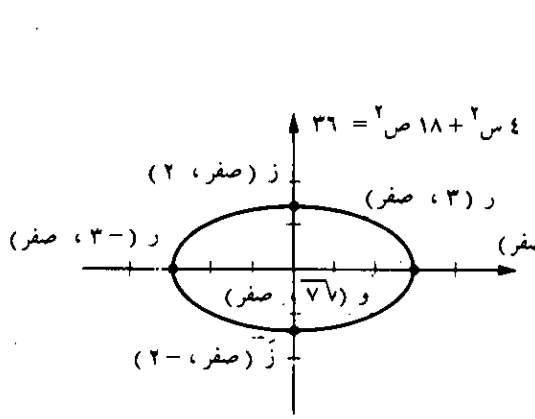
ومما سبق نستنتج أن معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على احد المحورين يمكن كتابتها على الشكل التالي

س^{٢} ∖ ع + ص^{٢} ∖ غ = ١ ، أو غ س^{٢} + ع ص^{٢} = ع غ ، حيث ع ، غ عددان حقيقيان موجبان . فاذا كان ع > غ فان المحور الكبير يقع على محور السينات بينما اذا كان ع < غ فان المحور الكبير يقع على محور الصادات .

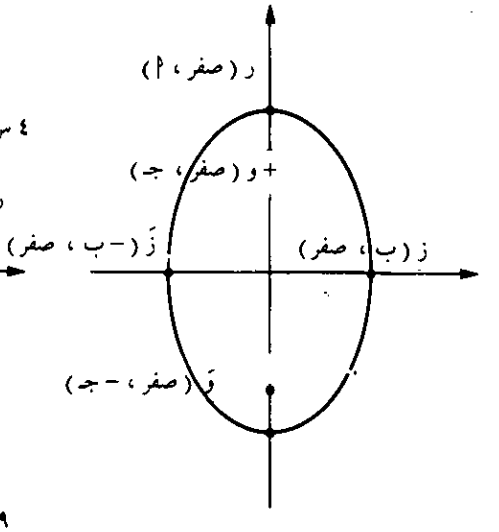
وليس من المهم أن نتذكر كل هذه الحقائق لانه في اي مسألة معطاة يمكننا ان نحدد المحور الكبير من حساب نقاط تقاطع القطع الناقص مع محوري السينات والصادات .

مثـال ٣ : ارسم بيان المعادلة ٩ س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٢٥

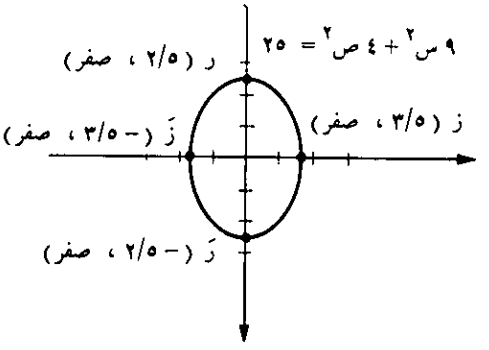
الحـــل : ان بيان المعادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على المحورين ، ولنجد نقطتي تقاطع القطع الناقص مع محور السينات خذ ص = صفرا وعوض في المعادلة فنحصل على ٩ س^{٢} = ٢٥ ، اذن س = $\pm$ ٥ / ٣ . وبنفس الطريقة يمكننا ايجاد تقاطع القطع الناقص مع محور الصادات فنحصل على ص = $\pm$ ٥ / ٢ ، وهذا يمكننا من رسم بيان المعادلة كما في الشكل ٧ – ١٢ . وبما ان ٥ / ٢ > ٥ / ٣ فان المحور الكبير يقع على محور الصادات .



الشكل ٧ — ١٠



الشكل ٧ — ١١



الشكل ٧ — ١٢

مثـال ٤ : جد المساحة المحصورة داخل قطع ناقص طول محوريه ٢أ ، ٢ ب على الترتيب

الحـــل : ان معادلة هذا القطع الناقص كما في (٧ – ١٠) وبالحل نحصل على ص = (ب / أ) $\sqrt{أ^٢ - ب^٢}$. وبيان هذا القطع له الشكل العام المبين بالشكل ٧ – ١٠ ، فمن التماثل نجد انه يكفي أن نجد المساحة المحصورة في الربع الاول ونضربها في ٤ . فباستعمال (٥ – ٢٠) ينتج :

$$م = \frac{٤ ب}{أ} \int_{٠}^{أ} \sqrt{أ^٢ - س^٢}\ د س$$

وبما ان بيان المعادلة ص = $\sqrt{أ^٢ - س^٢}$ من س = صفراً ، حتى س = أ هو ربع دائرة نصف قطرها أ ومركزها نقطة الاصل ، لهذا فان قيمة التكامل تساوي $\frac{\pi\ أ^٢}{٤}$ ، نتيجة لذلك فان

م = (٤ ب / أ) ($\frac{\pi\ أ^٢}{٤}$) = π أ ب ، وفي الحالة الخاصة عندما يكون ب = أ يصبح القطع الناقص دائرة ويكون م = π $أ^٢$.

تمارينـــن :

في كل من التمارين ١ – ٨ ارسم بيان المعادلة وجد احداثيي الرأسين والبؤرتين .

١) $س^٢ / ٩ + ص^٢ = ١$ ٢) $س^٢ / ٢٥ + ص^٢ / ١٦ = ١$

٣) $٤ س^٢ + ص^٢ = ١٦$ ٤) $ص^٢ + ٩ س^٢ = ٩$

٥) $٥ س^٢ + ٢ ص^٢ = ١٠$ ٦) $(١ / ٢) س^٢ + ٢ ص^٢ = ٨$

٧) $٤ س^٢ + ٢٥ ص^٢ = ١$ ٨) $١٠ ص^٢ + س^٢ = ٥$

في كل من التمارين ٩ – ١٤ جد معادلة القطع الناقص الذي يحقق الشروط المعطاة

٩) الرأسان ر (± ٨ ، ٠) ، والبؤرتان و (± ٥ ، ٢)

١٠) الرأسان ر (٠ ، ± ٧) ، والبؤرتان و (٠ ، ± ٢)

١١) الرأسان ر (٠ ، ± ٥) وطول المحور الصغير ٣ .

١٢) البؤرتان و (± ٣ ، ٠) وطول المحور الصغير ٢ .

١٣) الرأسان ر (٠ ، ± ٦) ويمر بالنقطة (٣ ، ٢) .

١٤) المركز في نقطة الاصل ، متماثل بالنسبة للمحورين ويمر بالنقطتين هـ (٢ ، ٣) ، ن (٦ ، ١) .

في التمرينين ١٥ ، ١٦ جد نقاط تقاطع بياني المعادلتين المذكورتين ثم ارسم بيانيهما وعين نقاط التقاطع

١٥) $س^٢ + ٤ ص^٢ = ٢٠$ ١٦) $س^٢ + ٤ ص^٢ = ٣٦$

$س + ٢ ص = ٦$ $س^٢ + ص^٢ = ١٢$

١٧) بني جسر مقوس على شكل نصف قطع ناقص محوره الكبير افقي فان كان طول قاعدة القوس ٣٠ قدما واعلى نقطة في القوس فوق الطريق الافقية عشرة أقدام . فجد ارتفاع القوس على بعد ٦ أقدام من مركز القاعدة .

١٨) يعرف الاختلاف المركزي (Eccentricity) للقطع الناقص بانه النسبة $(أ^٢ - ب^٢) / أ$ فاذا جعلنا أ ثابتة ، ب متغيرة فصف الشكل العام للقطع الناقص عندما يكون الاختلاف المركزي ١ تقريبا . وكذلك عندما يكون صفرا تقريبا .

١٩) جد معادلة المماس للقطع الناقص $٥ س^٢ + ٤ ص^٢ = ٥٦$ عند النقطة $(- ٢ ، ٣)$

٢٠) برهن على ان معادلة المماس للقطع النافص $س^٢ / أ^٢ + ص^٢ / ب^٢ = ١$ عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ هي $س س_١ / أ^٢ + ص ص_١ / ب^٢ = ١$

٢١) اذا تقاطعت مماسات القطع الناقص $٩ س^٢ + ٤ ص^٢ = ٣٦$ مع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٦) فجد نقاط التماس .

٢٢) اذا كانت الخطوط المماسة للقطع الناقص $ب^٢ س^٢ + ص^٢ أ^٢ = أ^٢ ب^٢$ تقطع محور الصادات في (٠ ، ى) فجد نقاط التماس علما بأن ى > ب .

٢٣) جد الحجم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة داخل القطع الناقص $ب^٢ س^٢ + أ^٢ ص^٢ = أ^٢ ب^٢$ حول محور السينات .

٢٤) جد الحجم الدوراني الناتج من تدوير المنطقة المحصورة داخل القطع الناقص ب^{٢} س^{٢} + أ^{٢} ص^{٢} = أ^{٢} ب^{٢} حول محور الصادات .

٢٥) جسم صلب قاعدته على شكل قطع ناقص طول محوريه ١٦ ، ٩ على الترتيب جد حجم هذا الجسم علما بأن مقطعه العمودي على المحور الكبير :

أ) مربـــع ب) مثلث متساوي الاضلاع

٢٦) اذا كان طول محوري قاعدة مخروط على شكل قطع ناقص قائم هما أ ، ب على الترتيب فجد حجمه علما بأن ارتفاعه يساوي ع (انظر المثال ١)

٢٧) جد ابعاد أكبر مستطيل يرسم داخل قطع ناقص طولا محوريه ٢ أ ، ٢ ب على الترتيب علما بأن للمستطيل ضلعين موازيين للمحور الكبير .

٢٨) خزان ماء اسطواني الشكل مقطعه العرضي قطع ناقص وطول محوريه ٦ ، ٤ أقدام على الترتيب وهو ملقى على احد جوانبه . فاذا كان الخزان مملوء بالماء الى نصفه فجد قوة ضغط الماء على احدى نهايتي الخزان .

٢٩) افرض أن م هو المماس للقطع الناقص في الشكل ٧ – ٩ في النقطة هـ فاذا كانت ث هي الزاوية المحصورة بين وَ هـ ، م وكانت ذ هي الزاوية المحصورة بين و هـ ، م فبرهن على أن ث = ذ

هذه النتيجة تشبه قانون الانعكاس في المرايا التي على شكل قطع مكافيء كما في الشكل ٧ – ٧ .

٣٠) اشتق (٧ – ١٢) .

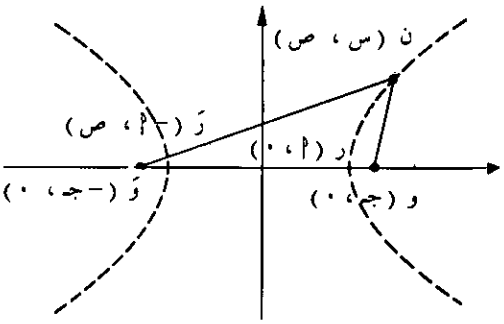
٤ — القطع الزائد : (Hyperbola)

ان تعريف القطع الزائد يشبه تعريف القطع الناقص ، والفرق الوحيد هو استعمال فرق بعدي النقطة عن نقطتين ثابتتين بدلا من مجموعهما .

(٧ – ١٣) تعريف القطع الزائد :

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في مستوى معين التي يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (تسميان البؤرتين) يساوي مقدارا ثابتا .

اذا كانت البؤرتان هما و ، وَ واحداثياتهما (جـ ، ٠) ، (– جـ ، ٠) على الترتيب كما في الشكل ٧ – ١٣ ، وكان المقدار الثابت يساوي ٢ أ فان النقطة ن (س ، ص) تقع على بيان القطع الزائد اذا وفقط اذا كان



الشكل ٧ — ١٣

(٧ – ١٤) ل (ن ، و) – ل (ن ، وَ) = ٢ أ وخلافا لما هو في حالة القطع الناقص فانه يجب أن يكون أ > جـ حتى نحصل على نقاط غير التي على محور السينات .

وبتطبيق قانون المسافة بين نقطتين نحصل على

$$\sqrt{(س - جـ)^2 + (ص - صفر)^2} - \sqrt{(س + جـ)^2 + (ص - صفر)^2} = ٢ أ$$

وباستخدام نفس الطريقة التي استخدمناها للحصول على القطع الناقص نحصل على المعادلة

$$س^2 \setminus أ^2 - ص^2 \setminus (جـ^2 - أ^2) = ١$$

فاذا فرضنا أن

(٧ – ١٥) $ب^2 = جـ^2 - أ^2$ ، $ب > ٠$ فان المعادلة تصبح

(٧ – ١٦) $س^2 \setminus أ^2 - ص^2 \setminus ب^2 = ١$. وهذه هي الصيغة القياسية لمعادلة قطع زائد بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .

وباستعمال اختبارات التماثل نجد أن القطع الزائد متماثل بالنسبة لمحوري السينات والصادات ومتماثل بالنسبة لنقطة الاصل .

ان الاحداثي السيني لنقطتي القطع الزائد مع محور السينات هما ± أ . لذلك فان نقطتي التقاطع هما ر (أ ، ٠) ، رَ (−أ ، ٠) وتسميان رأسي القطع الزائد . ويسمى الخط المستقيم الواصل بين ر ، رَ بالمحور القاطع (Transverse Axis) والقطع الزائد السابق لا يقطع محور الصادات لان المعادلة $- ص^2 \setminus ب^2 = ١$ ، ليس لها حلّ .

والآن اذا حللنا المعادلة (٧ – ١٦) فاننا نحصل على :

(١٧-٧) ص = ± $\frac{ب}{أ}$ $\sqrt{س^{٢} - أ^{٢}}$ ، لذلك لا توجد نقاط احداثياتها (س ، ص) اذا كان $س^{٢} - أ^{٢}$ < صفر أي اذا كان أ > س > - أ ، ولكن هناك نقاط احداثياتها (س ، ص) على بيان القطع حيث أن | س | ≥ أ .

والخط المستقيم ص = (ب / أ) س يسمى خط التقارب او الخط التقاربي (Asymptote) للقطع الزائد (٧ - ١٦) بمعنى أن المسافة ف (س) بين النقطة ن (س ، ص) على القطع الزائد والنقطة المقابلة نَ (س ، ص$_{١}$) على الخط المستقيم ص = (ب | أ) س تقترب من الصفر عندما تزداد س بدون حد .

ولبرهان هذه النتيجة ، نلاحظ من (٧ - ١٧) أنه اذا كانت س > صفر فان ف (س) = (ب / أ) س - (ب / أ) $\sqrt{س^{٢} - أ^{٢}}$ = (ب / أ) (س - $\sqrt{س^{٢} - أ^{٢}}$)

وبما أن س - $\sqrt{س^{٢} - أ^{٢}}$ = أ^{٢} / (س + $\sqrt{س^{٢} - أ^{٢}}$) ، نحصل على نهـــا ف (س) = صفرا وكذلك
س ← ∞

نهـــا (ب / أ) (أ^{٢} \ س + $\sqrt{س^{٢} - أ^{٢}}$)) =
س ← ∞

فان ف (س) تقترب من الصفر عندما تتناقص س بدون حد .

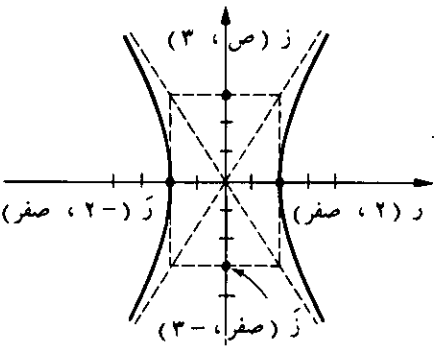
ويمكننا بنفس الطريقة البرهنة على أن الخط المستقيم ص = - $\frac{(ب)}{أ}$ س هو كذلك خط تقاربي للقطع الزائد (٧ - ١٧) .

ان خطوط التقارب تشكل عاملا مساعدا لرسم بيان القطع الزائد وهناك طريقة مناسبة للرسم هي أن نعين النقطتين ر (أ ، ٠) ، رَ (- أ ، ٠) ونعين النقطتين ز (٠ ، ب) ، زَ (٠ ، - ب) كما في الشكل ٧ - ١٤ ويسمى الخط ز زَ بالمحور المرافق (Conjugate Axis) للقطع الزائد . ثم نرسم خطوطا افقية وعمودية تمر بكل من نهايتي المحور القاطع والمرافق . فيلا قطري المستطيل الناتج هما ± (ب / أ) ، لذلك فان معادلتي القطرين هما ص = ± (ب / أ) ثم نكمل رسم بيان القطع الزائد بمساعدة خطي التقارب كما في الشكل ٧ - ١٤ . ويسمى المنحنيان اللذان يتكون منهما القطع الزائد بفرعي القطع .

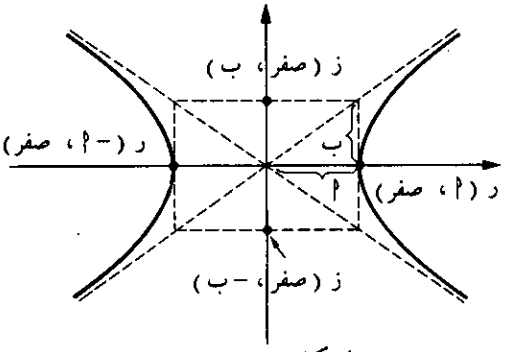
مثـال ١ : ناقش وارسم بيان المعادلة ٩س^{٢} − ٤ص^{٢} = ٣٦

الحـــل : بقسمة طرفي المعادلة على ٣٦ نحصل على س^{٢} / ٤ + ص^{٢} / ٩ = ١

وهذا هو الشكل القياسي في (٧ − ١٦) . اذن أ^{٢} = ٤ ، ب^{٢} = ٩ أو أ = ٢ ، ب = ٣ ، لذلك فان رأسي القطع الزائد هما (± ٢ ، ٠) ونهايتي المحور المرافق هما (٠ ± ٣) ، ان هذه النقاط الاربع تشكل مستطيلا فاذا مددنا قطريه نحصل على خطي التقارب للقطع الزائد . ان بيان المعادلة مرسوم في الشكل ٧ − ١٥ ومعادلتا خط التقارب هما ص = + (٣ / ٢) س وذلك بالمقارنة مع ص = + (ب / أ) س . ومن (٧ − ١٥) نستنتج أن جـ^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢} = ٩ + ٤ = ١٣ اذن جـ = $\sqrt{١٣}$ لذلك فان البؤرتين هما (± $\sqrt{١٣}$ ، ٠) ومن المثال السابق نستنتج أنه ليس صحيحا أن أ > ب كما هو في حالة القطع الناقص وفي الواقع يمكن أن يكون أ > ب أو أ > ب أو أ = ب .



الشكل ٧ — ١٥



الشكل ٧ — ١٤

مثـال ٢ : جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (± ٣ ، ٠) ويمر بالنقطة هـ (٥ ، ٢) ومن ثم جد بؤرتيه وجد معادلتي خطي التقارب .

الحـــل : بتعويض أ = ٣ في (٧ − ١٦) نحصل على المعادلة

س^{٢} / ٩ − ص^{٢} / ب^{٢} = ١

وبما أن النقطة (٥ ، ٢) تقع على القطع الزائد فانها تحقق معادلته ، لذلك فاننا نحصل على ٢٥ / ٩ − ٤ / ب^{٢} = ١ أي ان ب^{٢} = ٩ / ٤ لذلك فان

المعادلة المطلوبة هي س^{٢} / ٩ − ٤ ص^{٢} / ٩ = ١ ، أو س^{٢} − ٤ ص^{٢} = ٩ .
من (٧ − ١٥) نحصل على جـ^{٢} = ب^{٢} + أ^{٢} = ٩ + ٩ / ٤ = ٤٥ / ٤
لذلك فان البؤرتين هما (± $\frac{٣}{٢}\sqrt{٥}$ ، ٠) والآن بتعويض قيمتي أ ، ب في ص

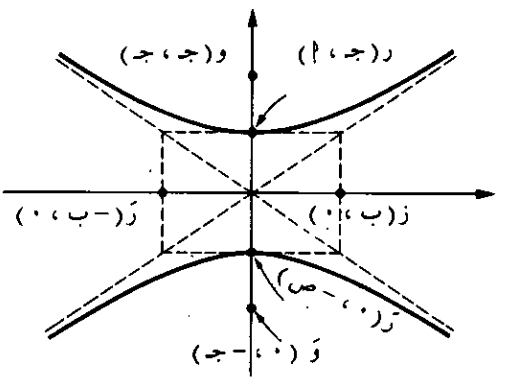
= ± $\frac{ب}{أ}$ س نحصل على خطي التقارب

ص = ± (١ / ٢) س .

والآن اذا كانت البؤرتان (٠ ، ± جـ) على محور الصادات فانه يمكننا أن نثبت أن معادلة القطع الزائد الناتج هي

(٧ − ١٨) ص^{٢} / أ^{٢} − س^{٢} / ب^{٢} = ١

، حيث أن ب^{٢} = جـ^{٢} + أ^{٢} ، وهذه المعادلة هي الشكل القياسي لمعادلة قطع زائد بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل . والنقطتان ر (٠ ، ± أ) يسميان رأسي القطع الزائد ، وطرفا المحور المرافق هما ز (ب ، ٠) ، زَ (− ب ، ٠) ويمكننا ايجاد خطي التقارب لهذا القطع الزائد باستعمال قطري المستطيل المتكون من خطوط موازية للمحورين تمر بالرأسين وطرفي المحور المرافق ، انظر الشكل ٧ − ١٦ . ان معادلتي خطي التقارب هما ص = ± (أ / ب) س ، لاحظ أن معادلتي خطي التقارب في (٧ − ١٦) هما ص = ± (ب / أ) س .



الشكل ٧ — ١٦

مثـال ٣ : ناقش بيان المعادلة ٤ص^{٢} − ٢س^{٢} = ١

الحـــل : الشكل القياسي للمعادلة هو ص^{٢} / (١ / ٤) − س^{٢} / (١ / ٢) = ١ ،
لذلك فان أ^{٢} = ١ / ٤ ، ب^{٢} = ١ / ٢ ، ب = ١ / $\sqrt{٢}$.
جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} = + ١ / ٤ + ١ / ٢ = ٣ / ٤ ، أوجـ = ± $\sqrt{٣}$ / ٢ ،
لذلك فان الرأسين هما (٠ . ± ١ / ٢) والبؤرتين هما (٠ ± $\sqrt{٣}$ / ٢) أما
معادلتا خطي التقارب فهما ص = ± ($\sqrt{٢}$ / ٢) س ، والشكل العام لبيان
المعادلة موضح في الشكل ٧ − ١٦ .

تمارين :—

في التمارين ١ − ٨ ارسم بيان المعادلة ومن ثم جد احداثيات الرأسين والبؤرتين .
كذلك جد معادلتي خطي التقارب .

١) س^{٢} / ٩ − ص^{٢} / ٤ = ١

٢) ص^{٢} / ٤٩ − س^{٢} / ١٦ = ١

٣) ص^{٢} / ٩ − س^{٢} / ٤ . = ١

٤) س^{٢} / ٤٩ − ص^{٢} / ١٦ = ١

٥) ص^{٢} − ٤س^{٢} = ١٦

) س^{٢} − ٢ص^{٢} = ٨

٧) س^{٢} − ص^{٢} = ١

٨) ص^{٢} − ١٦ س^{٢} = ١

في التمارين ٩ − ١٤ جد معادلة القطع الزائد الذي يحقق الشروط التالية :—

٩) البؤرتان و (٠ ± ٣) ، والرأسان ر (± ٣ ، ٠)

١٠) البؤرتان و (٠ . ± ٣) والرأسان ر (٠ . ± ٢)

١١) البؤرتان و (٠ . ± ٥) وطول المحور المرافق يساوي ٤ .

١٢) الرأسان ر (± ٤ ، ٠) ويمر بالنقطة هـ (٨ ، ٢)

١٣) الرأسان ر (± ٣ ، ٠) ومعادلتا خطي التقارب ص = ± ٢س

١٤) البؤرتان و (٠ ، ± ١٠) ومعادلتا خطي التقارب ص = ± (١ / ٣) س

في التمرينين ١٥ ، ١٦ جد نقاط تقاطع بياني المعادلتين ثم ارسم بيانيهما وعين نقاط التقاطع على الرسم .

١٥) $ص^{٢} - ٤س^{٢} = ١٦$ ١٦) $س^{٢} - ص^{٢} = ٤$

$ص - س = ٤$ $ص^{٢} - ٣س = صفر$

١٧) يسمى بيانا المعادلتين

$س^{٢} / أ^{٢} - ص^{٢} / ب^{٢} = ١$ ، $س^{٢} / أ^{٢} - ص^{٢} / ب^{٢} = - ١$

بالقطعين الزائدين المترافقين ، ارسم بياني المعادلتين على نفس المستوى الديكارتي عندما أ = ٢ ، ب = ٥ ثم صف العلاقة بينهما .

١٨) اشتق (٧ – ١٦) ثم برهن على أن ص = – (أ / ب) س هي معادلة خط تقاربي للقطع الزائد .

١٩) جد معادلة المماس للقطع الزائد $٢ س^{٢} - ٥ ص^{٢} = ٣$ في النقطة هـ (– ٢ ، ١)

٢٠) برهن على أن معادلة المماس للقطع الزائد $س^{٢} / أ^{٢} - ص^{٢} / ب^{٢} = ١$ في النقطة هـ ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) هي $س س_{١} / أ^{٢} - ص ص_{١} / ب^{٢} = ١$.

٢١) اذا كانت الخطوط المماسة للقطع الزائد $٩ س^{٢} - ص^{٢} = ٣٦$ تقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٦) فجد نقاط التماس .

٢٢) اذا كانت الخطوط المماسة للقطع الزائد $ب^{٢} س^{٢} - أ^{٢} ص^{٢} = أ^{٢} ب^{٢}$ تقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٤) فجد نقاط التماس .

٢٣) جد معادلة الخط المستقيم الذي يمر في النقطة هـ (٢ ، – ١) مماسا للقطع الزائد $س^{٢} - ٤ ص^{٢} = ١٦$.

٢٤) جد معادلات الخطوط المماسة للقطع الزائد $٨ س^{٢} - ٣ ص^{٢} = ٤٨$ الموازية للخط المستقيم ٢س – ص = ١٠

٢٥) جد الحجم الدوراني الناتج من تدوير المنطقة المحصورة بين $ب^{٢} س^{٢} - أ^{٢} ص^{٢} = أ^{٢} ب^{٢}$ وخط رأسي يمر بأحد البؤرتين ، حول محور السينات

٢٦) جد الحجم الدوراني الناتج من تدوير المنطقة في السؤال ٢٥ حول محور الصادات

٥ — نقل المحاور :

اذا كان م ، ب احداثيي النقطتين مَ ، بَ على خط احداثي ل فان المسافة بين م ، ب عرفت في (١ – ٤) كما يلي ل (مَ ، بَ) = | م – ب | ، واذا رغبنا أن نأخذ في الاعتبار اتجاه الخط الاحداثي ل فاننا نستعمل الرمز $\overline{مَ بَ}$ ليدل على المسافة من مَ الى بَ وحسب التعريف يكون $\overline{مَ بَ}$ = ب – م ، وبما أن $\overline{بَ مَ}$ = م – ب يكون $\overline{مَ بَ}$ = – $\overline{بَ مَ}$ ، واذا كان الاتجاه الموجب على الخط ل هو الى اليمين فان النقطة بَ تقع الى يمين مَ اذا وفقط اذا كان $\overline{مَ بَ}$ > . وتقع بَ الى يسار مَ اذا وفقط اذا كان $\overline{مَ بَ}$ < . ، واذا كانت جـ نقطة على الخط ل واحداثيها على هذا الخط يساوي جـ فان

$$\overline{مَ جـ} = \overline{مَ بَ} + \overline{بَ جـ} \qquad (٧ - ١٩)$$

وذلك لان جـ – م = (ب – م) + (جـ – ب)

وفيما يلي سنستخدم (٧ – ١٩) للحصول على قواعد لنقل المحاور في المستوى الاقليدي (ذي البعدين) : افرض ان النقطة جـ (هـ ، و) تقع في المستوى س ص ولنعرف نظاما احداثيا ديكارتيا جديدا سَ صَ حيث أن نقطة الاصل م هي النقطة جـ (هـ ، و) وان المحورين سَ ، صَ هوازيان للمحورين س ، ص ولهما نفس الاتجاه الموجب ونفس وحدة الطول ويظهر في الشكل ٧ – ١٧ وضع يمثل هذا الوضع ولتبسيط الوضع افرض أن جـ (هـ ، و) تقع في الربع الاول . وسوف نستخدم الفتحات لتميز احداثيات النقاط بالنسبة للنظام الديكارتي سَ صَ عنه بالنسبة للنظام س ص فالنقطة م (س ، ص) في النظام س ص ستصبح م (سَ ، صَ) بالنسبة للنظام سَ صَ . فاذا سمينا مساقط جـ على المحاور كما هو مبين بالشكل ٧ – ١٧ وكانت النقطتان ك ، ق مسقطي ن على محوري السينات والصادات في المستوى س ص فباستعمال (٧ – ١٩) نحصل على

$$س = \overline{مَ كَ} = \overline{مَ مَ} + \overline{مَ كَ} = \overline{مَ مَ} + \overline{مَ كَ} = هـ + سَ$$

$$ص = \overline{مَ قَ} = \overline{مَ بَ} + \overline{بَ قَ} = \overline{مَ بَ} + \overline{مَ قَ} = و + صَ$$

واليك تلخيص ما سبق : اذا كان (س ، ص) احداثيي م في النظام س ص وكان احداثياها (سَ ، صَ) في النظام سَ صَ الذي نقطة الاصل فيه جـ (س$_{1}$ ، ص$_{1}$) بالنسبة الى نظام س ص فان :

$$\begin{aligned} س &= سَ + س_{1} \\ ص &= صَ + ص_{1} \end{aligned} \qquad (٧-٢٠)$$

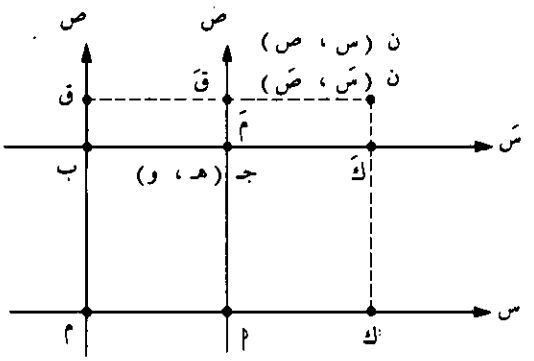
اى ان

$$\begin{aligned} سَ &= س - س_{1} \\ صَ &= ص - ص_{1} \end{aligned} \qquad (٧-٢١)$$

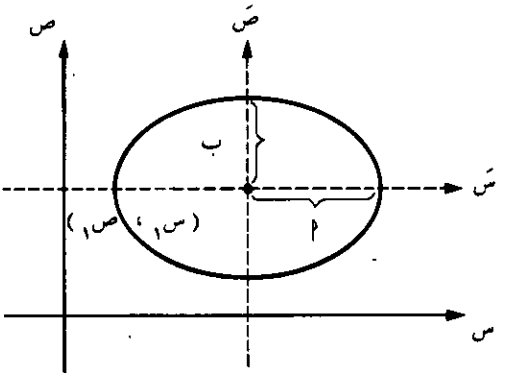
وبالقاعدتين السابقتين نتمكن من الانتقال من نظام ديكارتي الى آخر وفائدتها العظمى تكمن في تغيير شكل معادلات البيانات المختلفة . وبعبارة أدق نقول أنه اذا كانت مجموعة نقاط في المستوى س ص تشكل بيان معادلة ما بدلالة س ، ص فلايجاد المعادلة بدلالة سَ ، صَ التي لها نفس البيان في المستوى سَ صَ نعوض سَ + س$_{1}$ بدلا من س ونعوض صَ + ص$_{1}$ بدلا من ص في المعادلة المعطاة . وبالعكس اذا كانت مجموعة نقاط في المستوى سَ صَ تشكل بيان معادلة ما بدلالة سَ ، صَ فلايجاد المعادلة بدلالة س ، ص التي لها نفس الرسم البياني في المستوى س ص نعوض س – س$_{1}$ بدلا من سَ ونعوض ص – ص$_{1}$ بدلا من صَ . ولتوضيح الملاحظات السابقة نضرب المثال التالي :—

المعادلة سَ^{٢} + صَ^{٢} = نق^{٢} بيانها في المستوى سَ صَ دائرة نصف قطرها نق ومركزها م فباستعمال (٧ – ٢١) فان معادلة الدائرة بدلالة س ، ص هي (س – س$_{1}$)^{٢} + (ص – ص$_{1}$)^{٢} = نق^{٢} وهذه تطابق الصيغة المعطاة في (١ – ٨) لمعادلة دائرة مركزها (س$_{1}$ ، ص$_{1}$) ونصف قطرها نق في المستوى س ص .

ومثال آخر ، نعلم أن سَ^{٢} = ٤ م صَ هي معادلة قطع مكافيء في المستوى سَ صَ رأسه نقطة الاصل فباستعمال (٧ – ٢١) نحصل على (س – س$_{1}$)^{٢} = ٤ م (ص – ص$_{1}$) وهي معادلة نفس القطع المكافيء في المستوى س ص .



الشكل ٧ — ١٧



الشكل ٧ — ١٨

وهذا يطابق المعادلة المشتقة في (٧ – ٥) لقطع مكافيء رأسه النقطة (س١ ، ص١) في المستوى س ص .

ربما أصبح الآن من الواضح كيف يمكن استعمال هذا الاسلوب لتبسيط كافة معادلات القطوع المخروطية ، فعلى سبيل المثال باستعمال (٧ – ١٠) فان بيان المعادلة سَ٢ / م٢ + صَ٢ / ب٢ = ١ هو قطع ناقص مركزه نقطة الاصل م في المستوى سَ صَ . وكما في الشكل ٧ – ١٨ وحسب (٧ – ٢١) فان معادلة نفس القطع الناقص في المستوى س ص هي (س – س١)٢ / م٢ + (ص – ص١)٢ / ب٢ = ١ . وهنالك وضع مشابه بالنسبة للقطع الزائد .

وفي بعض الحالات نعطي معادلة بدلالة س ، ص فبنقل المحورين يمكننا الحصول على معادلة أبسط بدلالة سَ ، صَ ولها نفس الرسم البياني و يصح هذا على الاخص بالنسبة لمعادلة من الدرجة الثانية بدلالة س ، ص بالصيغة التالية :

(٧ – ٢٣) أ س٢ + ب ص٢ + ء س + هـ ص + و = صفرا .

حيث ان المعاملات كلها اعداد حقيقية . وهذه بوجه عام معادلات قطع مخروطي عدا بعض الحالات التي نحصل فيها على قطع مخروطي منحل فيكون الرسم البياني نقاطا أو خطوطا مستقيمة أولا يكون هنالك رسم بياني على الاطلاق . وسوف لا نعطي برهانا رياضيا لما سبق ولكننا سنوضحه بالامثلة .

مثـال ١ : ناقش وارسم بيان المعادلة ١٦ س^{٢} + ٩ ص^{٢} + ٦٤ س − ١٨ ص − ٧١ = صفرا

الحـــل : لايجاد نقطة الاصل للنظام سَ صَ الذي سيمكننا من تبسيط المعادلة نبدأ بكتابة المعادلة على الشكل التالي ١٦ (س^{٢} + ٤ س) + ٩ (ص^{٢} − ٢ ص) = ٧١

ثم نكمل المربعات داخل القوسين فنحصل على

١٦ (س^{٢} + ٤ س + ٤) + ٩ (ص^{٢} − ٢ ص + ١) = ٧١ + ٦٤ + ٩

لاحظ انه باضافة ٤ الى القوس الاول أضفنا ٦٤ الى الطرف الايمن من المعادلة ولذلك نضيف ٦٤ الى الطرف الايسر ، وبالمثل نعالج القوس الثاني فاننا اضفنا ٩ الى الطرف الايمن لذلك نضيف ٩ الى الطرف الايسر. وهذا يعطينا المعادلة ١٦ (س + ٢)^{٢} + ٩ (ص − ١)^{٢} = ١٤٤ . وبالقسمة على ١٤٤ نحصل على (س + ٢)^{٢} / ٩ + (ص − ١)^{٢} / ١٦ = ١ ، وهذه يمكن كتابتها كما يلي :

(٧ − ٢٤) سَ^{٢} / ٩ + صَ^{٢} / ١٦ = ١

حيث أن سَ = س + ٢ ، صَ = ص − ١ ، لذلك اذا اخذنا س$_{١}$ = − ٢ ، ص$_{١}$ = ١ في (٧ − ٢١) فان (٧ − ٢٤) تصبح هي المعادلة المعطاة وهذه المعادلة معادلة قطع ناقص مركزه م في النقطة (− ٢ ، ١) في المستوى س ص ومحوراه يوازيان المحورين الاحداثيين ، انظر بيانه في الشكل ٧ − ١٩ .

مثـال ٢ : ناقش وارسم بيان المعادلة

٩ س^{٢} − ٤ ص^{٢} − ٥٤ س − ١٦ ص + ٢٩ = صفرا .

الحـــل :

كما في المثال الاول نرتب الحل كما يلي

٩ (س^{٢} − ٦ س) − ٤ (ص^{٢} + ٤ ص) = − ٢٩

٩ (س^{٢} − ٦ س + ٩) − ٤ (ص^{٢} + ٤ ص + ٤) = − ٢٩ + ٨١ − ١٦

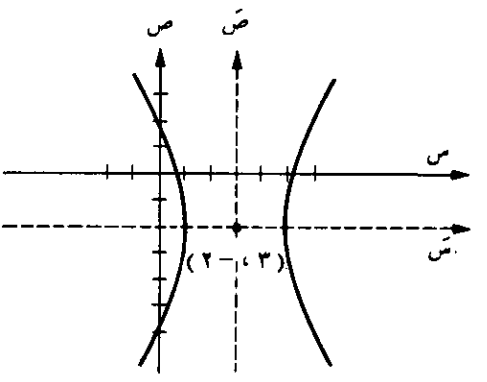
٩ (س − ٣)^{٢} − ٤ (ص + ٢)^{٢} = ٣٦

(س − ٣)^{٢} / ٤ − (ص + ٢)^{٢} / ٩ = ١

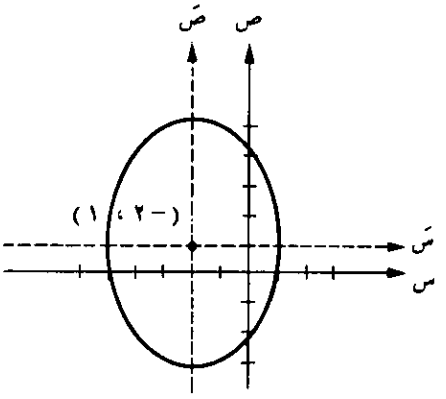
فاذا اخذنا س$_{١}$ = ٣ ، ص$_{١}$ = − ٢ في (٧ − ٢١) تصبح المعادلة على الصيغة القياسية في (٧ − ١٦) وهي معادلة القطع الزائد .

س$\acute{}^{٢}$ / ٤ − ص$\acute{}^{٢}$ / ٩ = ١

وبنقل محور السينات ومحور الصادات الى نقطة الاصل الجديدة (٣ ، − ٢) نحصل على الرسم البياني كما في الشكل ٧ − ٢٠ .



الشكل ٧ — ٢٠



الشكل ٧ — ١٩

مثـال ٣ : ناقش بيان المعادلة ٢ص = س^{٢} + ٨س + ٢٢

الحـــل : هذا المثال يشبه المثال ٣ في البند ٢ حيث أننا اكملنا المربع وحصلنا على المعادلة (س + ٤)^{٢} = ٢ (ص − ٣) ، وبطريقة البند الحالي اذا اخذنا س$_{١}$ = − ٤ ، ص$_{١}$ = ٣ في (٧ − ٢١) فتتبسط المعادلة الى الصيغة القياسية سَ^{٢} = ٢صَ وهذه معادلة قطع مكافيء رأسه في النقطة (− ٤ ، ٣) . ناقشنا في الامثلة السابقة حالات خاصة للمعادلة (٧ − ٢٣) ولكن الطريقة عامة فني (٧ − ٢٣) :

١) اذا كانت أ تساوي جـ وتختلف عن الصفر فان بيان المعادلة اذا كان موجودا يكون دائرة قد تنحل الى نقطة واحدة .

٢) اذا كانت أ لا تساوي جـ ولها نفس الاشارة فباكمال المربع ونقل المحاور نحصل على معادلة بيانها اذا كان موجودا قطع ناقص .

٣) اما اذا كانت أ لا تساوي جـ وتختلفان في الاشارة فاننا نحصل على قطع زائد قد ينحل الى خطين مستقيمين .

٤) واخيرا اذا كانت أ = صفرا أو جـ = صفرا ولكن ليس كلاهما صفرا فان المعادلة هي معادلة قطع مكافيء وقد تنحل الى خطين متوازيين .

تمارين :

ناقش وارسم بيان المعادلات في التمارين ١ – ٢٦ بعد النقل المناسب للمحاور .

١) (ص – ٥)^{٢} = ٨ (س + ١)

٢) (س + ٣)^{٢} = ٥ (ص – ١)

٣) (س – ١)^{٢} / ٩ + (ص – ٢)^{٢} / ٤ = ١

٤) (س + ١)^{٢} + ٨ (ص – ٥)^{٢} = ٣٢

٥) (س + ٥)^{٢} / ١٦ + (ص – ١)^{٢} / ٢٥ = ١

٦) (ص – ٦)^{٢} / ٤ – (س + ٤)^{٢} = ١

٧) ٤ (س + ٥)^{٢} + (ص – ٣)^{٢} = ١

٨) (س – ٣)^{٢} + ٤ص^{٢} = ١٦

٩) ١٠٠ص^{٢} – ١٦ (س – ٥)^{٢} = ١٦٠٠

١٠) (س – ٥)^{٢} – (ص + ١)^{٢} = ١

١١) ٩س^{٢} + ١٦ص^{٢} + ٥٤س – ٣٢ص – ٧ = صفرا

١٢) ٤س^{٢} + ٩ص^{٢} + ٢٤س + ١٨ ص + ٩ = صفرا

١٣) ٢٥س^{٢} + ٤ص^{٢} – ٢٥٠س – ١٦ص + ٥٤١ = صفرا

١٤) ٤س^{٢} + ص^{٢} = ٢ص

١٥) ٤س^{٢} – ٣٢ص + ٤س – ٤٩ = صفرا

١٦) ٤ص^{٢} – س – ١٦ص + ١٣ = صفرا

١٧) ٤ص^{٢} – س^{٢} + ٤٠ ص – ٤س + ٦٠ صفرا

١٨) ٢٥س^{٢} – ٩ص^{٢} – ١٠٠س – ٥٤ص + ١٠ = صفرا

١٩) ٩ص^{٢} − س^{٢} ٣٦٠ص + ١٢س − ٣٦ = صفرا

٢٠) ٤س^{٢} − ص^{٢} + ٣٢س − ٨ص + ٤٩ = صفرا

٢١) ص = س − ٥ − ٤

٢٢) س + ٢ = $\sqrt{(ص - ١)^{٢}}$

٢٣) س = ٣ + (ص − ١)^{٣}

٢٤) (س − ٧)^{٣} − ص − ٢ = صفرا

٢٥) ٢ص + ١٠ + (س + ٢)^{٤} = صفرا

٢٦) (ص + ٧) (س − ٥) = ١

٢٧) جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرناه (س$_{١}$ ± جـ ، ص$_{١}$) ورأساه (س$_{١}$ ± أ ، ص$_{١}$) حيث أن جـ > أ > صفر ، جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}

٢٨) جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ± أ) وخطا التقارب هما ص − ص$_{١}$ = ± (أ / ب) (س − س$_{١}$) حيث أن ب > صفر.

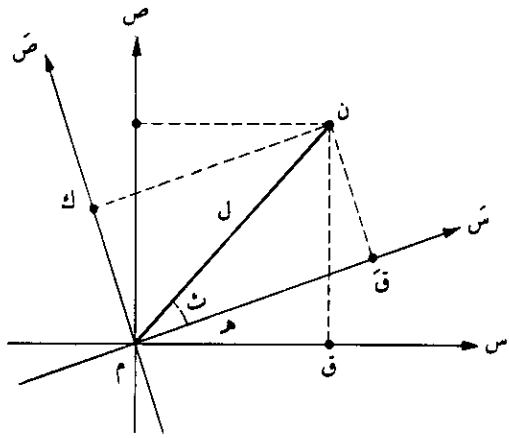
٢٩) جد معادلة المماس للقطع الناقص ٤ س^{٢} + ص^{٢} − ٨س + ٢ص − ١٢ = صفرا في النقطة (٣ ، − ٢)

٣٠) جد معادلة الخط العمودي للقطع الزائد ٥ س^{٢} − ٢ ص^{٢} + ٨س + ٧ص + ٧ = صفراً في النقطة (− ١ ، ٤).

٦ — تدوير المحاور :

ان النظام الديكارتي سَ صَ الذي ناقشناه في البند ٥ يمكن ان نحصل عليه بنقل الاصل م من النظام س ص الى الوضع الجديد مَ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) مع عدم تغيير الاتجاه الموجب للمحاور أو وحدة الطول . والآن سوف نعرف نظاما ديكارتيا ينتج بتثبيت نقطة الاصل وتدوير المحور س والمحور ص حول نقطة الاصل الى وضع جديد يصبحان فيه سَ ، صَ . وكل تحويل من هذا النوع يسمى تدوير المحاور.

لنناقش تدويرا للمحاور كما في الشكل ٧ − ٢١ حيث أن هـ هي الزاوية التي دور بها محور س الموجب فاذا كانت (س ، ص) هي النقطة ن بالنسبة للمستوى س ص وهي (سَ ، صَ) بالنسبة للمستوى سَ صَ . ولتكن مساقط النقطة كما في الشكل ٧ − ٢١ ولتكن ث هي الزاوية ن م قَ ولنفرض أن ل هي المسافة من م الى ن فيكون :



الشكل ٧ — ٢١

(٧–٢٥) سَ = ل جتا ث ، صَ = ل جا ث

(٧–٢٦) س = ل جتا (ث + هـ) ، ص = ل جا (ث + هـ)

وبتطبيق قانون المجموع على (٧–٢٦) نحصل على ما يلي :—

س = ل جتا ث جتا هـ – ل جا ث جا هـ

ص = ل جا ث جتا هـ + ل جتا ث جا هـ .

وبتعويض سَ ، صَ بدلا من ل جتا ث ، ل جا.ث على الترتيب في (٧ – ٢٥)

نحصل على

(٧–٢٧) س = سَ جتا هـ – صَ جا هـ

ص = سَ جا هـ + صَ جتا هـ .

واذا حلت المعادلتان (٧ – ٢٧) لنحصل على قيمتي س ، ص فاننا نحصل على

(٧–٢٨)

سَ = س جتا هـ + ص جا هـ

صَ = – س جا هـ + ص جتا هـ .

وبالقاعدتين (٧ – ٢٧) ، (٧ – ٢٨) يمكن الانتقال من أي من النظامين الى الآخر وسوف نسمي هاتين القاعدتين بقاعدة تدوير المحاور بزاوية مقدارها هـ .

مثـال ١ : ان بيان المعادلة س ص = ١ ، أو ص = $\frac{١}{س}$ هوكما في الشكل ١ – ٢٥ فاذا دورت المحاور بزاوية مقدارها ٤٥° فجد معادلة الرسم البياني بالنسبة للنظام سَ صَ .

الحـــل : في (٧ – ٢٧) خذ هـ = ٤٥° فتحصل على

س =(سَ $\sqrt{٢}$ / ٢ – صَ $\sqrt{٢}$ / ٢) = ($\sqrt{٢}$ / ٢) (سَ – صَ)

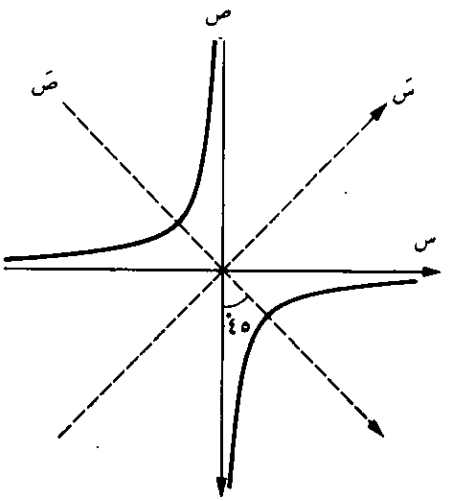
ص = سَ $\sqrt{٢}$ / ٢ + صَ $\sqrt{٢}$ / ٢ = ($\sqrt{٢}$ / ٢) (سَ + صَ)

وبالتعويض بدلا من س ، ص في المعادلة س ص = ١ نحصل على

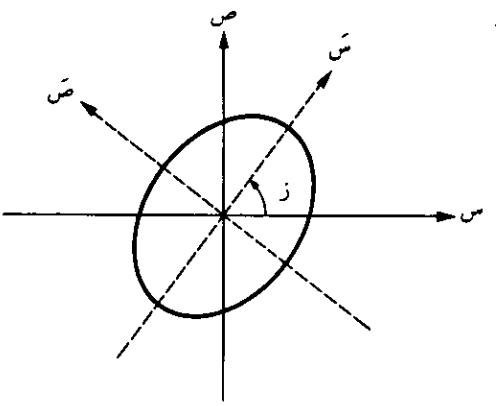
($\sqrt{٢}$ / ٢) (سَ – صَ) ($\sqrt{٢}$ / ٢) (سَ + صَ) = ١

وهذا يمكن تبسيطه الى المعادلة

سَ٢ / ٢ – صَ٢ / ٢ = ١ وهذا هو الشكل القياسي لمعادلة قطع زائد رأساه (± $\sqrt{٢}$ ، صفر) في المستوى سَ صَ كما في الشكل ٧ – ٢٢ . لاحظ أن



الشكل ٧ — ٢٢



الشكل ٧ — ٢٣

معادلتي خطي التقارب هما صَ = ± سَ في النظام سَ صَ .

ان المثال السابق يعطي اسلوبا لحذف الحد الذي يحتوى على س ص وهذا الاسلوب يمكن استعماله لحذف الحد الذي يحتوي على س ص في المعادلة العامة (٧ – ٢٩) أ س٢ + ب س ص + جـ ص٢ + ء س + هـ ص + و = صفرا حيث ب ≠ صفرا وتحويلها الى معادلة بدلالة سَ ، صَ خالية من أي حد يحتوي على سَ صَ . فاذا دورنا المحاور بزاوية مقدارها د فالتعويض من

(٧ – ٢٧) في المعادلة (٧ – ٢٩) لكل من س ، ص نحصل على ما يلي :
أ (سَ جتا د – صَ حا د)^{٢} + ب (سَ جتا د – حتى جا د) (سَ جا + صَ جتا د) + جـ (سَ جا د + صَ جتا د)^{٢} + ء (سَ جتا د – صَ جا د) + هـ (سَ حا د + صَ جتا د) + و = صفرا . وهذه المعادلة يمكن كتابتها على الشكل

(٧ – ٣٠) أ سَ^{٢} + بَ سَ صَ + جَ صَ + ءَ سَ + هَ صَ + و = صفرا .
حيث أن معامل سَ صَ هو

بَ = ٢ (جـ – أ) جا د جتا د + ب (جتا^{٢} د – جا^{٢} د) ولكي نحذف الحد سَ صَ في (٧ – ٣٠) يجب أن نختار د لتحقق

(٧ – ٣١) ٢ (جـ – أ) حا د جتا د + ب (جتا^{٢} د – جا^{٢} د) = صفرا وبتطبيق قانون ضعف الزاوية نحصل على

(جـ – أ) جا ٢ د + ب جتا ٢ د = صفرا ، وهذا يكافيء

(٧ – ٣٢) ظتا ٢ د = (أ – جـ) / ب ، ب ≠ صفرا ،

ولهذا لكي نحذف الحد س ص في (٧ – ٣٠) نختار د لتحقق (٧ – ٣٢) ، ثم نطبق قواعد تدوير المحاور بزاوية مقدارها د كما في (٧ – ٢٧) . ان المعادلة التي ستنتج لا تحتوي على حد فيه سَ صَ ، ولهذا يمكن دراستها وتحليلها كما مر في البنود السابقة ، وهذا يثبت ان بيان المعادلة (٧ – ٣٠) يمثل قطعا مخروطيا باستثناء حالات القطوع المنحلة .

مثـال ٢ :

ناقش وارسم بيان المعادلة

٤١ س^{٢} – ٢٤ س ص + ٣٤ ص^{٢} – ٢٥ = صفرا

الحـــل :

اذا استعملنا الرموز التي في (٧ – ٢٩) فان

أ = ٤١ ، ب = – ٢٤ ، جـ = ٣٤ ، فبتطبيق (٧ – ٣٢) نحصل على

ظتا ٢ د = (٤١ – ٣٢) / – ٢٤ = – ٧ / ٢٤

وبما ان ظتا ٢ د سالب يمكننا أن نختار ٢ د لتحقق المتباينة ١٨٠° > ٢ د > ٩٠° ونتيجة لذلك فان

جتا ٢ د = − ٧ / ٢٥ (لماذا ؟) ، ثم نستعمل قانون نصف الزاوية لنحصل على

جا د = $\sqrt{(١ - \text{جتا } ٢ \text{ د}) / ٢}$ = $\sqrt{(١ + ٧ / ٢٥) / ٢}$ = ٤ / ٥

جتا د = $\sqrt{(١ + \text{جتا } ٢ \text{ د}) / ٢}$ = $\sqrt{(١ - (٧ / ٢٥)) / ٢}$ = ٣ / ٥

ولهذا فان قواعد التدوير في (٧ − ٢٧) تصبح

س = ٣ / ٥ سَ − ٤ / ٥ صَ ، ص = ٤ / ٥ سَ + ٣ / ٥ صَ

ونترك للقاريء أن يثبت أنه بالتعويض بدلا من س ، ص في المعادلة المعطاة ثم تبسيطها نحصل على المعادلة

سَ^{٢} + ٢ صَ^{٢} = ١

لهذا فان البيان قطع ناقص رأساه هما (± ١ ، صفر) وبما أن

ظا د = جا د / جتا د = ٥١٤ / ٥١٣ = ٤ / ٣ نستنتج أن

د = ظا$^{-١}$ (٤ / ٣)

أي أن د = ٨َ ٥٣° لاقرب دقيقة

وبيان المعادلة يظهر في الشكل ٧ − ٢٣ .

تمارين :

بعد تدوير مناسب للمحاور صف وارسم بيان المعادلة في التمارين ١ − ٨ .

١) ٣٢ س^{٢} − ٢٧ س ص + ٥٣ ص^{٢} = ٨٠

٢) ٧ س^{٢} − ٤٨ س ص − ٧ ص^{٢} = ٢٢٥

٣) ١١ س^{٢} + ١٠ $\sqrt{٣}$ س ص + ص^{٢} = ٤

٤) س^{٢} − س ص + ص^{٢} = ٣

٥) ٥ س^{٢} − ٨ س ص + ٥ ص^{٢} = ٩

٦) ١١ س^{٢} − ١٠ $\sqrt{٣}$ س ص + ص^{٢} = ٢٠

٧) ١٦ س^{٢} − ٢٤ س ص + ٩ ص^{٢} − ٦٠ س − ٨٠ ص − ١٠٠ = صفرا

٨) ٦٤ س^{٢} − ٢٤٠ س ص + ٢٢٥ ص^{٢} + ١٠٢٠ س − ٥٤٤ ص = صفرا

٩) برهن على أن بيان المعادلة (٧ - ٣٠) يمثل

أ) قطعا مكافئا اذا كان ب^{٢} - ٤أجـ = صفراً

ب) قطعا ناقصا اذا كان ب^{٢} - ٤ أجـ < صفر

جـ) قطعا زائدا اذا كان ب^{٢} - ٤ أجـ > صفر

ما عدا الحالات المنحلة

١٠) استعمل التمرين ٩ لبيان الرسم البياني للمعادلات في التمارين ١ - ٨ .

٧ — تمارين مراجعـــة :—

شفهية

عرف ما يلي

١) القطوع المخروطية

٢) القطع المكافيء

٣) البؤرة ، الدليل ، الرأس والمحور للقطع المكافيء

٤) طرق اختيار التماثل

٥) القطع الناقص

٦) المحور الكبير والمحور الصغير للقطع الناقص

٧) البؤرتان والرأسان للقطع الناقص .

٨) القطع الزائد

٩) المحور القاطع والمحور المرافق للقطع الزائد

١٠) البؤرتان والرأسان للقطع الزائد

١١) الخطان المرافقان للقطع الزائد

١٢) نقل المحاور

١٣) تدوير المحاور

كتابيـــة :—

في كل من التمارين ١ - ٦ جد البؤرتين والرأسين ثم ارسم بيان القطع المخروطي في المعادلات المعطاة .

١) $ص^{٢} = ٦٤ س$ ٤) $٩ص^{٢} = ١٤٤ + ١٦س^{٢}$

٢) $ص - ١ = ٨ (س + ١)^{٢}$ ٥) $س^{٢} - ص^{٢} - ٤ =$ صفرا

٣) $٩ص^{٢} = ١٤٤ - ١٦س^{٢}$ ٦) $٢٥س^{٢} + ٣٦ص^{٢} = ١$

جد معادلة القطوع المخروطية في التمارين ٧ – ١٢

٧) القطع المكافيء الذي بؤرته (٠ ، – ١٠) ومعادلة دليلة ص = ١٠

٨) القطع المكافيء الذي رأسه نقطة الاصل وهو متماثل بالنسبة لمحور السينات ويمر بالنقطة (٥ ، – ١)

٩) القطع الناقص الذي رأساه (٠ ، ± ١٠) وبؤرتاه (± ٥ ، ٠)

١٠) القطع الزائد الذي بؤرتاه (± ١٠ ، ٠) ورأساه (± ٥ ، ٠)

١١) القطع الزائد الذي رأساه (٠ ، ± ٦) ومعادلتا خطا التقارب له ص = ± ٩ س .

١٢) القطع الناقص الذي بؤرتاه (± ٢ ، ٠) ويمر بالنقطة (٢ ، ٢) .

ناقش وارسم بيان كل من المعادلات في التمارين ١٣ – ١٧ مستخدما نقل المحاور والمناسب .

١٣) $٤س^{٢} + ٩ص^{٢} + ٢٤س - ٣٦ص =$ صفرا .

١٤) $٤س^{٢} - ص^{٢} - ٤٠س - ٨ص - ٨٨ =$ صفرا

١٥) $ص^{٢} - ٨س + ٨ص + ٣٢ =$ صفرا

١٦) $٤س^{٢} + ص^{٢} - ٢٤س + ٤ص + ٣٦ =$ صفرا

١٧) $س^{٢} - ٩ص^{٢} + ٨س + ٧ =$ صفرا

١٨) جد معادلتي المماس والعمـودي للقطع الزائد $٤س^{٢} - ٩ص^{٢} - ٨س + ٦ص - ٣٦ =$ صفرا في النقطة (– ٣ ، ٢)

١٩) الخطوط المماسة للقطع المكافيء $ص = ٢س^{٢} + ٣س + ١$ تمر بالنقطة (٢ ، – ١) ، جد الاحداثي السيني لنقاط التماس .

٢٠) افرض أن م المنطقة المحصورة بين القطع المكافيء ٩ ص = ٥ س^{٢} – ٣٩ س + ٩٠ وبين خط التقارب للقطع الزائد ٩ ص^{٢} – ٤ س^{٢} = ٣٦ .

أ) جد مساحة م .

ب) جد الحجم الدوراني الناتج من تدوير م حول محور الصادات

٢١) قطع ناقص طول محوريه ٨ ، ٤ ، دور حول محوره الكبير ، جد حجم الجسم الدوراني الناتج .

٢٢) جسم صلب قاعدته المنطقة المحصورة في المستوى س ص داخل بيان المعادلة س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} ، جد حجم هذا الجسم اذا كان المقطع العمودي على محور السينات له هو نصف قطع ناقص طول احد محوريه يساوي مقداراً ثابتا وليكن أ .

الفصل الثامن

الاقترانات الأسية والاقترانات اللوغرتميـة

Exponential and Logarithmic Functions

في الفصول السابقة درسنا اقترانات اكثرها جبرية اي مما نعبر عنه بمعادلات من النوع ن (س) = ع حيث ع عبارة جبرية في س . فاذا لم تكن ع جبرية نسمي الاقتران متسامياً او غير جبري (transcendental) . وفي هذا الفصل سنتعرف على اثنين من اهم الاقترانات غير الجبرية وسنبحث في بعض خواصها .

١ — مقدمـــة — الاقتران الاسي أ^س .

في هذا الفصل نستعمل أ لترمز الى عدد حقيقي موجب ونعتبر انه اذا كان م /ن عددا نسبيا حيث ن > ٠ وليس بين م ، ن عامل مشترك يكون أ^{م/ن} = $\sqrt[ن]{أ^م}$ = ($\sqrt[ن]{أ}$)^م . ويمكن ايضاً تعريف أ^س ، حيث س اي عدد حقيقي ، تعريفا تتحقق معه قوانين الأسس المعروفة وهي :

أ^جـ × أ^ء = أ^{جـ + ء} ، أ^جـ / أ^ء = أ^{جـ − ء} ، (أ^جـ)^ء = أ^{جـ ء} ، (أ ب)^جـ = أ^جـ ب^جـ

حيث أ ، ب موجبان ، جـ ، ء عددان حقيقيان .

فلكي نحصل على تعريف مناسب لنفترض ان أ^س معرف وان قوانين الأسس تسري عليه ، وهذا يعني ان الاقتران ق حيث ق (س) = أ^س معرف لكل قيم س الحقيقية . ويسمى هذا الاقتران الاقتران الأسي للاساس أ .

فاذا كان أ > ١ وكان س١ ، س٢ عددين نسبيين ، س١ > س٢ يمكن ان نبين ان

$أ^{س_1} > أ^{س_2}$ اي ان $ق(س_1) > ق(س_2)$. ولنفترض ان هذا يصح على كل قيم $س_1$ ، $س_2$ ، النسبية منها واللانسبية . اي ان ق متزايد في مجال الاعداد الحقيقية . وبالمثل اذا كان $0 < أ < 1$ نتوقع ان يكون ق متناقصاً مع كل قيم س .

مثـــال : ضع مخططا للاقتران ق حيث (أ) $ق(س) = 2^{س}$

(ب) $ق(س) = (1/2)^{س}$

الحـــل : نبدأ بوضع جدول لقيم $2^{س}$ و $(1/2)^{س}$:

	س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
(أ)	$2^{س}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤	٨
(ب)	$(1/2)^{س}$	٨	٤	٢	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

ولكي نضع المخطط نعين نقاطا تحقق (أ) ثم نصل بينها علما بان ق متزايد فنحصل على الشكل المبين في الشكل ٨ − ١ (أ) وهو شكل نموذجي للاقتران الاسي حيث $أ > 1$. وبالمثل نضع نقاطا تحقق (ب) علما بان ق هنا متناقص فنحصل على الشكل ٨ − ١ (ب) وهذا ايضا شكل نموذجي للاقتران الاسي عندما تكون $0 < أ < 1$

الاقتران اللوغرتمي (لو س) :

في الفصل الاول راينا انه اذا كان ق اقتران واحد لواحد في المجال سه والمدى صه. كان هنالك اقتران ف من صه الى سه يعاكس ق وفيهما ف $(ق(س)) = س$ لكل قيم س في سه ، $ق(ف(ص)) = ص$ لكل قيم ص في صه وهذا الاقتران يعاكس ق لانه يعكس الترابط من سه الى صه ، ولذا نرمز له بالرمز $ق^{-1}$ ونعتبر ما يلي :

(١ − ٨) $ق^{-1}(ك) = ل$ اذا وفقط اذا كان $ق(ل) = ك$

لكل ك في صه و ل في سه

ولان الاقتران الاسي $أ^{س}$ حيث $أ \neq 1$ هو اقتران متزايد او متناقص فهو اقتران واحد لواحد من مجموعة الاعداد الحقيقية الى مجموعة الاعداد الحقيقية

الموجبة . فاذا اخذنا ب (س) = $أ^{س}$ ينتج من (٨ – ١) ان الاقتران المعاكس $ب^{-١}$ يعرف على النحو التالي :

$ب^{-١}$ (ك) = ل اذا وفقط اذا كان $أ^{ل}$ = ك

وقد درجنا على تسمية $ق^{-١}$ بالاقتران اللوغرتمي للأساس أ ونعبر عنه بالرمز $لو_{أ}$. وبذا يتخذ القانون السابق الشكل التالي :

(٨ – ٢) $لو_{أ}$ ك = ل اذا وفقط اذا كان $أ^{ل}$ = ك

حيث يكون ك > ٠ ، ل اي عدد حقيقي .

واليك امثلة على (٨ – ٢) : $لو_{٢}$ ٨ = ٣ لان $٢^{٣}$ = ٨ ،

$لو_{٥}$ (١ / ٢٥) = – ٢ لان $٥^{-٢}$ = ١ / ٢٥ ، لو ١٠,٠٠٠ = ٤ لأن

$١٠^{٤}$ = ١٠,٠٠٠ وكذلك لان $أ^{٠}$ = ١ لجميع قيم أ الموجبة ينتج ان $لو_{أ}$ ١ = ٠

ومنحنى الاقتران $لو_{أ}$ هو نفسه منحنى المعادلة ص = $لو_{أ}$ س . وهذه حسب (٨ – ٢) تكافيء س = $أ^{ص}$. فاذا كان أ > ١ كان منحنى هذا الاقتران كالمبين بالشكل ٨ – ٢

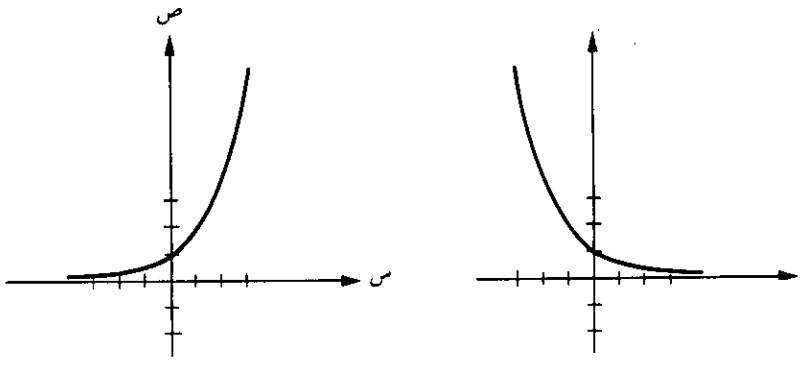
وفي علمي الجبر والمثلثات نستعمل في الشؤون الحسابية اللوغرتمات للاساس ١٠ ، اما في التفاضل والتكامل فيهمنا في الدرجة الاولى مشتقات الاقترانات اللوغرتمية والاسية وتكاملاتها **فلننظر في اشتقاقها وتكاملها :**

لنفرض ان أ > ١ وان ق (س) = $أ^{س}$ لكل قيم س . فحسب تعريف المشتقة يكون :

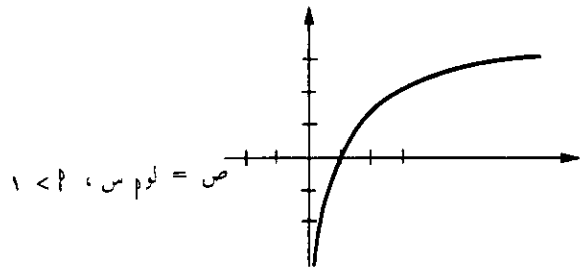
$$ق'(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ب(س + هـ) - ب(س)}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{أ^{س+هـ} - أ^{س}}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{ا^{س}(ا^{هـ} - ١)}{هـ}$$



الشكل ٨ — ١



الشكل ٨ — ٢

ولذا يكون

$$(٨-٣)\quad قَ(س) = ا^{س} \text{ نهـا}_{هـ \to 0} \frac{ا^{هـ} - ١}{هـ}$$

فلنعتبر موقتاً ان هذه النهاية موجودة وانها تساوي جـ ، فتصير (٨ – ٣) بالصيغة :

(٨-٤) $\text{ن}(س) = \text{جـ}\ م^{س}$

ولنلاحظ ان النهاية التي سميناها جـ لا تعتمد على س وانما تعتمد على م . ولان م تتزايد لكل قيم س ينتج ان نَ (س) > ٠ ، اي ان جـ موجبة . فاذا جعلنا ف (س) = لو س لكل س > ٠ ، يكون ف هو معكوس ن ويكون ن (ف (س)) = س لكل س > ٠ . فاذا فاضلنا هذه المعادلة ضمنياً بقاعدة السلسلة (٣ - ٣٩) ينتج نَ (ف (س)) فَ (س) = ١ اي ان فَ (س) = ١ / نَ (س)) شريطة ان يكون نَ (ف (س)) ≠ صفرا ولان فَ (س) = $\text{د}_{س}$ ($\text{لو}_{م}$ س) نكتب المعادلة السابقة بالشكل :

(٨-٥) $$\text{د}_{س}\ (\text{لو}_{م}\ س) = \frac{١}{\text{قَ}\ (\text{ف}\ (س))}$$

واذا جعلنا المتغير ك تصبح (٨ - ٤) : قَ (ك) = جـ $م^{ك}$

فاذا عوضنا عن ك بالرمز ف (س) ينتج :

قَ (ف (س)) = جـ $م^{ف(س)}$ = جـ ق (ف (س)) = جـ س

فاذا عوضنا هذا في (٨ - ٥) يصير

$$\text{د}_{س}\ (\text{لو}_{م}\ س) = \frac{١}{\text{جـ}\ س} \quad ، \text{لكل } س > ٠$$

اي ان $\text{لو}_{م}$ هو اصل المشتقة ١ / جـ س . فاذا طبقنا نظرية التفاضل الاساسية (٥ - ٣١) ينتج

$$\int_{م}^{س} \frac{١}{\text{جـ}\ ع}\ \text{د}\ ع = \text{لو}_{م} ع \Big]_{م}^{س} = \text{لو}_{م} س - \text{لو}_{م} ١$$

ولان $\text{لو}_{م}$ ١ = ٠ ينتج

$$(٨-٦)\quad \text{لو}_{أ} س = \int_{١}^{س} \frac{١}{جـ ن}\, د ن$$

حيث س > ٠ ، جـ هي النهاية المبينة في (٨ – ٣) فالمعادلة (٨ – ٦) تعرف الاقتران اللوغرتمي للاساس أ بدلالة تكامل محدود .

ولهذه المعادلة اهمية كبيرة لانها اساس النظرية التي سنعالجها في باقي هذا الفصل حيث نعكس الخطوات السابقة فنبدأ من (٨ – ٦) باعتبارها التعريف للاقتران اللوغرتمي ومنها نحصل بسهولة على قوانين الاسس ونحصل على اشياء اخرى اهم هي قوانين تفاضل وتكامل جديدة .

تمارين :

١ . ضع على مستوى احداثيات واحد بيانات للمعادلات التالية :

$$ص = ٣^{س}\ ،\ ص = ٤^{س}\ ،\ ص = ٥^{س}$$

من اي الوجوه تتشابه هذه البيانات ومن ايها تتباين ؟

٢ . اعد التمرين ١ للمعادلات ص = $(١/٣)^{س}$ ، ص = $(١/٤)^{س}$ ، ص = $(١/٥)^{س}$.

في التمارين ٣ – ٦ ضع مخططا للاقتران د

٣ . $د(س) = ٢^{س} - ٣$

٤ . $د(س) = ٢^{٣ - س}$

٥ . $د(س) = ٢^{س} + ٢^{-س}$

٦ . $د(س) = ٢^{س} - ٢^{-س}$

٧ . اثبت انه اذا كان أ > ١ وكان م ، ن عددين نسبيين ، م < ن يكون

$أ^{م} < أ^{ن}$.

٨. اثبت انه اذا كان ٠ < أ < ١ وكان م ، ن نسبيين ، م < ن يكون

$أ^{م} > أ^{ن}$

٩. أوجد قيم ما يلي :

(أ) $لو_{٣}(١ / ٩)$ (ب) $لو_{١٠}١٠٠٠$ (جـ) $لو_{١}(١ ، ٠)$

(د) $لو_{٢}٣٢$ (هـ) $لو_{\frac{١}{٤}}١٦$

١٠. اوجد قيم ما يلي :

(أ) $لو_{\frac{١}{٢}}(٦٤)$ (ب) $لو_{٣}٨١$ (جـ) لو (٠,٠٠١)

(د) $لو_{\frac{١}{٥}}(٢٥)$ (هـ) $لو_{٤}(٠,٥)$

خطط الرسوم البيانية للمعادلات المعطاة في التمارين ١١ – ١٤ :

١١. $ص = لو_{٢}س$ ١٢ — $ص = لو_{٣}س$

١٣. $ص لو_{١٠}س$ ١٤ — $ص = لو_{\frac{١}{٢}}س$

في كل من التمارين ١٥ – ٢٢ بين الفرق بين بياني المعادلتين :

١٥. $ص = (١ / أ)^{س}$ ، $ص = أ^{-س}$

١٦. $ص = لو_{م}س$ ، $ص = لو_{م}(-س)$

١٧. $ص = لو_{٣}س^{٢}$ ، $ص = ٢ لو_{٣}س$

١٨. $ص = ٢^{س}$ ، $ص = ٢^{١/س}$

١٩. $ص = ٦^{س}$ ، $ص = ٢^{س} \times ٣^{س}$

٢٠. $ص = لو_{٣}|س|$ ، $ص = |لو_{٣}س|$

٢١. $ص لو_{ن} س$ ، $س = ٤^{ص}$

٢٢. $ص = ٤^{س}$ ، $س = لو_{٤}ص$

٢ — الاقتران اللوغرتمي الطبيعي (لط = ln)

في البند الاول حصلنا بطريقة بديهية على الصيغة التكاملية (٨ – ٦) للعبارة لوم س . وفي هذه الصيغة يعتمد العدد جـ على م فقط ، فلا يستبعد ان يكون هنالك قيمة للعدد م يكون معها جـ = ١ . فاذا فرضنا ان م في هذه الحالة الخاصة هي e ينتج ان

$$\text{لو}_e\text{س} = \int_1^{\text{س}} \frac{1}{\text{ن}}\ \text{د ن} \ ،\ \text{س} > 0 .$$

وفي البند التالي سنعرف المزيد عن العدد e . وسنكتب لو$_e$ بالشكل الموجز لط وسنسمي لط س باللوغرتم الطبيعي للعدد س . وهذا يفضي الى التعريف التالي :

تعريف الاقتران اللوغرتمي الطبيعي (لط)

يعرف الاقتران اللوغرتمي الطبيعي (لط) كما يلي :

$$(٨-٧) \quad \text{لط س} = \int_1^{\text{س}} \frac{1}{\text{ن}}\ \text{د ن} \quad \text{لكل س} > 0 .$$

ويتضمن (٨ – ٧) ان مجال لط هو مجموعة الاعداد الطبيعية الموجبة .

ويلاحظ اننا عرفنا لط بدلالة تكامل محدد على غرار تعريف ج في (٥ – ٣٠) وهكذا يصير لكل عدد موجب ، س ، نظير وحيد هو لط س تعرف قيمته من (٨ – ٧) .

$$\text{في الحالة الخاصة س} = ١ \text{ نجد ان لط } ١ = \int_1^{١} \frac{1}{\text{ن}}\ \text{د ن} = \text{صفرا} ،$$

اعتمادا على (٥ – ١٨) واذا كان س > ١ يكون $\frac{1}{\text{ن}} > 0$ لكل قيم ن في الفترة [١ ، س] فتفسر $\int_1^{\text{س}} (١/\text{ن})\ \text{د ن}$ بانها مساحة منطقة في المستوى الاحداثي ن ص يحدها منحنيات المعادلات ص = ١ / ن ، ن = ١ ، ن = س ، ومحور ن .

واذا كان س > ١ تكون هذه المنطقة هي الجزء المظلل في الشكل ٨ – ٣ (أ) ، وينتج من ذلك ان لط س > ٠ اذا كان س > ١

(ويمكن بيان هذه الحقيقة استنادا الى (٥ – ٢٧) او (٥ – ٢٩)) فاذا كان ٠ < س < ١ يكون $\int_{س}^{١} (١ / ه) د ه$ > ٠ لان التكامل هو المنطقة المظللة في الشكل ٨ – ٣ (ب)

فاذا ضربنا طرفي هذه المتباينة بالعدد – ١ ينتج ان – $\int_{س}^{١} (١ / ه) د ه$ < ٠ .

وبتغيير طرفي التكامل والاشارة ينتج ان $\int_{١}^{س} (١ / ه) د ه$ > ٠

وهذا يعني ان لط س يكون سالبا اذا كان ٠ < س < ١

ومن (٥ – ٣١) على اعتبار أن ج = لط ، د (ه) = ١ / ه نستنتج ان لط هو اصل المشتقة ه في الفترة [١ ، س] ، اي ان

$$د_{س} (لط\ س) = \frac{١}{س} \quad \text{لكل } س > ٠ \qquad (٨-٨)$$

ولان لط قابل للتفاضل ، ١ / س > ٠ لكل س > ٠ ينتج من (٣ – ١٢) و (٤ – ١٢) ان لط متصل ومتزايد لكل س في مجاله . فاذا فاضلنا (٨ – ٨) ينتج :

$$د^{٢}_{س} (لط\ س) = - ١ / س^{٢}$$

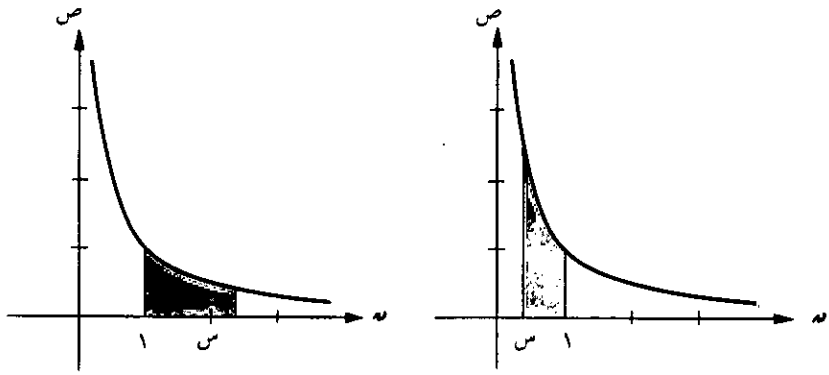
وهذا سالب لكل س > ٠ فمن (٤ – ٢١) يتبين ان منحنى لط محدب عند كل نقطة ن (جـ ، لط جـ) عليه .

فلرسم بيان المعادلة ص = لط س نلاحظ اولا ان لط ١ = ٠ فمقطع البيان من محور س هو ١ ، ولان لط متزايد فكل نقطة على منحناه احداثيها السيني اكثر من ١ تقع فوق محور س ، وكل نقطة عليه احداثيها السيني بين الصفر والواحد تقع تحت محور س . اما الاحداثيات الصادية لهذه النقاط فيمكن ايجادها بالتقريب بتطبيق قاعدة شبه المنحرف (٥ – ٤٧) على التكامل (٨ – ٧) :

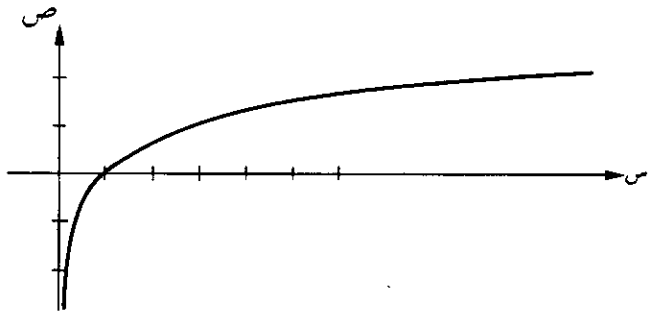
فاذا كان س = ٢ ينتج من المثال ١ في البند ٧ في الفصل الخامس ان لط ٢ =

$\int_{1}^{2} (١ / س)\, د س$. ويساوي بالتقريب ٠,٦٩

ومن (٨ – ١٠) يتبين انه اذا كان أ > . كان لط $أ^{ر}$ = ر لط أ لكل عدد منطق ر . فباستعمال هذا المبدأ نستنتج ان لط ٤ = لط $٢^{٢}$ = ٢ لط ٢ ≈ ٢ × ٠,٦٩ = ١,٣٨ وبالمثل لط ٨ = لط $٢^{٣}$ = ٣ لط ٢ ≈ ٢,٠٧



الشكل ٨ — ٣



الشكل ٨ — ٤

وكذلك لط (١ / ٢) = لط $٢^{-١}$ لط ٢ ≈ – ٠,٦٩

، لط (١ / ٤) = لط $٢^{-٢}$ = – ٢ لط ٢ ≈ – ١,٣٨

، لط (١ / ٨) = لط $٢^{-٣}$ = – ٣ لط ٢ ≈ – ٢,٠٧

وهكذا .

وفي الجدول ٣ تجد اللوغرتمات الطبيعية لاعداد اخرى كثيرة مقربة الى ثلاث منازل عشرية .

فاذا رسمنا هذه النقاط وتذكرنا ان لط متصل ومتزايد نحصل على المخطط المبين بالشكل ٨ – ٤ .

وفي اواخر هذا الفصل سنثبت ان $\lim_{س \to \infty} لط\ س = \infty$

اي ان قيم لط يمكن ان تجعل كبيرة الى اي حد نريد باتخاذ قيم كبيرة للمتغير س ، وسنثبت ايضا ان $\lim_{س \to 0^+} لط\ س = -\infty$

وهذا يعني ان محور ص هو محور تقارب رأسي لهذا المنحنى .

والان سنستخرج من الصيغة (٨ – ٨) صيغة اعم :

فلنفرض ان ن هو الاقتران اللوغرتمي الطبيعي ، اي ان ن (س) = لط س ، لكل س > . فاذا كان ف اقترانا اخر فيه ف (س) > . لكل قيم س المعطاة .

فهنا اذن نستطيع ان نعتبر ان لط ف (س) = ن (ف (س)) فاذا كان فَ (س) موجودا ينتج من قاعدة السلسلة (٣ – ٣٩) ان :

$د_س$ [لط ف (س)] = $د_س$ ن (ف (س))

= ن (ف (س)) ، فَ (س)

ومن ٨ – ٨) نعرف ان نَ (س) = ١ / س فيكون نَ (ف (س)

= ١ / ف (س)

(٨ – ٩) فان $د_س$ [لط ف (س)] = $\frac{١}{ف (س)}$ فَ (س)

مثال ١ : (أ) أوجد $د_س$ [لط (س^٢ + ٦)]

(ب) أوجد صَ اذا كان ص = لط $\sqrt{س + ١}$ ، حيث س > – ١

الحل : (أ) $د_س$ لط (س^٢ + ٦) = $\frac{١}{س^٢ + ٦}$ $د_س$ (س^٢ + ٦)

= $\frac{٢ س}{س^٢ + ٦}$

$$(ب)\ د_س ص = \frac{1}{\sqrt{س + 1}}\ د\ \sqrt{س + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{س + 1}} \cdot \frac{1}{2} (س + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2 (س + 1)}$$

وفي البند الرابع سندرس المزيد عن الاقترانات اللوغرتمية . والنظرية التالية تبين ان اللوغرتم الطبيعي تسري عليه قوانين اللوغرتمات التي يعرفها الطالب .

(٨ – ١٠) قوانين اللوغرتمات :

اذا كان أ ، ب > . ينتج ان

(١) لط أ ب = لط أ + لط ب

(٢) لط أ/ب = لط أ – لط ب

(٣) لط $أ^{ر}$ = ر لط أ ، حيث ر عدد منطق .

البرهان : (١) لنفرض ان أ> . وان و (س) = لط (أ س) .فمن (٨ – ٩) على اعتبار ان ف (س) = أ س ينتج ما يلي :

$$و' (س) = \frac{1}{أ\ س}\ د_س (أ\ س) = \frac{1}{أ\ س} \cdot أ = \frac{1}{س}$$

فلان مشتقي الاقتران و واللوغرتم الطبيعي متساويتان ينتج من (٤ – ٣٣) ان الفرق بينهما عدد ثابت اي ان :

(٨ – ١١) لط أ س = لط س + جـ ، حيث جـ عدد ما

فاذا جعلنا س = ١ ينتج ان لط أ = لط ١ + جـ فيكون جـ = لط أ لان لط ١ = ٠

فاذا عوضنا قيمة جـ في (٨ – ١١) ينتج ان لط أ س = لط أ + لط س فاذا وضعنا ب > ٠ بدل س ينتج المطلوب

٢) اذا وضعنا ١ / ب بدل أ في (١) ينتج :

لط $\frac{١}{ب}$ + لط ب = لط ($\frac{١}{ب}$) ب = لط ١ = ٠

فيكون لط $\frac{١}{ب}$ = − لط ب

فاذن لط أ /ب = لط أ (١ / ب) = لط أ + لط ١ / ب

= لط أ − لط ب .

٣) ليكن هـ (س) = لط س^{ن} حيث س > ٠ ، ن اي عدد نسبي

فمن (٨ − ٩) على اعتبار ان ف (س) = س^{ن} ينتج :

قَ (س) = $\frac{١}{س^{ن}}$ د$_{س}$ (س^{ن}) = $\frac{١}{س^{ن}}$. ن س$^{ن-١}$ = $\frac{ن}{س}$

فاذا جعلنا ك (س) = ن لط س حيث س > . يكون كَ (س)

$$= ن \, د_{س} (\text{لط } س) = \frac{ن}{س}$$

ولان الاقترانين ق ، ك لهما نفس المشتقة فبينهما اذن فرق ثابت ، اي ان لط س^{ن} = ن لط س + جـ ، حيث جـ عدد ما . فاذا جعلنا س = ١ وتذكرنا ان لط ١ = ٠ نستنتج ان جـ = ٠ فيكون لط س^{ن} = ن لط س .

والمثال التالي يبين ان من الانسب احيانا ان نطبق (٨ − ١٠) قبل التفاضل :

مثـال ٢ : اوجد هَ (س) اذا كان هـ (س) = لط [(٤س + ٥) / $\sqrt{٢س - ١}$] ، حيث س > ١ / ٢

الحـــل : باستعمال (٨ − ١٠) (١) ، (٢) ينتج :

هـ (س) = لط (٤س + ٥) − $\frac{١}{٢}$ لط (٢س − ١)

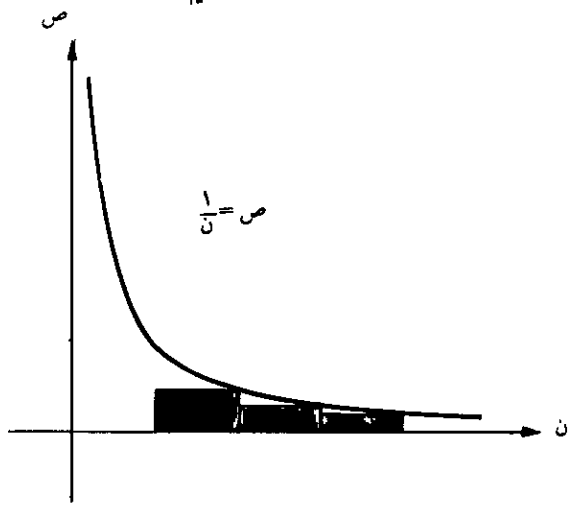
ومن (٨ − ٩) ينتج :

$$هـ'(س) = \frac{1}{٤س + ٥} \times ٤ - \frac{1}{٢} \times \frac{1}{٢س - ١} \times ٢$$

$$= \frac{٤(٢س - ١) - (٤س + ٥)}{(٤س + ٥)(٢س - ١)}$$

$$= \frac{٤س - ٩}{(٤س + ٥)(٢س - ١)}$$

وفي المستقبل لن تحدد دائما بصراحة مجالات الاقترانات اللوغرتمية وانما سنفترض ضمنيا ان س لا تتخذ من القيم الا ما يجعل للعبارة المعطاة معنى .



الشكل ٨ — ٥

والان نثبت ان $\lim_{س \to \infty}$ لط س = ∞

لننظر اول الامر في المستطيلات المظللة في الشكل ٨ – ٥ نجد ان مساحاتها ١/٢ + ١ / ٣ + ١ / ٤ = ١٣ / ١٢ في حين ان المساحة تحت ص = ١ / ن من ن = ١ الى ن = ٤ هي لط ٤ فاذن لط ٤ > $\frac{١٣}{١٢}$ > ١ .

فاذا كان م اي غدد موجب نسبي يكون م لط ٤ > م اي ان لط ٤^م > م واذا كان س > ٤^م فلان لط اقتران متزايدا يكون لط س > ٤^م وهذا يعني ان لط س يمكن ان يكبر الى اي حد نشاء بتكبير قيمة س اي ان

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \quad \text{لط س} = \infty$$

من ذلك ينتج ان $\text{نهـا}_{س \to 0^+}$ لط س = $-\infty$ اذ ان بالامكان

ان نكتب – لط ١ / س = – (لط ١ – لط س) = لط س

:

فاذن $\text{نهـا}_{س \to 0^+}$ لط س = $\text{نهـا}_{س \to 0^+}$ (– لط ١ / س)

فاذا قارب س الصفر من الطرف الموجب فان ١ / س يقارب النهاية الموجبة وكذلك لط ١ / س . من ذلك ينتج ان – لط ١ / س يقارب النهاية السالبة .

تمارين :

في التمارين ١ – ١٨ اعطيت ه (س) والمطلوب ايجاد ه' (س) :

١ . لط (٣س^٢ – ٢س + ١)

٢ . لط (٤س^٣ – س^٢ + ٢)

٣ . لط $\sqrt{٤س^٢ + ٧س}$

٤ . لط $\sqrt{١ - س^٢}$

٥ . س لط س

٦ . $\frac{س^٢}{\text{لط س}}$

٧ . لط $\sqrt{س} + \sqrt{\text{لط س}}$

٨ . لط س^٣ + (لط س)^٣

٩. $\frac{١}{\text{لط س}} + \text{لط}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)$

١٠. لط $\sqrt{\frac{٤ + \text{س}^{٢}}{٤ - \text{س}^{٢}}}$

١١. لط $(٥\text{س} - ٧)^{٤}\,(٢\text{س} + ٣)^{٣}$

١٢. لط $\sqrt[٣]{٤\text{س} - ٥}\,(٣\text{س} + ٨)^{٢}$

١٣. لط $\frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}{(٩\text{س} - ٤)^{٢}}$

١٤. لط $\frac{\text{س}^{٢}\,(٢\text{س} - ١)^{٣}}{(\text{س} + ٥)^{٢}}$

١٥. لط $٣\sqrt{\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} + ١}}$

١٦. لط (لط س)

١٧. لط $(\text{س} + \sqrt{\text{س}^{٢} - ١})$

١٨. لط $(\text{س} + \sqrt{\text{س}^{٢} + ١})$

في التمرينين ١٩ ، ٢٠ استعمل التفاضل الضمني لايجاد صَ

١٩. $٣\text{ص} - \text{س}^{٢} + \text{لط س ص} = ٢$

٢٠. $\text{ص}^{٢} + \text{لط س} / \text{ص} - ٤\text{س} + ٣ = ٠$

٢١. أوجد النقاط على منحنى ص = $\text{س}^{٢} + ٤$ لط س التي يكون المماس عندها موازيا للخط ص $- ٦\text{س} + ٣ = ٠$

٢٢. أوجد معادلة المماس لمنحنى $\text{س}^{٣} - \text{س لط ص} + \text{ص}^{٣} = ٢\text{س} + ٥$ في النقطة (٢ ، ١) .

٢٣. اذا كان لط ٢,٠٠ ≈ ٠,٦٩٣١ فاستعمل التفاضلات لايجاد قيمة لط ٢,٠١ تقريباً .

٢٤. اذا كان ه (س) = لط س فأوجد صيغة للمشتقة النونية $ه^{(ن)}$ (س) حيث ن عدد صحيح موجب .

٢٥. تتحرك نقطة على خط احداثي حسب القانون ه (ن) = ن − ٤ لط (ن + ١) ، حيث ٠ ≤ ن ≤ ٤ . أوجد السرعة والتسارع في اللحظة ن ثم صف حركة النقطة في الفترة [٠ ، ٤] .

٢٦. ادت دراسة احد التفاعلات الكيماوية الى المعادلة :

$$ن = \frac{١}{جـ (أ - ب)} \text{ لط } \frac{ب (أ - س)}{أ (ب - س)}$$

حيث تمثل س مقدار تركيز مادة ما في اللحظة ن ، وتمثل أ ، ب ، جـ اعداداً ثابتة .

اثبت ان $\frac{د س}{د ن} = جـ (أ - س) (ب - س)$

٢٧. استعمل الجدول ٣ في تخطيط ص = لط س . ثم أوجد ميل المماس في النقط التي احداثياتها السينية ١ ، ٥ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ماذا يحدث اذا تباعدت نقطة التماس بلا نهاية ؟ ما الذي يحدث اذا قاربت هذه النقطة الصفر ؟

٢٨. ضع تخطيطا للمعادلتين التاليتين :

أ) ص = لط | س | ب) ص = | لط س |

بين صحة ما يلي :

٢٩. $\int$ لط س د س = س لط س − س + جـ

٣٠. $\int$ (لط س)^{٢} د س = (لط س)^{٢} − ٢ س لط س + ٢ س + جـ

٣١. $\int \frac{١}{\sqrt{٢أ + س^{٢}}} د س = لط (س + \sqrt{٢أ + س^{٢}}) + جـ$

$$\text{٣٢ .} \quad \int \frac{١}{\text{ف}^{٢} - \text{س}^{٢}} \, \text{د س} = \frac{١}{٢\,\text{ف}} \text{ لط } \frac{\text{ف} + \text{س}}{\text{ف} - \text{س}} + \text{جـ} \,، \; \text{ف}^{٢} > \text{س}^{٢}$$

٣ — الاقتران الاسي الطبيعي : Natural Exponential Function

اثبتنا في البند السابق ان لط س يمكن ان يتخذ قيما رقمية كبيرة الى اي حد نشاء ، وهذا يعني ان لط قد يتخذ اية قيمة حقيقية ، لانه اذا كان س موجبا وكان ب عددا كبيرا جدا يكون لط ١ < س < لط ب ، ولان لط متصل ينتج من نظرية القيم الوسطى (٢ – ٣٨) ان هنالك عددا ، ص ، بين ١ ، ب حيث لط ص = س . ولأن لط متزايد فهناك عدد وحيد ، ص ، حيث لط ص = س . وكذلك اذا كان س سالبا يكون هنالك قيمة للعدد ب حيث لط ب < س < لط ١ ، ويكون هنالك عدد واحد ، ص ، بين ب ، ١ ، يحقق لط ص = س .

من ذلك ينتج انه لكل عدد حقيقي س هنالك عدد فريد موجب ص يحقق لط ص = س فاذا اقترن ص مع س يحدث اقتران من مجموعة الاعداد الحقيقية الى مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة . وهذا الاقتران يسمى الاقتران الاسي الطبيعي ، وسنرمز له بالرمز سا (= exp) . والتعريف التالي يلخص الحقائق السابقة :

(٨ – ١٢) تعريف الاقتران الاسي الطبيعي :

يعرف الاقتران الاسي الطبيعي (سا) كما يلي :

سا س = ص اذا وفقط اذا كان لط ص = س

لكل قيم س ، حيث ص > ٠ .

ويلاحظ ان المعادلتين في التعريف (٨–١٢) هما تعبيران مختلفان عن شيء واحد ، فاذا كان لط ص = س ينتج من المعادلة الاولى ان ٠

(٨ – ١٣) سا لط ص = ص لكل ص > ٠

وبالعكس اذا كان سا س = ص ينتج من المعادلة الثانية في (٨ – ١٢) ان :

(٨ – ١٤) لط سا س = س لكل قيم س

والصيغتان (٨ – ١٣) و (٨ – ١٤) تعنيان ان لط و سا اقترانان متعاكسان (انظر (١ – ١٢)).

ومما درسناه في مطلع هذا البند نستنتج ان هنالك عددا وحيدا موجبا لوغرتمه الطبيعي ١ ، وقد درجنا على ان نرمز لهذا العدد بالرمز e . من ذلك ينتج ان :

(٨ – ١٥) لط e = ١

وفي البند ٢ حسبنا عدة قيم للاقتران لط . ويمكن ان نبين بقاعدة شبه المنحرف ان :

$$\int_{١}^{٢,٧} \frac{١}{س}\,د س < ١ < \int_{١}^{٢,٨} \frac{١}{س}\,د س$$

(انظر التمرين ٧ في البند ٧ من الفصل الخامس).

فيكون لط ٢,٧ < لط e < لط ٢,٨

ولان لط اقتران متزايد يكون ٢,٧ < e < ٢,٨

وفي اخر البند نبين ان e ≈ ٢,٧١٨٢٨ لخمس منازل عشرية .

واذا كان ر عددا نسبيا فمن (٨ – ١٢) و (٨ – ١٥) ينتج ان :

لط $e^{ر}$ = ر لط e = ر

لهذا يعرف $e^{س}$ لجميع قيم س ، النسبية واللانسبية ، على النحو التالي :

(٨ – ١٦) تعريف $e^{س}$

اذا كان س اي عدد حقيقي كان $e^{س}$ هو العدد الحقيقي الفريد ، ص ، حيث

لط ص = س

ومن هذا التعريف ينتج ان لط $e^{س}$ = س ، لكل قيم س الحقيقية . ومن

(٨ – ١٤) ينتج ان لط سا س = س . فاذن لط سا س = لط $e^{س}$ لجميع قيم س

ولان لط هو اقتران واحد لواحد ينتج من المعادلة الاخيرة ان :

(٨ – ١٧) سا س = $e^{س}$ لجميع قيم س الحقيقية

وهذا يدل على ان قيم الاقتران الاسي الطبيعي سا هي نفسها قيم الاقتران ن حيث ن (س) = $e^{س}$. لهذا نسمي سا بالاقتران الاسي ، فهو في الواقع الاقتران الاسي للاساس e

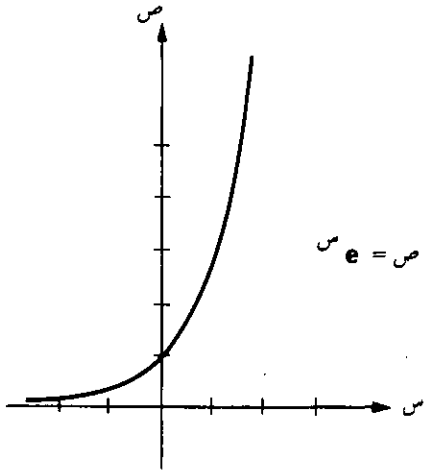
لاحظ انه ينتج من (٨ – ١٧) ، (٨ – ١٢) ان :

(٨ – ١٨) $e^{س}$ = ص اذا وفقط اذا كان لط ص = س

ولا يصعب ان نثبت ان قوانين الاسس تسري على سا الا اننا سنؤجل براهينها الى البند الخامس بعد ان تصاغ القوانين صياغة عامة .

ومن (٨ – ١٧) نستنتج ان منحنى سا هو نفسه منحنى ص = $e^{س}$ الذي هو ، حسب (٨ – ١٨) مطابق لمنحنى س = لط ص

وفي الشكل ٨ – ٤ منحنى ص = لط س . فلكي نحصل على منحنى س = لط ص (او ما يكافئها وهو ص = $e^{س}$) نستبدل س ، ص كلا بالاخر فيصير المقطع الصادي ١ ومحور س خط تقارب افقيا . وفي الشكل ٨ – ٦ منحنى



الشكل ٨ – ٦

ص = e^س فلان e ≈ ٢,٧ نحصل على هذا المخطط على وجه التقريب بتخطيط المعادلة ص = (٢,٧)^س. ونحصل عليه ايضا على نحو اقل دقة بتخطيط المعادلة ص = ٣^س

وفي البند ٧ سنبين ان الاقتران المعاكس للاقتران القابل للاشتقاق هو ايضا قابل للاشتقاق من ذلك ينتج ان سا قابل للاشتقاق ، ويمكن ايجاد مشتقته بالتفاضل الضمني .

فاذا جعلنا ص = سا س = e^س ينتج من (٨ – ١٨) ان لط ص = س

فبالتفاضل الضمني يكون د_س لط ص = ١ وهذا يكافيء

$$\frac{١}{ص}\ د_س\ ص = ١$$

او د_س ص = ص (انظر (٨ – ٩)) من ذلك ينتج ان :

(٨ – ١٩) د_س e^س = e^س لكل قيم س

فالاقتران الاسي يساوي مشتقته .

مثال ١ : أوجد نَ (س) اذا كان نه (س) = س^٢ . e^س

الحل : من قاعدة الضرب : نَ (س) = س^٢ د_س e^س + e^س د_س س^٢

= س^٢ e^س + e^س (٢س)

= س e^س (س + ٢)

لنأخذ الاقتران ك حيث ك (س) = e^ف(س) ، ف اقتران قابل للاشتقاق فاذا كان نه (س) = e^س كان ك (س) = نه (ف (س)) . فمن قاعدة السلسلة (٣ – ٣٩) ينتج ان كَ (س) = نَ (ف (س)) . فَ (س) ولا ن نَ (س) = e^س ينتج ان نَ (ف (س)) = e^ف(س)

من ذلك ينتج ان كَ (س) = e^ف(س) . فَ (س)

فبدلالة العامل د س نكتب المعادلة السابقة على النحو :

$$(٨-٢٠)\quad د_{س}\, e^{ف(س)} = e^{ف(س)} \cdot د_{س}\, ف(س)$$

لاحظ ان هذه الصيغة تؤول الى (٨ – ١٩) اذا كان ف (س) = س

مثال ٢ : أوجد $د_{س}\, e^{\sqrt{س^{٢}+١}}$

الحـــل : من (٨–٢٠) ينتج :

$$د_{س}\, e^{\sqrt{س^{٢}+١}} = e^{\sqrt{س^{٢}+١}}\, د_{س}\sqrt{س^{٢}+١}$$

$$= e^{\sqrt{س^{٢}+١}}\ (\frac{١}{٢})\ (س^{٢}+١)^{-\frac{١}{٢}}\ (٢س)$$

$$= \frac{س \cdot e^{\sqrt{س^{٢}+١}}}{\sqrt{س^{٢}+١}}$$

وفي علم الاحتمالات الرياضي نقابل اقترانات من النوع المبين بالمثال التالي :

مثـال ٣ : اذا كان ق (س) $= e^{-س^{٢}/٢}$ أوجد نقاط النهايات العظمى وابحث في التقعر والتحدب ونقط الانعطاف ثم ضع تخطيطا للمنحنى .

الحـــل : من (٨ – ٢٠)

$$قَ(س) = e^{-س^{٢}/٢} \cdot د_{س}\ (-\frac{س^{٢}}{٢}) = -س\ e^{-س^{٢}/٢}$$

ولان $e^{-س^{٢}/٢}$ موجب دائما تكون القيمة الحاسمة الوحيدة للاقتران ق هي الصفر . فاذا كان س < . يكون قَ (س)> . واذا كان س> . يكون قَ (س)< ٠ فمن الاختبار الاول يكون للاقتران ق قيمة عظمى موضعية عند الصفر . وهذه القيمة العظمى هي ق (٠)$= e^{٠} = ١$

وبتطبيق قاعدة المضروبين على ن (س) ينتج :

$$ن'(س) = -س\,e^{-س^2/2} \cdot (-س) - e^{-س^2/2}$$

$$= e^{-س^2/2} \cdot (س^2 - 1)$$

فتكون المشتقة الثانية صفرا عند −١ ، ١ . فاذا كان −١ < س < ١ يكون ن' (س) < ٠

فمن (٤ − ٢١) ينتج ان مخطط ق محدب في الفترة المفتوحة (− ١ ، ١) واذا كان س < − ١ او س > ١ يكون ن' (س) > ٠ ، ويكون المخطط مقعرا في الفترتين اللامتناهيتين (− ∞ ، − ١) و (١ ، ∞) فالنقطتان

ن (− ١ ، $e^{-\frac{1}{2}}$) و م (١ ، $e^{-\frac{1}{2}}$) نقطتا انعطاف

ففي الصيغة ن (س) = ١ / $e^{س^2/2}$ يتضح انه اذا تزايدت س رقميا فان ن (س) تقارب الصفر . فلندع للطالب ان يثبت ان

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} ن(س) = ٠ \quad \text{وان} \quad \text{نهـا}_{س \to -\infty} ن(س) = ٠ .$$

اي ان محور س هو محور اقتراب افقي والشكل ٨ − ٧ هو مخطط هذا الاقتران وللعدد e الذي يعرفه (٨ − ١٥) اهمية عملية كبيرة ولذا سننهي هذا البند باعطاء صيغة له تبين انه نهاية لعبارة معينة :

ولنبدأ بتطبيق قانون التفاضل (٨ − ٣) على ن (س) = لط س

$$\text{فيكون } ق'(س) = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\text{لط}(س + هـ) - \text{لط}\ س}{هـ}$$

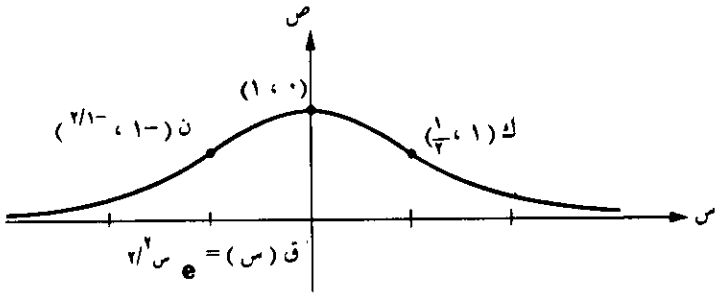
$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{١}{هـ} \text{ لط } \frac{س + هـ}{س}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \left(1 + \frac{هـ}{س} \right)^{1/هـ}$$

ولان $د_{هـ}(س) = 1/س$ فعند $س = 1$ ينتج ان

$$1 = \lim_{هـ \to 0} \text{لط} (1 + هـ)^{1/هـ}$$

ومن (٨ – ١٣) نستنتج ان $(1 + هـ)^{1/هـ} = \text{سا لط} (1 + هـ)^{1/هـ}$



الشكل ٨ — ٧

ولان اقتران سا متصل عند ١ ينتج من (٢ – ٣٤) ان :

$$\lim_{هـ \to 0} (1 + هـ)^{1/هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \text{سا لط} (1 + هـ)^{1/هـ}$$

$$= \text{سا} \lim_{هـ \to 0} \text{لط} (1 + هـ)^{1/هـ}$$

$$= \text{سا } 1$$

اي ان :

$$e = \lim_{هـ \to 0} (١ + هـ)^{١ / هـ} \qquad (٨ - ٢١)$$

والقانون (٨ – ٢١) هو واحد من اهم قوانين النهايات في الرياضيات . وبعض الكتب تبدأ باعتباره التعريف للعدد e . واذا كان لدى القاريء حاسبة الكترونية فسيجد من الممتع ان يحسب قيم $(١ + هـ)^{١/هـ}$ مع اعطاء هـ قيما صغيرة رقميا ، وفي الجدول التالي بعض القيم التقريبية لذلك :

هـ	$(١ + هـ)^{١ / هـ}$	هـ	$(١ + هـ)^{١ / هـ}$
,٠١	٢,٧٠٤٨١٤	– ,٠١	٢,٧٣١٩٩٩
,٠٠١	٢,٧١٦٩٢٤	– ,٠٠١	٢,٧١٩٦٤٢
,٠٠٠١	٢,٧١٨١٤٦	– ,٠٠٠١	٢,٧١٨٤١٨
,٠٠٠٠١	٢,٧١٨٢٦٨	– ,٠٠٠٠١	٢,٧١٨٢٩٥
,٠٠٠٠٠١	٢,٧١٨٢٨٠	– ,٠٠٠٠٠١	٢,٧١٨٢٨٣

لذا نعتبر e ≈ ٢,٧١٨٢٨ لخمس منازل عشرية .

تمارين :

في التمارين ١ – ٢٠ ، اعطي ق (س) والمطلوب ايجاد قَ (س)

١ . $\sqrt{e^{س} + ١}$

٢ . $س \cdot e^{-س}$

٣ . $س^{٢} e^{-٢س}$

٤ . $\sqrt{e^{٢س} + ٢س}$

٥ . $e^{س} / (س^{٢} + ١)$

٦ . $س / e^{س^{٢}}$

٧ . $(e^{٤س} - ٥)^{٣}$

٨. $(e^{٣س} - e^{-٣س})^{٤}$

٩. $e^{١ / س + ١ / e^{س}}$

١٠. $e^{\sqrt{س} + ١ / e^{س}}$

١١. $\frac{e^{س} - e^{-س}}{e^{س} + e^{-س}}$

١٢. $e^{e^{س}}$

١٣. $e^{٢س}$ لط س

١٤. $e^{س}$ لط س

١٥. لط $\frac{e^{س} + ١}{e^{س} - ١}$

١٦. $\frac{\text{لط} (e^{س} + ١)}{\text{لط} (e^{س} - ١)}$

١٧. $\sqrt{\text{لط} (e^{٢س} + e^{-٢س})}$

١٨. لط $\sqrt{e^{٢س} + e^{-٢س}}$

١٩. $e^{\text{لط س}}$

٢٠. لط $e^{س}$

في التمرينين ٢١ ، ٢٢ أوجد صَ بالتفاضل الضمني

٢١. $e^{س ص} - س^{٣} + ٣ص^{٢} = ١١$

٢٢. $س e^{ص} + ٢س - \text{لط} (ص + ١) = ٣$

٢٣. أوجد نقطة على بيان ص = $e^{٢س}$ يمر مماسه المرسوم منها بنقطة الاصل .

٢٤. أوجد معادلة المستقيم العمودي على منحنى ص = ٤ س $e^{س^٢ - ١}$ في النقطة ن (١ ، ٤) .

٢٥. أوجد النهايات العظمى المحلية للاقتران ب (س) = س $e^{-س}$ وناقش تقعرها وتحدبها ونقط انعطافها ثم خطط منحنى ب

٢٦. أوجد النهايات العظمى المحلية للاقتران ب (س) = $س^٢ e^{-س^٢}$ وناقش تقعرها وتحدبها ونقط انعطافها ثم خطط بيان ب

٢٧. استعمل التفاضلات لايجاد مقدار تغير ب (س) = س $e^{-س^٢}$ بالتقريب عندما يتغير س من ١,٠٠ الى ١,٠١ ثم أوجد بالتقريب قيمة ق (١,٠١)

٢٨. اذا كان ب (س) = $e^{-س^٢}$ فاستخرج قانونا لايجاد المشتقة النونية $ب^{(ن)}$ (س)

في التمارين ٢٩ – ٣٢ أوجد قيم جـ التي تجعل ص = $e^{جـ س}$ حلا للمعادلة التفاضلية المعطاة :

٢٩. $ص'' + ٣ ص' + ٢ ص = ٠$ ٣٠ — $ص'' - ٩ ص = ٠$

٣١. $ص'' - ص' + ٤ ص' + ٤ ص = ٠$

٣٢. $ص'' - ص' - ٦ ص' = ٠$

٣٣. اثبت ما يلي :

(أ) $\lim_{س \to \infty} e^{-س^٢ / ٢} = ٠$

(ب) $\lim_{س \to -\infty} e^{-س^٢ / ٢} = ٠$

حقق التمرينين ٣٤ ، ٣٥

٣٤. $\int e^{أ س}$ لط س ء س

$= \frac{١}{أ} e^{أ س}$ لط س $- \frac{١}{أ} \int \frac{١}{س} e^{أ س}$ ء س

٣٥ . $\int س^{ن} e^{أ س} \, د س$

$$= \frac{١}{أ} س^{ن} e^{أ س} - \frac{ن}{أ} \int س^{ن-١} e^{أ س} \, د س$$

٤ — التفاضل والتكامل :

ان الصيغة (٨–٩) لمشتقة لط هـ (س) يمكن ان توسع لتشمل لط | هـ (س) | حيث هـ اقتران قابل للاشتقاق و هـ (س) ≠ صفرا لكل قيم س . ولان القيمة المطلقة لاي عدد حقيقي غير الصفر موجبة فان لط | هـ (س) | موجود سواء كان هـ (س) موجبا ام سالباً .

واذا كان أ عددا حقيقيا يكون | أ | = $\sqrt{أ^{٢}}$ = ($أ^{٢}$)$^{\frac{١}{٢}}$ ، ولذا يكون لط | هـ (س) | = لط [(هـ (س))^{٢}]$^{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ لط (هـ (س))^{٢} وباستعمال (٨–٩) وقاعدة القوى (٣–٤٦) ينتج :

$$د_{س} \text{ لط } | \text{ هـ } (س) | = (\frac{١}{٢}) \frac{٢}{(\text{ هـ } (س))^{٢}} \, د_{س} (\text{ هـ } (س))^{٢}$$

$$= (\frac{١}{٢}) \frac{١}{(\text{ هـ } (س))^{٢}} \; ٢ \text{ هـ } (س) \text{ هـَ } (س)$$

وهذا يعطي بعد الاختصار

$$(٨-٢٢) \; د_{س} \text{ لط } | \text{ هـ } (س) | = \frac{١}{\text{ هـ } (س)} \text{ هـَ } (س)$$

ونلاحظ انه اذا كان هـ (س) > ٠ يكون (٨ – ٢٢) هو نفسه (٨ – ٩)

مثـال ١ : اوجد ن (س) اذا كان ن (س) = لط | ٤ + ٥س − ٢س^{٢} |

الحـــل : باستعمال (٨ − ٢٢) ينتج

$$ن' (س) = \frac{١}{٤ + ٥س - ٢س^{٣}} (٥ - ٦س^{٢})$$

$$= \frac{٥ - ٦س^{٢}}{٤ + ٥س - ٢س^{٣}}$$

ولان لط هـ (س) هو اصل مشتقة (١ / هـ (س)) هـَ (س) ينتج

$$(٨ - ٢٣) \quad \int \frac{١}{هـ (س)} هـ' (س) \, ء س = لط | هـ (س) | + جـ$$

وغني عن البيان انه اذا كان هـ (س) موجبا يمكن ازالة الاشارة المطلقة في (٨ − ٢٣) واذا استعمل هذا القانون في تكامل محدد نهايتاه الدنيا والعليا أ ، ب على التوالي ، حيث أ < ب فيلزم ان يكون هـ (س) ≠ صفرا لجميع س في الفترة [أ ، ب] . (لماذا ؟) .

والحالة الخاصة التي يكون فيها هـ (س) = س تعطينا الصيغة :

$$\int \frac{١}{س} \, ء س = لط (س) + جـ$$

مثـال ٢ : أوجد $\int \frac{س}{٣س^{٢} - ٥} \, ء س$

الحـــل : اذا جعلنا هـ (س) = ٣س^{٢} − ٥ يكون هـَ (س) = ٦ س واذن يمكن ان نكتب هذا التكامل بالصيغة (٨ − ٢٣) بالضرب في ٦ وهذا يعطي :

$$\int \frac{س}{٣س^{٢} - ٥} \, ء س = \frac{١}{٦} \int \frac{١}{٣س^{٢} - ٥} \times ٦س \, ء س$$

$$= \frac{1}{6} \text{ لط } | \ 3س^2 - 5 \ | + \text{جـ}$$

مثـال ٣ : أوجد $\int_1^2 \frac{2س^2 - 5س - 7}{س - 3}$ ء س

الحـــل : يمكن تبسيط التكامل بقسمة البسط على المقام . ويستطيع القاريء ان يتبين ان :

$$\frac{2س^2 - 5س - 7}{س - 3} = 2س + 1 - \frac{4}{س - 3}$$

فبتكامل طرفي المعادلة ينتج ان

$$\int_1^2 \frac{2س^2 - 5س - 7}{س - 3} \text{ ء س} = \left[س^2 + س - 4 \text{ لط } | س - 3 | \right]_1^2$$

$$= (4 + 2 - 4 \text{ لط } |-1|) - (1 + 1 - 4 \text{ لط } |-2|)$$

$$= 4 + 4 \text{ لط } 2$$

واذا كان هـ قابلا للاشتقاق ينتج من (٨ – ٢٠) ان د$_س$ $e^{هـ(س)}$

$= e^{هـ(س)}$ هـَ (س) فيكون :

$$(٨ - ٢٤) \int e^{هـ(س)} هـَ(س) \text{ ء س} = e^{هـ(س)} + \text{جـ}$$

والحالة الخاصة عندما يكون هـ (س) = س ، اعني

$$(٨ - ٢٥) \int e^{س} \text{ ء س} = e^{س} + \text{جـ}$$ ذات اهمية خاصة .

مثـال ٤ : احسب $\int \frac{e^{3/س}}{س^2}$ ء س

الحـــل : اذا جعلنا ٣ / س = هـ يكون ء هـ = (٣ / س^{٢}) ء س فيمكن اذن ان يوضع هذا التكامل بالصيغة (٨ – ٢٤) وذلك بادخال العامل – ٣ . فبادخال هذا العامل والضرب في – ١ / ٣ ينتج ان

$$\int \frac{e^{٣/س}}{س^{٢}}\, ء س = (-\frac{١}{٣}) \int e^{٣/س} (-\frac{٣}{س^{٢}})\, ء س$$

$$= \frac{١}{٣} \int e^{هـ}\, ء هـ$$

$$= (-\frac{١}{٣})\, e^{هـ} + جـ$$

$$= (-\frac{١}{٣})\, e^{٣/س} + جـ$$

مثـال ٥ : أوجد $\int_{١}^{٢} \frac{e^{٣/س}}{س^{٢}}\, ء س$

الحـــل : وجد اصل هذه المشتقة في المثال ٤ . فاذا طبقنا عليه النظرية الاساسية (٥ – ٣١) ينتج

$$\int_{١}^{٢} \frac{e^{٣/س}}{س^{٢}}\, ء س = \left[(-\frac{١}{٣})\, e^{٣/س} \right]_{١}^{٢}$$

$$= -\frac{١}{٣} [\, e^{٣} - e^{٣/٢} \,]$$

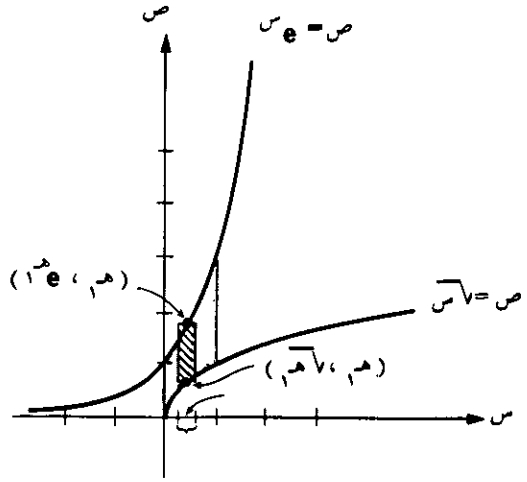
ويمكن حل هذا السؤال بطريقة التعويض ، فاذا عوضنا هـ = ٣ / س ، كما في المثال ٤ ، فعندما يكون س = ١ ، يكون هـ = ٣ ، وعندما يكون س = ٢ يكون هـ = ٣ / ٢ ، فيكون

$$\int \frac{e^{٣/س}}{س^{٢}}\, ء س = -\frac{١}{٣} \int_{٣}^{\frac{٣}{٢}} e^{هـ}\, ء هـ = (-\frac{١}{٣}) \left[e^{هـ} \right]_{٣}^{\frac{٣}{٢}}$$

$$= -\frac{١}{٣} (e^{٣} - e^{٣/٢})$$

مثـال ٦ : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات ص = $e^{س}$ ، ص = $\sqrt{س}$ ، س = ٠ ، س = ١ .

الحـــل : يظهر في الشكل (٨ – ٨) المنطقة المطلوبة والمستطيل النموذجي الذي تحدثنا عنه في الفصل السادس فبتطبيق (٦ – ١) تكون المساحة المطلوبة كما يلي :



الشكل ٨–٨

$$م = \text{نهـــا}_{||ن|| \to ٠} \sum (e^{هـ١} - \sqrt{هـ١}) \Delta س_١$$

$$= \int_{٠}^{١} (e^{س} - \sqrt{س}) \, د س$$

$$= \left[e^{س} - \frac{٢}{٣} س^{٣/٢} \right]_{٠}^{١}$$

$$= (e - \frac{٢}{٣}) - (e^{٠} - ٠) = e - \frac{٥}{٣}$$

فاذا شئنا التقريب فالمساحة المطلوبة م ≈ ٢ , ٧١٨ – ١ , ٦٦٦ = ١ , ٠٥٢ لاقرب جزء من الف .

التفاضل اللوغرتمي :

اذا اعطينا عبارة في س تحوي ضربا او قسمة او رفعا الى قوى فقد يكون من

السهل ان نجد اللوغرتم الطبيعي قبل التفاضل . وهذه الطريقة تسمى بالاشتقاق او التفاضل اللوغرتمي ، واليك مثالا عليها .

مثـال ٧ : أوجد ن (س) علما بان ن (س) = (٥س − ٤)^{٣} / $\sqrt{٢س + ١}$

الحـــل : نأخذ اللوغرتم الطبيعي لطرفي المعادلة مستعملين (٨ − ١٠) :

لط ن (س) = ٣ لط (٥س − ٤) − $\frac{١}{٢}$ لط (٢س + ١)

ثم نفاضل الطرفين فينتج :

$$\frac{١}{ن(س)} \text{ ن}'(س) = ٣ \times \frac{١}{٥س - ٤} \times ٥ - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢س + ١} \times ٢$$

$$= \frac{٢٥س + ١٩}{(٥س - ٤)(٢س + ١)}$$

ثم نضرب الطرفين في ن (س) فينتج :

$$\text{ن}'(س) = \frac{(٢٥س + ١٩)(٥س - ٤)^{٢}}{(٢س + ١)^{٣/٢}}$$

ويمكن التحقق من صحة هذه النتيجة بالاشتقاق بطريقة القسمة .

تمارينـــن :

أوجد ناتج التكامل في كل من ١ − ١٨

١٠ $\int \frac{س^{٢}}{س^{٣} + ١}$ د س

٢٠ $\int_{١}^{٢} \frac{٣س}{س^{٢} + ٤}$ د س

٣. $\int_{-٢}^{١} \frac{١}{٢س + ٧}$ ء س

٤. $\int_{-١}^{٠} \frac{١}{٤ - ٥س}$ ء س

٥. $\int_{١}^{٤} \frac{٢}{\sqrt{س}\,(\sqrt{س} + ٤)}$ ء س

٦. $\int \frac{س - ١}{٣س^{٢} - ٦س + ٢}$ ء س

٧. $\int \frac{٦س^{٢} - س + ٥}{س + ٤}$ ء س

٨. $\int \frac{س^{٣} - ١}{س + ٢}$ ء س

٩. $\int \frac{\text{لط } س}{س}$ ء س

١٠. $\int \frac{١}{س\,(\text{لط } س)^{٢}}$ ء س

١١. $\int_{١}^{٣} e^{-٤س}$ ء س

١٢ . $\int_{0}^{1} e^{٢س + ٣}$ د س

١٣ . $\int \frac{e^{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}}$ د س

١٤ . $\int س\, e^{س^٢}$ د س

١٥ . $\int \frac{(1 + e^{س})^٢}{e^{س}}$ د س

١٦ . $\int \frac{e^{س}}{(1 + e^{س})^٢}$ د س

١٧ . $\int \frac{e^{س} - e^{-س}}{e^{س} + e^{-س}}$ د س

١٨ . $\int \frac{e^{س}}{1 + e^{س}}$ د س

١٩ . أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات ص = ١ / س ، ص = $e^{-س}$ ، س = ١ ، س = ٢ .

٢٠ . أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات ص = $e^{-٢س}$ ، ص = $-e^{س}$ ، س = ٠ ، س = ٢ .

٢١ . ادرنا حول محور ص المنطقة المحصورة بين المنحنيات

ص = $e^{-٢س}$ ، ص = ٠ س = ٠ ، س = ١ أوجد حجم المجسم الناتج .

٢٢ . ادرنا حول محور س المنطقة المحصورة بين منحنيات ص = ١ / $\sqrt{س}$. ص = ٠ ، س = ١ ، س = ٤ . أوجد حجم المجسم الناتج .

٢٣ . تسير نقطة على خط مستقيم بحيث ان سرعتها في اللحظة ن تساوي $e^{-٣ن}$ فاذا بدأت من نقطة الاصل فما المسافة التي تقطعها في الفترة الزمنية (٠ ، ٢) ؟

٢٤ . مجسم قاعدته منطقة في المستوى س ص حدودها المنحنيات ص = $e^{٢س}$ ، ص = $e^{س}$ ، س = ١ . أوجد حجم المجسم علما بان كل مقطع عرضي له معامد لمحور س هو مربع .

في التمارين ٢٥ – ٢٨ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ بالاشتقاق اللوغرتمي

٢٥ . $ص = \sqrt[٣]{٢س + ١}\ (٤س - ١)^{٢}\ (٣س + ٥)^{٤}$

٢٦ $ص = \frac{(٢س - ٣)^{٢}}{\sqrt{س + ١}\ (٧س + ٢)^{٣}}$

٢٧ . $ص = \sqrt{(٣س^{٢} + ٢)\ \sqrt{٦س - ٧}}$

٢٨ . $ص = \frac{(س^{٢} + ٣)^{\frac{٢}{٣}} - (٣س - ٤)^{٤}}{\sqrt{س}}$

في التمارين ٢٩ – ٣٢ أوجد قَ (س)

٢٩ . $ق (س) = لط | ٣ - ٢س |$

٣٠ . $ق (س) = لط | ٤ - ٥س^{٣} |$

٣١ . $ق (س) = لط | ١ - e^{-٢س} |^{٣}$

٠٣٢ $\quad$ د (س) = $\dfrac{١}{\text{لط} \left| ٢\text{س} - ١٥ \right|}$

٥ ـــ الاقترانات الاسية واللوغرتمية العامة :

يستنتج من (٨ – ١٧) انه اذا كان س اي عدد حقيقي كانت قيمة $e^{س}$ هي نفسها قيمة الاقتران الاسي الطبيعي سا س . وفي هذا البند سنعرف $أ^{س}$ حيث أ عدد حقيقي موجب . فما ذكرنا في البند ٣ نستنتج ان لط $e^{س}$ = س = س لط e فمن الطبيعي اذن ان نعرف $أ^{س}$ من خلال المعادلة :

(٨ – ٢٦) لط $أ^{س}$ = س لط أ

حيث أ > ٠ ، س اي عدد حقيقي .

ومن (٨ – ١٨) ينتج ان لط هـ = و اذا وفقط اذا كان هـ = $e^{و}$

فلنفرض ان هـ = $أ^{س}$ وان و = س لط أ

فالمعادلة (٨ – ٢٦) تكافيء

$أ^{س} = e^{س \text{ لط } أ}$

والتعريف التالي هو خلاصة هذه الحقائق :

(٨ – ٢٧) تعريف $أ^{س}$: اذا كان س اي عدد حقيقي وكان أ > ٠ كان

$أ^{س} = e^{س \text{ لط } أ}$.

والاقتران ق حيث ق (س) = $أ^{س}$ يسمى الاقتران الاسي للاساس أ

ويرمز له بالرمز سا أ فلكل عدد حقيقي س يكون : سا أ س = $أ^{س} = e^{س \text{ لط } أ}$

فاذا كان أ = e كان سا $_{e}$ س = $e^{س}$ = سا س . فينتج من

(٨ – ١٧) ان العلاقة بين سا$_{م}$ ، سا هي سا$_{م}$ س = e$^{\text{س لط م}}$ =
سا (س لط م) ولان سا موجب لكل قيم س فكذلك سا$_{م}$يكون موجبا ايضا . ولايجاد قيم تقريبية للاقتران سا$_{م}$يلزم عادة استعمال جداول لوغرتمية وأسية .

مثـال ١ : اعط قيمة تقريبية للمقدار ٥$^{\sqrt{٢٧}}$

الحـــل : باستعمال (٨ – ٢٧) حيث م = ٥ ، س = $\sqrt{٢٧}$ ينتج ان ٥$^{\sqrt{٢٧}}$ = e$^{\text{٢ لط ٥}}$
ومن الجدول ٣ نجد ان لط ٥ ≈ ١,٦ فيكون $\sqrt{٢٧}$ لط ٥ = ١,٤ (١,٦)
≈ ٢,٢

ثم من الجدول ٢ ينتج ان ٥$^{\sqrt{٢٧}}$ = e^{٢,٢} ≈ ٩

من (٨ – ٢٧) تنتج بسهولة قوانين الأسس ونستنتج ايضا أن الاقتران اللوغرتمي الطبيعي هو اقتران واحد لواحد . فمثلا اذا اردنا ان نثبت ان
م^{هـ} × م^{و} = م$^{هـ+و}$ لكل قيم هـ ، والحقيقية يكفي ان نثبت ان
لط م^{هـ} م^{و} = لط م$^{هـ+و}$. وهذا ما يتحقق بسهولة من (٨ – ١٠) و (٨ – ٢٦) كما يلي :

لط م^{هـ} م^{و} = لط م^{هـ} + لط م^{و}
= هـ لط م + و لط م
= (هـ + و) لط م
= لط م$^{هـ+و}$

اما القوانين م^{هـ} / م^{و} = م$^{هـ-و}$ ، (م^{هـ})^{و} = م$^{هـ و}$ ،
(م ب)^{هـ} = م^{هـ} ب^{هـ} فنترك امر البرهنة عليها للطالب .

واذا طبقنا (٨ – ٢٧) و (٨ – ٢٤) ينتج :
د$_{س}$ م^{س} = د$_{س}$ e$^{\text{س لط م}}$ = e$^{\text{س لط م}}$. د$_{س}$ (س لط م)
= e$^{\text{س لط م}}$. لط م

فمن (٨ – ٢٧) ينتج :

(٨ – ٢٨) $\frac{د}{د س}$ أ^{س} = أ^{س} لط أ

ويلاحظ انه اذا كانت أ = e تتحول هذه القاعدة الى (٨ – ١٩) واذا كانت أ > ١ كان لط أ > صفر فيكون $\frac{د}{د س}$ أ^{س} > . واذا كانت أ > ١ فمن (٤ – ١٨) نستنتج ان سـا يتزايد خلال الفترة (– ∞ . ∞) ولكن اذا كان ، < أ < ١ كان لط أ < ، وكان $\frac{د}{د س}$ أ^{س} < ، اي ان سـا يتناقص مع كل قيم س . وهذا يبرر ما ذكرناه في البند ١ . ومن ذلك ينتج ان بيان المعادلة ص = أ^{س} هو كالمبين بشكلي ٨ – ١ أ ، ب حسب كون أ > ١ او ، < أ < ١ على التوالي .

ويمكن ان نستعمل طريقة السلسلة لتوسيع (٨ – ٢٨) حتى تشمل أ$^{هـ(س)}$ حيث هـ عبارة قابلة للتفاضل فيكون :

(٨ – ٢٩) $\frac{د}{د س}$ أ$^{هـ(س)}$ = أ$^{هـ(س)}$. $\frac{د}{د س}$ هـ (س)

مثـال ٢ : أوجد صَ علما بان ص = (س^{٢} + ١)^{١٠} + ١٠س$^{٢+١}$

الحـــل : باستعمال قاعدة القوى (٣ – ٥١) والقاعدة (٨ – ٢٩) نحصل على :

صَ = ١٠ (س^{٢} + ١)^{٩} (٢ س) + ١٠س$^{٢+١}$ (٢ س) لط ١٠

= ٢٠ س [(س^{٢} + ١)^{٩} + ١٠س^{٢} لط ١٠]

ويمكن التحقق من الصيغة :

(٨ – ٣٠) $\int$ أ^{س} ء س = $\left(\frac{١}{\text{لط أ}}\right)$ أ^{س} + جـ

وذلك باثبات ان المكامل هو مشتقة العبارة التي في الطرف الايسر

مثـال ٣ : اوجد $\int$ ٣س^{٢} ء س

الحـــل : اذا جعلنا هـ = س^{٢} يكون ء هـ = ٢ س ء س فيمكن ان نكمل الحل كما يلي :

$$\int ٣س^{٢} \cdot س \, ء س = \frac{١}{٢} \int ٣س^{٢} \cdot (٢س) \, ء س$$

$$= \frac{١}{٢} \int ٣^{هـ} \cdot ء هـ$$

وباستعمال (٨ – ٣٠) على اعتبار ان م = ٣ وان المتغير هو هـ ينتج ان :

$$\int ٣س^{٢} \, س \, ء س = (\frac{١}{٢}) \left(\frac{١}{\text{لط } ٣} \right) ٣^{هـ} + جـ$$

$$= \left(\frac{١}{٢ \text{ لط } ٣} \right) ٣ س^{٢} + جـ$$

واذا كان م ≠ ١ كان سام اقتران واحد لواحد معكوسه هو لوم وهو الاقتران اللوغرتمي للاساس م فيكون

(٨ – ٣١) ص = لوم س اذا وفقط اذا كان س = م^ص

وهذا يتفق مع (٨ – ٢) التي حصلنا عليها بالبداهة . والعبارة لوم س تسمى عادة لوغرتم س للاساس م ، وعلى هذا تكون اللوغرتمات الطبيعية لوغرتمات للاساس e .

ويستطيع الطالب ان يثبت ان القواعد (٨ – ١٠) تصح مع كل قيم الاساس م .

ولكي نحصل على العلاقة بين لوم ولط لنفرض ان ص = لوم س اي ان س = م فاذا اخذنا لوغرتمي الطرفين للاساس e ينتج ان لط س = ص لط م

اي ان ص = لط س / لط م وهذا يثبت العلاقة :

$$(٨-٣٢)\quad لو_{م} س = \frac{لط\ س}{لط\ م}$$

فاذا فاضلنا طرفي (٨ – ٣٢) ينتج :

$$د_{س}\ لو_{م} س = \frac{١}{س\ لط\ م}$$

وطريقة السلسلة تفضي الى :

$$(٨-٣٤)\quad د_{س}\ لو_{م} |\ ه\ (س)\ | = \frac{١}{ق\ (س)\ لط م}\ د_{س}\ ه\ (س)$$

حيث ه قابل للاشتقاق ، ه (س) ≠ ٠ لكل قيم س

مثـال ٤ : اوجد ه (س) اذا كان ق (س) = $لو_{١٠} \sqrt[٣]{(٢س+٥)^{٢}}$

الحـــل : نبدأ باستعمال ما يطابق (٨ – ١٠) في اللوغرتمات لاي اساس علما بان $(٢س+٥)^{٢} = |٢س+٥|^{٢}$ ، فيكون :

$$ق\ (س) = \frac{١}{٣}\ لو_{١٠} |٢س+٥|^{٢}$$

$$= \frac{٢}{٣}\ لو_{١٠} |٢س+٥|$$

وباستعمال (٨ – ٣٤) ينتج : ه (س)

$$= (\frac{٢}{٣})\ (٢)\ \frac{١}{(٢س+٥)\ لط\ ١٠} = \frac{٤}{(٦س+١٥)\ لط\ ١٠}$$

وبما اننا قد اعطينا معاني للاسس اللانسبية فقد صار بامكاننا ان نناقش اقتران القوى العام ه المعرف بالصيغة ه (س) = $س^{جـ}$ حيث جـ أي عدد حقيقي . فاذا كان جـ لانسبيا نتج من التعريف ان مجال ق هو مجموعة الاعداد الحقيقية

الموجبة ، ومن (٨ – ٢٧) ينتج ان س^جـ = e^جـ لط س ونطبق (٨ – ٢٠) فينتج :

$$د_{س} \, س^{جـ} = e^{جـ \, لط \, س} \cdot د_{س} \, (جـ \, لط \, س)$$

$$= e^{جـ \, لط \, س} \cdot \frac{جـ}{س}$$

$$= س^{جـ} \left(\frac{جـ}{س} \right)$$

$$= جـ \, س^{جـ - ١}$$

وهذا يثبت ان قاعدة القوى تصح على الاسس اللانسبية كما تصح على الاسس النسبية. وبالمثل يمكن توسيع قاعدة قوى الاقترانات حتى تشمل الاسس اللانسبية .

مثـال ٥ : أوجد $د_{س}$ ص اذا كان ص = $س^{س}$ ، حيث س > ٠

الحـــل : لا يمكن ان نستعمل قاعدة القوى هنا لان الاس في $س^{س}$ متغير. وكذلك لا يمكن ان نستعمل (٨ – ٢٨) لان الاساس ليس عددا حقيقيا ثابتا . ولكن من (٨ – ٢٧) نستنتج ان $س^{س} = e^{س \, لط \, س}$ لكل س > ٠ فيكون

$$د_{س} \, س^{س} = د_{س} \, e^{س \, لط \, س} = e^{س \, لط \, س} \cdot د_{س} \, س \, لط \, س$$

$$= e^{س \, لط \, س} \left[س \left(\frac{١}{س} \right) + (١) \, لط \, س \right] =$$

$$س^{س} \, (١ + لط \, س)$$

وهنالك طريقة اخرى لحل هذه المسألة وهي بأخذ اللوغرتم الطبيعي لكل من الطرفين ثم مفاضلة الناتج باعتباره اقترانا ضمنيا ، كما يلي :

لط ص = س لط س

$$\frac{1}{ص} \, د_س \, ص = 1 + \text{لط } س$$

$$د_س \, ص = ص \, (1 + \text{لط } س)$$

$$= س^{س} \, (1 + \text{لط } س)$$

تمارين :

في التمارين ١ – ١٦ أوجد قَ (س) علما بان ق (س) كما هو مبين :

١. $٥^{٣س - ٤}$

٢. $٣^{٢ - س^{٢}}$

٣. $(س^{٢} + ١) \times ١٠^{١ / س}$

٤. $(١٠^{س} + ١٠^{- س})^{١٠}$

٥. $\sqrt[٧]{س^{٢} + ٩}$

٦. $س \, / \, (٦^{س} + س^{٦})$

٧. $\text{لو}_{١٠} \, (٣س^{٢} + ٢)^{٥}$

٨. $\text{لو}_{١٠} \sqrt{س^{٢} + ١}$

٩. $\text{لو}_{٥} \left| \frac{٦س + ٤}{٢س - ٣} \right|$

١٠. $\text{لو}_{١٠} \left| \frac{١ - س^{٢}}{٢ - ٥س^{٣}} \right|$

١١ لو$_{١٠}$ لط س

١٢. لط لو$_{١٠}$ س

١٣. س^{e} + $e^{س}$

١٤. س × $\pi^{س}$

١٥. (س + ١)^{س}

١٦. س س^{٢} + ٤

أوجد قيمة كل مما في ١٧ – ٢٢ :

١٧. $\int_{١}^{٢}$ ٥ – ٢س د س

١٨. $\int_{-١}^{١}$ ٢$^{٣س - ١}$ د س

١٩. $\int$ س^{٢} × ٢$^{س^{٣}}$ د س

٢٠. $\int \frac{\text{لو}_{١٠} \sqrt{س}}{\sqrt{س}}$ د س

٢١. $\int \frac{١}{\text{س لو}_{١٠} \text{ س}}$ د س

٢٢. $\int \frac{١٠^{س} + ١٠^{-س}}{١٠^{س} - ١٠^{-س}}$ د س

٢٣. أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات ص = ٢ س ، س + ص = ١ ، س = ١ .

٢٤ ـ دارت حول محور س المنطقة الواقعة تحت منحنى ص = ٣ $^{-س}$ ، من س = ١ الى س = ٢ أوجد حجم المجسم الذي ينتج .

٢٥ ـ أوجد معادلتي المماس والعمود لمنحنى المعادلة ص = س × ٣ ^{س} في النقطة (١ ، ٣) .

٢٦ ـ أوجد الاحداثي السيني للنقطة على منحنى ص = ٢ ^{س} حيث يكون المماس موازيا للمستقيم الذي معادلته ٢ص − ٨س + ٣ = ٠

٢٧ اثبت ان قوانين (٨ − ١٠) تصح مع اللوغرتمات لاي اساس .

٢٨ ـ اثبت القاعدة (٨ − ٣٤) .

٢٩ ـ ارسم مخطط كل من ص = ١٠ ^{س} ، ص = لو $_{١٠}$ س بالنسة الى مستو احداثي واحد . ما العلاقة بين المنحنيين ؟

٣٠ ـ اعد التمرين ٢٩ بالنسبة الى ص = ٢ ^{س} ، ص = لو $_{٢}$ س .

٦ — قوانين التكاثر والتلاشي : (growth and decay)

لنفرض ان مادة ما تتغير بمرور الزمن وان كميتها في اللحظة ن تساوي بالتقريب ك (ن) حيث ك اقتران قابل للاشتقاق . فهنا تعتبر المشتقة كَ (ن) مقياسا لسرعة تغير ك (ن) مع الزمن . وفي كثير من الحالات التطبيقية نجد سرعة التغير في اية لحظة تتناسب طرديا مع كمية المادة الموجودة في تلك اللحظة . فمقدار البكتيريا في كثير من حقول التجارب تكون على هذه الشاكلة فاذا كان عددها قليلا كانت سرعة تزايدها صغيرة ، واذا تزايد العدد ترتفع سرعة التزايد . وفي كثير من الحالات يكون ارتفاع سرعة التزايد كبيرا جدا حتى لنرى هنا في عالم البكتيريا ما يشبه التفجر السكاني . وان تلاشي المواد المشعة يخضع لمثل هذا القانون اذ كلما تناقصت كمية المادة تتناقص سرعة انحلالها اي سرعة الاشعاع . واليك مثالا اخر : المكثف الكهربائي عندما يتأتى له تفريغ شحنته . فاذا كانت شحنته كبيرة في البدء تكون سرعة التفريغ كبيرة وكلما تناقصت الشحنة تنخفض هذه السرعة . وهناك امثلة عديدة على هذه الظاهرة وكلها حالات خاصة من المبدأ العام الذي نصفه فيما يلي :

لنفرض ان ك اقتران قابل للاشتقاق بالنسبة الى ن ولنفرض ان سرعة تغيرك بالنسبة الى ن تتناسب طرديا مع ك (ن). وهذا ما تعبر عنه المعادلة التفاضلية

$$ك' (ن) = جـ ، ك (ن)$$

حيث جـ عدد ثابت. وعلى اعتبار ان ك (ن) ≠ صفرا، تحول المعادلة السابقة الى

$$\frac{ك' (ن)}{ك (ن)} = جـ$$

فاذا كانت الفترة [٠ ، س] في مجال $\frac{ك'}{ك}$ يكون

$$\int_{.}^{س} \frac{ك' (ن)}{ك (ن)} \times ء ن = \int_{.}^{س} جـ ء ن$$

وبتطبيق نظرية التفاضل والتكامل الاساسية (٥ – ٣١) ينتج

$$\text{لط ك (ن)} \Big]_{.}^{س} = جـ ن \Big]_{.}^{س}$$

وهذا يمكن ان يكتب بأي من الاشكال التالية :

$$\text{لط ك (س)} - \text{لط ك (٠)} = جـ س$$

$$\text{لط [ك (س) / ك (٠)]} = جـ س$$

$$ك (س) / ك (٠) = e^{جـ س}$$

$$\text{أو } ك (س) = ك (٠) e^{جـ س}$$

واذا استعملنا ن بدل س تصبح هذه المعادلة بالصيغة :

$$(٨ – ٣٥) \quad ك (ن) = ك (٠) e^{جـ س}$$

فقد برهنا على انه اذا كانت سرعة تغير ك (ن) تتناسب طرديا مع ك (ن) فعندئذ يمكن ان نعبر عن ك بدلالة اقتران اسي. فاذا كانت ك تتزايد مع ن كان القانون (٨ – ٣٥) هو قانون نمو ك اي تكاثرها. واذا كانت ك تتناقص مع ن

كان القانون (٨ – ٣٥) هو قانون تلاشي ك اي فنائها . ويسمى العدد ك (٠) بالقيمة الابتدائية للمتغير ك .

وقد نحتاج ان نعبر عن ك بصيغة اقتران أسي لأساس غير e . وهذا يجري حسب القاعدة :

(٨ – ٣٦) ك (ن) = ك (٠) م$^{ب\ ن}$ حيث ب = جـ لو$_{م}$ e

مثال ١ : تزايد عدد البكتيريا في احد احواض الاختبار من ٦٠٠ الى ١٨٠٠ في مدة ساعتين و ٣٠ دقيقة . فعلى فرض ان القانون الاسي لسرعة التكاثر يصح هنا أوجد صيغة تعطي عدد البكتيريا في هذا الحوض في اللحظة ن . كم يكون هذا العدد بعد ٥ ساعات ؟

الحـــل : كان ن = ٠ عندما كان العدد ٦٠٠ ، فليكن ك (ن) هو العدد بعد ن ساعات فيكون ك (٠) = ٦٠٠ ، ك (٥ / ٢) = ١٨٠٠ . ولان العدد قد تضاعف ثلاث مرات في الفترة المعطاة ، فلنجعل م = ٣ في (٨ – ٣٦) فيكون

ك (ن) = ٦٠٠ (٣)$^{ب\ ن}$.

وبوضع ن = ٥ / ٢ ينتج ان ١٨٠٠ = ٦٠٠ (٣)$^{٥\ ب\ /\ ٢}$

اي ان ٣ = ٣$^{٥\ ب\ /\ ٢}$ فيكون ٥ ب/٢ = ١ اي ان ب = ٢ / ٥

فاذن :

(٨ – ٣٧) ك (ن) = ٦٠٠ (٣)$^{٢\ ن\ /\ ٥}$

فبعد ٥ ساعات يكون ك (٥) = ٦٠٠ (٣)^{٢} = ٥٤٠٠

وفي هذا المثال يمكن استعمال اي عدد ليكون الاساس م . فاذا استعملنا الاساس e ينتج من (٨ – ٣٥)

(٨ – ٣٨) ك (ن) = ٦٠٠ e$^{جـ\ ن}$

فاذا جعلنا ن = ٥ / ٢ ينتج ان ١٨٠٠ = ٦٠٠ e$^{٥\ جـ\ /\ ٢}$ فينتج ان ٥ جـ / ٢ = لط ٣ اي ان جـ = $\frac{٢}{٥}$ لط ٣ . فنعوض هذا في (٨ – ٣٨) فينتج :

$$ك(ن) = ٦٠٠ \, e^{(\frac{٢}{٥} \text{ لط } ٣) \, ن} = ٦٠٠ \, (e^{\text{ لط } ٣})^{\frac{٢}{٥} ن}$$

ولان $e^{\text{ لط } ٣} = ٣$ تنتج صيغة تطابق (٨ – ٣٧)

مثـال ٢ : نصف عمر الراديوم ١٦٠٠ سنة تقريبا ومعنى هذا انه اذا اعطينا اي كمية من الراديوم فان نصفها يتلاشى بالاشعاع بعد ١٦٠٠ سنة . أوجد صيغة لكمية الراديوم ك (ن) التي تبقى بعد ن سنة من ٥٠ ملغرام من الراديوم الصافي . بعد كم سنة يتبقى من هذه الكمية ٢٠ ملغرام ؟

الحـــل : حسب الفرض يكون ك (٠) = ٥٠ ، ك (١٦٠٠) = ٢٥ ، ولان سرعة التناقص تشتمل على العامل ١ / ٢ فقد يكون من المناسب ان نجعل $\text{ لط } ب = \frac{١}{٢}$ وذلك في التعويض في (٨ – ٣٦) ، فيكون

(٨ – ٣٩) $ك(ن) = ٥٠ \, (\frac{١}{٢})^{\text{جـ } ن}$

فعندما يكون ن = ١٦٠٠ يكون $٢٥ = ٥٠ \, (\frac{١}{٢})^{١٦٠٠ \text{ جـ}}$ اي ان

$\frac{١}{٢} = (\frac{١}{٢})^{١٦٠٠ \text{ جـ}}$ فيكون ١٦٠٠ جـ = ١ اي ان $\text{جـ} = ١ / ١٦٠٠$.

نعوض هذه القيمة في (٨ – ٣٩) فينتج $ك(ن) = ٥٠ \, (\frac{١}{٢})^{ن / ١٦٠٠}$

ولان $١ / ٢ = ٢^{-١}$ ينتج $ك(ن) = ٥٠ \, (٢)^{-ن / ١٦٠٠}$

ولايجاد قيمة ن عندما يكون ك (ن) = ٢٠ يجب ان نحل المعادلة

$٢٠ = ٥٠ \, (٢)^{-ن / ١٦٠٠}$ اي ان $٢^{-ن / ١٦٠٠} = ٢ / ٥$

نأخذ اللوغرتمين الطبيعيين للطرفين فيكون (ن / ١٦٠٠) لط ٢ = لط ٥ / ٢

فيكون ن = ١٦٠٠ (لط ٥ / ٢) / لط ٢

فعلى وجه التقريب نجد (من الجدول ٣) ان ن ≈ ١٦٠٠ (٠,٩١٦) / ٠,٦٩٣ ≈ ٢١١٥ سنة .

مثـال ٣ : حسب قانون نيوتن في التبريد تتناسب سرعة تبريد الاجسام تناسبا طرديا مع الفرق في درجة الحرارة بين الجسم وما يحيط به . فاذا انخفضت درجة حرارة جسم من ١٢٥° الى ١٠٠° في نصف ساعة عندما كانت درجة حرارة الهواء الذي يحيط به ٧٥° فكم تصير درجة حرارته بعد نصف ساعة اخرى ؟

الحـــل : اذا كانت ص هي درجة حرارة الجسم بعد ن ساعات من التبريد ينتج من قانون نيوتن ان

$$\frac{د\ ص}{د\ ن} = جـ\ (ص - ٧٥)$$ حيث جـ عدد ثابت

وهذا نعبر عنه بدلالة التفاضلات على النحو :

$$\frac{د\ ص}{ص - ٧٥} = جـ\ د\ ن$$

والتكامل غير المحدد يفضي الى لط (ص − ٧٥) = جـ ن + ب حيث ب عدد ثابت وهذا يكافيء ص − ٧٥ = $e^{ب}$ $e^{جـ\ ن}$

فاذا اعتبرنا $e^{ب}$ = ث يمكن كتابة هذه المعادلة بالصيغة :

ص = ث $e^{جـ\ ن}$ + ٧٥

ولان ص = ١٢٥ عندما تكون ن = ٠ يكون ١٢٥ = ث + ٧٥ اي ان ث = ٥٠

فيكون ص = ٥٠ $e^{جـ\ ن}$ + ٧٥

ولان ص = ١٠٠ عندما يكون ن = ١ / ٢ ساعة يكون

١٠٠ = ٥٠ $e^{جـ/٢}$ + ٧٥ اي ان $e^{جـ/٢}$ = ٢٥ / ٥٠ = ١ / ٢

وهذا يعني ان جـ = ٢ لط (١ / ٢) = لط (١ / ٤)

فتكون درجة الحرارة ص بعد ن ساعات هي ص = ٥٠ $e^{\frac{١}{٤}\ ن\ لط}$ + ٧٥

فاذا كان ن = ١ يكون ص = ٥٠ $e^{\text{لط}\frac{١}{٤}}$ + ٧٥ =

٥٠ × $\frac{١}{٤}$ + ٧٥ = ٨٧,٥

وفي كثير من الحالات يكون النمو والتكاثر اكثر استقرارا مما يبدو من(٨ – ٣٥) ومن الامثلة على ذلك مسائل السكان والمبيعات وقيم الممتلكات .

وفي علم البيولوجيا يستعمل احيانا الاقتران ج للدلالة على مقدار كمية ما في الزمن ن فنكتب :

(٨ – ٤٠) ج (ن) = ك $e^{-ا e^{-ب ن}}$

حيث ك ، ا ، ب ثوابت

وهذا الاقتران ج هو دائما موجب ومتزايد يتخذ نهاية ما عندما يتزايد ن بلا نهاية . ويسمى منحنى ج بمنحنى غمبيرز للنمو (Gompertz)

مثال ٤ : ناقش منحنى ج المبين في (٨ – ٤٠) ثم ضع تخطيطا له .

الحل : نلاحظ اولا ان المقطع الصادي ج (٠) = ك $e^{-ا}$ وان ج (ن) > ٠ لجميع قيم ن وبالمفاضلة ينتج :

أن جَ (ن) = ك $e^{-ا}$ $e^{-ب ن}$ $د_ن$ (– ا $e^{-ب ن}$)

= ا ب ك $e^{-ب ن - ا e^{-ب ن}}$

وان جً (ن) = ا ب ك $e^{-ب ن - ا e^{-ب ن}}$

$د_ن$ (– ب ن – ا $e^{-ب ن}$)

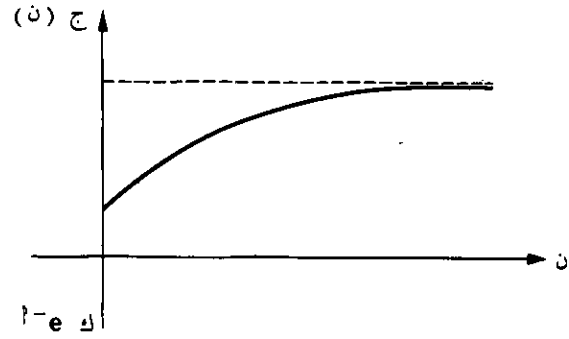
= ا ب ك (– ب + ا ب $e^{-ب ن}$) $e^{-ب ن - ا e^{-ب ن}}$

ولان جَ (ن) > ٠ لكل قيم ن يكون ج متزايدا في الفترة [٠ ، ∞] والمشتقة

الثانية تكون صفرا اذا كان – ب + ﻫ ب $e^{-ب ن}$ = ٠ أو اذا كان ﻫ $^{ب ن}$ = ﻫ وبحل هذه المعادلة نجد ان ن = (١ / ب) لط ﻫ . وهذه نقطة حاسمة للاقتران جَ . فلندع للطالب ان يثبت انه في هذا الوقت تكون سرعة النموج في نهاية عظمى قيمتها ب ك / e وندع له ايضا ان يثبت ان

$$\text{نهـا}_{ن \to \infty} \; جَ (ن) = ٠ \quad \text{وان} \quad \text{نهـا}_{ن \to \infty} \; ج (ن) = ك$$

فاذا تزايدت ن دون حصر تقترب سرعة النمو من الصفر ويكون لمنحنى ج محور اقتراب افقي ص = ك . والمنحنى النموذجي لهذا الاقتران يتبين بالشكل ٨ – ٩.



الشكل ٨ — ٩

تمارين :

١ . ارتفع عدد البكتيريا في حوض ما من ٥٠٠٠ الى ١٥٠٠٠ في ١٠ ساعات . فعلى فرض ان سرعة التكاثر تتناسب مع عدد البكتيريا . ضع قانونا لعدد البكتيريا بعد ن ساعات . ما عددها بعد ٢٠ ساعة ؟ متى يصل هذا العدد الى ٥٠٠٠٠ ؟

٢ . يبلغ نصف عمر نظائر البولونيوم المشعة حوالي ١٤٠ يوما . فاذا كان وزن قطعة من البولونيوم ٢٠ ملغرام فكم يبقى منها بعد ن ايام ؟ كم يبقى منها تقريبا بعد ١٤ يوما ؟

٣ . اذا كانت درجة الحرارة ثابتة فان سرعة تغير الضغط الجوي ص تتناسب مع

الارتفاع ع . فاذا كان ص يساوي ٣٠ على سطح البحر ويساوي ٢٩ على ارتفاع ١٠٠٠ قدم فكم يكون الضغط على ارتفاع ٥٠٠٠ قدم ؟

٤ . يتزايد عدد سكان احدى المدن بمعدل ٥ في المائة في السنة فاذا كان هذا العدد الان ٥٠٠,٠٠٠ فكم يكون بعد ١٠ سنوات ؟

٥ . يقدر عادة انه يلزم ربع فدان من الارض لتوفير الغذاء الكافي للفرد الواحد ، ويقدر ايضا ان الارض الصالحة للزراعة تبلغ ١٠ بليون فدان ولذا ففي خيرات الارض متسع لاربعين بليونا من البشر اذا لم يتوافر مصدر اخر للقوت غير ما تنتجه الارض . وقد كان عدد سكان الارض في اول سنة ١٩٧٠ حوالي ٣,٦ بليون . فعلى فرض ان هذا العدد يتزايد بنسبة ٢ في المائة في السنة فمتى يصل الى اعلى ما تحتمله الثروة الارضية ؟

٦ . انخفضت درجة حرارة جسم من ١٨٠° الى ١٥٠° في مدة ٢٠ دقيقة عندما كانت درجة حرارة الهواء المحيط به ٦٠° . استعمل قانون نيوتن (انظر المثال ٣) لايجاد درجة حرارة الجسم بالتقريب بعد ساعة . متى تبلغ درجة حرارته ١٠٠° ؟

٧ . كانت قراءة الثرمومتر في الهواء الطلق ٤٠° ثم ادخل هذا الثرمومتر الى غرفة درجة حرارتها ٧٠° وبعد خمس دقائق كانت قراءته ٦٠° . متى يسجل هذا الثرمومتر ٦٥° (انظر المثال ٣) .

٨ . تتناسب سرعة ذوبان الملح في الماء مع كمية الملح المتبقية . فاذا وضع ١٠ باوند من الملح في وعاء فيه ماء فذاب منها ٤ باوند في ٢٠ دقيقة فكم دقيقة اخرى تلزم لذوبان ٢ باوند ؟

٩ . نقابل في دراسة الدورات الكهربائية المعادلة :

$$ق = مـ ت + ل \frac{ى ت}{ى ن}$$

حيث تدل ق على القوة الالكترومغناطيسية وتدل مـ على المقاومة وتدل ل على المانعة الذاتية وتدل ت على التيار الجاري في الزمن ن . فاذا انقطعت القوة ق عندما كان ن = ٠ وكان ت عندئذ يساوي $ت_{.}$ فاثبت ان

$$ت = ت_{.} e^{-مـ ن / ل}$$

١٠. تتناسب سرعة انحلال السكر مع كمية السكر المتبقي . فاذا احتوى محلول على ك باوند من السكر وكانت ص تدل على كمية السكر التي تنحل في مدة ن من الزمن فعبر عن ص بدلالة ن .

١١. اذا اودع مبلغ من المال ل بفائدة مقدارها ١٠٠ر في المائة في السنة بربح مركب يتكرر م مرات في السنة فانه يبلغ في ن سنوات ل $\left(1 + \frac{ر}{م}\right)^{م\,ن}$

فاذا اعتبرنا م عددا حقيقيا وجعلناه يتزايد بلا حصر فعندها نقول ان الربح متكرر تكرارا متصلا او باستمرار،بين استنادا الى (٨ – ٢١) ان المبلغ في هذه الحالة بعد ن سنوات يبلغ ل $e^{ر\,ن}$.

١٢. استعمل نتيجة التمرين ١١ لايجاد المبلغ بعد سنة اذا كان ما اودع هو ١٠٠٠ دينار بفائدة مقدارها ١٠ في المائة تتكرر كما يلي :

أ) شهريا ب) يوميا جـ) باستمرار

١٣. في التمرين ٤ بين ما يلي :

أ) القيمة العظمى للاقتران جَ هي ب ك / e

ب) $\lim_{ن \to \infty}$ جَ (ن) = ٠

جـ) $\lim_{ن \to \infty}$ ج (ن) = ك

١٤. ضع تخطيطا للاقتران (٨ – ٤٠) على اعتبار ان ك = ١٠ ، أ = ١ / ٢ ، ب = ١.

١٥. في احد قوانين التكاثر تعطى سرعة التكاثر دَ (ن) في الزمن ن للمقدار د (ن) بالصيغة

دَ (ن) = أ د (ن) [ب – د (ن)]

حيث أ ، ب ثابتان ، د (٠) = جـ . بين ما يلي :

$$د\,(ن) = \frac{ب\ جـ}{جـ + (ب - جـ)\,e^{-أ\,ب\,ن}}$$

١٦ـ ناقش منحنى اقتران التكاثر المبين بالصيغة ق (س) = أ + ب (١ - $e^{-جـ س}$)
حيث أ ، ب ، جـ اعداد ثابتة موجبة . ضع تخطيطا لهذا المنحنى .

٧ ــ مشتقات الاقترانات المتعاكسة :

عرفنا الاقترانات المتعاكسة في البند ٦ من الفصل الاول حيث قدمنا طرقا لايجاد $ه^{-1}$ (س) اذا اعطي ه (س) بعبارة جبرية بسيطة ، وهناك ذكرنا ان ه ، $ه^{-1}$ كل منهما انعكاس للآخر في الخط ص = س . وفي مطلع هذا الفصل بينا ان اللوغرتم الطبيعي والاقتران الاسي متعاكسان . اما معكوسات الاقترانات المثلثية فسندرسها في الفصل ٩ . وفي البند الحالي سنثبت نظريات عامة تسري على كل الاقترانات المتعاكسة بهدف ايجاد مشتقاتها .

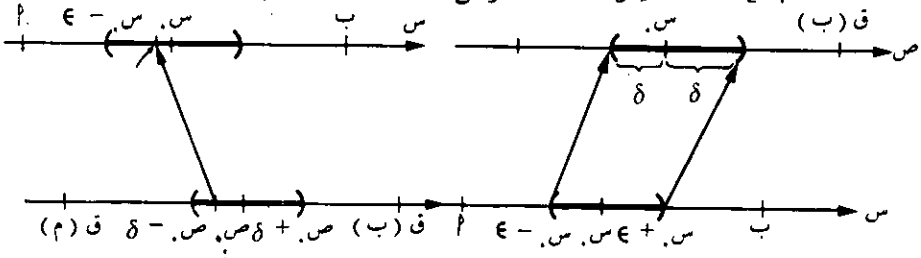
(٨ – ٤١) نظرية : اذا كان الاقتران ه متصلا ومتزايدا في الفترة [أ ، ب] كان لهذا الاقتران معاكس $ه^{-1}$ متصل ومتزايد في الفترة [ه (أ) ، ه (ب)] .

البرهـان : لكي نثبت وجود $ه^{-1}$ يكفي ان نثبت ان ه اقتران واحد لواحد في المجال [ه (أ) ، ه (ب)] (انظر (١ – ٤٢)) . انظر العددين $س_1$ ، $س_2$ في الفترة [أ ، ب] . فاذا كان $س_1 < س_2$ فلان ه متزايد يكون ه($س_1$)< ه ($س_2$) ، وكذلك اذا كان $س_2 < س_1$ يكون ه ($س_2$) < ه($س_1$) فاذن اذا كان $س_1 \neq س_2$ يكون ه ($س_1$) ≠ ه ($س_2$) وهذا يعني ان ه هو اقتران واحد لواحد . ومن نظرية القيم المتوسطة (٢ – ٣٨) نستنتج ان ه يتخذ كل قيمة بين ه (أ) ، ه (ب) . ولذا فمداه هو [ه (أ) ، ه (ب)] . فالاقتران المعاكس $ه^{-1}$ موجود ومجاله هو [ه (أ) ، ه (ب)] ومداه [أ ، ب] . ولأثبات ان $ه^{-1}$ متزايد يجب ان نثبت انه اذا كان $ى_1 < ى_2$ في [ه (أ) ، ه (ب)] يكون ه ($ى_1$)< ه ($ى_2$) في [أ ، ب] . وسنعطي برهانا غير مباشر على ذلك :
افرض ان $ه^{-1}$ ($ى_2$) ≯ $ه^{-1}$ ($ى_1$) . فلان ه متزايد يكون ه ($ه^{-1}$ ($ى_2$) ≯ ه ($ه^{-1}$ ($ى_1$)) فينتج من (١ – ٢٣) ان $ى_2 \not> ى_1$ وهذا يناقض ما فرضناه في البدء . فاذن $ه^{-1}$ ($ى_1$) < $ه^{-1}$ ($ى_2$) .

يبقى ان نثبت ان ق متصل في الفترة [ق (أ) ، ق (ب)] فلنكتب ص = ق (س) اذا وفقط اذا كان س = ق$^{-1}$ (ص) . فاذا كان ص$_0$ في الفترة المفتوحة (ق (أ) ، ق (ب)) فليكن س$_0$ عددا في الفترة (أ ، ب) بحيث يكون ص$_0$ = ق (س$_0$) اي س$_0$ = ق$^{-1}$ (ص$_0$) .

$$\text{نهـــا}_{\text{ص} \to \text{ص}_0} \quad \text{ق}^{-1}\,(\text{ص}) = \text{ق}^{-1}\,(\text{ص}_0) = \text{س}_0 \qquad (٨-٤٢)$$

ومن المفيد ان نعطي تمثيلا هندسيا للاقتران ومعكوسه كما تقدم في الفصل الاول . ففي هذه الحالة يمثل المجال (أ ، ب) للاقتران بنقط على محور س ويمثل المجال [ق (أ) ، ق (ب)] بنقط على محور ص ، ثم تخرج سهام من محور الى الاخر لربط قيم الاقترانات . فلكي تثبت (٨ – ٤٢) خذ اي فترة (س$_0$ – ε ، س$_0$ + ε) حيث ε > ٠ فيكفي ان نجد فترة (ص$_0$ – δ ، ص$_0$ + δ) من النمط الذي يظهر مخططه في الشكل ٨ – ١٠ (أ) بحيث كلما كان ص في (ص$_0$ – δ ص$_0$ + δ) يكون ق$^{-1}$ (ص) في (س$_0$ – ε ، س$_0$ + ε) فلنفرض ان س$_0$ – ε ، س$_0$ + ε في [أ ، ب] اذ لا يحول هذا الفرض الحالة العامة الى حالة خاصة .



(أ) الشكل ٨ — ١٠ (ب)

فكما يظهر من ٨ – ١٠ ب ليكن δ$_1$ = ص$_0$ – ق (س$_0$ – ε) ، δ$_2$ = ق (س$_0$ + ε) – ص ، فلان ق يعطي تناظر واحد لواحد بين الاعداد في (س$_0$ – ε ، س$_0$ + ε) وفي (ص$_0$ – δ ، ص + δ) فكذلك ق يعطي هذا التناظر ، اي ان الاعداد في (ص – δ . ص + δ$_2$) تنعكس في ق$^{-1}$ على (س$_0$ – ε ، س$_0$ + ε) . من ذلك ينتج انه اذا كانت δ هي اقل القيمتين δ$_1$ ، δ$_2$ فكلما كانت ص في (ص$_0$ – δ ، ص$_0$ + δ) تكون ق$^{-1}$ في (س$_0$ – ε ، س$_0$ + ε) وهذا يثبت ان ق$^{-1}$ متصل في الفترة المفتوحة (ق (أ) ، ق (ب))

اما اتصاله في نقطتي الطرفين ه (أ) ، ه (ب) فيمكن اثباته بطريقة مماثلة مع استعمال فكرة النهاية من طرف واحد .

واليك نتيجة اخرى نغفل برهانها لانه مماثل للبرهان السابق :

(٨ – ٤٣) نظرية : اذا كان الاقتران ه متصلا ومتناقصا في الفترة [أ ، ب] فان له اقترانا معاكسا متصلا ومتناقصا في الفترة [ه (أ) ، ه (ب)]

مثال ١ : حقق (٨ – ٤١) على فرض ان ه (س) = س^{٢} – ٣ في الفترة [٠ ، ٦]

الحل : بما ان ه اقتران حدودي فهو متصل في الفترة [٠ ، ٦] ولان هَ (س) = ٢ س فان هَ (س) > ٠ لكل س في [٠ ، ٦] ، ولذا فان ه متصل في هذه الفترة .

وقد بينا في المثال ٢ في البند ٦ من الفصل الاول أن ق$^{-١}$ يعطي بالصيغة ق$^{-١}$ (س) = $\sqrt{\text{س} + ٣}$ حيث س ≥ – ٣ . في المثال الحالي يكون مجال ق$^{-١}$ هو [ق (٠) ، ق (٦) اي [– ٣ ، ٣٣] . ولان $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \sqrt{\text{س} + ٣} = \sqrt{\text{أ} + ٣}$

لكل أ في [– ٣ ، ٣٣] يكون ق متصلا في هذه الفترة وهو ايضا متصل عند – ٣ .

ولان المشتقة $\frac{د}{د\text{س}}$ ه$^{-١}$ (س) = ١ / ٢$\sqrt{\text{س} + ٣}$ فهي موجبة في (– ٣ ، ٣٣)

واذن فان ه$^{-١}$ متزايد في [– ٣ ، ٣٣]

والنظرية التالية تعطينا طريقة لايجاد مشتقة الاقتران المعاكس

(٨ – ٤٤) اذا كان ه اقترانا قابلا للاشتقاق وله اقتران معاكس ك واذا كان ه (ك (جـ)) ≠ صفرا يكون ك قابلا للاشتقاق عند جـ ويكون

$$\text{كَ} (\text{جـ}) = \frac{١}{\text{قَ} (\text{ك} (\text{جـ}))}$$

البرهـــان : نفاضل ك باستعمال الصيغة (٣ - ١١) فينتج :

$$\text{كَ}(\text{جـ}) \quad \text{نهـــا}_{\text{س} \to \text{جـ}} \quad \frac{\text{ك}(\text{س}) - \text{ك}(\text{جـ})}{\text{س} - \text{جـ}}$$

فاذا عرفنا اقترانا ما ف له مجال ق حيث

$$\text{ف}(\text{ع}) = \begin{cases} \dfrac{\text{ع} - \text{ك}(\text{جـ})}{\text{ن}(\text{ع}) - \text{ن}(\text{ك}(\text{جـ}))} & \text{لكل ع} \neq \text{ك}(\text{جـ}) \\ \dfrac{1}{\text{ن}'(\text{ك}(\text{جـ}))} & ، \text{ع} = \text{ك}(\text{جـ}) \end{cases}$$

وعندها يكون $\text{نهـــا}_{\text{ع} \to \text{ك}(\text{جـ})} \text{ ف}(\text{ع})$

$$= \text{نهـــا}_{\text{ع} \to \text{ك}(\text{جـ})} \frac{\text{ع} - \text{ك}(\text{جـ})}{\text{ن}(\text{ع}) - \text{ن}(\text{ك}(\text{جـ}))}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{ك}(\text{جـ}))}{\text{ع} - \text{ك}(\text{جـ})}}$$

$$\frac{1}{\text{قَ}(\text{ك}(\text{جـ}))}$$

$$= \text{ف}(\text{ك}(\text{جـ}))$$

واذن فان ف متصل عند ك (جـ) . ولان ك متصل عند جـ ينتج من (٢ – ٣٤) ان

$$(٨-٤٥) \qquad \text{نهـا}_{س \to جـ} \; ف\,(ك\,(س)) = ف\,(ك\,(جـ))$$

$$= \frac{١}{ه'\,(ك\,(جـ))}$$

ولكن من تعريف ف ولان ك هو معكوس الاقتران ق نستنتج ان

$$ف\,(ك\,(س)) = \frac{ك\,(س) - ك\,(جـ)}{ه\,(ك\,(س)) - ه\,(ك\,(جـ))}$$

$$= \frac{ك\,(س) - ك\,(جـ)}{س - جـ}$$

وبالتعويض في (٨ – ٤٥) ينتج

$$\text{نهـا}_{س \to جـ} \frac{ك\,(س) - ك\,(جـ)}{س - جـ} = \frac{١}{ه'\,(ك\,(جـ))}$$

وهذا هو المطلوب اثباته .

ومن (٨ – ٤٤) اذا كان ف الاقتران المعاكس للاقتران ه القابل للاشتقاق فان

$$(٨-٤٦) \; ف'\,(س) = \frac{١}{ه'\,(ف\,(س))} \text{ اذا كان } ه'\,(ف\,(س)) \neq \text{صفرا}$$

مثـال ٢ : استعمل (٨ – ٤٦) لاثبات ان $د_{س}\, e^{س} = e^{س}$ علما بان سا هو معكوس لط

الحـــل : اذا كان ق (س) = لط س ، ك (س) = $e^{س}$ يكون ه َ (س) = ١ / س ، قَ (ك (س)) = قَ ($e^{س}$) = ١ / $e^{س}$. فمن (٨ – ٤٦) ينتج ان كَ (س) = ١ / (١ / $e^{س}$) = $e^{س}$.

مثـال ٣ : اذا كان ق (س) = $س^{٣}$ + ٢ س – ١ فأثبت ان ه له اقتران معاكس ف ، وأوجد معادلة المماس لمنحنى ف في النقطة ن (٢ ، ١) .

الحـــل : لأن ق متصل ، ه َ (س) = ٣ $س^{٢}$ + ٢ > ٠ لكل س نستنتج من (٨ – ٤١) ان ق له اقتران معاكس ، ف ولأن ق (١) = ٢ ينتج ف (٢) = ١ ، واذن فالنقطة ن (٢ ، ١) تقع على منحنى ف . ونجد ميل هذا المماس باستعمال (٨ – ٤٦) كما يلي :

$$ف َ (٢) = \frac{١}{قَ (ف (٢))} = \frac{١}{قَ (١)} = \frac{١}{٥}$$

وهناك طريقة سهلة لتذكر (٨ – ٤٦) اذا عرف الاقتران ق بدلالة معادلة من النوع ص = ق (س) فاذا كان ف هو معكوس ق يكون ف (ص) = ف (ق (س)) = س . فمن (٨ – ٤٦) ينتج :

$$(٨-٤٧)\quad ف َ (ص) = \frac{١}{قَ (ف (ص))} = \frac{١}{قَ (س)}$$

وبدلالة الرموز التفاضلية يكون

$$(٨-٤٨)\quad \frac{د س}{د ص} = \frac{١}{(د ص / د س)}$$

من هذا يبدو ان مشتقة الاقتران المعاكس ف هي مقلوب مشتقة الاقتران ق . الا ان ايا من (٨ – ٤٧) او (٨ – ٤٨) يعوق استعمالها ان التفاضل ليس

بالنسبة الى المتغير الرئيسي للاقتران المعاكس . وكمثل على ذلك نرجع الى المثال ٣ فنجعل ص = س^{٣} + ٢ س − ١ وليكن س = ف (ص) ، فينتج من (٨ − ٤٧) ان

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ص}} = \frac{١}{٣\text{س}^{٢} + ٢}$$

$$\text{اي ان فَ (ص)} = \frac{١}{٣\text{س}^{٢} + ٢} = \frac{١}{٣\ (\text{ف (ص)})^{٢} + ٢}$$

$$\text{وهذا يمكن ان يكتب فَ (ص)} = \frac{١}{٣\ (\text{ف (ص)})^{٢} + ٢}$$

فاذن لكي نجد فَ (س) يلزم ان نعرف ف (س) ، كما هو الحال في (٨ − ٤٦)

وغني عن البيان ان ليس لكل اقتران معكوس . واليك المثال التالي :

مثال ٤ : اذا كان ه (س) = س^{٢} لكل قيم س فاثبت ان ه ليس له معكوس .

الحل : نلاحظ ان ق ليس واحدا لواحد لان ق (− ١) مثلا = ق (١) ولذا فليس للاقتران ق اقتران معاكس اذ لو كان ق موجودا للزم أن يكون

ق$^{-١}$ (ق (− ١)) = ق$^{-١}$ (ق (١))

اي ان − ١ = ١ وهذا بالطبع خطأ .

تمارين :

في التمارين ١ − ١٠ اثبت ان الاقتران ق له في الفترة المعطاة اقتران معاكس ق$^{-١}$. أوجد مجال هذا الاقتران وصيغة ق$^{-١}$ (س) . ثم خطط بياني ق ، ق$^{-١}$ بالنسبة الى مستوى احداثي واحد . أوجد ايضا د$_{س}$ ق$^{-١}$ (س) مباشرة وبطريقة (٨ − ٤٦) .

١ . ق (س) = $\sqrt{٢\text{س} + ٣}$ ، [١ ، ١١]

٢ . ق (س) = $\sqrt[٣]{٥\text{س} + ٢}$ ، [٠ ، ٥]

٣ . ق (س) = ٤ − س^{٢} ، [٠ ، ٧]

٤ . ق (س) = س^{٢} − ٤س + ٥ ، [− ١ ، ١]

٥ . ق (س) = ١ / س ، [٠ ، ∞]

٦ . ق (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ ، (٠ ، ٣]

٧ . ق (س) = $e^{-س^{٢}}$ ، [٠ ، ∞]

٨ . ق (س) = لط (٣ − ٢س) ، (− ∞ ، $\frac{٣}{٢}$)

٩ . ق (س) = $e^{س} - e^{-س}$. (− ∞ ، ∞)

١٠ . ق (س) = $e^{س} + e^{-س}$ ، [٠ ، ∞]

في التمارين ١١ − ١٤ اثبت ان ق له اقتران معاكس ق$^{-١}$ في الفترة المغلقة [أ ، ب] ثم أوجد ميل المماس لمنحنى ق$^{-١}$ عند النقطة ن المعطاة .

١١ . ق (س) = س^{٥} + ٣س^{٣} + $\frac{١}{٢}$س − ١ ، ن (٥ ، ١)

١٢ . ق (س) = ٢ − س − س^{٣} ، ن (− ٨ ، ٢)

١٣ . ق (س) = ($e^{٢س}$ − ١) / ($e^{٢س}$ + ١) ، ن (٠ ، .)

١٤ . ق (س) = $e^{-٢-٣س}$ ، ن (١ / e ، ١)

في التمارين ١٥ − ١٨ اثبت ان مجال ق هو ح ثم اثبت ان ق ليس له معاكس ولكن اذا حصر المجال على نحو مناسب فان ق$^{-١}$ يكون موجودا :

١٥ . ق (س) = س^{٤} + ٣س^{٢} + ٧

١٦ . ق (س) = | س − ٢ |^{٢}

١٧ . ق (س) = ١٠$^{-س^{٢}}$

١٨ . ق (س) = لط (س^{٢} + ١)

١٩ . اكمل برهان (٨ − ٤٢) باثبات ان ق متصل عند (ق (أ) ، ق (ب))

٢٠ . اثبت (٨ − ٤٣) .

تمارين مراجعـــــة :

شفهيـــة :

عرف او ناقش ما يلي :

١ . الاقتران اللوغرتمي الطبيعي .

٢ . الاقتران الاسي الطبيعي .

٣ قوانين اللوغرتمات .

٤ . قوانين اشتقاق لط ، سا م

٥ . التفاضل اللوغرتمي

٦ . م^س ، حيث م > ٠

٧ . لو م

٨ . قوانين اشتقاق لو م ، سا م

٩ . قانون القوى العام

١٠ . قوانين التكاثر والتلاشي

١١ مشتقات الاقترانات العكسية .

كتابيـــة :

في التمارين ١ – ١٤ اعطي ق (س) والمطلوب ايجاد قَ (س)

١ . (١ – ٢س) لط (١ – ٢س)

٢ . $\sqrt{\text{لط } \sqrt{\text{س}}}$

٣ . لط $\dfrac{(٣س + ٢)^{٤} \sqrt{٦س - ٥}}{(٨س - ٧)^{-}}$

٤ . لو $\sqrt{\dfrac{٢ - ٩س}{١ - س^{٢}}}$

٥ . $\dfrac{١}{\text{لط } (٢س^{٢} + ٣)}$

٦ . $\dfrac{\text{لط س}}{e^{٢س} + ١}$

٧ . $س^{٢}\, e^{\frac{١}{س^{٢}}}$

٨. $\sqrt{e^{٣س} + e^{-٣س}}$

٩. $(س^٣ + ٤)^{-١/٢}$

١٠. $٥^{٣س} + (٣س)^{°}$

١١. $e^{\sqrt{س}}(١ + \sqrt{س})$

١٢. لط $e^{\sqrt{س}}$

١٣. $١٠^{\text{لط } س}$

١٤. $(س^٢ + ١)^{٢س}$

في التمرينين ١٥ ، ١٦ أوجد صَ :

١٥. $e^{س ص} = ١ + س ص$

١٦. لط $(س + ص) + س^٢ - ٢ ص^٣ = ١$

١٧. بين بالتعويض ان ص = جـ$_١$ $e^{أ س}$ + جـ$_٢$ $س e^{أ س}$ هو حل للمعادلة التفاضلية :
صَّ − ٢ أ صَ + $أ^٢$ ص = ٠ ، حيث جـ$_١$ ، جـ$_٢$ ، أ ثوابت .

١٨. حددت مواقع نقطة على الخط الاحداثي في الفترة الزمنية [− ٥ ، ٥] بالصيغة
ف (ن) = $(ن^٢ + ٢ن) e^{-١}$
أ) متى تكون السرعة صفرا
ب) متى يكون التسارع صفرا
جـ) متى تتحرك النقطة بالاتجاه الموجب
د) متى تتحرك النقطة بالاتجاه السالب ؟

١٩. تتحرك نقطة على خط مستقيم بتسارع قيمته في اللحظة ن هي $e^{٢/٣}$ سم / ث^٢ فاذا كانت عند ن = ٠ في نقطة الاصل وتتحرك بسرعة ٦ سم / ث ، فكم تقطع في الفترة الزمنية [٠ ، ٤] ؟

أوجد التكامل في التمارين ٢٠ − ٢٩

٢٠. $\int_{0}^{1} e^{-٣س + ٢}$ د س

٢١. $\int \frac{(١ + e^{س})^{٢}}{e^{٢س}}$ د س

٢٢. $\int \frac{١}{س \text{ لط } س}$ د س

٢٣. $\int_{١}^{٤} \frac{١}{\sqrt{٧س} \cdot e^{\sqrt{٧س}}}$ د س

٢٤. $\int_{١}^{٢} \frac{س^{٢} + ١}{س^{٣} + ٣س}$ د س

٢٥. $\int \frac{س^{٢}}{٣س + ٢}$ د س

٢٦. $\int \frac{٢ e^{س}}{١ + e^{س}}$ د س

٢٧. $\int ٥^{س} \cdot e^{س}$ د س

٢٨. $\int س \times ١٠^{س^{٢}}$ د س

٢٩. $\int س e^{س}$ د س

٣٠. أوجد النهايات المحلية العظمى والصغرى للاقتران ق (س) = $س^{٢}$ لط س ، س > ٠ وابحث في تحدبها وتقعرها وأوجد نقط الانعطاف ثم ضع تخطيطا للاقتران .

٣١ . أوجد معادلة المماس لمنحنى ص = س $e^{1/س^2}$ + لط | ٢ − س^2 | عند النقطة ن (١ ، e) .

٣٢ . أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات المعادلات ص = $e^{س^2}$ ص = س / (س^2 + ١) ، س = ٠ ، س = ١ .

٣٣ . اذا دارت حول محور س المساحة المحصورة بين ص = $e^{س^4}$ ، س = − ٢ ، س = − ٣ ، ص = ٠ أوجد حجم المجسم الذي ينتج .

٣٤ . اذا كان ق (س) = ٢ س^3 − ٨ س + ٥ في الفترة [− ١ ، ١] فاثبت ان ق له اقتران معاكس ف ثم أوجد فَ (٥) .

٣٥ . لنفرض ان ق (س) = $e^{2س}$ + ٢ $e^{س}$ + ١ ، س ≤ ٠

أ) اثبت ان ق له اقتران معاكس ق$^{-١}$ وبين مجاله

ب) أوجد ق$^{-١}$ (س) وكذلك د$_{س}$ ق$^{-١}$ (س) .

جـ) أوجد ميل المماس للاقتران ق عند (٠ ، ٤) وميل المماس للاقتران ق$^{-١}$ عند (٤ ، ٠)

٣٦ . مادة مشعة نصف عمرها ٥ أيام . كم تستغرق كمية منها مقدارها أ حتى يبقى ١ في المائة منها ؟

٣٧ . تتناسب سرعة ذوبان السكر في الماء مع كمية الماء التي لم تذب . فاذا وضع ١٠ باوند من السكر في وعاء فيه ماء عند الساعة ١,٠٠ بعد الظهر فوجد ان نصفها قد ذاب عند الساعة ٤,٠٠ بعد الظهر فاجب عما يلي :

أ) كم يلزم من الوقت لذوبان ٢ باوند آخرين ؟

ب) كم يذوب من الكمية كلها حتى الساعة ٨,٠٠ ؟

٣٨ . حسب قانون نيوتن للتبريد تتناسب سرعة تبريد الجسم تناسبا طرديا مع الفرق في درجة الحرارة بينه وبين الوسط المحيط به ، فاذا كان ق (ن) يشير الى درجة حرارة الجسم في الزمن ن فبين ان

ق (ن) = ء + (ق (٠) − ء) $e^{-جـ ن}$

حيث ء هي درجة حرارة الوسط المحيط بالجسم ، جـ عدد ثابت موجب .

الفصل التاسع

اقترانات اخرى غير جبرية

سندرس في هذا الفصل صيغاً لنهايات الاقترانات المثلثية والمثلثية العكسية ومشتقاتها التفاضلية وتكاملاتها . وفي البندين الاخيرين دراسة للاقترانات الزائدية والزائدية العكسية . أما مراجعة الاقترانات المثلثية والمتطابقات المثلثية ففي الملحق الثالث ويستحسن الاطلاع عليها قبل دراسة البند الاول القادم .

١ ــ نهايات الاقترانات المثلثية :

ان نتائج هذا البند مهمة لدراسة صيغ تفاضل الاقترانات المثلثية وبما أن جا ٠ = ٠ فالنظرية الاولى تخبرنا ان اقتران الجيب يكون متصلا عند الصفر .

(٩ ــ ١) نظريــة :

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \quad \text{جـا س} = ٠$$

البرهــان : سنبرهن أولا ان

$$\text{نهـا}_{س \to ٠^+} \quad \text{جـا س} = ٠$$

وبما اننا نعنى هنا بقيم س الموجبة قرب الصفر فليس هناك اي خلل اذا افترضنا أن

$$٠ < س < \frac{\pi}{٢}$$

فلتكن مـ دائرة نصف قطرها ١ ومركزها نقطة الاصل م في الاحداثيات المتعامدة ولنفرض أن أ هي النقطة (١ ، ٠) . وكما هو موضح في الشكل

٩ – ١ اذا كانت النقطة ب (جـ ، ص) واقعة على مـ بحيث أن $\overset{\frown}{أ ب}$ = س فان القياس الدائري للزاوية أ م ب هو س .

وبالرجوع الى الشكل نرى أن

$$٠ < ص < \overset{\frown}{أ ب} = س$$

وبما أن ص = جا س فان

$$٠ < جا س < س$$

وبما ان

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠+} \quad س = ٠$$

ينتج من النظرية (٢ – ٢٦) أن

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠+} \quad جا س = ٠$$

فلاتمام البرهان يكفي ان نبين أن

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠-} \quad جا س = ٠$$

اذا كانت $- \frac{\pi}{٢} < س < ٠$ فان

$$٠ < - س < \frac{\pi}{٢}$$

وباستخدام الجزء الاول من البرهان نحصل على ما يلي :

$$٠ < جا (- س) < - س$$

وبضرب المتباينة الاخيرة بالعدد – ١ واستعمال الحقيقة

جا (– س) = – جا س يتبع ان

$$س > جا س > ٠$$

وبما أن $\lim_{س \to 0^-}$ س = ٠ فنحصل على

$$\lim_{س \to 0^-} \text{جا س} = 0$$

(٩ – ٢) نتيجة $\lim_{س \to 0} \text{جتا س} = 1$

البرهـــان : اذا كانت $-\frac{\pi}{2} < س < \frac{\pi}{2}$ فان جتا س $= \sqrt{(1 - \text{جا}^2 س)}$

ولهذا فان

$$\lim_{س \to 0} \text{جتا س} = \lim_{س \to 0} \sqrt{1 - \text{جا}^2 س}$$

$$= \sqrt{\lim_{س \to 0} (1 - \text{جا}^2 س)}$$

$$= \sqrt{1 - 0} = 1$$

وبما أن جتا ٠ = ١ فيمكن التعبير عن النتيجة السابقة بالقول ان اقتران جيب التمام متصل عند الصفر.

وسنرى في البند الثاني انه لايجاد مشتقة اقتران الجيب علينا ان نعرف النهايتين لكل من $\frac{\text{جا س}}{س}$ وكذلك $\frac{1 - \text{جتا س}}{س}$ عندما تقترب س من الصفر.

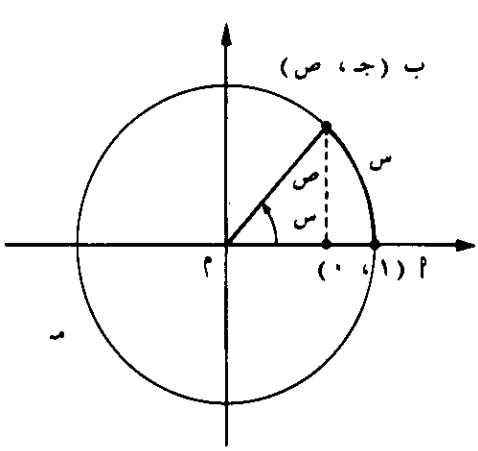
وتزودنا النظريتان التاليتان بهذه النتائج الهامة.

(٩ – ٣) نظرية :

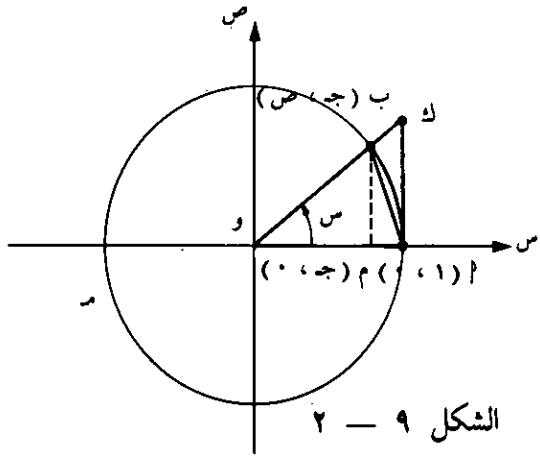
$$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا س}}{س} = 1$$

البرهـــان :

اذا كانت $0 < س < \frac{\pi}{2}$ فنحصل على الحالة الموضحة في الشكل ٩ – ٢ .



الشكل ٩ — ١



الشكل ٩ — ٢

وواضح أن م١ < م٢ < م٣ حيث ان

م١ هي مساحة المثلث أ و ب

م٢ هي مساحة القطاع الدائري أ و ب

م٣ هي مساحة المثلث أ و ك

ونرى أن

$$م_1 = \frac{1}{2}(1) \cdot ل(م، ب) = \frac{1}{2} ص = \frac{1}{2} جا\ س$$

$$م_2 = \frac{1}{2}(1)^2 س = \frac{1}{2} س$$

$$م_3 = \frac{1}{2}(1) \cdot ل(أ، ك) = \frac{1}{2} ظا\ س .$$

ونتيجة لذلك فان

$$\frac{1}{2} جا\ س < \frac{1}{2} س < \frac{1}{2} ظا\ س .$$

وبالقسمة على $\frac{1}{2}$ جا س واستخدام الحقيقة ظا س $= \frac{جا\ س}{جتا\ س}$ نحصل على :

$$1 < \frac{س}{جا\ س} < \frac{1}{جتا\ س}$$ أو ما يعادلها :

$$(٩-٤)\quad \text{جتا س} < \frac{\text{حا س}}{\text{س}} < ١ .$$

واذا كان $-\frac{\pi}{٢} < س < ٠$ ، فان $٠ < -س < \frac{\pi}{٢}$

ومن النتيجة التي حصلنا عليها يمكن أن نكتب

$$\text{جتا}(-س) < \frac{\text{حا}(-س)}{-س} < ١$$

وهذا يثبت أن (٩ – ٤) صحيح لجميع قيم س في الفترة المفتوحة

$\left(-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right)$ باستثناء س = ٠ وبما أن $\text{نهـا}_{س \to ٠}$ جتا س = ١

وكذلك ينحصر المقدار $\frac{\text{حا س}}{\text{س}}$ بين جتا س و ١

ينتج ان

$$\text{نهـا} \frac{\text{حا س}}{\text{س}} = ١ .$$

ويمكن التعبير عن (٩ – ٣) بقولنا انه عندما تقترب س من الصفر فان $\frac{\text{حا س}}{\text{س}}$ تقترب من ١ .

ويمكن كتابة هذا بطريقة اخرى وهي

حا س ≈ س عندما تأخذ س قيما صغيرة .

ومن المهم أن نتذكر انه اذا كانت س ترمز الى قياس زاوية فيجب استعمال القياس الدائري في كل من (٩ – ٣) وفي الصيغة التقريبية حا س ≈ س .

ولتوضيح هذا يمكن استخدام الجداول المثلثية واخذ قيم الزوايا مقربة الى خمس منازل عشرية كما يلي :

جا (٠,٠٦) ≈ ٠,٠٥٩٩٦ ، (٠,٠٥) ≈ ٠,٠٤٩٩٨

جا (٠,٠٤) ≈ ٠,٠٣٩٩٩ واخيرا جا (٠,٠٣) ≈ ٠,٠٣٠٠٠

(٩ – ٥) نظريـــة :

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} = ٠$$

البرهـــان : اذا كتبنا

$$\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} = \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} \times \frac{١ + \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}}$$

$$= \frac{\text{جا}^{٢} \text{س}}{\text{س} (١ + \text{جتا س})} \quad \text{فان}$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \frac{\text{جا س}}{١ + \text{جتا س}}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \left(\frac{\text{جا س}}{\text{س}} \right) \times$$

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{١ + \text{جتا س}}$$

$$= ١ \times \left(\frac{٠}{١ + ١} \right) = ٠$$

مثـــال :

أوجد $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{ظا س}}{٢ \text{س}}$

البرهـــان :

بما أن $\text{ظا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ فيكون

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ظا س}}{\text{٢ س}} = \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{١}{٢} \times \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{جتا س}}$$

$$= \frac{١}{٢} \times ١ \times ١ = \frac{١}{٢}$$

تمارين :

في كل من التمارين ١ – ١٠ احسب النهايات .

١ . $\text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{\text{جتا س}}{١ - \text{جا س}}$

٢ . $\text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{\text{جا س}}{١ + \text{جتا س}}$

٣ . $\text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{١ - \text{جتا س}}{\text{جا س}}$

٤ . $\text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{\text{جا} \frac{س}{٢}}{\text{س}}$

٥ . $\text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{\text{س} + \text{ظا س}}{\text{جا س}}$

٦ . $\text{نهـا}_{س \to 0} \dfrac{\text{جا}^{٢} \text{٢ س}}{\text{س}^{٢}}$

٧ . $\text{نهـا}_{س \to 0}$ س ظتا س

٨ . $\lim_{س \to 0} \frac{\text{قتا } ٢ س}{\text{ظتا } س}$

٩ . $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^{٢} \frac{س}{٢}}{\text{جا } س}$

١٠ . $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جا } س}{س - \pi}$

٢ ــ مشتقات الاقترانات المثلثية :

لايجاد مشتقة اقتران الجيب نضع ق (س) = جا س ونتبع الخطوات التالية :

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{\text{جا } (س + هـ) - \text{جا } س}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{\text{جا } س \text{ جتا } هـ + \text{جتا } س \text{ جا } هـ - \text{جا } س}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{\text{جا } س (\text{جتا } هـ - ١) + \text{جتا } س \text{ جا } هـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \text{جا } س \left(\frac{\text{جتا } هـ - ١}{هـ} \right) + \text{جتا } س \left(\frac{\text{جا } هـ}{هـ} \right)$$

وبالاستناد الى (٩-٥) و (٩-٣) ينتج ان

قَ س = (جا س) (٠) + جتا س × ١ = جتا س

اي ان :

(٩-٦) $د_{س}$ جا س = جتا س

لقد برهنا أن مشتقة الجيب هي جيب التمام . فاذا كان ك اقترانا قابلا للاشتقاق وكانت ق (س) = جا س فان جا ك (س) = ق (ك (س)) وباستخدام قاعدة السلسلة (٣-٣٩) ينتج ان :

$د_{س}$ جا ك (س) = قَ (ك (س)) كَ (س)

وبوضع ع = ك (س) تأخذ هذه الصيغة شكلا يمكن استذكاره بسهولة وهو

(٩-٧) $د_{س}$ جا ع = جتا ع $د_{س}$ ع

وبالطبع عند وضع ع = س تتحول (٩-٧) الى (٩-٦) .

مثـــال ١ :

(أ) أوجد $د_{س}$ جا ٤ $س^{٣}$

(ب) أوجد $د_{س}$ $جا^{٣}$ ٤ س

الحـــل :

(أ) باستعمال (٩-٧) فان

$د_{س}$ جا ٤ $س^{٣}$ = (جتا ٤ $س^{٣}$) $د_{س}$ ٤ $س^{٣}$

= ١٢ $س^{٢}$ جتا ٤ $س^{٣}$

(ب) بما أن $جا^{٣}$ ٤ س = (جا ٤ س)^{٣} فباستعمال قاعدة القوى (٣-٥) نحصل على

$$\frac{د}{س}\ جا^{٣}\ ٤س = ٣\ (جا\ ٤س)^{٢} \frac{د}{س}\ جا\ ٤س$$

$$= ٣\ جا^{٢}\ ٤س \frac{د}{س}\ جا\ ٤س$$

وبعدها استخدم (٩ – ٧) فينتج ان

$$\frac{د}{س}\ جا^{٣}\ ٤س = ٣\ جا^{٢}\ ٤س\ جتا\ ٤س \frac{د}{س}\ ٤س$$

$$= ١٢\ جا^{٢}\ ٤س\ جتا\ ٤س .$$

ويمكن استنتاج مشتقات اقترانات مثلثية اخرى باستعمال (٩ – ٧) واستخدام المتطابقات المثلثية .

وينتج من استعمال صيغ الجمع للجيوب وجيوب التمام أن

$$جتا\ س = جا\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)$$ وكذلك $$جا\ س = جتا\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)$$ وباستعمال هاتين الحقيقتين ينتج ان

(٩ – ٧) $$\frac{د}{س}\ جتا\ س = \frac{د}{س}\ حا\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)$$

$$= جتا\left(\frac{\pi}{٢} - س\right) \frac{د}{س}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)$$

$$= (جا\ س)\ (-١)$$

$$= - جا\ س$$

وكما سبق اذا كانت ع = ك (س) حيث ك قابلة للاشتقاق فان

(٩ – ٨) $$\frac{د}{س}\ جتا\ ع = جا\ ع \frac{د}{س}\ ع$$

وبتطبيق قاعدة القسمة على الاقتران $$ظا\ س = \frac{جا\ س}{جتا\ س}$$ نحصل على أن

$$\frac{د}{س}\ ظا\ س = \frac{جتا\ س \frac{د}{س}\ جا\ س - جا\ س \frac{د}{س}\ جتا\ س}{جتا^{٢}\ س}$$

$$= \frac{جتا^{٢}\ س + جا^{٢}\ س}{جتا^{٢}\ س}$$

$$= \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\ \text{س}} = \text{قا}^{٢}\ \text{س}$$

وبصورة عامة اذا كانت ع = ك (س) فكما في برهان (٩ – ٧) نجد أن

(٩ – ٩) $\text{د}_{\text{س}}$ ظا ع = $\text{قا}^{٢}$ ع $\text{د}_{\text{س}}$ ع .

وبالمثل

$$\text{د}_{\text{س}}\ \text{قا}\ \text{س} = \text{د}_{\text{س}}\ \frac{١}{\text{جتا س}} = \frac{\text{جتا س}\ \text{د}_{\text{س}}\ ١ - (١)\ \text{د}_{\text{س}}\ \text{جتا س}}{\text{جتا}^{٢}\ \text{س}}$$

$$= \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^{٢}\ \text{س}}$$

$$= \frac{١}{\text{جتا س}} \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$$

= قا س ظا س .

واذا كانت ع = ك (س) فان

(٩ – ١٠) د قا ع = قا ع ظا ع $\text{د}_{\text{س}}$ ع .

وسنترك برهنة الصيغتين التاليتين للتمرين .

(٩ – ١١) $\text{د}_{\text{س}}$ ظتا ع = – $\text{قتا}^{٢}$ ع $\text{د}_{\text{س}}$ ع

(٩ – ١٢) $\text{د}_{\text{س}}$ قتا ع = – قتا ع ظتا ع $\text{د}_{\text{س}}$ ع

مثـال ٢ :

أوجد قَ (س) اذا كانت

(أ) ق (س) = $\text{e}^{-٢\text{س}}$ ظا ٤ س

(ب) ق (س) = قا^{٢} (٣س − ١).

الحـــل :

(أ) استخدم قاعدة حاصل الضرب لتحصل على ما يلي :

$$ق(س) = e^{-٢س} \frac{د}{س} ظا ٤س + ظا ٤س \frac{د}{س} e^{-٢س}$$

$$= e^{-٢س} (قا^{٢} ٤س)(٤) + ظا ٤س (e^{-٢س})(-٢)$$

$$= ٢ e^{-٢س} (٢ قا^{٢} ٤س - ظا ٤س)$$

(ب) استخدم قاعدة القوى و (٩ − ١٠) لتحصل على :

$$قَ(س) = ٢ قا(٣س - ١) \frac{د}{س} قا(٣س - ١)$$

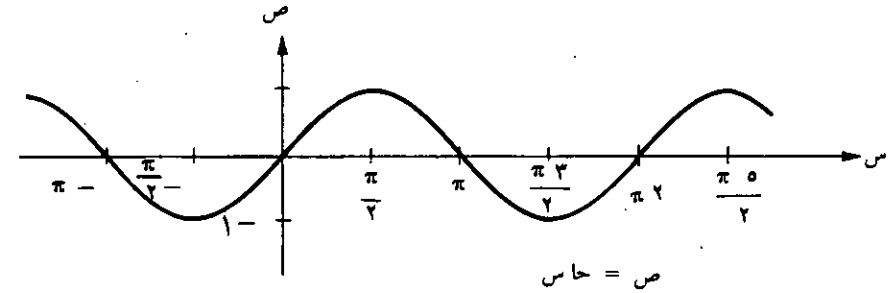
$$= ٢ قا(٣س - ١) قا(٣س - ١) ظا(٣س - ١)(٣)$$

$$= ٦ قا^{٢}(٣س - ١) ظا(٣س - ١).$$

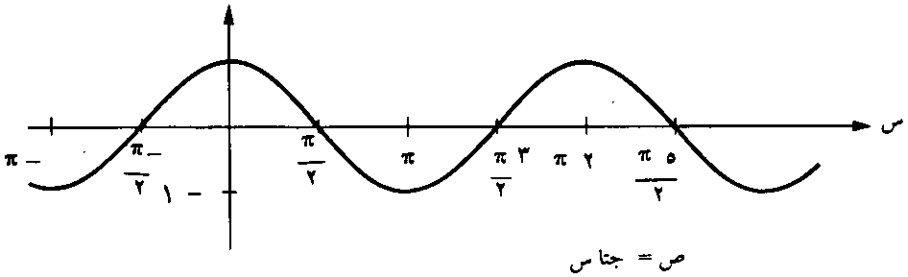
ويبين الشكل ٩ − ٣ رسما بيانيا للمنحنيات ص = جا س ، ص = جتا س ، ص = ظا س .

والخطوط المنقطة في المنحنى ص = ظا س تشير الى خطوط التقارب الرأسية وبما أن $\frac{د}{س}$ جا س = جتا س فان الاعداد الحاسمة لاقتران الجيب هي حلول المعادلة جتا س = ٠ ، وهذه الحلول هي س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π حيث ن أي عدد صحيح.ويمكن ان نبين باستخدام اختبار المشتقات الثاني انه اذا كان ن عددا زوجيا نحصل على نهاية عظمى محلية واما اذا كان ن عدد فرديا فنحصل على نهاية صغرى محلية . وهذا يعطينا النقط العليا والسفلى للمنحنى ص = جا س . وبما ان

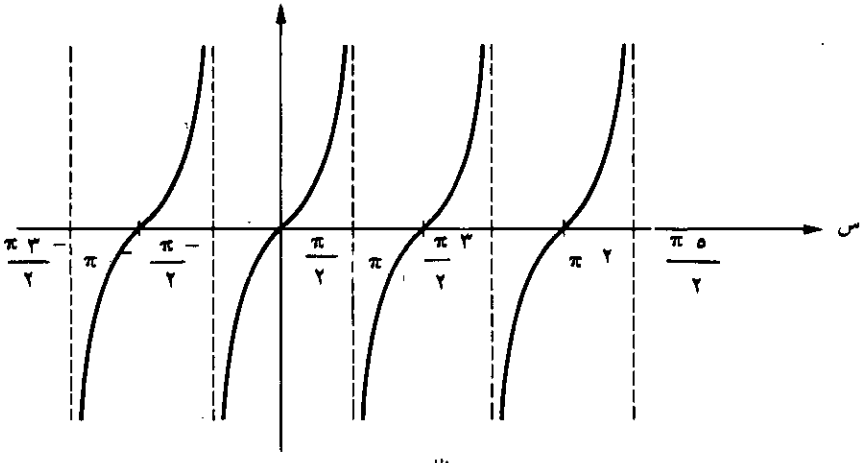
$\frac{د^{٢}}{س^{٢}}$ جا س = $\frac{د}{س}$ جتا س = − جا س فينتج أن منحنى اقتران الجيب يكون مقعراً عندما تكون جا س موجبة ومحدبا اذا كانت جا س سالبة . ومن هنا فان الاحداثيات السينية لنقط الانعطاف هي ن π حيث ن اي عدد صحيح . ويمكن اجراء تحليل مشابه لمنحنيات بقية الاقترانات المثلثية .



ص = حا س



ص = جتا س



ص = ظا س

الشكل ٩ ــ ٣

مثـال ٣ :

اذا كانت ق (س) = ٢ جا س + جتا ٢ س

أوجد نقط النهاية المحلية وارسم منحنى ق في الفترة [٠ ، ٢ π] .

الحـــل : بأخذ مشتقة الاقتران ق ينتج ان

قَ (س) = ٢ جتا س − ٢ جا ٢ س

وبما أن جا ٢ س = ٢ جا س جتا س فيمكن كتابة الصيغة السابقة على النحو التالي :

قَ (س) = ٢ جتا س − ٤ جا س جتا س

= ٢ جتا س (١ − ٢ جا س)

وتكون قَ (س) = ٠ . عندما تكون جا س = $\frac{١}{٢}$ أو جتا س = ٠

ومن ثم فان الاعداد الحاسمة للاقتران ق في الفترة [٠ ، ٢π] هي

$$\frac{\pi}{٦} \ ، \ \frac{\pi\ ٥}{٦} \ ، \ \frac{\pi}{٢} \ ، \ \frac{\pi\ ٣}{٢}$$

والمشتقة الثانية للاقتران ق هي

قً (س) = − ٢ جا س − ٤ جتا ٢س

وبالتعويض عن س بالاعداد الحاسمة نحصل على :

$$قً\left(\frac{\pi}{٦}\right) = -٣ \ ، \ قً\left(\frac{\pi\ ٥}{٦}\right) = -٣ \ ، \ قً\left(\frac{\pi}{٢}\right)$$

$$= ٢ \ ، \ قً\left(\frac{\pi\ ٣}{٢}\right) = ٦$$

وباستخدام اختبار المشتقات الثاني نرى انه توجد نهايتان عظميان محليتان عند $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi\ ٥}{٦}$ وتوجد نهايتان صغريان محليتان عند $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi\ ٣}{٢}$. ويمكن رسم المنحنى بواسطة هذه المعلومات والجدول الآتي

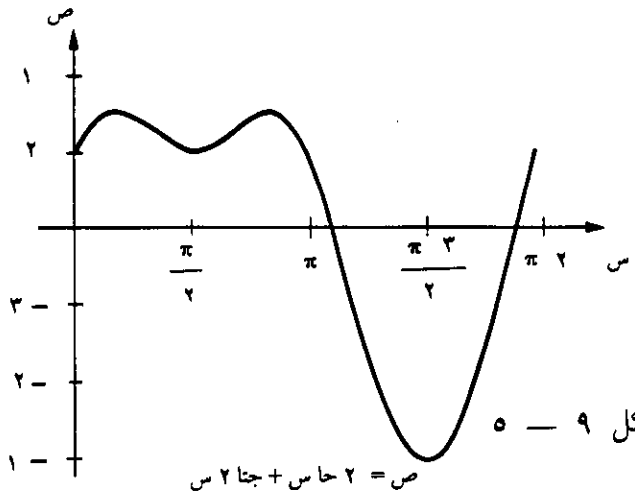
س	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{\pi\ ٥}{٦}$	$\frac{\pi\ ٣}{٢}$	٢π
ق (س)	١	$\frac{٣}{٢}$		$\frac{٣}{٢}$	−٣	١

مثال ٤ :

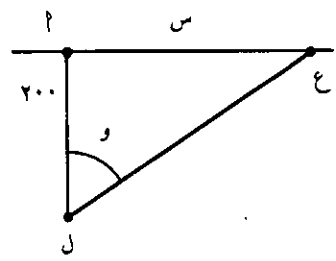
مصباح دوار يقع على بعد ٢٠٠ قدم عن اقرب نقطة أ على شاطيء مستقيم

ويعمل دورة واحدة كل ١٥ ثانية . أوجد معدل سرعة شعاع الضوء عبر الشاطيء عند نقطة تبعد ٤٠٠ قدم من أ .

الحـــل : ان الشكل ٩ – ٥ هو مخطط للمسألة حيث الخط المستقيم الافقي يمثل الشاطيء وترمز ل الى موقع الضوء وترمز و الى الزاوية بين ل أ وشعاع ص ، والنقطة ع تقع على الشاطيء على بعد س وحدات من أ . وبما أن الضوء يدور اربع مرات كل دقيقة فتتغير الزاوية وبمعدل ٨ π بالتقدير الدائري لكل دقيقة أي ان



الشكل ٩ — ٤



الشكل ٩ — ٥

$$\frac{\text{ك و}}{\text{ك ن}} = ٨\ \pi$$

وباستخدام المثلث أ ل ع نرى ان

$$\text{ظا و} = \frac{\text{س}}{٢٠٠} \quad \text{أي أن س} = ٢٠٠ \text{ ظا و}$$

ومن هنا ينتج ان

$$\frac{\text{ك س}}{\text{ك ن}} = ٢٠٠ \text{ قا}^٢ \text{ و} \frac{\text{ك و}}{\text{ك ن}} = (٢٠٠ \text{ قا}^٢ \text{ و})(٨\ \pi) = ١٦٠٠\ \pi \text{ قا}^٢ \text{ و} .$$

وعندما تكون س = ٤٠٠ فان

ظا و = $\frac{٤٠٠}{٢٠٠}$ = ٢ ، وكذلك قا و = $\sqrt{١ + \text{ظا}^٢ \text{و}}$ = $\sqrt{١ + ٤}$ = $\sqrt{٥}$

وبهذا يكون

$$\frac{\text{ع س}}{\text{ع ن}} = ١٦٠٠ \times \pi \times (\sqrt{٥})^٢ = ٨٠٠٠ \times \pi \text{ قدم / دقيقة .}$$

تمارين :

١ . اثبت (٩ - ١١) و (٩ - ١٢)

٢ . ارسم مخططات اقترانات قاطع التمام ، والقاطع ، وظل التمام في كل من التمارين ٣ - ٢٢ أوجد قَ (س) اذا كانت ق (س) مساوية للصيغة المعطاة .

٣ . جتا ٣س^٢

٤ . ظا^٣ ٦س

٥ . جتا^٢ ٣س

٦ . جا $e^{-٢س}$

٧ . س^٢ قتا ٥س

٨ . س قتا $\frac{١}{\text{س}}$

٩ . ظا^٢ س قا^٣ س

١٠ . س^٢ قا^٣ ٤س

١١ . (جا ٥س - جتا ٥س)^٥

١٢ . جا $\sqrt{\text{س}}$ + $\sqrt{\text{جا س}}$

١٣ . ظتا^٣ (٣س + ١)

١٤ . $e^{\text{جتا ٢س}}$

١٥ . $\frac{\text{جتا ٤س}}{١ - \text{جا ٤س}}$

١٦ . $\frac{\text{قا } ٢\text{س}}{\text{ظا } ٢\text{س} + ١}$

١٧ . لط | قتا س + ظتا س

١٨ . جا $(٢\text{س} + ٣)^{٤}$

١٩ . $\text{e}^{-٣\text{س}}$ ظا $\sqrt{\text{س}}$

٢٠ . لط جتا^{٢} ٣س

٢١ . لط لط قا ٢س

٢٢ . قتا (ظتا ٤س)

في التمارين ٢٣ – ٢٨ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ و $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$.

٢٣ . ص = قا^{٢} ٢س

٢٤ . ص = ظتا^{٣} ٥س

٢٥ . ص = جا س – س جتا س

٢٦ . ص = لط ظا س

٢٧ . ص = $\sqrt{\text{ظا س}}$

٢٨ . ص = $\frac{\text{جتا س} - ١}{\text{جتا س} + ١}$

في التمارين ٢٩ – ٣٢ استعمل التفاضل الضمني لايجاد صَ .

٢٩ . ص = س جا ص

٣٠ . س ص = ظا س ص

٣١ . $\text{e}^{\text{س}}$ جتا ص = س $\text{e}^{\text{ص}}$

٣٢ . جتا (س – ص) = ص جتا س

في التمارين ٣٣ – ٣٦ أوجد نقط النهاية المحلية وارسم منحنى ق للقيم . $\leq$ س $\leq$ ٤ π

٣٣ . ق (س) = ٢ جتا س + جا ٢س

٣٤ . ق (س) = جتا س – جا س

٣٥ . ق (س) = $e^{-س}$ جا س

٣٦ . ق (س) = $\frac{س}{٢}$ − جا س

في التمرينين ٣٧ و ٣٨ أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى المعادلة المعطاة عند النقطة أ .

٣٧ . ص = ٨ جا^{٣} س ، أ ($\frac{\pi}{٦}$ ، ١) .

٣٨ . ص = ظا س − $\sqrt{٢}$ جا س ، أ ($\frac{\pi ٣}{٤}$ ، − ٢) .

٣٩ . عند نقطة تبعد ٢٠ قدماً عن قاعدة في رأسها علم قيست زاوية انحدار قمة العمود فكانت ٦٠° مع احتمال خطأ قدره ١٥′ . استعمل التفاضلات لتقريب الخطأ في حساب ارتفاع العمود .

٤٠ . استعمل التفاضلات لتقريب التغير في ظتا س اذا تغيرت س من ٤٥° الى ٤٦° .

٤١ . تحلق طائرة على ارتفاع ١٠,٠٠٠ قدم بسرعة ثابتة في خط مستقيم يمر مباشرة فوق مشاهد على الارض . وعند لحظة معينة لاحظ المشاهد أن زاوية ميلان الطائرة هي ٦٠° وتزداد بمعدل ١° لكل ثانية أوجد سرعة الطائرة .

٤٢ . مثلث متساوي الساقين طول كل من ضلعيه المتساويين ٦ انشات . واذا كانت θ الزاوية بين ضلعيه تتغير بمعدل ٢° لكل دقيقة ، فكم تكون سرعة تغير مساحة المثلث عند θ = ٣٠° ؟

اذا تحركت نقطة على خط احداثيات بحيث ان بعدها ف (ن) عن نقطة الاصل يعطي اما بالصيغة .

ف (ن) = أ جتا ω ن أو بالصيغة :

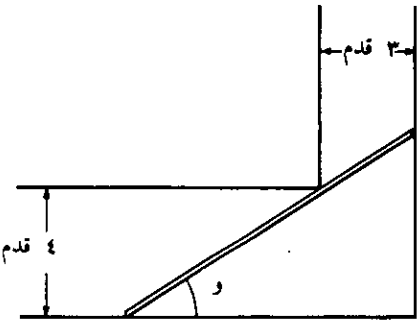
ف (ن) = أ جا ω ن حيث أ و ω ثابتان تسمى حركة النقطة بالتوافقية البسيطة . في التمرينين ٤٣ و ٤٤ أوجد السرعة والتسارع وابحث حركة النقطة للصيغة ف (ن) المعطاة

٤٣ . ف (ن) = ٣ جتا ٢ ن

٤٤ . ف (ن) = ٢ جا π ن

٤٥ . يراد عمل كأس ماء على شكل مخروط دائري قائم بنزع قطاع دائري من ورقة دائرية وتوصيل الطرفين المستقيمين المتبقيين للورقة . أوجد الزاوية المركزية للقطاع الذي يكون عنده حجم الكأس أكبر ما يمكن .

٤٦ . ممران عرضهما ٣ اقدام و ٤ اقدام على الترتيب يلتقيان بزاويتين قائمتين . أوجد طول أطول قضيب مستقيم يمر بالزاوية كما هو موضح في الشكل ٩ – ٦ .



الشكل ٩ — ٦

٣ — تكاملات الاقترانات المثلثية : Integrals of Trigonometric functions

يمكن استخدام القواعد التي درسناها في البند الثاني للحصول على صيغ للتكامل . مثلا :

بما أن $\frac{د}{س}$ جا س = جتا س فمن تعريف التكامل غير المحدد ينتج ان

$$\int \text{جتا س } ء س = \text{جا س} + \text{جـ} \qquad (٩-١٣)$$

وبصورة عامة باستخدام (٩ – ٧) وهو :

$$\frac{د}{س} \text{جا ق (س)} = (\text{جتا ق (س)}) \text{ قَ (س)}$$

نحصل على :

$$\int (\text{جتا ق (س)}) \text{ قَ (س)} ء س = \text{جا ق (س)} + \text{جـ}$$

ويمكن استذكار الصيغة السابقة باستعمال طريقة تبديل المتغير التي قدمناها في (٥ – ٤٤) . وبالتحديد اذا وضعنا ع = ق (س) فان

ء ع = ق (س) ء س وبالتعويض عن ق (س) و ق (س) ء س نحصل على

(٩-١٤) $\int$ جتا ع ء ع = جا ع + جـ

وهذه الصيغة مشابهة للصيغة (٩ – ١٣) وعلى أي حالة يمكن اعتبار ع في (٩ – ١٤) عبارة في س ، ء ع تفاضل ع .

مثـال ١ :

أوجد $\int$ س جتا س^{٢} ء س

الحـــل :

ضع ع = س^{٢} فيكون ء ع = ٢س ء س

ويمكن الحصول على الصيغة (٩ – ١٤) باستخدام المعامل ٢ في الاقتران المكامل . وهذا يقودنا الى ما يلي :

$$\int \text{س جتا س}^{٢}\ \text{ء س} = \frac{١}{٢} \int (\text{جتا س}^{٢})\ (٢\text{س})\ \text{ء س}$$

$$= \frac{١}{٢} \int \text{جتا ع ء ع} = \frac{١}{٢}\ \text{جا ع} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٢}\ \text{جا س}^{٢} + \text{جـ} .$$

وبطريقة مماثلة لاستنتاج (٩ – ١٤) يمكن استخدام (٩ – ٨) – (٩ – ١٢) للحصول على التالي حيث أن ع = ق (س) ، ء ع = قَ (س) ء س

(٩-١٥) $\int$ جا ع ء ع = – جتا ع + جـ

(٩-١٦) $\int$ قا^{٢} ع ء ع = ظا ع + جـ

(٩-١٧) $\int$ قا ع ظا ع ء ع = قا ع + جـ .

(٩-١٨) $\int$ قتا^{٢} ع ء ع = – ظتا ع + جـ

$$(٩-١٩)\quad \int \text{قتا ع ظتا ع } د\text{ع} = -\text{قتا ع} + \text{جـ}.$$

مثـال ٢ :

أوجد $\int$ قا س (قا س + ظا س) د س

الحـــل :

يمكننا ان نتبع الخطوات التالية :

$$\int \text{قا س (قاس + ظاس) } د\text{س} = \int (\text{قا}^{٢}\text{ س} + \text{قا س ظا س})\, د\text{س}$$

$$= \int \text{قا}^{٢}\text{ س } د\text{ س} + \int \text{قاس ظاس } د\text{ س}$$

$$= \text{ظاس} + \text{قاس} + \text{جـ}$$

حيث استخدمنا (٩ – ١٦) و (٩ – ١٧) وأخذنا ع = س .

مثـال ٣ :

أوجد $\int \left(\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\right)$ قتا^{٢} $\sqrt{\text{س}}$ د س

الحـــل :

اذا كانت ع = $\sqrt{\text{س}}$ فان د ع = $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ د س

ويمكن كتابة الاقتران المكامل بالصيغة (٩ – ١٨) وذلك باستخدام المعامل $\frac{١}{٢}$. ولهذا فان

$$\int \left(\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\right) \text{قتا}^{٢}\sqrt{\text{س}}\, د\text{س} = ٢ \int (\text{قتا}^{٢}\sqrt{\text{س}}) \left(\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\right) د\text{س}$$

$$= ٢ \int \text{قتا}^{٢}\text{ ع } د\text{ع}$$

$$= -2 \text{ ظتا ع} + \text{جـ}$$

$$= -2 \text{ ظتا } \sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$$

ويمكن ايجاد صيغة لتكامل ظا س بكتابته اولا

$$\int \text{ظا س } \text{ء س} = \int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \text{ ء س}$$

واذا فرضنا أن ع = جتا س فان ء ع = − جا س ء س فينتج ان

$$\int \text{ظا س } \text{ء س} = -\int \frac{1}{\text{جتا س}} (-\text{جا س}) \text{ ء س}$$

$$= -\int \frac{1}{\text{ع}} \text{ ء ع} = -\text{لط} |\text{ع}| + \text{جـ}$$

فاذا كانت جتا س ≠ ٠ فان

$$\int \text{ظا س } \text{ء س} = -\text{لط} |\text{جتا س}| + \text{جـ} \quad (٩-٢٠)$$

وبما أن − لط | جا س | = لط $\frac{1}{|\text{جتا س}|}$ = لط | قا س | تكون الصيغة

(٩ − ٢١) مكافئة للصيغة التالية :

$$\int \text{ظا س } \text{ء س} = \text{لط} |\text{قا س}| + \text{جـ} . \quad (٩-٢١)$$

واذا كانت ع = ق (س) حيث ق اقتران قابل للاشتقاق فيمكن تعميم (٩ − ٢١) لتصبح

$$\int \text{ظا ع } \text{ء ع} = \text{لط} |\text{قا ع}| + \text{جـ} \quad (٩-٢٢)$$

حيث ء ع = قَ (س) ء س

وبالمثل اذا كتبنا

$$\text{ظتا ع} = \frac{\text{جتا ع}}{\text{جا ع}} \text{ فينتج أن}$$

$$\text{(٩-٢٣)} \quad \int \text{ظتا ع د ع} = \text{لط} \left| \text{جا ع} \right| + \text{جـ}$$

بشرط أن تكون جا ع $\neq$.

مثال ٤ :

احسب $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ظا} \frac{\text{س}}{2} \text{ د س}$

الحل :

اذا اخذنا ع $= \frac{\text{س}}{2}$ فان د ع $= \frac{1}{2}$ د س . استخدم هذا التبديل في المتغير ولاحظ ان ع $= 0$ اذا كانت س $= 0$ وكذلك ع $= \frac{\pi}{4}$ اذا كانت س $= \frac{\pi}{2}$ فينتج ان

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ظا} \frac{\text{س}}{2} \text{ د س} = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{ظا} \frac{\text{س}}{2}) \frac{1}{2} \text{ د س}$$

$$= 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{ظا ع د ع} = 2 \left[\text{لط قا ع} \right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

حيث انه ليس ضروريا اخذ القيمة المطلقة كما في (٩ – ٢٢) لان قا ع موجبة اذا كانت ع تقع بين 0 و $\frac{\pi}{4}$. وبما أن لط قا $\frac{\pi}{4}$ = لط $\sqrt{2}$ = $\frac{1}{2}$ لط ٢ ولط قا 0 = لط 1 = 0 فينتج ان

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \text{ظا} \frac{\text{س}}{2} \text{ د س} = 2 \times \frac{1}{2} \text{ لط } 2 = \text{لط } 2 \text{ .}$$

ويمكن ايجاد صيغة تكامل قاس باتباع الخطوات التالية :

$$\int \text{قاس د س} = \int \text{قاس} \frac{\text{قاس} + \text{ظا س}}{\text{قاس} + \text{ظا س}} \text{ د س}$$

$$= \int \frac{\text{قا}^2 \text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}} \, \text{د س}$$

فاذا اخذنا ع = ظاس + قاس فان د ع = (قا^2 س + قاس ظاس) د س

وبالتعويض نحصل على الاتي :

$$\int \text{قاس د س} = \int \frac{1}{\text{ع}} \, \text{د ع}$$

$$= \text{لط} \left| \text{ع} \right| + \text{جـ}$$

$$= \text{لط} \left| \text{قاس} + \text{ظاس} \right| + \text{جـ}$$

وكالمعتاد اذا وضعنا ع = ق (س) فان

(٩-٢٤) $\int \text{قاع د ع} = \text{لط} \left| \text{قاع} + \text{ظاع} \right| + \text{جـ}$

بشرط ان تكون ق قابلة للاشتقاق. وكذلك قاع + ظاع .

ويمكن ان نثبت بطريقة مماثلة ان

(٩-٢٥) $\int \text{قتاع د ع} = \text{لط} \left| \text{قتاع} - \text{ظتاع} \right| + \text{جـ}$.

مثـال ٥ :

أوجد $\int (\text{قتا س} - ١)^2 \, \text{د س}$

الحـــل :

$$\int (\text{قتا س} - ١)^2 \, \text{د س} = \int (\text{قتا}^2 \text{س} - ٢ \text{ قتا س} + ١) \, \text{د س}$$

$$= \int \text{قتا}^2 \text{س د س} -$$

$$٢ \int \text{قتا س د س} + \int \text{د س}$$

$$= - \text{ظتاع} - ٢ \text{ لط} \left| \text{قتا س} - \text{ظتا س} \right|$$

$$+ \text{س} + \text{جـ}$$

وسندرس طرقا اخرى لايجاد تكامل الصيغ المثلثية في الفصل العاشر.

تمارين :

احسب تكامل كل من التمارين ١ – ٢٢

١ . ∫ جا ٤س د س

٢ . ∫ قا^{٢} ٥س د س

٣ . ∫ ظا ٣س قا ٣س د س

٤ . ∫ س^{٢} ظتا س^{٣} قتا س^{٣} د س

٥ . ∫ (ظا ٣س + قا ٣س) د س

٦ . ∫ $\frac{١}{\text{قا}^{٢}\ \text{س}}$ د س

٧ . ∫ $\frac{١}{\text{جتا}\ ٢\text{س}}$ د س

٨ . ∫ $\frac{\text{ظتا}\ \sqrt[٣]{\text{س}}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}$ د س

٩ . ∫ س قتا^{٢} (س^{٢} + ١) د س

١٠ . ∫ (س + قتا ٨س) د س

١١ . ∫ ظتا ٦س جا ٦س د س

١٢ . $\int$ جا ٢س ظا ٢س د س

١٣ . $\int_{\frac{\pi}{4}}$ ظا س قا^{٢} س د س

١٤ . $\int$ قتا^{٢} س ظتا س د س

١٥ . $\int \frac{\text{ظا}^{٢}\ ٢\text{س}}{\text{قا}\ ٢\text{س}}$ د س

١٦ . $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}^{٢}\ \text{س}}{\text{جا س}}$ د س

١٧ . $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ جا س جتا س د س

١٨ . $\int \frac{\text{جتا}^{٢}\ \text{س}}{\text{قتا س}}$ د س

١٩ . $\int \frac{١ - \text{جا س}}{\text{س} + \text{جتا س}}$ د س

٢٠ . $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{جتا هـ}^{\text{س}}}$ د س

٢١ . $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{١ + \text{جتا س}}{\text{جتا}^{٢}\ \text{س}}$ د س

٢٢ . $\int_{\frac{\pi}{4}}$ (١ + قا س)^{٢} د س .

٢٣ . أوجد مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى ص = جا $\frac{س}{٢}$ من س = ٠ الى س

$= \pi$

٢٤ . أوجد مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى ص = ٢ ظا س من س = ٠

الى س = $\frac{\pi}{٤}$.

٢٥ . اوجد المساحة المحصورة بين المنحنيات

ص = قاس ، ص = س ، س = $-\frac{\pi}{٤}$ ، س = $\frac{\pi}{٤}$.

٢٦ . أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيات ص = جا س ، ص = جتا س ، س =

$-\frac{\pi}{٢}$ ، س = $\frac{\pi}{٦}$.

٢٧ . دارت المنطقة المحصورة بالمنحنيات ص = قاس ، س = $-\frac{\pi}{٣}$.

س = $\frac{\pi}{٣}$ ، ص = ٠ حول محور السينات . أوجد حجم المجسم الناتج .

٢٨ . دارت المنطقة الواقعة تحت المنحنى ص = جاس من س = ٠ الى س = π
حول محور السينات . أوجد حجم المجسم الناتج .

(ارشاد : جا^{٢} س = $\frac{١ - \text{جتا } ٢س}{٢}$)

٢٩ . اشتق (٩ – ٢٥)

٣٠ . اشتق (٩ – ٢٣)

٣١ . بين بطريقتين مختلفتين أن

$\int$ ظا س قا^{٢} ء س = $\frac{١}{٢}$ ظا^{٢} س + جـ

$= \frac{١}{٢}$ قا^{٢} س + ت

كيف يمكن تعليل الاجابتين ؟

٣٢ـ بين بثلاث طرق مختلفة أن

$$\int \text{جاس جتا س } ء س = \frac{١}{٢} \text{ جا}^{٢} \text{ س} + \text{جـ}_{١}$$

$$= -\frac{١}{٢} \text{ جتا}^{٢} \text{ س} + \text{جـ}_{٢}$$

$$= -\frac{١}{٤} \text{ جتا ٢ س} + \text{جـ}_{٢}$$

كيف تعلل هذه الاجابات ؟

٤ ـــ الاقترانات المثلثية العكسية : Inverse Trigonometric Functions

ذكرنا في البند السادس من الفصل الاول انه اذا كان ق اقتران واحد لواحد مجاله صـ ومداه سـ فيكون للاقتران المعاكس ق المجال س والمدى ص . وعلاوة على ذلك فان

(٩-٢٦) $ق^{-١}(س) = ص$ اذا وفقط اذا كان

$ق(ص) = س$

لجميع قيم س ∈ سـ و ص ∈ صـ . وبما أن الاقترانات المثلثية ليست واحداً لواحد فليس لها اقترانات عكسية . ولكن بتحديد المجالات يمكن الحصول على اقترانات تتغير بنفس طريقة الاقترانات المثلثية (معرفة على مجالات أصغر) ولها اقترانات عكسية .

لنبدأ باقتران الجيب الذي مجاله جميع الاعداد الحقيقية ح ومداه مجموعة الاعداد الحقيقية المنتمية الى الفترة [− ١ ، ١] . وهذا الاقتران ليس واحداً لواحد لان الاعداد $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٧}$ ، $\frac{-٧\pi}{٦}$ لها نفس الصورة وهي $\frac{١}{٢}$. ويمكن ايجاد مجموعة سـ بحيث يكون اقتران الجيب واحداً لواحد في هذه المجموعة . ومن المناسب اختيار سـ = $[-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$. والاقتران الجديد الذي حصلنا عليه بتحديد مجال اقتران الجيب للفترة $[-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$ متصل ومتزايد ومن ثم فحسب (٨ − ٤١) له اقتران عكسي .

ويقودنا تطبيق (٩ – ٢٦) الى التعريف التالي :

(٩–٢٧) تعريف اقتران الجيب العكسي

ان اقتران الجيب العكسي الذي نرمز له بالرمز جا$^{-1}$ يعرف كما يلي :

جا$^{-1}$ س = ص اذا وفقط اذا كان جا ص = س ·

حيث – ١ ≤ س ≤ ١ و $-\frac{\pi}{٢} \leq$ ص $\leq \frac{\pi}{٢}$.

ونشير عادة الى هذا الاقتران باقتران قوس الجيب وقد يستعمل قوجا بدلا من جا$^{-1}$ · وسنستعمل كلا الرمزين في دروسنا القادمة . فاذا استعملنا جا$^{-1}$ فالرقم – ١ ليس أسا ولكنه اشارة للاقتران العكسي ..

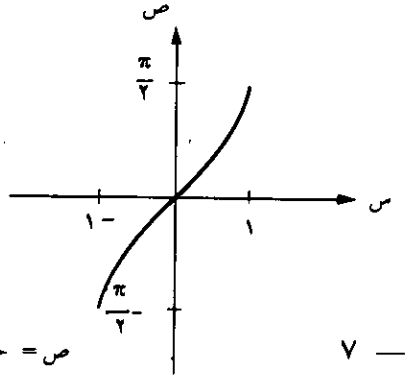
لاحظ انه حسب (٩ – ٢٧) يكون

$-\frac{\pi}{٢} \leqslant$ جا$^{-1}$س $\leqslant \frac{\pi}{٢}$ أو ما يكافئه :

$-\frac{\pi}{٢} \leqslant$ قوجا س $\leqslant \frac{\pi}{٢}$

ويمكن رسم منحنى س = جا ص حيث $-\frac{\pi}{٢} \leqslant$ ص $\leqslant \frac{\pi}{٢}$ باستخدام (٩ – ٢٧) (انظر الشكل ٩ – ٧) .

جا$^{-1}$ (جا س) = س عندما تكون $-\frac{\pi}{٢} \leqslant$ س $\leqslant \frac{\pi}{٢}$ وكذلك



الشكل ٩ — ٧ ص = حا$^{-1}$ س

(٩-٢٨)

جا (جا$^{-١}$ س) = س عندما تكون $-١ \leqslant س \leqslant ١$.

وطبعا يمكن التعبير عن (٩ - ٢٨) بالصيغتين

قوجا (جا س) = س وكذلك جا (قوجا س) = س .

مثال ١ :

أوجد جا$^{-١}$ $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ وكذلك قوجا $(-\frac{١}{٢})$

الحل

اذا كانت ص = جا$^{-١}$ $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ فباستعمال (٩ - ٢٧) ينتج ان

جا ص = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ومن ثم فان ص = $\frac{\pi}{٤}$.

لاحظ انه من الضروري اختيار ص في الفترة $[-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$

فمثل $\frac{٣\pi}{٤}$ خطأ بالرغم من أن جا $\frac{٣\pi}{٤} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$.

وبالمثل اذا كانت ص = قوجا $(-\frac{١}{٢})$ فان جا ص = $-\frac{١}{٢}$ ومن ثم فان ص

= $-\frac{\pi}{٦}$.

ويمكن ان تعقد مناقشات مماثلة لما سبق حول الاقترانات المثلثية الاخرى .

والطريقة المستعملة هي أولا ايجاد مجموعة جزئية للمجال بحيث نحصل على اقتران واحد لواحد وبعدها نطبق (٩ - ٢٦) .

واذا حددنا مجال جيب التمام في الفترة [٠ ، π] نحصل على اقتران متصل ومتناقص له اقتران عكسي متصل ومتناقص وذلك باستعمال (٨ - ٤٣) .

ويقودنا هذا الى التعريف الاتي :

(٩-٢٩) تعريف اقتران جيب التمام العكسي

ان جيب التمام العكسي (ويرمز له بالرمز جتا$^{-١}$) يعرف كما يلي :

جتا$^{-١}$ س = ص اذا وفقط اذا كان جتا ص = س

حيث $-١ \leq س \leq ١$ وكذلك $٠ \leq ص \leq \pi$.

وايضا نشير الى اقتران جيب التمام العكسي باقتران قوس جيب التمام ويستعمل الرمز قوجتا بدلا من جتا$^{-١}$.

وكما في (٩ - ٢٨) اذا كانت $٠ \leq س \leq \pi$ فان

جتا$^{-١}$ (جتا س) = قوجتا (جتا س) = س وكذلك عندما تكون $-١ \leq س \leq ١$ فان جتا (جتا$^{-١}$ س) = جتا (قوجتا س) = س .

(٩-٣٠) تعريف اقتران الظل العكسي

ان اقتران الظل العكسي أو قوس الظل (ونرمز له بالرمز ظا$^{-١}$ أو قوظا) يعرف كما يلي :

ظا$^{-١}$ س = قوظا س = ص اذا وفقط اذا كان ظا ص = س

حيث س اي عدد حقيقي وكذلك $-\frac{\pi}{٢} < ص < \frac{\pi}{٢}$.

والمنحنيان للاقترانين جيب التمام العكسي والظل العكسي مرسومان في الشكل ٩ - ٨ .

مثـال ٢ :

اذا كانت $٠ \leq س \leq ١$ فاكتب جتا (جا$^{-١}$س) كصيغة جبرية في س .

الحـــل :

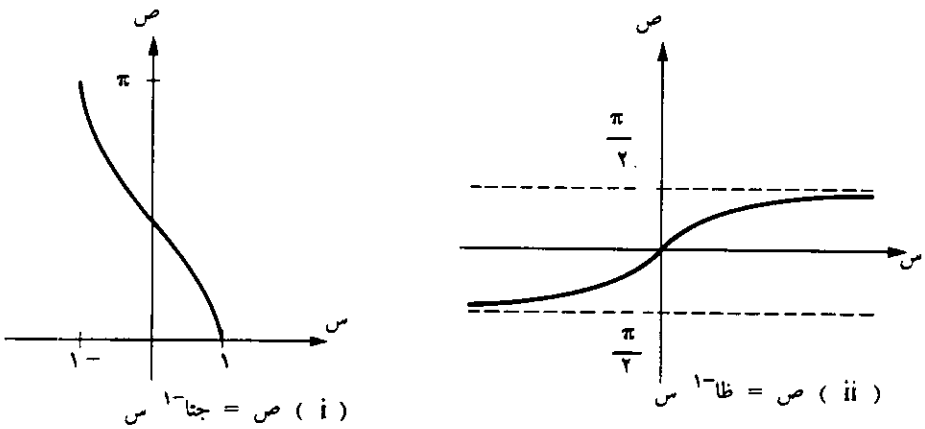
بأخذ ص = جا$^{-١}$ س يكون جا ص = س . ونريد تمثيل جتا ص بدلالة س.فيما

أن $-\frac{\pi}{2} \leq$ ص $\leq \frac{\pi}{2}$ يتبع أن جتا ص $\geqslant$. ومن ثم فان

جتا ص $= \sqrt{١ - \text{جا}^{٢}}$ ص $= \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$ وينتج عن هذا أن

جتا (جا$^{-١}$س) $= \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$

واذا اخذت ص قيما مختلفة من المجموعة $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢} \right] \cup \left[\pi ، \frac{\pi ٣}{٢} \right]$



(i) ص = جتا$^{-١}$ س (ii) ص = ظا$^{-١}$ س

الشكل ٩ — ٨

تأخذ قاص كلا من قيمها مرة واحدة وبذا يتحدد اقتران عكسي .

(٩–٣١) تعريف اقتران القاطع العكسي .

ان اقتران القاطع العكسي أو قوس القاطع (ويرمز له بالرمز قا$^{-١}$أو قوقا) يعرف كالاتي :

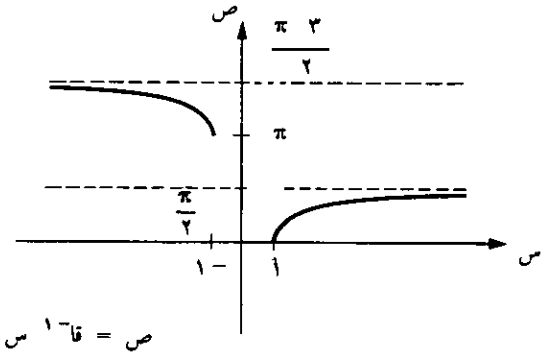
قا$^{-١}$س = قوقا س = ص اذا وفقط اذا كان قا ص = س .

حيث ١ $\leqslant$ | س | وكذلك ص $\in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢} \right] \cup \left[\pi ، \frac{\pi ٣}{٢} \right]$

وبيان ص = قا$^{-١}$مرسوم في الشكل ٩ – ٩ .

والسبب الرئيس لاختيار ص كما في (٩ – ٣١) بدلا من جعلها في المجموعة

$\left[0 ، \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2} ، \pi \right]$ التي تبدو أمرا طبيعيا هو سهولة الحصول على صيغة الاشتقاق لاقتران قاطع الظل العكسي .



الشكل ٩ — ٩

مثـال ٣ :

اذا كانت ١ ≤ | س | فاكتب ظا (قا$^{-1}$ س) كصيغة جبرية في س .

الحـــل :

اذا أخذنا ص = قا$^{-1}$ س يكون قا ص = س . ونريد التعبير عن ظا ص بدلالة س .

من (٩ − ٣١) يكون اما . $\frac{\pi}{2}$ ≤ ص ≤ π أو $\frac{\pi}{2}$ ≤ ص ≤ $\frac{\pi ٢}{٢}$.

ومن ثم فان ظا ص يكون دائما غير سالب ويمكن كتابة

ظا ص = $\sqrt{\text{قا}^2 \text{ ص} - ١}$ = $\sqrt{\text{س}^2 - ١}$ أي أن

ظا (قا$^{-1}$ س) = $\sqrt{\text{س}^2 - ١}$.

٠٠ تمارين :

في التمارين ١ − ١٨ أوجد القيم الدقيقة للاقترانات المعطاة :

١ . (أ) جا$^{-١}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) جا$^{-١}$ $(-\frac{\sqrt{٣}}{٢})$

٢ . (أ) جا$^{-١}$. (ب) قوجتا .

٣ . (أ) جتا$^{-١}$ $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (ب) جتا$^{-١}$ $(-\frac{\sqrt{٢}}{٢})$

٤ . (أ) قوجا (−١) (ب) جتا$^{-١}$ (−١)

٥ . (أ) ظا$^{-١}$ $\sqrt{٣}$ (ب) قوظا $(-\sqrt{٣})$

٦ . (أ) ظا$^{-١}$ (−١) (ب) قوجتا $(\frac{١}{٢})$

٧ . جا جتا$^{-١}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٨ . جتا [جا$^{-١}$ ٠]

٩ . جا [قوجتا $(\frac{٣}{٥})$]

١٠ . ظا [ظا$^{-١}$ ١٠] .

١١ . قوجا (جا $\sqrt{٥}$)

١٢ . ظا$^{-١}$ (جتا ٠)

١٣ . جتا [جا$^{-١}$ $\frac{٣}{٥}$ + ظا$^{-١}$ $\frac{٤}{٣}$]

١٤ . جا [قوجا $\frac{١}{٢}$ + قوجتا ٠] .

١٥ . ظا [قوظا $\frac{٣}{٤}$ + قوجتا $\frac{٣}{٥}$]

١٦ . جتا [٢ جا$^{-١}$ $\frac{٨}{٧}$]

١٧ . جا [٢ قوجتا $(-\frac{٤}{٥})$]

١٨. جا (قوظا $\frac{١}{٢}$ − قوجتا $\frac{٤}{٥}$)

اعد كتابة التمارين ١٩ − ٢٢ كتعبير جبري في س.

١٩. جا (ظا$^{-١}$ س)

٢٠. ظا (قوجتا س)

٢١. جتا ($\frac{١}{٢}$) قوجتا س)

٢٢. جتا (٢ ظا$^{-١}$ س)

حقق المتطابقات في التمارين ٢٣ − ٢٦.

٢٣. جا$^{-١}$ س + جتا$^{-١}$ س = $\frac{\pi}{٢}$

٢٤. جا$^{-١}$ (− س) = − جا$^{-١}$ س.

٢٥. قوظاس + قوظا $\frac{١}{س}$ = $\frac{\pi}{٢}$، س > ٠.

٢٦. قوجا. $\frac{٢س}{١ + س^{٢}}$ = ٢ قوظا س ، | س | ≥ ١

٢٧. عرف ظتا$^{-١}$ بتحديد مجال ظتا للفترة (٠ ، π).

٢٨. عرف قتا$^{-١}$ بتحديد مجال قتا للفترة (٠ ، $\frac{\pi}{٢}$) ∪ (π ، $\frac{\pi}{٢}$)

ارسم مخططات المعادلات في التمارين ٢٩ − ٣٤.

٢٩. ص = جا$^{-١}$ ٢س

٣٠. ص = $\frac{١}{٢}$ ظا$^{-١}$ س

٣١. ص = ٢ جا$^{-١}$ س

٣٢. ص = ظا$^{-١}$ $\frac{١}{٢}$ س

٣٣. ص − ٢ = جا$^{-١}$ (س + ٤)

٣٤. ص = − ١ + ظا$^{-١}$ (س − ٢)

٥ ــ تفاضلات الاقترانات المثلثية العكسية وتكاملاتها :

اذا وضعنا ق (س) = جا س ، هـ (س) = جا$^{-١}$ س في (٨ − ٤٤) فينتج ان اقتران الجيب العكسي هـ قابل للاشتقاق اذا كانت | س | < ١ . وسنستعمل التفاضل الضمني لايجاد هـ (س) . لاحظ اولا انه حسب (٩ − ٧) اذا كانت

ص = جا$^{-١}$ س فان جا ص = س

حيث انه اذا كانت

− ١ ≤ س ≤ ١ فان

$$-\frac{\pi}{٢} \leq ص \leq \frac{\pi}{٢} .$$

وبأخذ المشتقة الضمنية للمعادلة الاخيرة نحصل على أن

جتا ص $د_{س}$ ص = ١ ومن ثم

$$د_{س} ص = د_{س} \text{ جا}^{-١} س = \frac{١}{\text{جتا ص}} .$$

وبما أن $-\frac{\pi}{٢} \leq ص \leq \frac{\pi}{٢}$ تكون جتا ص موجبة ولهذا

$$\text{جتا ص} = \sqrt{١ - \text{جا}^{٢} ص} = \sqrt{١ - س^{٢}}$$

وبالتعويض في الصيغة السابقة عن $د_{س}$ ص ينتج ان

(٩-٣٢) $\frac{د}{د س}$ جا$^{-١}$ س $= \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$ ، شرط ان يكون | س | < ١ ،

واقتران الجيب العكسي ليس قابلاً للاشتقاق عند ± ١ ،
وهذه الحقيقة تتضح من الشكل ٩ - ٧ حيث ان خطوط التماس الرأسية تقع عند نقط الاطراف :
واذا وضعنا ع = ك (س) حيث ك اقتران قابل للاشتقاق و | ك (س) | < ١
فبتطبيق قاعدة السلسلة نحصل على الآتي :

(٩-٣٣) $\frac{د}{د س}$ جا$^{-١}$ ع $= \frac{١}{\sqrt{١ - ع^{٢}}} \frac{د}{د س}$ ع ،

وبالمثل لايجاد مشتقة اقتران جيب التمام العكسي نبدأ بالمعادلتين المتكافئتين
ص = جتا$^{-١}$ س و جتا ص = س حيث | س | < ١ ، ٠ < ص < π وبأخذ مشتقة المعادلة الثانية ضمنيا نحصل على

- جا ص $\frac{د ص}{د س}$ = ١ ومن ثم فان

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د}{د س} \text{ جتا}^{-١} \text{ س} = - \frac{١}{\text{جا ص}} ،$$

وبما أن ٠ < ص < π وكذلك جا ص $= \sqrt{١ - \text{جتا}^{٢} \text{ ص}} = \sqrt{١ - س^{٢}}$ فاذا كانت | س | < ١ فان

$$\frac{د}{د س} \text{ جتا}^{-١} \text{ س} = \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$$

وبصورة عامة اذا اخذنا ع = ك (س) حيث ك قابلة للاشتقاق
و | ك (س) | < ١ فان

(٩-٣٤) $\frac{د}{د س}$ جتا$^{-١}$ ع $= - \frac{١}{\sqrt{١ - ع^{٢}}} \frac{د}{د س}$ ع ،

مثـال ١ :

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ اذا كانت ص = جا$^{-١}$ ٣س – جتا$^{-١}$ ٣س .

الحـــل :

بتطبيق (٩ – ٣٣) و (٩ – ٣٤) فان

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{٣}{\sqrt{١ - ٩س^{٢}}} + \frac{٣}{\sqrt{١ - ٩س^{٢}}} = \frac{٦}{\sqrt{١ - ٩س^{٢}}}$$

وينتج من (٨ – ٤٤) ان اقتران الظل العكسي يكون قابلا للاشتقاق عند أي عدد حقيقي . واذا اعتبرنا المعادلتين المتكافئتين :

ص = ظا$^{-١}$ س و ظا ص = س حيث $-\frac{\pi}{٢} <$ ص $< \frac{\pi}{٢}$.

وبأخذ المشتقة الضمنية للمعادلة الثانية ينتج ان

قا^{٢} ص $د_{س}$ ص = ١ ومن ثم

$$د_{س} ص = د_{س} ظا^{-١} س = \frac{١}{قا^{٢} ص} .$$

وباستعمال المساواة قا^{٢} ص = ١ + ظا^{٢} ص = ١ + س^{٢} نحصل على أن

$$د_{س} ظا^{-١} س = \frac{١}{١ + س^{٢}} \qquad (٩-٣٥)$$

ويمكن تعميم الصيغة السابقة لتصبح

$$د_{س} ظا^{-١} ع = \frac{١}{١ + ع^{٢}} د_{س} ع . \qquad (٩-٣٦)$$

حيث ان ع = ك (س) و ك قابلة للاشتقاق .

مثـال ٢ :

أوجد قَ (س) اذا كانت ق (س) = ظا$^{-١}$ $e^{٢س}$

الحـــل :

باستعمال (٩ – ٣٦) نحصل على ان

$$قَ(س) = \frac{١}{(e^{٢س}) + ١} \, د_س \, e^{٢س} = \frac{e^{٢س} \cdot ٢}{e^{٤س} + ١}$$

وأخيراً اعتبر المعادلتين المتكافئتين

ص = قا$^{-١}$ س و قاص = س

حيث ص تنتمي الى المجموعة $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢} \right] \cup \left[\pi ، \frac{٣\pi}{٢} \right]$

وبمفاضلة المعادلة الاخيرة ضمنيا نحصل على :

قا ص ظا ص $د_س$ ص = ١

أو عندما تكون ظا ص ≠ ٠ فان

$$د_س ص = د_س \, قا^{-١} س = \frac{١}{قاس \, ظا \, ص}$$

وباستخدام الحقيقة

$$ظا ص = \sqrt{قا^{٢} ص - ١}$$

$$= \sqrt{س^{٢} - ١} \quad \text{نحصل على أن}$$

(٩–٣٧) $$د_س \, قا^{-١} س = \frac{١}{س \sqrt{س^{٢} - ٢}}$$ بشرط ان تكون | س | > ١ .

واقتران القاطع العكسي غير قابل للاشتقاق عند س = + ١ . فللبيان مماسان رأسيان عند النقطتين س = + ١ (انظر الشكل ٩ – ٩) . وباستخدام قاعدة

السلسلة اذا كانت ع = ك (س) حيث ك قابلة للاشتقاق وكذلك | ك (س) | > ١ فان

$$\text{د}_{\text{س}}\ \text{قا}^{-1}\ \text{ع} = \frac{1}{\text{ع}\sqrt{\text{ع}^2 - 1}}\ \text{د}_{\text{س}}\ \text{ع} \cdot \qquad (٣٨-٩)$$

مثال ٣ :

أوجد صَ اذا كانت ص = قا$^{-1}$ س^2 .

الحـــل :

بتطبيق (٩ – ٣٨) فان

$$\text{صَ} = \frac{1}{\text{س}^2\sqrt{\text{س}^4 - 1}}(2\text{س}) = \frac{2}{\text{س}\sqrt{\text{س}^4 - 1}}$$

وباتباع نفس الاسلوب الذي طبقناه عدة مرات من قبل يمكن استعمال صيغ مشتقات الاقترانات المثلثية العكسية لايجاد صيغ للتكاملات . ويترك براهين كل من الاتي للقاريء .

$$\int \frac{1}{\sqrt{\text{ع}^2 - 1}}\ \text{د ع} = \text{جا}^{-1}\ \text{ع} + \text{جـ} \qquad (٣٩-٩)$$

$$\int \frac{1}{1 + \text{ع}^2}\ \text{د ع} = \text{ظا}^{-1}\ \text{ع} + \text{جـ} \qquad (٤٠-٩)$$

$$\int \frac{1}{\text{ع}\sqrt{\text{ع}^2 - 1}}\ \text{د ع} = \text{قا}^{-1}\ \text{ع} + \text{جـ} . \qquad (٤١-٩)$$

حيث اننا افترضنا أن ع محددة تحديدا ملائما .

مثـال ٤ :

أوجد $\int \frac{e^{٢س}}{\sqrt{١ - e^{٤س}}}$ د س

الحـــل :

اذا وضعنا ع $= e^{٢س}$ فان د ع $= ٢ e^{٢س}$ د س

ويمكن كتابة التكامل بالصيغة (٩ – ٣٩) كالاتي :

$$\int \frac{e^{٢س}}{\sqrt{١ - e^{٤س}}} \text{ د س} = \frac{١}{٢} \int \frac{٢ e^{٢س}}{\sqrt{١ - (e^{٢س})^{٢}}} \text{ د س}$$

$$= \frac{١}{٢} \int \frac{١}{\sqrt{١ - ع^{٢}}} \text{ د ع}$$

$$= \frac{١}{٢} \text{ جا}^{-١} ع + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٢} \text{ جا}^{-١} e^{٢س} + \text{جـ}$$

ويمكن تعميم الصيغ (٩ – ٣٩) الى (٩ – ٤١) كما يلي :

$$\int \frac{١}{\sqrt{ب^{٢} - ع^{٢}}} \text{ د ع} = \text{جا}^{-١} \frac{ع}{ب} + \text{جـ} \qquad (٩-٤٢)$$

$$\int \frac{١}{ب^{٢} + ع^{٢}} \text{ د ع} = \frac{١}{ب} \text{ ظا}^{-١} \frac{ع}{ب} + \text{جـ}.$$

$$\int \frac{١}{ع \sqrt{ع^{٢} - ب^{٢}}} \text{ د ع} = \frac{١}{ب} \text{ قا}^{-١} \frac{ع}{ب} + \text{جـ}. \qquad (٩-٤٤)$$

ولنبرهن (٩ – ٤٣) .

اذا وضعنا ع = هـ (س) فباستخدام (٩ – ٣٥) ينتج ان

$$\text{س} \frac{١}{\text{أ}} \quad \text{ظا}^{-١} \frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{أ}}$$

$$= \frac{١}{\text{أ}} \quad \frac{١}{١ + \left(\frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{أ}}\right)^{٢}} \quad \text{د س} \quad \frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{أ}}$$

$$= \frac{١}{\text{أ}} \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{أ}^{٢} + (\text{هـ}(\text{س}))^{٢}} \frac{١}{\text{أ}} \text{هـَ}(\text{س})$$

وبهذا فان

$$\int \frac{١}{\text{أ}^{٢} + (\text{هـ}(\text{س}))^{٢}} \text{هـَ}(\text{س}) \, \text{د س}$$

$$= \frac{١}{\text{أ}} \text{ظا}^{-١} \frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{أ}} + \text{جـ} .$$

وهي نفس النتيجة كما في (٩ – ٤٣) .

وسنترك تحقيق كل من (٩ – ٤٢) و (٩ – ٤٤) كتمارين

مثال ٥ :

أوجد $\int \frac{\text{س}^{٢}}{٥ + \text{س}^{٦}} \, \text{د س}$.

الحل :

اذا وضعنا ع = $\text{س}^{٣}$ فان د ع = ٣ $\text{س}^{٢}$ د س ويمكن كتابة التكامل بالصيغة (٩ — ٤٣) كما يلي :

$$\int \frac{س^{٢}}{٥ + س^{٦}} \, د س = \frac{١}{٣} \int \frac{٣ س^{٢}}{٥ + (س^{٣})^{٢}} \, د س .$$

$$= \frac{١}{٣} \int \frac{١}{(\sqrt{٥})^{٢} + ع^{٢}} \, د ع$$

$$= \frac{١}{٣} \cdot \frac{١}{\sqrt{٥}} \text{ ظا}^{-١} \frac{ع}{\sqrt{٥}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\sqrt{٥}}{١٥} \text{ ظا}^{-١} \frac{س^{٣}}{\sqrt{٥}} + \text{جـ}$$

تمارين :

في التمارين ١ — ١٨ أوجد قَ (س) اذا كانت ق (س) تساوي الصيغة المعطاة .

١ . ظا$^{-١}$ (٣ س − ٥)

٢ . جا$^{-١}$ $\frac{س}{٣}$ $\sqrt{س}$

٣ . حا$^{-١}$ $\sqrt{س}$

٤ . ظا$^{-١}$ $س^{٢}$

٥ . لـهـ^{س} قوقا لـهـ^{س}

٦ . $\sqrt{\text{قوقا } ٣ س}$

٧ . $س^{٢}$ قوظا $س^{٢}$

٨ . ظا$^{-١}$ جا ٢ س

٩ . (١ + جتا$^{-١}$ ٣ س)^{٣}

١٠ . $س^{٢}$ قا$^{-١}$ ٥ س

١١ . لط قوظا $س^{٢}$

١٢ . قوجا لط س

١٣ . $\frac{١}{\text{جا}^{-١}\, س}$ ١ جا$^{-١}$ س

١٤ . قوظا $\frac{س + ١}{س - ١}$

١٥ . قا$^{-١}$ $\sqrt{س^{٢} - ١}$

١٦ . $(\frac{١}{س} - \text{قوجا}\, \frac{١}{س})^{٤}$

١٧ . $\frac{\text{قوظا}\, س}{س^{٢} + ١}$

١٨ . جتا$^{-١}$ جتا $e^{س}$

أوجد صَ في التمرينين ١٩ و ٢٠

١٩ . $س^{٢} + س\, \text{جا}^{-١}\, ص = ص\, e^{س}$

٢٠ . لط (س + صَ) = ظا$^{-١}$ س ص .

احسب التكاملات في التمارين ٢١ — ٣٠ .

٢١ . $\int_{٠}^{٤} \frac{١}{س^{٢} + ١٦}\, د س$

٢٢ . $\int_{٠}^{١} \frac{e^{س}}{e^{٢س} + ١}\, د س$

٢٣ . $\int_{0}^{\frac{\sqrt{٢}}{٢}} \frac{س}{\sqrt{١ - س^{٤}}}$ د س

٢٤ . $\int_{\frac{٢}{\sqrt{٣}}}^{٢} \frac{١}{س\sqrt{س^{٢} - ١}}$ د س

٢٥ . $\int \frac{جا\ س}{جتا^{٢}\ س + ١}$ د س

٢٦ . $\int \frac{جتا\ س}{\sqrt{٩ - جا^{٢}\ س}}$ د س

٢٧ . $\int \frac{١}{\sqrt{س\ (١ + س)}}$ د س

٢٨ . $\int \frac{١}{\sqrt{e^{س} - ١}\ e^{٢س}}$ د س

٢٩ . $\int \frac{e^{س}}{\sqrt{e^{٢س} - ١٦}}$ د س

٣٠ . $\int \frac{قاس\ ظاس}{١ + قا^{٢}\ س}$ د س

٣١ . أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين مخططات المعادلات

ص = $\frac{٤}{\sqrt{١٦ - س^{٢}}}$ ، س = − ٢ ، س = ٢ ، ص = ٠

٣٢ . اذا كانت ق (س) = $\frac{س^{٢}}{١ + س^{٦}}$ فأوجد المساحة المحصورة تحت منحنى ق من س = ٠ الى س = ١ .

٣٣ . اذا كان طولا الضلعين المجاور والمقابل للزاوية ث في مثلث قائم الزاوية هما ١٠ اقدام و ٧ اقدام على الترتيب مع احتمال $\frac{١}{٢}$ انش خطأ في قياس كل ١٠ قدم فاستعمل تفاضلة اقتران مثلثي عكسي لتقريب الخطأ في حساب قيمة ث .

٣٤ . استعمل التفاضلات لتقريب التغير في قوجا س اذا تغيرت س من ٢٥ , ٠ الى ٢٦ , ٠ .

٣٥ . تحلق طائرة على علو ٥ أميال وتسير بسرعة ٥٠٠ ميل في الساعة مبتعدة عن مشاهد يرقبها على الارض . استعمل الاقترانات العكسية لايجاد معدل التغير في زاوية الارتفاع عندما تكون الطائرة على بعد ٢ ميل عن المشاهد .

٣٦ . مصباح كشاف على بعد $\frac{١}{٨}$ الميل من النقطة أ وهي اقرب نقطة اليه على طريق مستقيمة . وهو مسلط على سيارة سائرة على الطريق تسير بمعدل ٥٠ ميل في الساعة . استعمل اقترانات مثلثية عكسية لايجاد سرعة دوران الكشاف عندما تكون السيارة على بعد $\frac{١}{٤}$ الميل من أ .

٣٧ . لوحة اعلانات ارتفاعها ٢٠ قدما نصبت في اعلى بناء . فاذا كانت قاعدتها على بعد ٦٠ قدما من مستوى عين المشاهد الواقف على الارض . فاستعمل الاقترانات العكسية لايجاد بعد المشاهد عن نقطة تقع تحتها مباشرة عندما تكون الزاوية بين خطي الرؤية لقمة اللوحة وقاعدتها أكبر ما يمكن .

٣٨ . اذا كانت أ (٣ ، ١) ، ب (٦ ، ٤) نقطتين في نظام الاحداثيات المتعامدة ، أوجد الاحداثي السيني للنقطة ع الواقعة على محور السينات بحيث أن الزاوية أ ع ل لها أكبر قيمة .

٣٩ . برهن ٩ – ٤٢

٤٠ . برهن (٩ – ٤٤) .

٤١ . أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى ص = جا$^{-١}$ (س – ١) عند النقطة ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٦}$) .

٤٢ . أوجد النقط الواقعة على بيان ص = ظا$^{-1}$ ٢ س
التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم ١٣ ص − ٢ س + ٥ = ٠

٤٣ . أوجد الفترات التي يكون عندها بيان ص = ظا$^{-1}$ س
(أ) محدبا (ب) مقعرا .

٤٤ — سرعة ذرة تتحرك على خط مستقيم في اللحظة ن هي (١ + ن^{٢})$^{-1}$ قدم/ ثانية .
فاذا كانت الذرة عند نقطة الاصل عندما كانت ن = ٠
أوجد موضعها عند اللحظة التي يكون فيها التسارع $-\frac{١}{٢}$ قدم / ث^{٢} .

٦ — الاقترانات الزائديـــة : Hyperbolic Functions

تظهر الصيغتان ($e^{س} - e^{-س}$) / ٢ ، ($e^{س} + e^{-س}$) / ٢ في بعض التطبيقات الفيزيائية للرياضيات . وهما يشبهان من وجوه كثيرة الاقترانين جا س و جتا س . اضف الى ذلك انه يمكن اثبات انهما مرتبطان بالقطع الزائد بنفس الطريقة التي يرتبط بها كل من جا س وجتا س بدائرة الوحدة . ولهذا يدعى هذان الاقترانات بالجيب الزائدي (جاز) وجيب التمام الزائدي (جتا ز) للاقتران س ويستعملان لتعريف الاقترانات الزائدية التالية :

(٩ − ٤٥) تعريف جاز و جتاز

ان اقتران الجيب الزائدي (ونرمز له بالرمز جاز) واقتران جيب التمام الزائدي (ونرمز له بالرمز جتاز) يعرفان كما يلي :

$$\text{جاز س} = \frac{e^{س} - e^{-س}}{٢} \quad ، \quad \text{جتاز س} = \frac{e^{س} + e^{-س}}{٢}$$

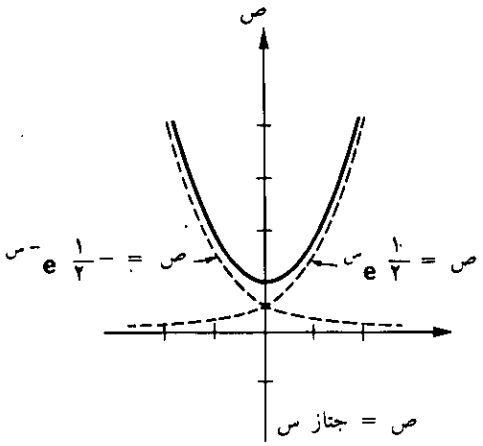
لجميع الاعداد الحقيقية س .

ويمكن ايجاد منحنى ص = جتا ز س بالطريقة التي تدعى جمع الاحداثيات الصادية . ولاستعمال هذه الطريقة نرسم المنحنيين ص = $\frac{١}{٢}$ $e^{س}$ و ص = $\frac{١}{٢}$ $e^{-س}$ كما هو مشار بالخطوط المقطعة في الشكل ٩ − ١٠ . ويمكن ايجاد الاحداثيات الصادية للنقطة الواقعة على المنحنى ص = جتا ز س بجمع الاحداثيات الصادية الواقعة على المنحنيين الاخرين . وبالرسم تظهر هذه النتائج في الشكل ، وواضح من المنحنى ان مدى جتا ز هو [١ ، ∞) . ويمكن برهان هذا ايضا مباشرة .

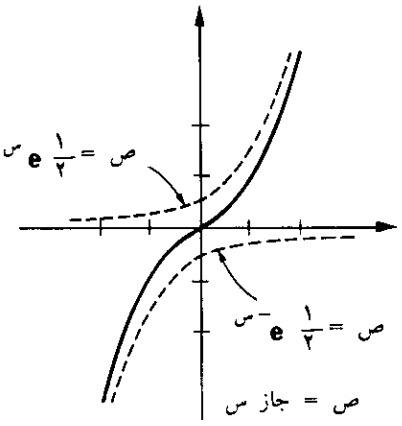
واذا كان أ عددا حقيقيا موجبا فان منحنى المعادلة ص = أ جتا ز $\frac{س}{أ}$ يسمى الكتينة (Catenary)

ويمكن اثبات انه عند تثبيت سلك مرن من طرفيه كما هو الحال في اسلاك التلفون أو خطوط الكهرباء يكون شكل المنحنى المتكون من السلك هو شكل الكتينه

ويمكن ايجاد منحنى ص = جاز س بجمع الاحداثيات الصادية للمنحنيين ص = $\frac{١}{٢}$ $e^{س}$ ، ص = $-\frac{١}{٢}$ $e^{-س}$ كما هو موضح في الشكل ٩ – ١١ .



الشكل ٩ — ١٠



الشكل ٩ — ١١

وبطريقة مشابهة لتلك المستعملة للاقترانات المثلثية يمكن تعريف الاقترانات الزائدية للظل وظل التمام والقاطع وقاطع التمام (ويرمز اليها ظا ز وظتا ز و قتا ز) على الترتيب كما يلي :

$$\text{ظاز س} = \frac{\text{جا ز س}}{\text{جتا ز س}} = \frac{e^{س} - e^{-س}}{e^{س} + e^{-س}}$$

$$\text{ظتا ز س} = \frac{\text{جتا زس}}{\text{جا ز س}} = \frac{e^{س} + e^{-س}}{e^{س} - e^{-س}} \text{ ، س} \neq .$$

$$\text{قتا ز س} = \frac{1}{\text{جا ز س}} = \frac{2}{e^{س} - e^{-س}}\text{، س} \neq .$$

$$\text{قاز س} = \frac{1}{\text{جتا ز س}} = \frac{2}{e^{س} + e^{-س}}$$

وللاقترانات الزائدية متطابقات عديدة شبيهة بمتطابقات الاقترانات المثلثية . واليك مثالا على ذلك على اعتبار ان جتاز^{2} س تعنى (جتاز س)^{2} ومثلها للاقترانات الزائدية الاخرى . يمكن ان نبين ان

(٩ – ٤٦) جتاز^{2} س – جاز^{2} س = ١

فمن (٩ – ٤٥) :

$$\text{جتاز}^{2}\text{ س} - \text{جاز}^{2}\text{ س} = \left(\frac{e^{س} + e^{-س}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{e^{س} - e^{-س}}{2}\right)^{2}$$

ويمكن كتابة الطرف الايمن

$$\frac{e^{2س} + 2 + e^{-2س}}{4} - \frac{e^{2س} - 2 + e^{-2س}}{4}$$

التي تختصر الى ١ . وهذا يثبت (٩ – ٤٦) .

وبقسمة طرفي (٩ – ٤٦) على جتا ز^{2} س واستخدام التعريفين لكل من ظا ز س و قا ز س نحصل على ان

١ – ظاز^{2} س = قاز^{2} س

وبالمثل

ظتا ز^{2} س – ١ = قتا^{2} س

وستجد متطابقات اخرى في التمارين .

وبما أن $\frac{د}{د س} e^{ع} = e^{ع} \frac{د ع}{د س}$ وكذلك $\frac{د}{د س} e^{-ع} = -e^{-ع} \frac{د ع}{د س}$

فينتج من تعريف كل من جا ع وجتا ز ع أن

(٤٧-٩) $\frac{د}{د س}$ جا ز ع = جتا ز ع $\frac{د ع}{د س}$.

(٤٨-٩) $\frac{د}{د س}$ جتا ز ع = جا ز ع $\frac{د ع}{د س}$.

وبتطبيق قاعدة المقسومين نحصل على أن

$$\frac{د}{د س} \text{ظا ز س} = \frac{د}{د س} \frac{\text{جتا ز س}}{\text{جا ز س}}$$

$$= \frac{\text{جتا ز س} \frac{د}{د س} \text{جا ز س} - \text{جا ز س} \frac{د}{د س} \text{جتا ز س}}{\text{جتا}^{٢} \text{س}}$$

$$= \frac{\text{جتاز}^{٢} \text{س} - \text{جاز}^{٢} \text{س}}{\text{جتاز}^{٢} \text{س}}$$

$$= \frac{١}{\text{جتاز}^{٢} \text{س}} = \text{قاز}^{٢} \text{س}.$$

واذا كانت ع = هـ (س) حيث هـ قابلة للاشتقاق فان

(٤٩-٩) $\frac{د}{د س}$ ظا ز ع = قاز^{٢} ع $\frac{د ع}{د س}$

ويمكن اثبات أن

(٥٠-٩) $\frac{د}{د س}$ قاز ع = − قاز ع ظاز ع $\frac{د ع}{د س}$

وصيغ التكامل المقابلة ل (٩-٤٧) الى (٩-٥٠) هي

$$\int \text{جا} z \, dz = -\text{جتا} z + \text{جـ}$$

$$\int \text{جتا} z \, dz = \text{جا} z + \text{جـ}$$

$$\int \text{قا}^2 z \, dz = \text{ظا} z + \text{جـ}$$

$$\int \text{قا} z \, \text{ظا} z \, dz = \text{قا} z + \text{جـ}.$$

وعلى القاريء أن يلاحظ باهتمام مدى التشابه في صيغ هذا البند مع الاقترانات المثلثية وكذلك الخلافات الحاصلة.

وتشمل الاخيرة تغيرا في الاشارة لصيغ معينة.

تمارين :

حقق المتطابقات في التمارين ١ - ١٠.

١. $\text{جتا} z + \text{جا} z = e^{z}$

٢. $\text{جتا} z - \text{جا} z = e^{-z}$

٣. $\text{جا}(-z) = -\text{جا} z$.

٤. $\text{جتا}(-z) = \text{جتا} z$.

٥. $\text{جا}(z + w) = \text{جا} z \, \text{جتا} w + \text{جتا} z \, \text{جا} w$

٦. $\text{جتا}(z + w) \, \text{جتا} z \, \text{جتا} w + \text{جا} z \, \text{جا} w$

٧. $\text{جا} 2z = 2 \, \text{جا} z \, \text{جتا} z$.

٨. $\text{جتا} 2z = \text{جتا}^2 z + \text{جا}^2 z$.

٩. $\text{ظا}(z + w) = \dfrac{\text{ظا} z + \text{ظا} w}{1 + \text{ظا} z \, \text{ظا} w}$

١٠. $\text{ظا} 2z = \dfrac{2 \, \text{ظا} z}{1 + \text{ظا}^2 z}$

١١. برهن (٩ – ٤٧) و (٩ – ٤٨).

١٢. برهن (٩ – ٥٠).

١٣. اشتق صيغة للاقتران $\frac{د}{س}$ ظتاز س.

١٤. اشتق صيغة للاقتران $\frac{د}{س}$ قتاز س.

في التمارين ١٥ – ٢٤ أوجد قَ (س) اذا كانت ق (س) مساوية للصيغة المعطاة

١٥. جتاز $س^{٣}$

١٦. جاز $(س^{٢} + ١)$

١٧. $جتاز^{٣}$ س

١٨. $جا^{٢}$ ز ٣س

١٩. لط جاز ٢س

٢٠. قوظا ظاز س

٢١. $e^{٣س}$ قاز س

٢٢. $\sqrt{}$قاز ٥س

٢٣. $\frac{١}{\text{ظاز س} + ١}$

٢٤. $\frac{١ + \text{جتاز س}}{١ - \text{جتاز س}}$

٢٥. اوجد ص اذا كانت جاز س ص = ص $e^{س}$.

٢٦. أوجد ص اذا كانت $س^{٢}$ ظاز ص = لط ص.

احسب التكاملات في التمارين ٢٧ – ٣٢.

٢٧. $\int \frac{\text{جاز } \sqrt{س}}{\sqrt{س}}$ ء س

٢٨ . $\int \frac{\text{جتاز لط س}}{\text{س}}$ ء س

٢٩ . $\int \frac{\text{جتاز س}}{\text{جا ز س}}$ ء س

٣٠ . $\int \frac{١}{\text{جتاز}^{٢}\ ٣\text{س}}$ ء س

٣١ . $\int$ جاز س جتاز س ء س

٣٢ . $\int$ قاز^{٢} س ظاز س ء س

٣٣ . أوجد مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات ص = جاز ٣ س ، ص = ٠ ، س = ١ .

٣٤ . أوجد طول المنحنى ص = جتاز س من س = ٠ الى س = ١ .

٣٥ . أوجد النقط على المنحنى ص = جاز س التي يكون عندها ميل المماس ٢ .

٣٦ . اذا دارت المنطقة المحدودة بالمنحنيات ص = جتاز س ، ص = − ١ ، س = ١ و ص = ٠ حول محور السينات . أوجد حجم الجسم الناتج .

ارسم منحنيات المعادلات في التمارين ٣٧ − ٤٠ .

٣٧ . ص = ظاز س

٣٨ . ص = ظتاز س

٣٩ . ص = قاز س

٤٠ . ص = قتاز س .

٧ — الاقترانات الزائدة العكسية : Inverse Hyperbolic Functions

ان اقتران الجيب الزائدي متصل ومتزايد لكل س ومن ثم فله اقتران عكسي نرمز له بالرمز جاز$^{-١}$ وزيادة على ذلك فان

ص = جاز$^{-1}$ س اذا وفقط اذا كان س = جاز ص .

ويمكن استعمال المعادلة الاخيرة لايجاد صيغة صريحة للاقتران جاز$^{-1}$ س .

وهذا اذا كانت

$$\text{س} = \text{جاز}^{-1}\ \text{ص} = \frac{e^{\text{ص}} - e^{-\text{ص}}}{2} \quad \text{فان}$$

$$e^{\text{ص}} - 2\text{س} - e^{-\text{ص}} = 0$$

وبضرب طرفي المعادلة الاخيرة بالمقدار $e^{\text{ص}}$ ينتج ان

$$e^{2\text{ص}} - 2\text{س}\, e^{\text{ص}} - 1 = 0$$

وبتطبيق الصيغة التربيعية يكون

$$e^{\text{ص}} = \frac{2\text{س} \pm \sqrt{4\text{س}^2 + 4}}{2} \quad \text{اي ان} \quad e^{\text{ص}} = \text{س} \pm \sqrt{\text{س}^2 + 1}$$

وبما ان $e^{\text{ص}}$ لا يمكن ان تكون سالبة نهمل الاشارة السالبة . ونأخذ اللوغرتمات الطبيعية لطرفي المعادلة فنحصل على

ص = لط (س + $\sqrt{\text{س}^2 + 1}$) أي أن

$$\text{جاز}^{-1}\text{س} = \text{لط}\ (\text{س} + \sqrt{\text{س}^2 + 1}) \qquad (9-51)$$

ويتبع من (٩ − ٥١) ان

$$\text{د جاز}^{-1}\ \text{س} = \frac{1}{\text{س} + \sqrt{\text{س}^2 + 1}} \left(1 + \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2 + 1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 1} + \text{س}}{(\text{س} + \sqrt{\text{س}^2 + 1})\sqrt{\text{س}^2 + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\text{س}^2 + 1}}$$

ويمكن تعميم هذه الصيغة بالطريقة العادية . وبالتخصيص اذا كانت ع = هـ (س) حيث هـ اقتران قابل للاشتقاق فان

$$(٥٢-٩) \quad د_س \text{ جاز}^{-١} ع = \frac{١}{\sqrt{١ + ع^٢}} د_س ع .$$

ويترك للتمرين اثبات أن

$$(٥٣-٩) \quad \int \frac{١}{\sqrt{٢ف + ع^٢}} د ع = \text{جاز}^{-١} \frac{ع}{ف} + \text{جـ حيث } ف > ٠ .$$

وتعرف الاقترانات الزائدة العكسية المتبقية بنفس الطريقة . وكما هو الحال في الاقترانات المثلثية فمن الضروري ان نحدد المجال احيانا كي يكون الاقتران العكسي موجودا .

وكمثال اذا كان مجال جتاز محددا بمجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة فيكون الاقتران الناتج متصلا ومتزايدا واقترانه العكسي جتاز$^{-١}$ معرفا كالآتي :

ص = جتاز$^{-١}$ س اذا وفقط اذا كان جتاز ص = س ، ص $\geq$.

وباستعمال الطريقة التي استخدمت لاشتقاق (٩ – ٥١) يمكن اثبات ان

$$(٥٤-٩) \quad \text{جتاز}^{-١} س = \text{لط} (س + \sqrt{س^٢ - ١}) ، س \geq ١ .$$

وكما في برهان (٩ – ٥٢) يتبع أن

$$(٥٥-٩) \quad د_س \text{ جتاز}^{-١} ع = \frac{١}{\sqrt{ع^٢ - ١}} د_س ع ، ع > ١ .$$

ويمكن للقارىء أن يثبت أن

$$(٥٦-٩) \quad \int \frac{١}{\sqrt{ع^٢ - ٢ف}} د ع = \text{جتاز}^{-١} \frac{ع}{ف} + \text{جـ حيث ع} > ف > ٠$$

وبالمثل فاقتران الظل الزائدي العكسي (يرمز له بالرمز ظاز$^{-١}$) يعرف كما يلي :

ص = ظاز$^{-١}$ س اذا وفقط اذا كان ظاز ص = س

ومن هنا يتبع أن

(٩-٥٧) $\text{ظاز}^{-١}س = \frac{١}{٢}\text{لط}\frac{١+س}{١-س}$ ، $|س| < ١$

(٩-٥٨) $د_س \text{ظاز}^{-١}ع = \frac{١}{١-ع^{٢}} د_س ع$ ، $|ع| < ١$

(٩-٥٩) $\int \frac{١}{ا^{٢}-ع^{٢}} د ع = \frac{١}{ا}\text{ظاز}^{-١}\frac{ع}{ا} + ج$

حيث $ا > ٠$ ، $|ع| < ا$.

واخيرا اذا حددنا مجال قاز لمجموعة الاعداد غير السالبة ينتج أن الاقتران واحد لواحد ونعرف

$ص = \text{قاز}^{-١}س$ اذا وفقط اذا كان $\text{قاز}ص = س$ ، $ص \geq ٠$.

ويمكن برهان أن

$$\text{قاز}^{-١}س = \text{لط}\left(\frac{١+\sqrt{س^{٢}+١}}{س}\right) ، \quad ٠ < س \leq ١$$

وكذلك

$$د_س \text{قاز}^{-١}ع = \frac{١}{ع\sqrt{١+ع^{٢}}} د_س ع ، \quad ٠ < ع < ١$$

ويمكن أن تعقد مناقشات مشابهة لكل من $\text{ظتاز}^{-١}$ و $\text{قتاز}^{-١}$.

تمارين :

اشتق الصيغ المذكورة في التمارين ١ - ٦ .

١ . (٩ - ٥٤)
٢ . (٩ - ٥٧)
٣ . (٩ - ٥٥)
٤ . (٩ - ٥٨)
٥ . (٩ - ٥٦)
٦ . (٩ - ٥٩)

ارسم مخططات المعادلات في التمارين ١ – ١٠

٧ . ص = جاز$^{-١}$ س

٨ . ص = جتاز$^{-١}$ س .

٩ . ص = ظاز$^{-١}$ س

١٠ . ص = قاز$^{-١}$ س .

في التمارين ١١ – ٢٠ أوجد قَ (س) اذا كانت ق (س) تساوي الصيغة المعطاة .

١١ . جاز$^{-١}$ ٥س

١٢ . ظتاز$^{-١}$ س

١٣ . جتاز$^{-١}$ $\sqrt{\text{س}}$

١٤ . $\sqrt{\text{جتاز}^{-١}\ \text{س}}$

١٥ ظا ز$^{-١}$ (س^{٢} – ١)

١٦ . ظاز$^{-١}$ جا ٣س

١٧ . س جاز$^{-١}$ $\left(\frac{١}{\text{س}}\right)$

١٨ . $\frac{١}{\text{جاز}^{-١}\ \text{س}^{٣}}$

١٩ . لط جتا ز$^{-١}$ ٤س

٢٠ . جتا ز$^{-١}$ لط ٤س

احسب التكاملات في التمارين ٢١ – ٢٦ .

٢١. $\int \frac{1}{\sqrt{٩س^٢ + ٢٥}}$ د س

٢٢. $\int \frac{1}{\sqrt{١٦س^٢ - ٩}}$ د س

٢٣. $\int \frac{1}{٤٩ - ٤س^٢}$ د س

٢٤. $\int \frac{\text{جا س}}{١ + \text{جتا}^٢ س}$ د س

٢٥. $\int \frac{هـ^{س}}{\sqrt{هـ^{٢س} - ١٦}}$ د س

٢٦. $\int \frac{٢}{٥ - ٣س^٢}$ د س

٢٧. استعمل (٩ – ٥٣) و (٩ – ٥١) لبرهنة انه اذا كانت أ > . فان

$$\int \frac{1}{\sqrt{ع^٢ + أ^٢}} \text{د ع} = \text{لط} (ع + \sqrt{ع^٢ + أ^٢}) + \text{جـ}.$$

٢٨. استعمل (٩ – ٥٦) و (٩ – ٥٤) لبرهنة انه اذا كانت ع > أ > . فان

$$\int \frac{1}{\sqrt{ع^٢ - أ^٢}} \text{د ع} = \text{لط} (ع + \sqrt{ع^٢ - أ^٢}) + \text{جـ}$$

٨ — تمارين مراجعة :

شفهية :

عرف أو ناقش كلا مما يأتي :

١ . صيغ التفاضل للاقترانات المثلثية

٢ . صيغ التكامل للاقترانات المثلثية

٣ . الاقترانات العكسية المثلثية

٤ . تفاضل وتكامل صيغ الاقترانات المثلثية العكسية

٥ . الاقترانات الزائدية

٦ . الاقترانات الزائدية العكسية .

كتابية :

أوجد قَ (س) اذا كانت ق (س) معرفة كما في التمارين ١ — ٢٠ .

١ . $جا^{٣} \, e^{-٢س}$

٢ . لط $جتا^{٢} \, ٣س$

٣ . $e^{-س^{٢}} \, ظتا \, س^{٢}$

٤ . $قا \, ٥س \, ظا \, ٥س$

٥ . $\dfrac{قتا \, س + ١}{ظتا \, س + ١}$

٦ . $\dfrac{١ - س^{٢}}{قوجتا \, س}$

٧ . $جا^{-١} \, \sqrt{١ - س^{٢}}$

٨. $\sqrt{\text{جا}^{-1}(1 - س^2)}$

٩. ظا (جا ٣س)

١٠. $\sqrt{\text{جا}\sqrt{س}}$

١١. $(\text{ظا } س + \text{ظا}^{-1} س)^4$

١٢. $e^{٤س}$ قا$^{-1}$ $e^{٤س}$

١٣. ظا$^{-1}$ (ظا$^{-1}$ س)

١٤. $e^{س}$ جتا ز س

١٥. $e^{-س}$ جاز $e^{-س}$

١٦. لط ظاز (٥س + ١)

١٧. $\dfrac{\text{جاز س}}{\text{جتاز س} - \text{جاز س}}$

١٨. $\frac{١}{س}$ ظاز $\frac{١}{س}$

١٩. جا ز$^{-1}$ س^2

٢٠. جتا ز$^{-1}$ ظا س.

أوجد التكاملات في التمارين ٢١ – ٣٤.

٢١. $\int e^{س}$ ظا $e^{س}$ ء س

٢٢. $\int$ ظتا ٢س قتا ٢س ء س

٢٣. $\int$ (قتا ٣س + ١)^{٢} د س

٢٤. $\int \frac{\text{جا س} + ١}{\text{جتا س}}$ د س

٢٥. $\int \frac{\text{جا ٤س}}{\text{ظا ٤س}}$ د س

٢٦. $\int$ س ظتا س^{٢} د س

٢٧. $\int \frac{\text{س}}{٤ + ٩\text{س}^{٢}}$ د س

٢٨. $\int \frac{١}{٤ + ٩\text{س}^{٢}}$ د س

٢٩. $\int \frac{e^{٢\text{س}}}{\sqrt{e^{٢\text{س}} - ١}}$ د س

٣٠. $\int \frac{e^{\text{س}}}{\sqrt{e^{٢\text{س}} - ١}}$ د س

٣١. $\int \frac{\text{س}}{\text{قاز س}^{٢}}$

٣٢. $\int \frac{١}{\text{س} \sqrt{\text{س}^{٤} - ١}}$

٣٣. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{١٦ - س^٢}}$ د س

٣٤. $\int_{}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا س}}{١ + \text{جا}^٢ س}$ د س

٣٥. اذا كانت ق (س) = ٢ جا س − جتا ٢ س أوجد نقط النهاية المحلية وارسم منحنى ق لقيم س حيث ، ≤ س ≤ π .

أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى ق عند النقطة $(\frac{\pi}{٦}، \frac{١}{٢})$

٣٦. أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات

$$ص = \frac{س}{١ + س^٤}، \quad س = ١ ، \quad ص = ٠$$

٣٧. أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = جا $\frac{١}{٣}$ س التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم الواصل بين النقطتين أ (٢ ، −٣) ، ب (٤ ، ٧) .

٣٨. أوجد معادلة المماس للمنحنى

$$ص = \text{ظا} \frac{ص}{س} + س^٢ - ١٦$$

عند النقطة (٤ ، π) .

٣٩. أوجد حجم الجسم الناشيء عن دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص = جتا س^٢ ومحور السينات من س = ٠ الى س = ٢ $\sqrt{\pi}$ حول محور الصادات .

٤٠. أعطي موضع نقطة تتحرك على خط احداثيات بالمعادلة التالية

ق (ن) = أ جا ك ن + ب جتا ك ن

حيث أ ، ب ، ك توابت .

اثبت أن قيمة التسارع تتناسب طرديا مع البعد عن نقطة الاصل .

٤١ . استعمل التفاضلات لتقريب $(٠,٩٨)^{٢}$ ظا$^{-١}$ (٠,٩٨) .

٤٢ . أثبت أن

ص = أ $e^{-س}$ جتا ٢س + ب $e^{-س}$ جا ٢س حيث

أ و ب ثابتان هي حل للمعادلة التفاضلية

ص'' + ٢ص' + ٥ص = ٠

٤٣ . اوجد نقط الانعطاف وناقش انحناء المنحنى ص = س جا$^{-١}$س .

٤٤ . طول ضلعي مثلث ١٠ انشات و ١٢ انشا . فاذا كان قياس الزاوية المحصورة بينهما ٣٠° مع احتمال خطأ قدره ١ , ٠° استعمل التفاضلات لتقريب الخطأ في حساب مساحة المثلث .

٤٥ . طول سلم ١٢ قدما وهو يستند بطوله على جدار منزل . فاذا انزلق الطرف السفلي على ارض منبسطة بسرعة ٣ قدم في الثانية فكم تكون سرعة تغير الزاوية بين السلم والارض عندما يكون الطرف السفلي على بعد ٦ اقدام عن الحائط ؟

٤٦ . يراد بناء قناة مياه على شكل رقم ٧ من صفيحتين معدنيتين مستطيلتين عرض كل منهما ١٠ انشات . أوجد الزاوية المحصورة بين الصفيحتين عندما تكون سعة القناة أكبر ما يمكن .

الفصل العاشر

طرق اخرى في التكامل وتطبيقات عليـه

قد تستعمل للتكامل غير المحدد الصيغ الاساسية التي استنبطت في الفصول السابقة مع طريقة التعويض (٥ – ٤٤) ، وذلك لايجاد اصول المشتقات في مسائل معقدة . وفي هذا الفصل سوف نناقش التكاملات التي لا يمكن ايجادها مباشرة بواسطة تلك الصيغ الاساسية .

١ — التكامل بالاجزاء :

اذا كان ق ، ك اقترانين قابلين للاشتقاق ، فانه حسب قانون المضروبين يكون

$$د_{س} (ق (س) ك (س) = ق (س) كَ (س) + قَ (س) ك (س) \text{ اي ان}$$

$$ق (س) كَ (س) = د_{س} (ق (س) ك (س)) - قَ (س) ك (س)،$$

وبأخذ التكامل لطرفي المعادلة الاخيرة نحصل على

$$\int ق (س) كَ (س) ء س = \int د_{س} (ق (س) . ك (س)) ء س - \int ك (س) قَ (س) ء س$$

وحسب (٥ – ٣٧) يكون التكامل الاول في الطرف الايسر يساوي
ه (س) ك (س) + جـ ، وبما ان ثابتا اخر للتكامل ينتج من التكامل الثاني فلا داعي لوضع جـ في الصيغة ، اي ان :

$$\int ق(س)\,ك'(س)\,د س = ق(س)\,ك(س) - \int ك(س)\,ق'(س)\,د(س)$$

ولو فرضنا ان م = ق (س) ، ل = ك (س) فان الصيغة السابقة يمكن وضعها على الشكل :

$$(١٠-١) \quad \int م\,د\,ل = م\,ل - \int ل\,د\,م$$

وعند تطبيق (١٠ – ١) في تكامل معين نقرن جزءا من المكامل بالاقتران م والجزء الباقي بالتفاضلة د ل . ولهذا السبب تدعى الصيغة (١٠ – ١) التكامل بالاجزاء . والامثلة التالية توضح هذه الطريقة الهامة للتكامل :

مثـال ١ : أوجد $\int س\,e^{٢س}\,د س$

الحـــل : هناك اربع اختيارات للتفاضلة د ل وهي د س ، س د س ، $e^{٢س}$ د س ، $س\,e^{٢س}$ د س . فاذا فرضنا ان د ل = $e^{٢س}$ د س فان الجزء الباقي من المكامل هو م اي أن م = س . من ذلك ينتج ان ل = $\frac{١}{٢}e^{٢س}$ ، د م = د س . وبالتعويض في (١٠ – ١) ينتج

$$\int س\,e^{٢س}\,د س = س\left(\frac{١}{٢}e^{٢س}\right) - \int \frac{١}{٢}e^{٢س}\,د س .$$

اما التكامل في الطرف الايسر فيمكن ايجاده بتطبيق (٨ – ٢٤) وهذا يعطينا :

$$\int س\,e^{٢س}\,د س = \frac{١}{٢}س\,e^{٢س} - \frac{١}{٤}e^{٢س} + جـ$$

وقد نجد من الضروري في بعض الحالات استعمال التكامل بطريقة الاجزاء اكثر من مرة في السؤال الواحد ، كما في المثال التالي :

مثـال ٢ : أوجد $\int$ س^{٢} $e^{٢س}$ ء س .

الحـــل : لو فرضنا ء ل = $e^{٢س}$ ء س فان م = س^{٢} ، وبذلك نحصل على ل = $\frac{١}{٢} e^{٢س}$ ، ء م = ٢س ء س ، وبالتعويض في (١٠ – ١) ينتج

$$\int س^{٢} e^{٢س} \text{ ء س} = س^{٢} (\frac{١}{٢} e^{٢س}) - \int س e^{٢س} \text{ ء س} .$$

وبهذا يلزمنا تطبيق (١٠ – ١) مرة اخرى لايجاد التكامل في الطرف الايسر للمعادلة الاخيرة ، فنمضي تماما كما في المثال (١) وذلك يعطينا

$$\int س^{٢} e^{٢س} \text{ ء س} = \frac{١}{٢} e^{٢س} - \frac{١}{٢} س\ ٢س + \frac{١}{٤} e^{٢س} + \text{جـ}$$

وقد يستعمل التكامل بالاجزاء لايجاد اصول المشتقات لبعض الاقترانات التي درسناها سابقا . والمثال التالي يعطينا صيغة اصل المشتقة لاقتران اللوغرتم الطبيعي .

مثـال ٣ : أوجد $\int$ لط س ء س

الحـــل : لو فرضنا ان ء ل = ء س ، فان م = لط س . وبذلك فان ل = س ، ء م = ($\frac{١}{س}$) ء س . وبالتعويض في (١٠ – ١) ينتج ان :

$$\text{لط س ء س} = \text{س لط س} - \text{س} (\frac{١}{س}) \text{ء س}$$

$$= \text{س لط س} - \int \text{ء س}$$

$$= \text{س لط س} - \text{س} + \text{جـ}$$

والمثال التالي يوضح اسلوبا اخر لايجاد تكاملات معينة بواسطة تطبيق (١٠ – ١) مرتين .

مثـال ٤ : أوجد $\int e^{س}$ جتا س ء س

الحـــل : لنفرض ان ء ل = جتا س ء س ، م = $e^{س}$ ، فان ل = حا س ، ء م = $e^{س}$ ء س . وباستعمال (١٠ – ١) ينتج ان :

$$\int e^{س} \text{ جتا س ء س} = e^{س} \text{ جا س} - \int e^{س} \text{ حا س ء س}$$

نطبق ثانية التكامل بالاجزاء لتكامل الطرف الايسر للمعادلة الاخيرة ، فنجعل ء ل = حا س ء س ، م = $e^{س}$ وبذلك ل = – جتا س ، ء م = $e^{س}$ ء س

وبالتعويض في (١٠ – ١) ينتج ان :

$$\int e^{س} \text{ جا س ء س} = - e^{س} \text{ جتا س} + \int e^{س} \text{ ء س}$$

فاذا عوضنا الان في النتيجة التي حصلنا عليها من التطبيق الاول للقاعدة (١٠ – ١) تكون النتيجة :

$$\int e^{س} \text{ جتا س ء س} = e^{س} \text{ جا س} + e^{س} \text{ جتا س} - \int e^{س} \text{ جتا س ء س}$$

وباضافة $\int e^{س}$ جتا س ء س للطرفين ينتج ان :

$$٢ \int e^{س} \text{ جتا س ء س} = e^{س} (\text{جا س} + \text{جتا س})$$

وبقسمة الطرفين على ٢ واضافة ثابت التكامل ينتج ان :

$$\int e^{س} \text{ جتا س ء س} = \frac{١}{٢} e^{س} (\text{جا س} + \text{جتا س}) + \text{جـ}$$

واحيانا يستخدم التكامل بالاجزاء للحصول على صيغ اختزال (reduction formulas) للتكامل . ومثل هذه الصيغ يمكن استعمالها لكتابة التكامل على صورة تكاملات تحوى صيغا مرفوعة لقوى اقل من السابقة .

مثـال ٥ : أوجد صيغة اختزال للتكامل $\int$ حا^{ن} س ء س

الحـــل : اذا كان ء ل = حا س ء س وكان م = حا س فان ل = – جتا س ، ء م =

(ن − ١) حا$^{ن-٢}$ س جتا س د س . فبالتعويض في (١٠ − ١) ينتج :

[حا^{ن} س د س = − جتا س حا$^{ن-١}$ س + (ن − ١)] حا$^{ن-١}$ س جتا^{٢} س د س

وبما ان جتا^{٢} س = ١ − جا^{٢} س ، يمكن ان نكتب :

[جا^{ن} س د س = − جتا س جا$^{ن-١}$ س + (ن − ١)] جا$^{ن-٢}$ س د س

− (ن − ١)] جا^{ن} س د س

وبالتالي فان :

[جا^{ن} س د س + (ن − ١)] جا^{ن} س د س = − جتا س جا^{ن} س +

+ (ن − ١)] جا^{ن} س د س

والطرف الأيمن يمكن اختزاله الى ن] جا^{ن} س د س . وبقسمة الطرفين على ن

ينتج ان

(١٠−٢)] جا^{ن} س د س = − $\frac{١}{ن}$ جتا س جا$^{ن-١}$ س + $\frac{ن-١}{ن}$

] جا$^{ن-١}$ س د س

ولتوضيح (١٠ − ٢) لنفرض ان ن = ٤ ، فيكون :

[حا س د س = − $\frac{١}{٤}$ جتا س جا^{٣} س + $\frac{٣}{٤}$] جا^{٢} س د س

وبتطبيق (١٠ − ٢) على التكامل الايسر ينتج :

جا^{٢} س د س

= − $\frac{١}{٢}$ جتا س جا س + $\frac{١}{٢}$ س + جـ$_{١}$

وبالتالي فان :

$$\text{جا}^{4} \text{س ﻫ س} = -\frac{1}{4} \text{جتا س جا}^{3} \text{س} - \frac{1}{8} \text{جتا س جا س} + \frac{3}{8} \text{س} + \text{جـ}$$

ومن الواضح انه بتطبيقات متتالية لـ (١٠ – ٢) يمكن ايجاد $\int \text{جا}^{n} \text{س ﻫ س}$ لأي قيمة موجبة للمتغير ن .

تمارين :

أوجد كلا من التكاملات من ١ – ٢٠

١ . $\int \text{س } e^{-\text{س}} \text{ ﻫ س}$

٢ . $\int \text{س جا س ﻫ س}$

٣ . $\int \text{س}^{2} \text{ جتا س ﻫ س}$

٤ . $\int \text{س}^{3} e^{-\text{س}} \text{ ﻫ س}$

٥ . $\int \text{ظا}^{-1} \text{س ﻫ س}$

٦ . $\int \text{جا}^{-1} \text{س ﻫ س}$

٧ . $\int \sqrt{\text{س}} \text{ لط س ﻫ س}$

٨ . $\int \text{س}^{2} \text{ لط س ﻫ س}$

٩ . $\int \text{س قا س ﻫ س}$

١٠ . $\int \text{س ظا}^{-1} \text{س ﻫ س}$

١١ . $\int e^{-\text{س}} \text{ جا س ﻫ س}$

١٢ . $\int e^{3\text{س}} \text{ جتا ٢س ﻫ س}$

١٣. $\int$ جا س لط (جتا س) ء س

١٤. $\int_{0}^{1} س^{٣}\, e^{-س^{٢}}$ ء س

١٥. $\int$ قتا^{٣} س ء س

١٦. $\int$ قا^{٥} س ء س

١٧. $\int_{0}^{١} \frac{س^{٣}}{\sqrt{١٧ + س^{٢}}}$ ء س

١٨. $\int$ جا (لط ع) ء ع

١٩. $\int_{0}^{\pi} ٢$ جا ٢ ص ء ص

٢٠. $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}}$ س قتا^{٢} س ء س

استعمل التكامل بالاجزاء لاشتقاق صيغ الاختزال المبينة في التمارين ٢١ الى ٢٤

٢١. $\int$ س^{م} e^{س} ء س = e^{س} س^{م} − م $\int$ س$^{م-١}$ e^{س} ء س .

٢٢. $\int$ س^{م} جا س ء س = − س^{م} جتا س + م $\int$ س$^{م-١}$ جتا س ء س

٢٣. $\int$ (لط س)^{م} ء س = س (لط س)^{م} − م $\int$ (لط س)$^{م-١}$ ء س ،

م ≠ − ١

٢٤. $\int$ قا^{م} س ء س = $\frac{\text{قا}^{م-٢}\, س \text{ ظا } س}{م - ١} + \frac{م - ٢}{م - ١}$ $\int$ قا$^{م-٢}$ س ء س

٢٥. اذا كان ق (س) = جا$\sqrt{س}$ فأوجد مساحة المنطقة تحت المخطط ق من ، الى π

٢٦. أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المخطط ص = س$\sqrt{}$ جا س ومحور السينات من س = ٠ الى س = $\frac{\pi}{٢}$ ، حول محور السينات .

٢٧. أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بالمخطط ص = لط س ، ص = ٠ ، س = e ، حول محور الصادات .

٢٨. لنفرض ان قوة تؤثر على النقطة س حسب المعادلة ق (س) = س$^{٥}\sqrt{}$ س^{٣} + ١ أوجد الشغل المبذول في تحريك النقطة من س = ٠ الى س = ١ .

٢٩. خزان ماء يتخذ طرفاه شكل المنطقة المحصورة بين ص = حا س ومحور السينات من س = π الى س = ٢ π . أوجد القوة الكلية على احد الجوانب عندما يكون الخزان مملوءا بالماء ،

٣٠. اذا كانت سرعة جسيم متحرك على مستقيم احداثي في الزمن ن هي ن e^{٢} ن . وبفرض ان الجسيم كان في نقطة الأصل عندما كان ن = ٠ ، أوجد موقع الجسيم بعد مضي زمن مقداره ن .

٢ ــ التكاملات المثلثيـــة :

في المثال ٥ البند الاول اوجدنا صيغة اختزال للتكامل $\int$ حا^{ن}س ى س ، مثل هذه التكاملات يمكن ايجادها ايضا دون اللجوء للتكامل بالاجزاء . لنفرض ان ن عدد صحيح فردي موجب فان :

$$\int \text{جا}^{ن}س \, ى \, س = \int \text{جا}^{ن-١} س \, \text{جا} \, س \, ى \, س$$

وبهذا فان (ن ــ ١) يكون زوجيا . وعندئذ يمكن استعمال المتطابقة جا^{٢}س = ١ ــ جتا^{٢} س للحصول على شكل يكون اسهل للتكامل :

مثـال ١ : أوجد $\int$ جا^{٥} س ى س

الحـــل : مما سبق يكون :

$$\int \text{حا}^5 \text{س}\ \text{د}\ \text{س} = \int \text{حا}^4 \text{س}\ \text{حا}\ \text{س}\ \text{د}\ \text{س}$$

$$= \int (1 - \text{جتا}^2 \text{س})^2\ \text{حا}\ \text{س}\ \text{د}\ \text{س}$$

$$= (1 - 2\ \text{جتا}^2 \text{س} + \text{جتا}^4 \text{س})$$

$$\text{حا}\ \text{س}\ \text{د}\ \text{س}$$

وبالتعويض باعتبار ص = جتا س يكون د ص = − حا س د س ، اذن

$$\int \text{حا}^5 \text{س}\ \text{د}\ \text{س} = -\int (1 - 2\ \text{جتا}^2 \text{س} + \text{جتا}^4 \text{س})\ (-\text{حا}\ \text{س}\ \text{د}\ \text{س})$$

$$= -\int (1 - 2\ \text{ص}^2 + \text{ص}^4)\ \text{د}\ \text{ص}$$

$$= -\text{ص} + \frac{2\ \text{ص}^3}{3} - \frac{\text{ص}^5}{5} + \text{جـ}$$

$$= -\text{جتا}\ \text{س} + \frac{2}{3}\ \text{جتا}^3 \text{س} + \frac{1}{5}\ \text{جتا}^5 \text{س} + \text{جـ}$$

ويمكن استعمال نفس الطريقة في حالة جتا$^{\text{ن}}$س حيث ن فردي موجب .

وبالتحديد :

$$\int \text{جتا}^{\text{ن}}\ \text{س}\ \text{د}\ \text{س} = \int \text{جتا}^{\text{ن}-1} \text{س}\ \text{جتا}\ \text{س}\ \text{د}\ \text{س}$$

. بعد ذلك نستعمل المتطابقة جتا س = ١ − حا^2 س لايجاد شكل قابل للتكامل .

اما اذا كان المكامل على شكل حا$^{\text{ن}}$ س أو جتا$^{\text{ن}}$ س حيث ن عدد زوجي موجب فيمكن استعمال صيغ نصف الزاوية :

$$\text{حا}^2 \text{س} = \frac{1 - \text{جتا}\ 2\text{س}}{2} \quad ، \quad \text{جتا}^2 \text{س} = \frac{1 + \text{جتا}\ 2\text{س}}{2}$$

مثـال ٢ : أوجد $\int$ جتا^{٢} س ء س

الحـــل : $\int$ جتا^{٢} ء س $= \frac{١}{٢} \int$ (١ + جتا ٢س) ء س

$= \frac{١}{٢}$ س $+ \frac{١}{٤}$ حا ٢س + جـ

مثـال ٣ : أوجد $\int$ حا^{٤} س ء س

الحـــل : $\int$ حا^{٤} س ء س $= \int$ (حا^{٢} س)^{٢} ء س

$= \int$ ($\frac{١}{٢}$ (١ − جتا ٢س))^{٢}

$= \frac{١}{٤} \int$ (١ − ٢ جتا ٢س + جتا^{٢} ٢س) ء س

وبتطبيق صيغة نصف الزاوية مرة ثانية في حالة جتا^{٢} ٢س يكون

جتا^{٢} ٢س $= \frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٤س) وهذا يعطينا

$\int$ حا^{٤} س ء س $= \frac{١}{٤} \int$ ($\frac{٣}{٢}$ − ٢ جتا ٢س + $\frac{١}{٢}$ جتا ٤س) ء س

$= \frac{٣}{٨}$ س $- \frac{١}{٤}$ حا ٢س + $\frac{١}{٣٢}$ حا ٤س + جـ

اما التكاملات التي على شكل $\int$ حا^{م} س جتا$^{ن - ١}$ س ء س حيث م ، ن اعداد صحيحة موجبة فيمكن ايجادها بتنويع الطرق السابقة . فاذا كان كل من م ، ن عددا زوجيا فان صيغ نصف الزاوية يجب ان تستخدم اما اذا كان ن عددا فرديا فيمكن كتابة :

$\int$ حا س جتا^{ن}س ء س $= \int$ حا س جتا$^{ن - ١}$س جتا س ء س

وباستعمال المتطابقة جتا س = ١ − حا^{٢} س نضع جتا^{م} − ^{١}س بدلالة حا س وعملية التعويض ص = حا س عندئذ تؤدي الى ايجاد قيمة قابلة للتكامل بسهولة

مثـال ٤ : $\int$ جتا^{٣} س حا^{٤} س ء س .

الحـــل : $\int$ جتا^{٣} س حا^{٤} س ء س = $\int$ جتا^{٢} س حا^{٤} س جتا^{٢} س ء س

= $\int$ (١ − حا^{٢} س) حا^{٤} س جتا س ء س

وبفرض ص = حا س فان ء ص = جتا س ء س ، ويمكن كتابة التكامل عندئذ على شكل

$\int$ جتا^{٣} س حا^{٤} ء س = $\int$ (١ − ص^{٢}) ص^{٤} ء ص

= $\int$ (ص^{٤} − ص^{٦}) ء ص

= $\frac{١}{٥}$ ص^{٥} − $\frac{١}{٧}$ ص^{٧} + جـ

= $\frac{١}{٥}$ حا^{٥} س − $\frac{١}{٧}$ حا^{٧} س + جـ

اما التكاملات التي على شكل ظا س قا^{م}س ء س فتتبع معها ما يلي :

١. اذا كان م زوجيا نكتب التكامل على شكل

ظا س قا^{م} − ^{١} س قا^{٢} س ء س

ثم نضع قا^{م} − ^{١}س بدلالة ظا س باستعمال المتطابقة

قا^{٢} س = ١ + ظا^{٢} س ، ونعوض في ص = ظا س . وبهذا ينتج تكامل يمكن ايجاده بسهولة .

٢ . اذا كان م فرديا نكتب التكامل على شكل :

$$\int \text{ظا}^{م-1} \text{س قا}^{ن-1} \text{س قا س ظا س ﻫ س} .$$

وبما ان م – ١ زوجي فان ظا$^{م-1}$ س قد توضع بدلالة قا س بواسطة المتطابقة ظا^{٢} س = قا^{٢} س – ١ ، ونعوض ص = قا س . وبهذا ينتج تكامل يمكن ايجاده بسهولة .

٣ . اذا كان ن فرديا ، م زوجيا فانه يمكن استعمال التكامل بالاجزاء .

مثال ٥ : أوجد $\int$ ظا^{٢} س قا^{٤} س ﻫ س

الحل : نطبق الحالة ١

$$\text{ظا}^{٢} \text{س قا}^{٤} \text{س ﻫ س} = \int \text{ظا}^{٢} \text{س قا}^{٢} \text{س قا}^{٢} \text{س ﻫ س}$$

$$= \int \text{ظا}^{٢} \text{س (ظا}^{٢} \text{س} + ١) \text{قا}^{٢} \text{س ﻫ س}$$

فاذا فرضنا ان ص = ظا س فان ﻫ ص = قا^{٢} س ﻫ س

$$\text{ظا}^{٢} \text{س قا}^{٤} \text{س ﻫ س} = \int \text{ص}^{٢} \text{س ﻫ س} = \int \text{ص}^{٢} (\text{ص}^{٢} + ١) \text{ﻫ ص}$$

$$= \int (\text{ص}^{٤} + \text{ص}^{٢}) \text{ﻫ ص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{٥}}{٥} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٥} \text{ظا}^{٥} \text{س} + \frac{١}{٣} \text{ظا}^{٣} \text{س} + \text{جـ}$$

مثال ٦ : أوجد $\int$ ظا^{٣} س قا^{٥} س ﻫ س

الحل : نطبق الحالة ٢

$$\int \text{ظا}^3 س \, \text{قا}^5 س \, ء س = \int \text{ظا}^2 س \, \text{قا}^4 س \, \text{قا} س \, \text{ظا} س \, ء س$$

$$= \int (\text{قا}^2 س - 1) \, \text{قا}^4 س \, \text{قا} س \, \text{ظا} س \, ء س$$

زيفرض ان ص = قا س فان

$$\int \text{ظا}^3 \, \text{قا}^5 س \, ء س = \int (ص^2 - 1) \, ص^4 \, ء ص$$

$$= \int (ص^6 - ص^4) \, ء ص$$

$$= \frac{ص^7}{7} - \frac{ص^5}{5} + جـ$$

$$= \frac{1}{7} \text{قا}^7 س - \frac{1}{5} \text{قا}^5 س + جـ$$

والتكاملات التي على شكل $\int$ حا م س جتا ن س ء س يمكن

ايجادها بواسطة صيغ المضروبين (راجع الجدول ٣) كما هو موضح في المثال التالي :

مثـال ٧ : أوجد $\int$ جتا ٥س جتا ٣س ء س

الحـــل : يمكن ان نكتب

$$\text{جتا ٥س جتا ٣س} = \frac{1}{2} (\text{جتا ٨س} + \text{جتا ٢س}) ، \text{وبالتالي فان}$$

$$\int \text{جتا ٥س جتا ٣س} \, ء س = \frac{1}{2} \int (\text{جتا ٨س} + \text{جتا ٢س}) \, ء س$$

$$= \frac{1}{16} \text{جا ٨س} + \frac{1}{4} \text{حا ٢س} + جـ$$

تمارين :

أوجد كلا من التكاملات التالية من ١ الى ٢٤ :

١ . $\int$ جتا^{3} س د س

٣ . $\int$ حا^{2} س جتا^{2} س د س

٤ . $\int$ جتا^{3} س د س

٥ . $\int$ حا^{3} س جتا^{2} س د س

٦ . $\int$ حا^{5} س جتا^{3} س د س

٧ . $\int$ جا^{3} س جتا^{3} س د س

٨ . $\int$ حا^{4} س جتا^{2} س د س

٩ . $\int$ ظا^{3} س قا^{4} س د س

١٠ . $\int$ قا^{6} س د س

١١ . $\int$ ظا^{3} س قا^{3} س د س

١٢ . $\int$ ظا^{3} س قا س د س

١٣ . $\int$ ظا^{6} ص د ص

١٤ . $\int$ ظتا^{4} ع د ع

١٥. $\int$ $\sqrt{\text{حا س}}$ جتا^{٣} س ء س

١٦. $\int$ $\frac{\text{جتا}^{٣}\ \text{س}}{\sqrt{\text{حا س}}}$ ء س

١٧. $\int$ (ظا ع + ظتا ع)^{٢} ء ع

١٨. $\int$ ظتا^{٣} قتا^{٢} ء س

١٩. $\int_{٥}^{\frac{\pi}{٤}}$ جا^{٣} س ء س

٢٠. $\int$ ظا^{٢} ($\frac{\pi\ \text{س}}{٤}$) ء س

٢١. $\int$ حا ٥س حا ٣س ء س

٢٢. $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٤}}$ جتا ع جتا ٥ع ء ع

٢٣. $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٢}}$ حا ٣ص جتا ٣ص ء ص

٢٤. $\int$ حا ٤س جتا ٣س ء س

٢٥. أوجد الحجم الناتج عن دوران المنحنى المحصور بين محور السينات والمخطط ص = حا س من س = ٠ الى س = π ، حول محور السينات .

٢٦. أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخطط ص = ظا^{٢} س ، ص = ٠ ، من س = صفر الى س = $\frac{\pi}{٤}$ حول محور السينات .

٢٧. اذا كانت سرعة نقطة متحركة في وقت ما هي جتا^{٢} π قدم/ث . فكم تقطع النقطة في ٥ ثوان؟

٢٨. أوجد موقع الجسيم المتحرك عند الزمن ن اذا كان تسارعه في وقت ما على طول المستقيم الاحداثي هو حا٢ ن قدم/ث٢ وكان الجسيم في نقطة الاصل عندما كانت ن = صفراً .

٣ ــ التعويض المثلثي :

اذا كان المكامل يحوي التعبير $\sqrt{أ^٢ - س^٢}$ حيث أ> . فان التعويض المثلثي س = أ حا ع يؤدي الى :

$\sqrt{أ^٢ - س^٢} = \sqrt{أ^٢ - أ^٢ حا^٢ ع} = \sqrt{أ^٢ (١ - حا^٢ ع)} = \sqrt{أ^٢ جتا^٢ ع} = أ | جتا ع |$.

وعند اجراء هذا التعويض او التعويضات المثلثية الاخرى التي سنعالجها في هذا البند سنفترض ان ع تقع في مجال الاقتران المثلثي العكسي المقابل . وهكذا باستعمال تعويض الجيب كما هو مبين فان $-\frac{\pi}{٢} \le� ع \le� \frac{\pi}{٢}$. وبما ان جتا ع ⩾ .

فان $\sqrt{أ^٢ - س^٢}$ = جتا ع . وطبيعي اذا وجد $\sqrt{أ^٢ - س^٢}$ في المقام تحدد قيم ع بحيث ان $-\frac{\pi}{٢} < ع < \frac{\pi}{٢}$

مثال ١ : أوجد $\int \frac{١}{س^٢ \sqrt{أ^٢ - س^٢}}$ د س ، أ> .

الحل : اذا فرضنا ان س = أ حا ع حيث $-\frac{\pi}{٢} < ع < \frac{\pi}{٢}$ ، فان $\sqrt{أ^٢ - س^٢}$ = أ جتا ع . وبالأضافة لذلك بما ان س = أ حا ع فان د س = أ جتا ع د ع . والتعويض الشكلي في التكامل المعطى يؤدي الى

$$\int \frac{١}{س^٢ \sqrt{أ^٢ - س^٢}} د س = \int \frac{١}{أ^٢ حا^٢ ع \; أ جتا ع} أ جتا ع د ع$$

$$= \frac{١}{أ^٢} \int \frac{١}{حا^٢ ع} د ع$$

$$= \frac{1}{\rho^2} \int \text{قتا}^2 \, ع \, د ع$$

$$= -\frac{1}{\rho^2} \text{ظتا } ع + \text{جـ}$$

ومن الضروري الرجوع الى متغير التكامل الاصلي س . وهذا يمكن انجازه بطرق مختلفة منها استخدام المتطابقات المثلثية :

$$\text{ظتا } ع = \frac{\text{جتا } ع}{\text{حا } ع} = \frac{\sqrt{1 - \text{حا}^2 ع}}{\text{حا } ع}$$

وبما ان $\text{حا } ع = \frac{س}{\rho}$ ينتج ان

$$ع = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{س}{\rho}\right)^2}}{\frac{س}{\rho}} = \frac{\sqrt{\rho^2 - س^2}}{س}$$ ، وبالتالي فان

$$\int \frac{1}{س^2 \sqrt{\rho^2 - س^2}} د س = -\frac{\sqrt{\rho^2 - س^2}}{\rho^2 \, س} + \text{جـ}$$

وهناك طريقة اخرى للرجوع الى س باستعمال الفكرة الهندسية التالية : اذا كانت $0 < ع < \frac{\pi}{2}$ ، وبما ان $\text{حا } ع = \frac{س}{\rho}$ فان ع قد تفسر على انها زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية فيه الضلع المقابل والوتر بالطولين س ، ρ على التوالي ، لاحظ الشكل (١٠ – ١) ، والطول $\sqrt{\rho^2 - س^2}$ للضلع المجاور يمكن ايجاده باستعمال نظرية فيثاغورس . وبالنظر الى الشكل (١٠ – ١) نلاحظ ان

$\text{ظتا } ع = \frac{\sqrt{\rho^2 - س^2}}{س}$ وفي الواقع فان هذه الصيغة تكون صحيحة حتى لو كانت $0 > ع > -\frac{\pi}{2}$ كما هو ملاحظ من المتطابقة المستعملة سابقا .

وهكذا قد نستعمل الشكل (١٠ – ١) اذا كانت ع زاوية سالبة او موجبة .

اما اذا كان المكامل يحوي $\sqrt{أ^٢ + س^٢}$ ، حيث أ > . ، فان التعويض س = أ ظا ع سيلغي اشارة الجذر ، وعند استعمال هذا التعويض سوف نفترض ان ع تقع في مجال معكوس اقتران الظل اي ان $-\frac{\pi}{٢} < ع < \frac{\pi}{٢}$.

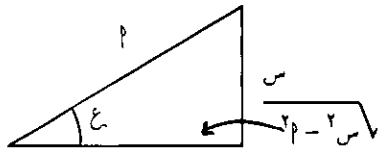
وفي هذه الحالة

$$\sqrt{أ^٢ + س^٢} = \sqrt{أ^٢ + أ^٢ ظا^٢ ع} = \sqrt{أ^٢ (١ + ظا^٢ ع)} = \sqrt{أ^٢ قا^٢ ع}$$

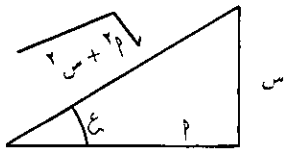
$$= أ قا ع .$$

بعد هذا التعويض وحساب التكامل المثلثي الناتج فانه من الضروري الرجوع الى المتغير الاصلي س . والصيغة السابقة توضح ان ظا ع = $\frac{س}{أ}$ ،

قا ع = $\frac{\sqrt{أ^٢ + س^٢}}{أ}$ وكما هو في حل المثال (١) يمكن الرجوع للمتغير س باستعمال المثلث في شكل ١٠ – ٢ (أ) سواء كانت ع سالبة ام موجبة .



الشكل ١٠ — ١



الشكل ١٠ — ٢ (أ)

مثال ٢ : أوجد $\int \frac{١}{\sqrt{٤ + س^٢}}$ د س .

الحل : اذا كانت س = ٢ ظا ع فان $\sqrt{٤ + س^٢} = \sqrt{٤ + ٤ ظا^٢ ع} = ٢$ قا ع .

كذلك د س = ٢ قا^٢ ع د ع وبالتالي فان

$$\int \frac{1}{\sqrt{٤ + س^٢}}\, د س = \int \frac{١}{٢ \text{ قا}^٢ ع \, د ع}{٢ \text{ قا } ع}$$

$$= \int \text{قا } ع \, د ع$$

$$= \text{لط } | \text{قا } ع + \text{ظا } ع | + \text{جـ}$$

وبالاشارة الى الشكل ١٠ - ٢ (أ) حيث ﻫ = ٢ نحصل على

$$\int \frac{١}{\sqrt{٤ + س^٢}}\, د س = \text{لط} \left| \frac{\sqrt{٤ + س^٢}}{٢} + \frac{س}{٢} \right| + \text{جـ}$$

والتعبير الايسر يمكن كتابته على شكل :

$$\text{لط} \left| \frac{\sqrt{٤ + س^٢} + س}{٢} \right| = \text{لط} \left| \sqrt{س^٢ + ٤} + س \right| - \text{لط } ٢ + \text{جـ} .$$

وبما ان $\sqrt{٤ + س^٢} + س > .$ لجميع قيم س فان اشارة القيمة المطلقة يمكن حذفها . ويجعل $\text{جـ}_١ = - \text{لط } ٢ + \text{جـ}$ فان

$$\int \frac{١}{\sqrt{٤ + س^٢}}\, د س = \text{لط } (\sqrt{٤ + س^٢} + س) + \text{جـ}_١$$

اما في التكاملات التى تحوي $\sqrt{س^٢ - ١}$ فنعوض س = ﻫ قاع حيث ع تختار في مجال معكوس اقتران القاطع . اي انه اما $\frac{\pi}{٢} > ع \geq ٠$ أو $\pi \leq ع < \frac{٣}{٢} \pi$

وبالتالي فان :

$$\sqrt{س^٢ - ﻫ^٢} = \sqrt{ﻫ^٢ \text{ قا}^٢ ع - ﻫ^٢} = \sqrt{ﻫ^٢ (\text{قا}^٢ ع - ١)} = \sqrt{ﻫ^٢ \text{ ظا}^٣ ع}$$

$$= ﻫ \text{ ظا } ع .$$

وبما ان قا ع = $\frac{\text{س}}{\text{أ}}$ ، ظا ع = $\frac{\sqrt{\text{س}^2 - \text{أ}^2}}{\text{أ}}$ فان من الممكن الرجوع الى

المثلث في شكل ١٠ – ٢ (ب) عند التغيير من المتغير ع الى المتغير الاصلي

مثـال ٣ : أوجد $\int \frac{\sqrt{\text{س}^2 - 9}}{\text{س}}$ د س

الحـــل : اذا فرضنا س = ٣ قا ع فان د س = ٣ قا ع ظا ع د ع ، وان

$\sqrt{\text{س}^2 - 9} = \sqrt{9 \text{ قا}^2 \text{ ع} - 9} = \sqrt{(\text{قا}^2 \text{ ع} - 1)} = \sqrt{9 \text{ ظا}^2 \text{ ع}} = ٣ \text{ ظا ع}$.

وهكذا

$$\int \frac{\sqrt{\text{س}^2 - 9}}{\text{س}} \text{ د س} = \int \frac{٣ \text{ ظا ع}}{٣ \text{ قا ع}} ٣ \text{ قا ع ظا ع د ع}$$

$$= ٣ \int \text{ظا}^2 \text{ ع د ع}$$

$$= ٣ \int (\text{قا}^2 \text{ ع} - 1) \text{ د ع}$$

$$= ٣ (\text{ظا ع} - \text{ع}) + \text{جـ}$$

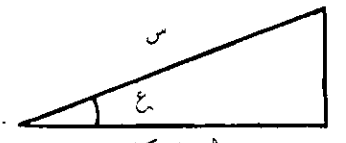
وبالاشارة الى شكل ١٠ – ٢ (ب) ، حيث أ = ٣ ، نلاحظ ان

$$\int \frac{\sqrt{\text{س}^2 - \text{أ}^2}}{\text{س}} \text{ د س} = ٣ \left(\frac{\sqrt{\text{س}^2 - 9}}{٣} - \text{قا}^{-1} \frac{\text{س}}{٣} \right) + \text{جـ}$$

$$= \sqrt{\text{س}^2 - 9} - ٣ \text{ ق}^{-1} \frac{\text{س}}{٣} + \text{جـ}$$

وكذلك يمكن استعمال الاقتران الزائدي من اجل تبسيط التكامل ، مثالا على ذلك من (٩ – ٤٦) :

مثـال ٤ : اعد مثال (٢) باستعمال التعويض الزائدي



أ الشكل ١٠ — ٢ (ب)

الحـــل : اذا كانت س = ٢ حا ز ع فان ﻭ س = ٢ جتا ز ع ﻭ ع ، كما هو واضح مما سبق ، وان $\sqrt{٤ + س^{٢}}$ = ٢ جتا ز ع ، وبالتالي فان :

$$\int \frac{١}{\sqrt{٤ + س^{٢}}}\, ﻭ س = \int \frac{١}{٢ \text{ جتا ز ع}}\, ٢ \text{ جتا ز ع ﻭ ع} = \int ﻭ ع$$

$$= ع + جـ = \text{حاز}^{-١} \frac{س}{٢} + جـ$$

وحسب (٩ – ٥١) نجد ان هذا الحل يطابق حلنا السابق .

رغم ان هذه الطرق الاضافية للتكامل اصبحت الان متوافرة الا انه يتوجب على الطالب الا يغفل الطرق السابقة . فالتكامل $\int \frac{س}{\sqrt{٩ + س^{٢}}}$ ﻭ س مثلا يمكن حسابه بطريقـــــة التعويض الجبري ص = ٩ + س^{٢} ، ﻭ ص = ٢ س ﻭ س ، وفي هذه الحالة يتخذ التكامل الشكل التالي :

$\frac{١}{٢} \int ص^{-\frac{١}{٢}}$ ﻭ ص ، القابل للتكامل بسهولة بواسطة قانون القوى .

تمارينـــــ :

حل كلا من التمارين من ١ – ١٦

١ . $\int \frac{س^{٢}}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ ﻭ س

٢ . $\int \frac{\sqrt{٤ - س^{٢}}}{س^{٢}}$

٣ . $\int \frac{١}{س \sqrt{٩ + س^{٢}}}$ ﻭ س

٤ . $\int \frac{1}{س^{٢} \sqrt{س^{٢} + ٩}}$ د س

٥ . $\int \frac{1}{س^{٢} \sqrt{س^{٢} - ٢٥}}$ د س

٦ . $\int \frac{1}{س^{٣} \sqrt{س^{٢} - ٢٥}}$ د س

٧ . $\int \frac{ص}{\sqrt{٤ - ص^{٢}}}$ د ص

٨ . $\int \frac{ل}{ل^{٢} + ٩}$ د ل

٩ . $\int \frac{1}{(ص^{٢} - ١)^{\frac{٣}{٢}}}$ د ص

١٠ . $\int \frac{1}{\sqrt{٤ص^{٢} - ٢٥}}$ د ص

١١ . $\int \frac{1}{(٣٦ - س^{٢})^{٢}}$ د س

١٢ . $\int \frac{1}{(١٦ - س^{٢})^{\frac{٥}{٢}}}$ د س

١٣ . $\int \sqrt{٩ - ٤هـ^{٢}}$ ء هـ

١٤ . $\int \frac{\sqrt{س^{٢} + ١}}{س}$ ء س

١٥ . $\int \frac{س}{(١٦ - س^{٢})^{٢}}$ ء س

١٦ . $\int$ هـ $(\sqrt{هـ^{٢} - ٩})$ ء هـ

١٧ – ٢٢ استعمل التعويضات المثلثية للحصول على صيغ (٩ – ٣٩) – (٩ – ٤٤)

٢٣ . أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخطط ص س $(س^{٢} + ٢٥)^{-\frac{١}{٢}}$ ، ص = ٠ ، والخط س = ٥ حول محور الصادات .

٢٤ . أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المخطط ص = $س^{٣}$ $(١٠ - س^{٢})^{-\frac{١}{٢}}$ ومحور السينات والمستقيم س = ١ .

٢٥ . أوجد طول المنحنى ص = $\frac{س^{٢}}{٢}$ ، من أ (٠ ، ٠) الى ب (٢ ، ٢) .

٢٦ . أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المخطط ص = $\frac{١}{س^{٢} + ١}$

ص = ٠ ، س = ٠ والمستقيم س = ٢ ، حول محور السينات .

٢٧ . استعمل التعويض المثلثي لايجاد مساحة المنطقة المحصورة داخل الشكل البيضوي $ب^{٢} س^{٢} + أ^{٢} ص^{٢} = أ^{٢} ب^{٢}$.

٢٨ . أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين القطع الزائد $ب^{٢} س^{٢} - أ^{٢} ص^{٢} = أ^{٢} ب^{٢}$ والمستقيم المار باحدى بؤرتي القطع معامدا للمحور القاطع .

٢٩ . أوجد ق (س) اذا كان ص = ق (س) ، س ء ص $-\sqrt{س^{٢} - ١٦}$ ء س = ٠ ، ق (٤) = ٠

٣٠ . اذا كانت العلاقة بين س ، ص هي كما يلي : $\sqrt{١ - س^{٢}}$ ء ص = $س^{٣}$ ء س ، وكانت ص = ٠ عندما س = ٠ ، فأوجد قيمة ص بدلالة المتغير س .

٤ ــ الكسور الجزئيـــة :

من السهل ان نبين ان

$$\frac{٢}{س^{٢} - ١} = \frac{١}{س - ١} + \frac{-١}{س + ١}$$

وستقودنا المناقشة التالية الى تسمية الطرف الايسر لهذه المعادلة بالكسور الجزئية للعبارة $\frac{٢}{س^{٢} - ١}$، ونستعمل تحليل الكسر الى كسوره الجزئية لايجاد قيمة التكامل غير المحدد .

فلايجاد تكامل $\frac{٢}{س^{٢} - ١}$ تكامل الطرف الايسر فيكون

$$\int \frac{٢}{س^{٢} - ١} \, د س = \text{لط} | س - ١ | - \text{لط} | س + ١ | + جـ$$

ومن الممكن نظريا كتابة اي تعبير نسبي $\frac{ق (س)}{ك (س)}$ على صورة مجموعة من التعبيرات النسبية التي مقاماتها تحوى حدوديات درجتها لا تزيد عن ٢ . وعلى وجه التحديد اذا كانت ق (س) ، ك (س) حدوديتين وكانت درجة ق (س) اقل من درجة ك (س) فانه حسب نظرية في الجبر يكون :

$$\frac{ق (س)}{ك (س)} = ح_{١} + ح_{٢} + \cdots + ح_{ى} \qquad (١٠ - ٣)$$

حيث ان كل ح لها احد الشكلين :

$$\frac{أ}{(ع س + ل)^{م}} \; ، \; \frac{جـ س + د}{(أ س^{٢} + ب س + و)^{ه}}$$

حيث م ، ه عددان صحيحان غير سالبين ،

$أ س^{٢} + ب س + و$ غير قابل للتحليل ، اي ان $ب^{٢} - ٤أو$ < صفر ، والطرف اليسر في (١٠ – ٣) هو مجموعة الكسور الجزئية للاقتران $\frac{ق(س)}{ك(س)}$. وكل حـ يسمى كسرا جزئيا ، وسوف لا نبرهن هذه النتيجة الجبرية ، ولكن نعطي قوانين لتحليل الكسر الى كسور جزئية .

ولتحليل الكسر النسبي $\frac{ق(س)}{ك(س)}$ فانه من الضروري ان يكون ق (س) له درجة اقل من ك (س) واذا لم يكن كذلك فان القسمة الطويلة يجب استخدامها للوصول الى مثل هذا التعبير. فمثلا اذا اعطينا $(س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٢ س - ٣) / (س^{٢} - ١)$ نحصل على ما يلي بالقسمة الطويلة :

$$\frac{س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٢ س - ٣}{س^{٢} - ١} = س - ٦ + \frac{٦ س - ٩}{س^{٢} - ١} ،$$

فيقتضي التحليل عندئذ تحليل الكسر $\frac{٦ س - ٩}{س^{٢} - ١}$. ومن اجل الحصول على التحليل (١٠ – ٣) نبدأ بكتابة المقام ك (س) على صورة ضرب العوامل المكررة فتجمع الى ان يكون ك (س) عبارة عن ضرب عوامل مختلفة على شكل $(ع س + ل)^{م}$، أو $(أ س^{٢} + ب س + و)^{ه}$ ، حيث م ، ه عددان صحيحان غير سالبين ، $ب^{٢} - ٤أو$ < صفر . بعد ذلك نطبق القوانين التالية :

قانون ١ : — لكل عامل على شكل $(ع س + ل)^{م}$ جيث م ≥ ١ فان التحليل (١٠ – ٣) يحتوي على م من الكسور الجزئية التي هي على شكل :

$$\frac{أ_{١}}{ع س + ل} + \frac{أ_{٢}}{(ع س + ل)^{٢}} + ... + \frac{أ_{م}}{(ع س + ل)^{م}} ، \text{ حيث}$$

كل أر عدد حقيقي .

قانون ٢ :— لكل عامل على شكل $(أ س^{٢} + ب س + و)^{ه}$ ، حيث ن ≥ ١ $ب^{٢} - ٤أو$ < صفر فان التحليل (١٠ – ٣) يحتوي على ه من الكسور الجزئية التي هي على شكل :

$$\frac{أ_1 س + ب_1}{أ س^2 + ب س + و} + \frac{أ_2 س + ب_2}{(أ س^2 + ب س + و)^2}$$
$$+ \quad \cdots \quad + \frac{أ_م س + ب_م}{(أ س^2 + ب س + و)^م} ،$$

حيث انه لكل ر يكون $أ_ر$ ، $ب_ر$ عددين حقيقيين
واذا كانت م أو ن تساوي ١ فانه يوجد كسر جزئي واحد مقابل للعامل (ع س + ل)^1 او (أ س^2 + ب س + و)^1 ، ويتضح ذلك من المثال التالي :—

مثال ٤ : اوجد $\int \frac{٤ س^2 + ١٣ س + ٩}{س^3 + ٢ س - ٣ س}$ د س

الحل : يحلل المقام في المكامل الى س (س + ٣) (س − ١) فكل عامل من عوامله خطي يقع تحت القانون١ . وهكذا فللعامل س كسر جزئي يقابله على شكل $\frac{أ}{س}$ ، ونفس الشيء ينطبق على (س + ٣) ، (س − ١) اذ يقابلها الكسران $\frac{ب}{س + ٣}$ ، $\frac{جـ}{س - ١}$ على التوالي :

ويتخذ التحليل (١٠ − ٣) الشكل التالي :

$$\frac{٤ س^2 + ١٣ س - ٩}{س (س + ٣) (س - ١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س + ٣}$$
$$+ \frac{جـ}{س - ١} ،$$

وبالضرب في المضاعف المشترك الاصغر ينتج :
(١٠ − ٤) ٤ س^2 + ١٣ س − ٩ = أ (س + ٣) (س − ١) + ب (س − ١) س + جـ (س + ٣) س .

في مثل هذه الحالة حيث جميع العوامل خطية وغير مكررة فان قيم أ ، ب ، جـ يمكن ايجادها بتعويض القيم س بما يجعل العوامل المختلفة صفرا ، فاذا اخذت س = صفراً في (١٠ – ٤) فان – ٩ = – ٣ أ اي أ = ٣ ، اما اذا اخذت س = ١ فهذا يعطينا ٨ = ٤ جـ اي جـ = ٢ ، واخيرا اذا اخذنا س = – ٣ فان – ١٢ ب اي ب = – ١ ، فيصبح التحليل الكسري الجزئي :

$$\frac{٤س^{٢} + ١٣س - ٩}{س(س + ٣)(س - ١)} = \frac{٣}{س} + \frac{-١}{س + ٣} + \frac{٢}{س - ١}$$

وينتج عن التكامل

$$\int \frac{٤س^{٢} + ١٣س - ٩}{س(س + ٣)(س - ١)} \, د س = ٣ لط|س| - لط|٣ + س| + ٢$$

$$= لط|س^{٣}| - لط|٣ + س| + لط|س - ١| + جـ$$

$$= لط \left| \frac{س^{٣}(س - ١)^{٢}}{س + ٣} \right| + جـ$$

وهناك طريقة اخرى لايجاد أ ، ب ، جـ هي بمقارنة معاملات س . فاذا فك الطرف اليسر في (١٠ – ٤) وجمعت معاملات القوى المتساوية في س فان

$٤س^{٢} + ١٣س - ٩ = (أ + ب + جـ)س^{٢} + (٢أ - ب + ٣جـ)س - ٣أ$.

واذا تساوت حدوديتان فان معاملات القوى المتناظرة تتساوى وبالتالي يكون :

$أ + ب + جـ = ٤$ ، $٢أ - ب + ٣جـ = ١٣$ ، $-٣أ = -٩$

وبقية الحل متروكة للطالب لاثبات ان أ = ٣ ، ب = – ١ ، جـ = ٢

مثـال ٢ : أوجد $\int \frac{٣س^{٣} - ١٨س^{٢} + ٢٩س - ٤}{(س + ١)(س - ٢)^{٣}} \, د س$

الحـــل : من قانون ١ ، هنالك كسر جزئي على شكل $\frac{أ}{س + ١}$ مقابل العامل (س +

١) في المقام . وبتطبيق قانون ١ حيث م = ٣ يوجد مقابل العامل $(س - ٢)^{٣}$

مجموعة من ثلاثة كسور جزئية $\frac{ب}{س + ١}$ ، $\frac{جـ}{(س - ٢)^{٢}}$ ،

$\frac{د}{(س - ٢)^{٣}}$ ، وبالتالي فان التحليل (١٠ – ٣) يتخذ الشكل :

$$\frac{٣س^{٣} - ١٨س^{٢} + ٢٩س - ٤}{(س + ٢)(س - ٢)^{٣}} = \frac{أ}{س + ١} + \frac{ب}{(س - ٢)} + \frac{جـ}{(س - ٢)^{٢}} + \frac{د}{(س - ٢)^{٣}}$$

وبضرب جميع الاطراف في $(س + ١)(س - ٢)^{٣}$ ينتج :

(١٠ – ٥) $٣س^{٣} - ١٨س^{٢} + ٢٩س - ٤ = أ(س - ٢)^{٣} + ب(س + ١)(س - ٢)^{٢}$

$+ جـ(س + ١)(س - ٢) + د(٩س + ١)$

هنا اثنان من الثوابت يمكن معرفتهما بسهولة فاذا اخذنا س = ٢ فان ٢٤ – ٧٢ + ٥٨ – ٤ = ٣د ، وهذا يختزل الى ٣د = ٦ ومنها د = ٢ . وبالمثل يجعل س = – ١ في (١٠ – ٥) فينتج ان – ٣ – ١٨ – ٢٩ – ٤ = – ٢٧ أ . ولذلك أ = ٢ ، والثوابت المتبقية يمكن ايجادها بمقارنة المعاملات . فاذا فك الطرف اليسر (١٠ – ٥) وجمعت معاملات قوى س المتساوية ، نلاحظ ان معاملات $س^{٣}$ هي أ ، ب وهذا يساوي معامل $س^{٣}$ في الطرف الايمن ، اي ان أ + ب = ٣ ، وبما ان أ = ٢ فان ب = ٣ – أ = ٣ – ٢ = ١ يبقى ان نقارن ثوابت الحدود في (١٠ – ٥) بوضع س = ٠ فيكون – ٤ = – ٨ أ + ٤ ب – ٢ جـ + د وبتعويض قيم أ ، ب ، د التي اوجدناها ينتج – ٤ = – ١٦ + ٤ – ٢ جـ + ٢ التي حلها جـ = – ٣ . فالتحليل الكسري الجزئي يعطي :

$$\frac{٣س^{٣} - ١٨س^{٢} + ٢٩س - ٤}{(س + ١)(س - ٢)^{٣}} = \frac{٢}{س + ١} + \frac{١}{(س - ٢)} + \frac{-٣}{(س - ٢)^{٢}}$$

$$+ \frac{٢}{(س - ٣)^{٣}}$$

ولايجاد قيم التكامل المطلوب نكامل الطرف الايسر للمعادلة الاخيرة ، وهذا يعطينا :

$$٢ \text{ لط } |س + ١| + \text{لط } |س - ٢| + \frac{٣}{س - ٢} - \frac{١}{(س - ٢)^{٢}} + \text{جـ} ،$$

وهذا يمكن كتابته بعبارة ابسط :

$$\text{لط } \left[(س + ١)^{٢} \, |س - ٢| \right] + \frac{٣س - ٧}{(س - ٢)^{٢}} + \text{جـ}$$

مثـال ٣ : أوجد $\int \frac{س^{٢} - س - ٢١}{٢س^{٣} - س^{٢} + ٨س - ٤} \, \text{د} س$

الحـــل : يمكن تحليل المقام بالتجميع كما يلي :

$$٢س^{٣} - س^{٢} + ٨س - ٤ = س^{٢}(٢س - ١) + ٤(٢س - ١)$$
$$= (س^{٢} + ٤)(٢س - ١)$$

وبتطبيق القانون ٢ للعامل التربيعي $س^{٢} + ٤$ الذي لا يحلل نجد ان واحدا من الكسور الجزئية يتخذ الشكل $\frac{أ س + ب}{س^{٢} + ٤}$ ، وحسب القانون ١ يوجد كسر جزئي

$\frac{\text{جـ}}{٢س - ١}$ يقابل العامل ٢س - ١ وبالتالي فان :

$$\frac{س^{٢} - س - ٢١}{٢س^{٣} - س^{٢} + ٨س - ٤} = \frac{أ س + ب}{س^{٢} + ٤} + \frac{\text{جـ}}{٢س - ١} ،$$

وكما في المثال السابق فهذا يعطينا

(١٠ – ٦) $س^{٢} - س - ٢١ = (أ س + ب)(٢ س - ١) + جـ (س^{٢} + ٤)$،

وبالتعويض $س = \frac{١}{٢}$ نحصل على :

$\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} - ٢١ = \frac{١٧ جـ}{٤}$ وهذا يعطي جـ = — ٥ . واما الثوابت المتبقية فيمكن ايجادها بمقارنة المعاملات ولذلك

$س^{٢} - س - ٢١ = (٢ أ + جـ) س^{٢} + (- أ + ٢ ب) س - ب + ٤ جـ$

بمقارنة معاملات $س^{٢}$ نلاحظ ان ٢ أ + جـ = ١ وبما ان جـ = — ٥ فام ٢ أ = ٦ أي أ = ٣ . وبالمثل بمقارنة الحدود الثابتة نجد ان – ب + ٤ جـ = – ٢١ ولذلك – ب – ٢٠ = – ٢١ اي ب = ١ . وهكذا فان التحليل الكسري الجزئي للمكامل هو :

$$\frac{٢ س^{٣} - س^{٢} + ٨ س - ٤}{س^{٢} - س - ٢١} = \frac{٣ س + ١}{س^{٢} + ٤} + \frac{- ٥}{٢ س - ١}$$

والتكامل المعطى يمكن ايجاده الان بأخذ تكامل الطرف الايسر للمعادلة الاخيرة ، وهذا يعطينا :

$$\frac{٣}{٢٠} \text{ لط } (س^{٢} + ٤) + \frac{١}{٢} \text{ ظا } \frac{س}{٢} - \frac{٥}{٢} \text{ لط } | ٢ س - ١ | + جـ$$

مثال ٤ : أوجد $\int \frac{٥ س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٧ س - ٣}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$ د س

الحل : بتطبيق القانون ٢ حيث م = ٢

$$\frac{٥ س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٧ س - ٣}{(س^{٢} + ١)^{٢}} = \frac{أ س + ب}{س^{٢} + ١} + \frac{جـ س + د}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$$

فيكون $٥ س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٧ س - ٣ = (أ س + ب)(س^{٢} + ١) + جـ س + د$ ، اي ان $٥ س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٧ س - ٣ = أ س^{٣} + ٧ س^{٢} + (أ +$

جـ) س + (ب + ء) ، بمقارنة معاملات س^{٣} ، س^{٢} نحصل على أ = ٥ ، ب = − ٣ . ومن معاملات س نلاحظ ان أ + جـ = ٧ اي ان جـ = ٧ − أ = ٧ − ٥ = ٢ . واخيرا الحدود الثابتة تعطينا ب + ء = − ٣ أو ء = − ٣ − ب = − ٣ − (− ٣) (− ٣) = ٠ فيكون :

$$\frac{٥س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧س - ٣}{(س^{٢} + ١)^{٢}} = \frac{٥س - ٣}{س^{٢} + ١} + \frac{٢س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$$

$$= \frac{٥س}{س^{٢} + ١} - \frac{٣}{س^{٢} + ١}$$

$$+ \frac{٢س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$$

من ذلك ينتج ان :

$$\int \frac{٥س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧س - ٣}{(س^{٢} + ١)^{٢}} \, ء س =$$

$$\frac{٥}{٢} \text{ لط } (س^{٢} + ١) - ٣ \text{ ظا}^{-١} س - \frac{١}{س^{٢} + ١} + \text{جـ}$$

تمارين :

أوجد التكاملات من ١ الى ٢٠ :

١. $\int \frac{س + ١٦}{س^{٢} + ٢س - ٨} \, د س$

٢. $\int \frac{١١س + ٢}{٢س^{٢} - ٥س - ٣} \, د س$

٣. $\int \frac{٥س^{٢} - ١٠س - ٨}{س^{٣} - ٤س} \, د س$

٤. $\int \frac{٤س^{٢} - ٥س - ١٥}{س^{٣} - ٤س^{٢} - ٥س} \, د س$

٥. $\int \frac{٢ع^{٢} - ٢٥ع - ٣٣}{(ع + ١)^{٢} (ع - ٥)} \, د ع$

٦. $\int \frac{٢س^{٢} - ١٢س + ٤}{س^{٣} - ٢٤ س^{٢}} \, د س$

٧. $\int \frac{٩س^{٤} + ١٧ س^{٣} + ٣س^{٢} - ٨س + ٣}{س^{٥} + ٣س^{٤}} \, د س$

٨. $\int \frac{٥س^{٢} + ٣٠س + ٤٣}{(س + ٣)^{٣}} \, د س$

٩. $\int \frac{س^٣ + ٣س^٢ + ٣س + ٦٣}{(س^٢ - ٩)^٢}$ د س

١٠. $\int \frac{١}{(س - ٧)^٥}$ د س

١١. $\int \frac{٥س^٢ + ١١س + ١٧}{س^٣ ٧س^٢ + ٤س + ٢٠}$ د س

١٢. $\int \frac{٤س^٣ - ٣س^٢ + ٦س - ٢٧}{س^٤ + ٩س^٢}$ د س

١٣. $\int \frac{س^٢ + ٣س + ١}{س^٤ + ٥س^٢ + ٤}$ د س

١٤. $\int \frac{٤س}{(س^٢ + ١)^٢}$ د س

١٥. $\int \frac{٢س^٣ + ١٠س}{(س^٢ + ١)^٢}$ د س

١٦. $\int \frac{س^٤ + ٢س^٢ + ٤س + ١}{(س^٢ + ١)^٣}$ د س

١٧. $\frac{س^٣ + ٣س - ٢}{س^٢ - س}$ د س

١٨. $\frac{س^٤ + ٢س^٢ + ٣}{س^٣ - ٤س}$ د س

١٩. $\int \frac{س^٦ - س^٣ + ١}{س^٤ + ٩ س^٢}$ د س

٢٠. $\int \frac{س^٥}{(س^٢ + ٤)^٢}$ د س

٢١. أوجد مساحة المنطقة الواقعة تحت المخطط ق (س) = $\frac{س}{س^٢ - ٢ س - ٣}$

من س = ٠ الى س = ٢ .

٢٢. أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمخطط

ص = $\frac{١}{(س - ١)(س - ٤)}$ ،

ص = ٠ ، س = ٢ ، س = ٣ حول محور الصادات .

٢٣ . أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة المعينة في التمرين (٢٢) حول محور السينات .

٢٤. ما هو بعد الجسم المتنقل عند الفترة الزمنية [٠ ، ١] اذا كانت سرعته على الخط المحوري هي $\frac{ن + ٣}{ن^٣ + ن}$ قدم/ث ، حيث ن الزمن بالثانية .

٥ ــ العبارات التربيعيـــة :

قد يؤدي تحليل الكسور الجزئية الى التكاملات المحتوية على تعبيرات تربيعية لا تحلل على شكل أ س^٢ + ب س + جـ ، فاذا كانت ب = ٠ فانه كما في المثالين ٣ ، ٤ في البند السابق يمكن استعمال الطرق السابقة لحساب التكاملات ، ولكن اذا كان أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ فمن الضروري اعادة اكمال المربع كما يلي :ــ

$$أ\,س^{٢} + ب\,س + جـ = أ\left(س^{٢} + \frac{ب}{أ}\,س\right) + جـ = أ\left(س + \frac{ب}{٢\,أ}\right)^{٢} + جـ - \frac{ب^{٢}}{٤\,أ}$$

والتعويض ص = س + $\frac{ب}{٢\,أ}$ يمكن عندئذ ان يؤدي الى صيغة قابلة للتكامل .

مثال ١ : أوجد $\int \frac{٢س - ١}{س^{٢} - ٦س + ١٣}\,د\,س$

الحل : باكمال المربع في المقام ينتج :

$س^{٢} - ٦س + ١٣ = (س^{٢} - ٦س + ٩) + (١٣ - ٩) = (س - ٣)^{٢} + ٤$ ، فاذا فرضنا ان ص = س − ٣ ، فان س = ص + ٣ ومنها د ص ، وبهذا فان

$$\int \frac{٢س - ١}{(س - ٣)^{٢} + ٤}\,د\,س = \int \frac{ص^{٢} + ٤}{٢(ص + ٣) - ١}$$

$$= \int \frac{٢ص}{ص^{٢} + ٤}\,د\,ص + ٥ \int \frac{١}{ص^{٢} + ٤}\,د\,ص$$

$$= \text{لط} \left| س^{٢} - ٦س + ١٣ \right| + \frac{٥}{٢}\,\text{ظا}^{-١}\,\frac{س - ٣}{٢} + جـ$$

طريقة اكمال المربع يمكن استخدامها اذا كانت العبارات التربيعية تحت اشارة الجذر :

مثال ٢ : أوجد $\int \frac{١}{\sqrt{٨ + ٢س - س^{٢}}}\,د\,س$

الحل : نبدأ بكتابة $٨ + ٢س - س^{٢} = ٨ - (س^{٢} - ٢س) = ٩ - (س^{٢} - ٢س + ١) = ٩ - (س - ١)^{٢}$

فنجعل ص = س − ١ ومنها ء ص = ء س وبذلك ينتج ان

$$\int \frac{1}{\sqrt{٨ + ٢س - س^{٢}}}\, ء س = \int \frac{1}{\sqrt{٩ - ص^{٢}}}\, ء ص = حا^{-١} \frac{ص}{٣} + جـ$$

$$= حا^{-١} \frac{س - ١}{٣} + جـ$$

تمارين :

حل كلا من التمارين من ١ الى ١٠

١ . $\int \frac{1}{س^{٢} - ٤س + ٨}\, ء س$

٢ . $\int \frac{1}{\sqrt{٧ + ٦س - س^{٢}}}\, ء س$

٣ . $\int \frac{1}{\sqrt{٤س - س^{٢}}}\, ء س$

٤ . $\int \frac{1}{ع^{٢} - ٢ع + ٢}\, ء ع$

٥ . $\int \frac{٢س + ٣}{\sqrt{٩ - ٨س - س^{٢}}}\, ء س$

٦ . $\int \frac{س + ٥}{٩س^{٢} + ٦س + ١٧}\, ء س$

٧ . $\int \frac{1}{س^{٣} - ١}\, ء س$

٨. $\int \frac{س^{٣}}{س^{٣} - ١}$ د س

٩. $\int \frac{١}{(س^{٢} + ٤س + ٥)^{٢}}$ د س

١٠. $\int \frac{١}{س^{٤} - ٤س^{٣} + ١٣س^{٢}}$ د س

١١. أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المخططات ص = (س^{٣} + ١) ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ١ .

١٢. أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخطط

ص = $\frac{١}{س^{٢} + ٢س + ١٠}$ والمحورين ، والمستقيم س = ٢ حول

محور السينات .

١٣. أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة المعطاة في التمرين ١٢ حول محور الصادات .

١٤. اذا كانت سرعة جسيم متحرك في وقت ما على خط مستقيم احداثي هي (٧٥ + ١٠ – ع) قدم/ث . فكم يقطع الجسيم خلال الفترة الزمنية [٠ ، ٥] ؟

٦ — تعويضات مختلفـــة :

يمكن تبسيط تكاملات غير التي سبق مناقشتها . والامثلة التالية توضح انواعا من التعويضات المختلفة التي قد تكون مفيدة احيانا .

مثـال ١ : أوجد $\int \frac{س^{٣}}{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٤}}$ د س

الحـــل : لنفرض ان ص = (س^{٢} + ٤)$^{\frac{١}{٣}}$ اي ان ص^{٣} = س^{٢} + ٤ . فان س^{٢} = ص^{٣} − ٤ ولذلك ٢ س ى س = س ٣ ص^{٢} ى ص ومنها س ى س = $\frac{٣}{٢}$ ص^{٢} ى ص . ونعوض

$$\int \frac{\text{س}^{٣}}{(\text{س}^{٢} + ٤)} \, \text{ى س} = \int \frac{\text{ص}^{٣} - ٤}{\text{ص}} \times \frac{٣}{٢} \text{ص}^{٢} \, \text{ى ص}$$

$$= \frac{٣}{٢} \int (\text{ص}^{٤} - ٤\text{ص}) \, \text{ى ص}$$

$$= \frac{٣}{٢} \left(\frac{\text{ص}^{٥}}{٥} - ٢\text{ص}^{٢} \right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{٣}{١٠} \text{ص}^{٥} - ٣\text{ص}^{٢} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٣}{١٠} (\text{س}^{٢} + ٤)^{\frac{٥}{٣}} - ٣ (\text{س}^{٢} + ٢)^{\frac{٢}{٣}} + \text{جـ}$$

مثـال ٢ : أوجد $\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt[٣]{\text{س}}} \, \text{ى س}$

الحـــل : اذا كانت س = ع^{٦} فان $\sqrt[٣]{\text{س}}$ = ع^{٢} ، $\sqrt{\text{س}}$ = ع^{٣} ، كذلك ى س = ٦ ع^{٥} ى ع ، وبذلك يكون :

$$\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt[٣]{\text{س}}} \, \text{ى س} = \int \frac{١}{\text{ع}^{٣} + \text{ع}^{٢}} \, ٦\text{ع}^{٥} \, \text{ى غ}$$

$$= ٦ \int \frac{\text{ع}^{٣}}{\text{ع} + ١} \, \text{ى ع} ،$$

وبالقسمة الطويلة يكون

$$\frac{ع^{٣}}{ع+١} = ع^{٢} - ع + ١ - \frac{١}{ع+١} \text{ ، وبالتالي يكون}$$

$$\int \frac{١}{\sqrt{س} + \sqrt[٣]{س}}\, د س = ٦ \int (ع^{٢} - ع + ١ - \frac{١}{ع+١})\, د ع$$

$$= ٦ \left[\frac{١}{٣} ع^{٣} - \frac{ع^{٢}}{٢} + ع - \text{لط} \left| ع + ١ \right|\right] + \text{جـ}$$

$$= ٢ \sqrt{س} - ٣ \sqrt[٣]{س} + ٦ \sqrt[٦]{س} - ٦ \text{ لط} \left| س + ١ \right| + \text{جـ}$$

واذا كانت التكاملة تعبيرا كسريا في حا س ، جتا س فان التعويض

ع = ظا $\frac{س}{٢}$ حيث $-\pi < س < \pi$ يحولها الى تعبير كسري (جبري)

في ع . لبرهنة ذلك اولا نلاحظ ان :

$$\text{جتا} \frac{س}{٢} = \frac{١}{\text{قا} \frac{س}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{١ + \text{ظا}^{٢} \frac{س}{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{١ + ع^{٢}}}$$

$$\text{حا} \frac{س}{٢} = \text{ظا} \frac{س}{٢} \text{ جتا} \frac{س}{٢} = ع \frac{١}{\sqrt{١ + ع^{٢}}}$$

$$(١٠-٧) \quad \text{حا س} = ٢ \text{ حا} \frac{س}{٢} \text{ جتا} \frac{س}{٢} = \frac{٢ ع}{١ + ع^{٢}}$$

$$(١٠-٨) \quad \text{جتا س} = ١ - ٢ \text{ جا}^{٢} \frac{س}{٢} = ١ - \frac{٢ ع^{٢}}{١ + ع^{٢}} = \frac{١ + ع^{٢}}{١ - ع^{٢}}$$

وبالاضافة لذلك بما ان $\frac{س}{٢} = ظا^{-١} ع$ فان س = ٢ ظا$^{-١}$ ع .

$$(١٠-٩) \quad د س = \frac{٢}{١ + ع^{٢}} \, د ع .$$

فالتعويض عن حا س ، جتا س ، د س حسب (١٠ – ٧) ، (١٠ – ٨) ، (١٠ – ٩) على التوالي ينتج تكاملا كسريا بدلالة ع .

مثـال ٣ : أوجد $\int \frac{١}{٤ \text{ حا س} - ٣ \text{ جتا س}} \, د س$.

الحـــل : بتطبيق (١٠ – ٧) ، (١٠ – ٩) والتبسيط ينتج ان :

$$\int \frac{١}{٤ \text{ حا س} - ٣ \text{ جتا س}} \, د س = \int \frac{٢}{٨ع - ٣ (١ - ع^{٢})} \, د ع$$

$$= ٢ \int \frac{١}{٣ع^{٢} + ٨ع - ٣} \, د ع$$

وبتجزئة الكسر ينتج ان :

$$\frac{١}{٣ع^{٢} + ٨ع - ٣} = \frac{١}{١٠} \left(\frac{٣}{٣ع - ١} - \frac{١}{٣ + ع} \right) ، \text{ ولذلك يكون}$$

$$\int \frac{١}{٤ \text{ حا س} - ٣ \text{ جتا س}} \, د س =$$

$$\frac{١}{٥} \int \left(\frac{٣}{٣ع - ١} - \frac{١}{ع + ١} \right) د ع$$

$$= \frac{١}{٥}\left[\text{لط}\,|٣ع - ١| - \text{لط}\,|ع + ١|\right] + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٥}\,\text{لط}\left|\frac{٣ع - ١}{ع + ١}\right| + \text{جـ}$$

وهنالك تعويضات اخرى قد تكون مفيدة احيانا . ان من المستحيل وضع قوانين تطبق على جميع الحالات . وان وضع التكاملة على صورة مناسبة يعتمد على ذكاء الفرد .

والرياضيون والعلماء الذين يستعملون التكاملات في اعمالهم يفضلون عادة جداول التكامل . والكثير من الصيغ المحتواة في هذه الجداول يمكن الحصول عليها بطرق درسناها . وبصورة عامة فان جداول التكاملات يجب الا تستعمل الا اذا حصل الطالب على خبرة كافية بطرق التكامل الاساسية . وبالتأكيد فان كثيرا من التكاملات المعقدة تستلزم التعويض او التحليل الى كسور جزئية ، او التكامل بالاجزاء او طرقا اخرى من اجل الحصول على تكاملات نجدها في الجداول .

تمارين :

١ . $\int \frac{\sqrt{س}}{\sqrt[٣]{س} + ١}\,د\,س$

٢ . $\int \frac{١}{\sqrt[٤]{س} + \sqrt[٣]{س}}\,د\,س$

٣ . $\int \frac{١}{(س + ١)(\sqrt{س} - ٢)}\,د\,س$

٤ . $\int \frac{٢س + ٣}{\sqrt{١ + ٢س}}\,د\,س$

٥ . $\int \frac{س}{(س + ٤)^{\frac{١}{٥}}}$ د س

٦ . $\int \frac{س^{\frac{١}{٣}} + ١}{س^{\frac{١}{٣}} - ١}$ د س

٧ . $\int \frac{س}{(س - ١)^{٦}}$ د س ، افرض ان ص = س − ١ .

٨ . $\int \frac{س^{٢}}{(٣س + ٤)^{-١}}$ د س ، افرض ان ٣س + ٤ = ص

٩ . $\int \frac{١}{٢ + \text{حا } س}$ د س

١٠ . $\int \frac{١}{٣ + ٢ \text{ جتا } س}$ د س

١١ . $\int \frac{١}{١ + \text{حا } س + \text{جتا } س}$ د س

١٢ . $\int \frac{١}{\text{ظا } س + \text{حا } س}$ د س

٧ ــ العزم ومركز الثقل للمناطق المستوية :

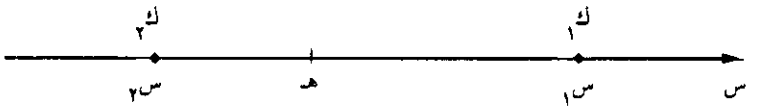
ناقشنا بعض تطبيقات التكامل المحدود في الفصل السادس . وفي هذا البند والبند القادم نناقش تطبيقات عديدة اخرى . لنفرض ان ل مستقيم احداثي وان النقطة ى على هذا المستقيم واحداثيها س . فاذا وجد جسيم كتلته ك في النقطة ى فاننا نعرف العزم (او بعبارة ادق العزم الاول) للجسيم بالنسبة لنقطة الاصل بأنه هو حاصل ضرب ك س .

فلنفرض ان ل مستقيم افقي والاتجاه لليمين هو الاتجاه الموجب عليه ، ولنفرض ان المستقيم حر الدوران حول نقطة الاصل . فاذا كانت ى على يمين نقطة الاصل فان العزم يكون موجبا (لان س موجب) ، وثقل الجسم سيجعل ل تدور حول هـ باتجاه عقارب الساعة . واذا كانت ى على يسار نقطة الاصل فان العزم يكون سالبا ويدور بعكس اتجاه عقارب الساعة .

في الشكل (١٠ – ٣) جسيمان لهما كتلتان ك$_١$ ، ك$_٢$ على النقطتين س$_١$ ، س$_٢$ حيث س$_١$ > ٠ ، س$_٢$ < ٠ فان هذه المجموعة تكون في حالة اتزان اذا كان ك$_١$ س$_١$ = ك$_٢$ | س$_٢$ | وبما ان س$_٢$ سالبة فان هذه العلاقة تكافيء ك$_١$ س$_١$ = – ك$_٢$ س$_٢$ او ك$_١$ س$_١$ + ك$_٢$ س$_٢$ = ٠ (اي ان مجموع العزوم بالنسبة لنقطة الاصل يساوي الصفر . وهذا الوضع مشابه لارجوحة الاطفال حيث يركز لوح من الخشب في نقطة هـ فاذا فرضنا ان طفلين كتلتاهما ك$_١$ ، ك$_٢$ جلسا على طرفي اللوح ، وكان ك$_١$ س$_١$ + ك$_٢$ س$_٢$ = ٠ فان الوضع يكون في حالة اتزان . وبشكل اعم اذا فرضنا ان مجموعة من الجسيمات اوزانها ك$_١$ ، ك$_٢$ ، ... ، ك$_ن$ موجودة في نقطة احداثياتها س$_١$ ، س$_٢$ ، ... ، س$_ن$ على التوالي . فان مجموع العزوم $\sum_{ر=١}^{ن}$ ك$_ر$ س$_ر$ يسمى عزم المجموعة بالنسبة لنقطة الاصل واذا

فرضنا ان ك = $\sum_{ر=١}^{ن}$ ك$_ر$ وهي الكتلة الكلية ، نعرف س كما يلي :

$$\text{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} \text{ك}_ر \text{س}_ر}{\text{ك}} \quad \text{او س ك} = \sum_{ر=١}^{ن} \text{ك}_ر \text{س}_ر .$$



الشكل ١٠ — ٣

والقيمة ك س يمكن اعتبارها عزم جسيم ذي كتلة ك موجود في نقطة احداثها سَ بالنسبة لنقطة الاصل . وتنص الصيغة (١٠ – ١٠) على ان سَ تعطي المكان الذي يجب ان ترتكز فيه الكتلة الكلية دون ان يتغير عزم المجموعة بالنسبة لنقطة الاصل .

والنقطة ى التي احداثيها سَ هي نقطة اتزان للمجموعة وتسمى مركز ثقل

المجموعة ، واذا كانت سَ = ٠ فانه حسب (١٠ – ١٠) يكون $\sum_{ر=١}^{ن}$ ك$_ر$ س$_ر$ = صفرا وتعتبر المجموعة عندئذ في حالة اتزان . وفي هذه الحالة تكون نقطة الاصل هي مركز الكتلة . هذه الفكرة يمكن ان تعمم الى بعدين كما يلي :—

نفرض ان ن من الجسيمات لها كتل ك$_١$ ، ك$_٢$ ، ٠٠٠ ، ك$_ن$ موجودة في النقط ى$_١$ (س$_١$ ، ص$_١$) ى$_٢$ (س$_٢$ ، ص$_٢$) ، ٠٠٠ ، ى$_ق$ (س$_ن$ ، ص$_ن$) على التوالي في المستوى الاحداثي . فالعزوم ع$_س$ ، ع$_ص$ للمجموعة بالنسبة لمحور السينات ومحور الصادات على التوالي تعرَّف كما يلي :

$$(١٠-١١) \quad ع = \sum_{ر=١}^{ن} ك_ر \, ص_ر ، \quad ع = \sum_{ر=١}^{ن} ك_ر \, س_ر .$$

وبالكلمات لايجاد ع نضرب كتلة كل جسيم ببعده المتجه عن محور السينات ، ونجمع ولايجاد ع نستعمل البعد المتجه عن محور الصادات . واذا كانت ك ترمز لمجموع الكتل ، اي ان ك = $\sum_{ر=١}^{ن}$ ك$_ر$ فان مركز كتلة المجموع او مركز ثقلها هي النقطة ى (س ، ص) وتعطى بالمعادلة :

$$(١٠-١٢) \quad ك \, سَ = ع_ص ، \quad ك \, صَ = ع_س$$

ويمكن اعتبار القيمة ك سَ عزم جسيم كتلته ك موجود في النقطة ى ى (سَ ، صَ) . بالنسبة لمحور الصادات ، وكذلك ك صَ يمكن اعتباره كعزم بالنسبة

لمحور السينات . ومنه نستنتج ان معادلتي (١٠ – ١٢) تتضمن ان مركز كتلة اي مجموعة من الجسيمات هي النقطة التي يمكن تجميع الكتلة الكلية فيها دون تغيير عزم هذه المجموعة بالنسبة للمحورين . ولكي نأخذ فكرة مبسطة لهذا الوضع يمكننا اعتبار ان ن من الجسيمات مثبتة بمركز الكتلة ى بقضبان عديمة الوزن بشكل مشابه للطريقة التي تربط بها اسلاك العجلات لمركز العجل . ويمكن الحصول على وضع اتزان لهذه المجموعة اذا ربطت من النقطة ى بحبل متصل بسقف الغرفة كما هو واضح في الشكل (١٠ – ٤) .

مثـال ١ : جسيمات كتلها ٤ ، ٨ ، ٣ ، ٢ ، وحدة كتلة موجودة على النقط $ى_١$ (– ٢ ، ٣) ، $ى_٢$ (٢ ، – ٦) ، $ى_٣$ (٧ ، – ٣) ، $ى_٤$ (٥ ، ١) أوجد ع ، ع واحداثيات مركز الثقل او (الكتلة) .

الحـــل : بتطبيق (١٠ – ١١)

$ع_س = ٤ \times ٣ + ٨ (-٦) + ٣ (-٣) + ٢ (١) = -٤٣$.

$ع_ص = ٤ (-٢) + ٨ (٢) + ٣ (٧) + ٢ (٥) = ٣٩$.

وبما ان ك = ٤ + ٨ + ٣ + ٢ = ١٧ فمن (١٠ – ١٢) ينتج ان

$$سَ = \frac{ع_ص}{ك} = \frac{٣٩}{١٧} ، \quad صَ = \frac{ع_س}{ك} = \frac{-٤٣}{١٧}$$

لنأخذ الان صفيحة رقيقة منتظمة الكتلة اي ان لها كثافة ثابتة . ونريد ان نعرف ى مركز كتلة الصفيحة التي تتزن عليه كما لوكانت مجموعة جسيمات . فاذا كانت الصفيحة على شكل المستطيل فانه من الواضح ان مركز الكتلة يعرف بانه نقطة تقاطع القطرين . واذا كان المستطيل في المستوى الاحداثي فانه يمكننا ان نفترض ان كتلة الصفيحة المستطيلة يمكن ان يركز في مركز الكتلة دون ان يتغير العزم بالنسبة لمحور السينات ومحور الصادات .

لنأخذ اولا صفيحة لها شكل منطقة كتلك المبينة في الشكل (٥ – ١) حيث ق متصل وغير سالب في الفترة المغلقة [أ ، ب] . نجزيء [أ ، ب] باختيار اعداد أ = $س_ن$ < $س_١$ < ... < $س_ن$ = ب ، ولكل ر نختار جـ في

منتصف الفترة الجزئية [س ر-١ ، س ر] ، اي ان جـ ر

$$= \frac{س_{ر-١} + س_{ر}}{٢}$$ ان مجموع ريمان $\sum_{ر=١}^{ن}$ ق (جـ ر) Δ س ر

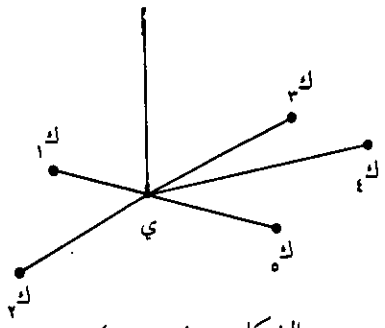
يمكن اعتباره مجموع مساحات مستطيلات ، ويبين الشكل (١٠ – ٥) صفيحة كهذه وقد رسم فيها احد المستطيلات . فاذا كانت الكثافة ث ، فان كتلة المستطيل الرأسي من الصفيحة هو ث ق (حـ ر) Δ س ر ، ولذلك فان كتلة المضلع المستطيل المرتبط بهذه التجزئة هو : $\sum_{ر-١}^{ن}$ ث ق (جـ ر) Δ س ر ، واذا

اقترب مقياس التجزئة || ج || من الصفر ، فان مساحة المضلع (المستطيل) تقترب من مساحة الصفيحة ، وانه من الطبيعي اذن ان نعرف كتلة الصفيحة ك بما يلي :

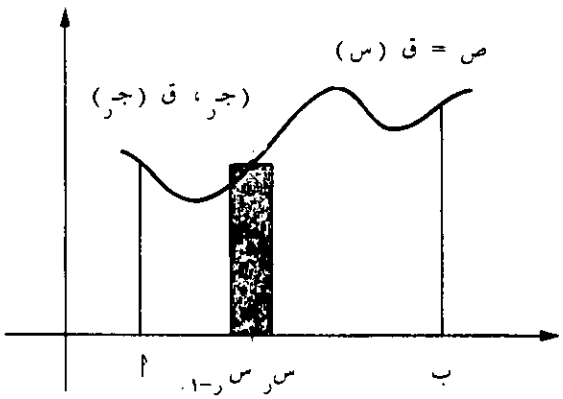
$$(١٠ – ١٣) \quad ك = \text{نهـــا}_{||ح||-٠} ث \sum_{ر} ق (جـ) Δ س = ث \int_{س}^{ب} ق (س) \, د س$$

ان مركز كتلة المستطيل الرأسي في الصفيحة وهو المبين بالشكل (١٠ – ٥) يقع في النقطة م ر (حـ ر ، $\frac{ق (حـ ر)}{٢}$) . فاذا افترضنا ان الكتلة مركزها في م ر فان

العزم بالنسبة لمحور السينات يمكن ايجاده بضرب المسافة $\frac{١}{٢}$ ق (جـ ر) من محور السينات الى النقطة م بالكتلة وهي ث ق (جـ ر) Δ س ر وباستعمال خاصية جمع العزوم فان عزم المضلع المستطيل المرتبط بالتجزئة يكون :



الشكل ١٠ — ٤



الشكل ١٠ — ٥

$\sum_{ر} \frac{١}{٢}$ ق (جـ ر) Δ س ر ويعرف ع س للصفيحة بانه نهاية هذا المجموع ،

اي ان

$$(١٠-١٤)\quad ع_{س} = \text{نهـا}_{\|ح\| \to ٠} \sum_{ر} \frac{١}{٢} \text{ ق (جـ ر) ت ق (جـ ر) } \Delta \text{ س ر} =$$

$$\text{ث} \int_{ا}^{ب} \frac{١}{٢} (\text{ق (س)})^{٢} \, \text{ء س}$$

وبطريقة مشابهة باستعمال المسافة جـ ر من محور الصادات الى مركز الكتلة بالنسبة للمستطيل الرائي نصل الى تعريف ع بالنسبة لمحور الصادات ، وبالتحديد :

$$(١٠-١٥)\quad ع_{ص} = \text{نهـا}_{\|ح\| \to ٠} \sum_{ر} \frac{١}{٢} \text{ (جـ ر) ث ق (جـ ر) } \Delta \text{ س ر} =$$

$$\text{ث} \int_{ا}^{ب} \text{س ه (س) ء س}$$

واخيرا وكما هو الحال بالنسبة للجسيمات ان سَ ، صَ احداثي مركز كتلة الصفيحة يعرفان بما يلي :

$$(١٠-١٦)\quad \text{ك سَ} = ع_{ص} \text{ ، ك صَ} = ع_{س}$$

وبتعويض القيمة التكاملية $ع_س$ ، $ع_ص$ في هذه المعادلات وحلها بدلالة سَ ، صَ نحصل على :

$$(١٠-١٧)\quad سَ = \frac{ع_{ص}}{ك} = \frac{\int_{م}^{ب} ث\ س\ ق\ (س)\ د\ س}{\int_{م}^{ب} ث\ ق\ (س)\ د\ س}$$

$$(١٠-١٨)\quad صَ = \frac{ع_{س}}{ك} = \frac{\int_{م}^{ب} ث\ \frac{١}{٢}\ (ق\ (س))^{٢}\ د\ س}{\int_{م}^{ب} ث\ ق\ (س)\ د\ س}\ ،$$

وبما ان الكثافة الثابتة يمكن حذفها فاننا نلاحظ ان احداثيي مركز كتلة الصفيحة المنتظمة لا يعتمدان على الكثافة ث ، بل على شكل الصفيحة فحسب . ولهذا السبب فان النقطة (سَ ، صَ) تدعى احيانا مركز الكتلة لمنطقة في المستوى او مركز ثقل المنطقة ، وصيغ مراكز الكتل يمكن ايجادها بوَضع الكثافة ث = ١ في (١٠ - ١٧) ، (١٠ - ١٨)

مثـال ٢ : أوجد احداثيات مركز كتلة المنطقة المحصورة بين مخطط ص = $e^{س}$، س = ٠ ، س = ١ ، ص = ٠

الحـــل :المنطقة المطلوبة موضحة في الشكل (١٠ - ٦) فباستخدام (١٠ - ١٣) ، (١٠ - ١٤) واخذ ث = ١ نحصل على :

$$ك = \int_{٠}^{١} e^{س}\ د\ س = e^{س} \Big|_{٠}^{١} = e - ١$$

$$ع_{س} = \int_{0}^{1} e^{2س} \cdot \frac{1}{2} \, د س = \frac{1}{4} e^{س} \Big|_{0}^{1} = \frac{1}{4} (e^{2} - 1) .$$

ومنه باستخدام (١٠ – ١٨) تكون صَ $= \frac{1}{4} \frac{(e^{2} - 1)}{e - 1} = \frac{e + 1}{4}$ ،

وبالتالي وحسب (١٠ – ١٥)

$ع_{ص} = \int_{0}^{1} س \, e^{س} \, د س$ ، وباستخدام التكامل بالاجزاء حيث (م = س ، د ل $= e^{س} \, د س$) نحصل على

$$ع_{ص} = س e^{س} - e^{س} \Big|_{0}^{1} = e - e - (0 - 1) = 1$$

وباستخدام (١٠ – ١٧) وينتج سَ $= \frac{1}{e - 1}$

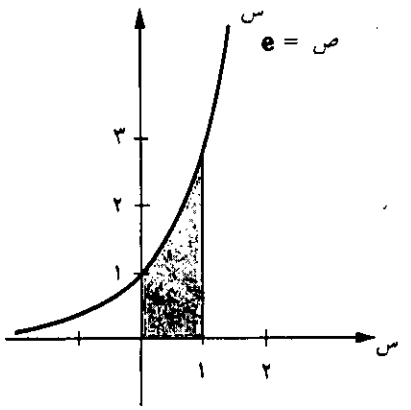
ويمكن ايجاد صيغ شبيهة بـ (١٠ – ١٧) ، (١٠ – ١٨) لمناطق اكثر تعقيدا . ولنأخذ صفيحة منتظمة (ذات كثافة ثابتة) لها الشكل الموضح في (٦ – ١) حيث ق ، هـ اقترانان متصلان ، ق (س) ≥ هـ (س) لجميع قيم س في [أ ، ب] . وبتجزئة [أ ، ب] واختيار حـ$_{ر}$ كما سبق ثم تطبيق قاعدة نقطة المنتصف (١ – ٧) نجد ان مركز كتلة المستطيل الرائي للصفيحة الموضح في الشكل (١٠ – ٧) هي النقطة م (جـ ، $\frac{1}{2}$ [ق (جـ$_{ر}$) + هـ (جـ$_{ر}$)]) . وبنقاش شبيه بالمذكور سابقا نجد ان عزم المستطيل الرائي بالنسبة لمحور السينات هو حاصل ضرب المسافة من محور السينات الى م بالكتلة اي انه :

$\frac{1}{2}$ [ق (جـ$_{ر}$) + هـ (جـ$_{ر}$)] ث [ق (جـ$_{ر}$) – هـ (جـ$_{ر}$)] Δ س$_{ر}$. وبالجمع واخذ النهاية عندما يقترب مقياس التجزئة من الصفر نحصل على :

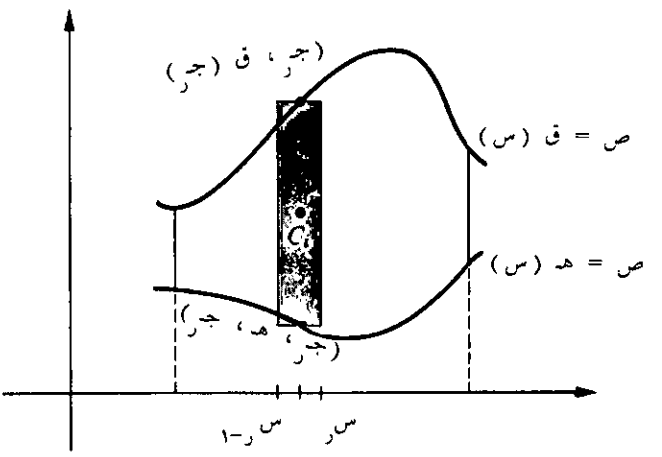
$$ع_{س} = ث \int_{أ}^{ب} \frac{1}{2} [ق (س) + هـ (س)] [ق (س) - هـ (س)] \, د س$$

او

(١٠ – ١٩) $ع_{س} = ث \int_{أ}^{ب} \frac{1}{2} [ق^{2} (س) - هـ^{2} (س)] \, د س$.



الشكل ١٠ — ٦



الشكل ١٠ — ٧

وبطريقة مشابهة نحصل على :

$$(١٠-٢٠)\quad ع_{ص} = ث \int_{م}^{ب} س\,(ق(س) - هـ(س))\,د\,س$$

والصيغة (١٠ – ١٦) يمكن استخدامها لايجاد سَ ، صَ .

مثـال ٣ : أوجد احداثيات مركز كتلة المنطقة المحدودة بالمخططين

ص + س^{٢} = ٦ ، ص + ٢س – ٣ = صفراً .

الحـــل : المنطقة هي نفس الماخوذة في المثال (١) البند (١) من الفصل السادس ،

لاحظ الشكل (٦ – ٤) حيث وجدنا ان المساحة = $\frac{٣٢}{٣}$ ، فاذا فعلنا كما في

المثال واخذنا ق (س) = ٦ – س^{٢} ، هـ (س) = ٣ – ٢س ، فانه باستخدام

(١٠ – ١٩) حيث ث = ١ نحصل على :

$$ع_{س} = \frac{١}{٢} \int_{-١}^{٣} [(٦ - س^{٢})^{٢} - (٣ - ٢س)^{٢}]\,د\,س$$

$$= \frac{١}{٢} \int_{-١}^{٣} (س^{٤} - ١٦س^{٢} + ١٢س + ٢٧)\,د\,س$$

ونترك للقاريء اثبات ان ع س = $\frac{٤١٦}{١٥}$ ، وباستخدام (١٠ – ١٦)

$$\text{ص} = \frac{\text{ع س}}{\text{ك}} = \frac{٤١٦ / ١٥}{٣/٣٢} = \frac{١٣}{٥}$$

ثم بتطبيق (١٠ – ٢٠) واخذت ث = ١ ينتج ان :

$$\text{ع ص} = \int_{-١}^{٣} \text{س} (٣ - \text{س}^{٢} + ٢ \text{س}) \, \text{د س}$$

$$= (٣ \text{س} - \text{س}^{٣} + ٢ \text{س}^{٢}) \, \text{د س} ،$$

ومنها يتبع ان ع ص = $\frac{٣٢}{٣}$ ، وبالتالي :

$$\text{س} = \frac{\text{ع ص}}{\text{ك}} = \frac{٣/٣٢}{٣/٣٢} = ١ .$$

ويمكن وضع صيغ العزوم لمناطق كالموضحة في الشكل (٦ – ٦) ولكن ذلك متروك للطالب كتمرين .

تمارين :

١ . اذا وضعت الاجسام التي كتلها ٢ ، ٧ ، ٥ في النقط أ (٤ ، – ١) ، ب (– ٢ ، ٠) ، جـ (– ٨ ، – ٥) على التوالي . أوجد العزم ع س ، ع ص وكذلك احداثيات مركز كتلة المجموعة .

٢ . اذا وضعت اجسام كتلها ١٠ ، ٣ ، ٤ ، ١ ، ٨ في النقط أ (– ٥ ، – ٢) ، ب (٣ ، ٧) ، جـ (٠ ، – ٣) ، د (– ٨ ، – ٣) ، ي (٠ ، ٠) أوجد العزمين ع س ، ع ص واحداثيات مركز كتلة المجموعة .

لكل من التمارين ٣ – ١٢ ارسم المنطقة المحدودة بمخططات المعادلات المعطاة وأوجد مركز كتلة المنطقة :

٣ . ص = س^{٣} ، ص = ٠ ، س = ٠

٤ . ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، ص = ٠ ، س = ٩

٥ . ص = حاس ، ص = ٠ ، س = π ، س = ٠

٦ . ص = قا^{٢} س ، ص = ٠ ، س = $-\frac{\pi}{٤}$ ، س = $\frac{\pi}{٤}$

٧ . ص = ١ − س^{٢} ، ص = س − ١

٨ . س = ص^{٢} ، س − ص − ٢ = ٠

٩ . ص = $\frac{١}{(١٦ + \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ٣

١٠ . س ص = ١ ، ص = ٠ ، س = ١ ، س = e

١١ . ص = e$^{\text{٢س}}$ ، ص = ٠ ، س = −١ ، س = ٠

١٢ . ص = e جتا س ، ص = ٠ ، س = − ١ ، س = ١

١٣ . اثبت ان مركز ثقل المثلث ينطبق على نقطة تلاقي المستقيمات المنصفة للزوايا . (خذ رؤوس المثلث في النقط (٠ ، ٠) ، (أ ، ب) ، (٠ ، جـ) حيث أ ، ب ، جـ موجبه)

١٤ . أوجد مركز ثقل المنطقة الموجودة في الربع الاول المحددة بالدائرة س^{٢} + ص^{٢} = أ^{٢}

١٥ . أوجد مركز ثقل منطقة نصف دائرية نصف قطرها أ .

١٦ . أوجد مركز ثقل المنطقة المحدودة بالقطع المكافيء س^{٢} = ٤ م ص والمستقيم المار في البؤرة عموديا على محور الصادات .

١٧ . منطقة في مستوى واحد ولها شكل مربع طوله ٢ أ وقد رسم على احد اضلاع المربع دائرة خارجية نصف قطرها أ . أوجد مركز ثقل هذه المنطقة . (استعمل التمرين ١٥ ، والحقيقة القائلة بان العزوم لها الخاصية التجميعية) .

١٨ . منطقة على شكل مربع طول ضلعه أ رسم على احد اضلاعه للخارج مثلث

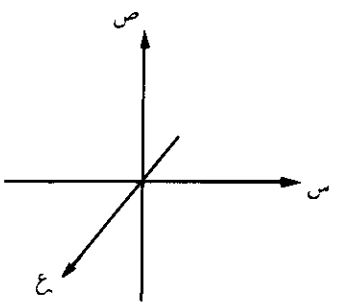
متساوي الاضلاع . أوجد مركز ثقل هذه المنطقة . (استعمل التمرين ١٣ ، والخاصية التجميعية للعزوم) .

١٩ . أوجد مركز ثقل الشكل نصف البيضوي المحدود بالمخطط ص = $\frac{ب}{أ}\sqrt{أ^2 - س^2}$ ، ومحور السينات .

٢٠ . أوجد $ع_س$ للمنطقة المحدودة بالقطع الزائد $ب^2 س^2 - أ^2 ص^2 = أ^2 ب^2$ والمستقيم المار بالبؤرة عموديا على المستقيم الأفقي .

٨ — مراكز ثقل الاجسام الدورانيـــة :

تدل التجارب على ان مركز ثقل جسم صلب دوراني منتظم هو نقطة ما على محور الدوران . وفي الحالة الخاصة للاسطوانة الدائرية القائمة ذات الارتفاع المحدود يكون مركز الثقل نقطة على المحور تقع في منتصف المسافة بين القاعدتين . ولكي نجد صيغا لمراكز ثقل الاجسام الصلبة نبدأ بالمستوى الاحداثي س ، ص ثم نأخذ محورا ثالثا عمودياً على المحورين السيني والصادي ونسميه المحور العيني . كما هو موضح في الشكل (١٠ — ٨) ، فالمحور الصادي والمحور العيني يعينان مستويا احداثيا يدعى مستوى صع وكذلك فان المستوى المعين بالمحور السيني والمحور العيني سيشار اليه بالمستوى س ع . ولنأخذ جسما دورانيا كما هو موضح في الشكل (٦ — ١١ أ) وهو جسم حصلنا عليه نتيجة دوران المساحة تحت مخطط اقتران متصل غير سالب من أ الى ب حول محور السينات . وسوف نفترض ان الجسم الصلب الناتج عن الدوران له كثافة ثابتة ث (وحدات وزن لكل وحدة حجم) وكتلته تساوي حاصل ضرب ث في حجم الجسم الصلب ، لذلك باستخدام (٦ — ١١) ينتج :



الشكل ١٠ — ٨

$$(١٠-٢١) \quad ك = ث \int_{م}^{ب} \pi \ (ق \ (س))^{٢} \ ء \ س .$$

وبما ان مركز الكتلة م لجسم كهذا يقع على محور السينات ، فانه يكفي ان نعرف سَ المسافة المتجهة من المركز الى النقطة م . فلنأخذ تجزئة لـ [م ، ب] ونختار جـ$_ر$ في منتصف الفترة الرائية $[س_{ر-١} ، س_ر]$. فاذا اخذنا المستطيل الذي قاعدته $[س_{ر-١} ، س_ر]$ وارتفاعه ق (جـ$_ر$) فان كتلة القرص الناتج عن دوران هذا المستطيل حول محور السينات هي $ث \pi [ق (جـ_ر)]^{٢} \Delta س_ر$. لاحظ الشكل (١٠ – ٩) . ومركز ثقل هذا القرص هو نقطة على محور السينات احداثيها جـ$_ر$ والعزم بالنسبة للمستوى صع للقرص الرائي تعرف بانها حاصل ضرب المسافة جـ$_ر$ من مستوى صع الى مركز كتلة القرص الرائي في كتلة القرص اي انها تساوي

$$(١٠-٢٢) \quad جـ_ر ث \ \pi \ [ق (جـ_ر)]^{٢} \Delta س_ر$$

وبفرض ان العزوم لها الخاصية التجميعية (اي ان عزم المجموع = مجموع العزوم) ، فان العزم بالنسبة لمستوى صع للجسم الذي يتكون من الأقراص التي تعين بمستطيلات من النوع المذكور اعلاه يساوي مجموع الحدود التي على الصيغة (١٠ – ٢٢) والعزم $ع_{صع}$ لجسم دوراني بالنسبة لمستوى صع يعرف بانه نهاية المجموع عندما تقترب || ح من الصفر . وهذا يعطينا :

$$(١٠-٢٣) \quad ع_{صع} = ث \ \pi \int_{م}^{ب} سَ \ [ق (س)]^{٢} \ ء \ س .$$

فالاحداثي السيني سَ لمركز الكتلة يعرف بالعلاقة

$$(١٠-٢٤) \quad ك \ سَ = ع_{صع} \text{ او } سَ = \frac{ع_{صع}}{ك}$$

واذا عوضنا تكاملات(١٠ – ٢١) ، (١٠ – ٢٣) في (١٠ – ٢٤) تحذف الكثافة ، وبالتالي فان مركز ثقل جسم صلب ناتج عن الدوران لا يعتمد على الكثافة ، اي انه يعتمد فقط على شكل الجسم . ولهذا السبب سوف نشير اليه بمركز الثقل الهندسي

للجسم بدلا من مركز الثقل (مركز الكتلة) . ولتبسيط الامور سوف ناخذ ث = ١ في (١٠ – ٢١) ، (١٠ – ٢٣) لايجاد مركز الثقل الهندسي الدوراني .

مثـال ١ : أوجد مركز ثقل مخروط دائري قائم ذي كثافة ثابتة اذا كان ارتفاعه ل ونصف قطر قاعدته نق .

الحـــل : اذا جعلنا المثلث الذي رؤوسه في النقط (٠ ، ٠) ، (ل ، ٠) ، (ل ، نق) يدور حول محور السينات . فاننا نحصل على المخروط المطلوب . انظر الشكل (١٠ – ١٠) . ان معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٠) (ل ، نق) وهي ص = ($\frac{\text{نق}}{\text{ل}}$) (س) ، ولذلك فان ق (س)

= ($\frac{\text{نق}}{\text{ل}}$) س تعرف اقترانا من النوع المذكور سابقا .

وبتطبيق (١٠ – ٢٣)

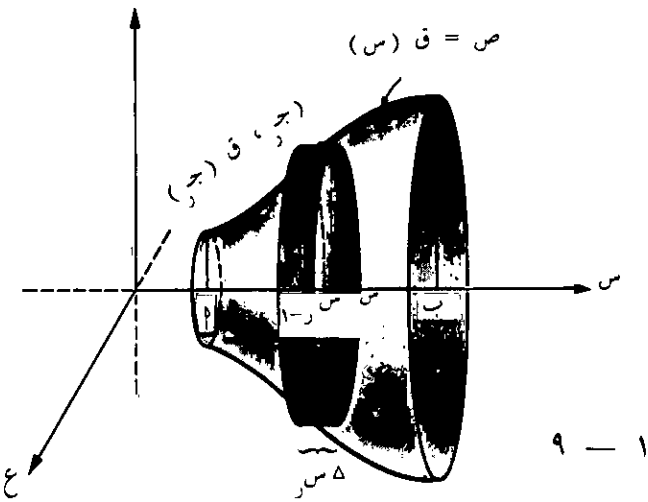
$$\text{ع ص ع} = \text{ث } \pi \int_{٠}^{\text{ل}} \text{س} \left[\frac{\text{نق}}{\text{ل}} \text{ س} \right]^{٢} \text{ د س}$$

$$= \text{ث } \pi \frac{\text{نق}^{٢}}{\text{ل}^{٢}} \int_{٠}^{\text{ل}} \text{س}^{٣} \text{ د س} = \text{ث } \frac{\text{نق}^{٢}}{\text{ل}^{٤}} \frac{\text{س}^{٤}}{٤} \Big|_{٠}^{\text{ل}}$$

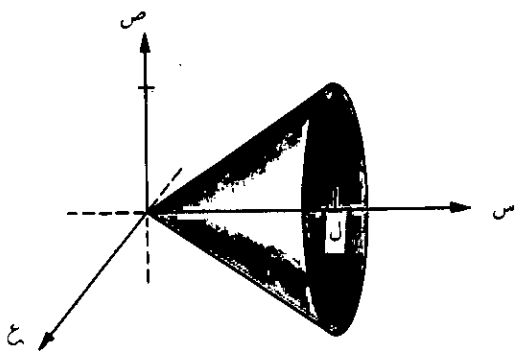
$$= \text{ث } \frac{١}{٤} \pi \text{ نق}^{٢} \text{ ل}^{٢} .$$

ان كتلة المخروط يمكن ايجادها من (١٠ – ٢١) ولكن بما ان حجم المخروط الدائري القائم الذي ارتفاعه ل ونصف قطر قاعدته نق هو $\frac{\pi}{٣}$ نق^{٢} ل فان الكتلة تساوي ث . $\frac{١}{٣}$ نق^{٢} ل π . واخيرا باستخدام (١٠ – ٢٤)

$$\text{س} = \frac{\text{ع ص ع}}{\text{ك}} = \frac{\text{ث} \cdot \frac{١}{٤} \pi \text{ نق}^{٢} \text{ ل}^{٢}}{\text{ث} \cdot \frac{١}{٣} \pi \text{ نق}^{٢} \text{ ل}} = \frac{٣}{} \text{ ل}$$



الشكل ١٠ — ٩



الشكل ١٠ — ١٠

وهكذا فان مركز الكتلة يقع على محور المخروط على بعد $\frac{٣}{٤}$ المسافة بين الرأس والقاعدة .

ويمكن ايجاد صيغ شبيهة بـ (١٠ – ٢٣) لاجسام ناتجة عن دوران مناطق حول محور الصادات . والاشتقاق هو نفس السابق سوى اننا نبادل بين س ، ص وبالاشارة الى الشكل (٦ – ١٥) نجد انه اذا كانت جـ ر نقطة المنتصف لـ [ص ر-١ ، ص ر] فان

$$ع_{س ع} = \text{نهـا}_{\|ح\| \to ٠} \; ث \; جـ_ر \; \pi \; [ق (جـ_ر)]^٢ \Delta ص_ر \text{ أو}$$

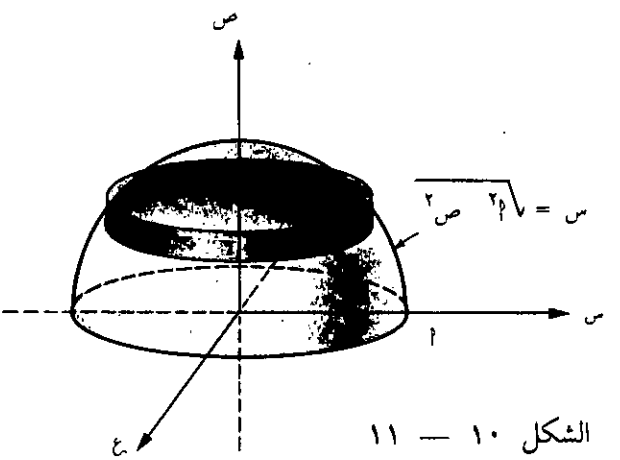
(١٠ – ٢٥) $ع_{سع} = ث\ \pi \int_{جـ}^{د} ص\ [هـ(ص)]^{٢}\ ى\ ص$.

ان مركز الثقل يقع على محور الصادات واحداثيه ص يعطي بالعلاقة

(١٠ – ٢٦) $ك\ ص_{\bar{}} = ع_{سع}$ أو $ص_{\bar{}} = \frac{ع_{سع}}{ك}$

مثـال ٢ : أوجد مركز ثقل نصف كرة قطرها ٢ ف .

الحـــل : اذا اديرت المنطقة التي في الربع الاول تحت مخطط $س^{٢} + ص^{٢} = ف^{٢}$ حول محور الصادات يكون الجسم الناتج هو نصف كرة قطرها ٢ ف .
انظر الشكل (١٠ – ١١) . ويحل معادلة الدائرة لايجاد س بدلالة ص نحصل على $س = \sqrt{ف^{٢} - ص^{٢}}$. اي ان هـ (ص) $= \sqrt{ف^{٢} - ص^{٢}}$ تعرف اقترانا هـ من النوع المذكور سابقا . وباستخدام (١٠ – ٢٥) حيث ث = ١ ، فان



الشكل ١٠ — ١١

$ع_{سع} = \int_{٠}^{ف} ص\ (\sqrt{ف^{٢} - ص^{٢}})^{٢}\ ى\ ص$

$= \pi \int_{٠}^{ف} (ف^{٢} ص - ص^{٣})\ ى\ ص = \pi\ [\frac{١}{٢} ص^{٢} ف^{٢} - \frac{١}{٤} ص^{٤}]$

$= \pi\ (\frac{١}{٢} ف^{٤} - \frac{١}{٤} ف^{٤}) = \frac{١}{٤}\ \pi\ ف^{٤}$

وبما ان حجم الكرة التي نصف قطرها ف يساوي $\frac{٤}{٣}$ π $ف^{٣}$ فان حجم نصف الكرة يكون $\frac{٢}{٣}$ π $ف^{٣}$ ومن (١٠ – ٢٦) نحصل على :

$$صَ = \frac{\frac{١}{٤} \pi ف^{٤}}{\frac{٢}{٣} \pi ف^{٣}} = \frac{ف ٣}{٨}$$

يمكن ايجاد مركز الكتلة ايضا باخذ قشرة دائرية او قشرة اسطوانية كما في المثال التالي :

مثـال ٣ : أوجد مركز ثقل الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين مخطط ص = ٢ س – $س^{٢}$ ومحور السينات حول محور الصادات .

الحـــل : المنطقة هي نفس الماخوذة في المثال (١) من البند ٣ من الفصل السادس وهي موضحة في شكل (٦ – ٢٢) مع القشرة الناتجة عن دوران مستطيل نموذجي (المحور العيني لم يرسم) ، وكما هو وارد في حل المثال المذكور فان حجم القشرة يكون ٢ π جـ$_{ر}$ (٢ جـ$_{ر}$ – $جـ_{ر}^{٢}$) Δ س ان مركز كتلة القشرة يقع على محور الصادات ويبعد عن محور السينات مسافة تساوي نصف ارتفاع القشرة اي $\frac{١}{٢}$ (٢ جـ$_{ر}$ – $جـ_{ر}^{٢}$) . ولذلك فان عزم القشرة بالنسبة لمستوى س ع هو $\frac{١}{٢}$ (٢ جـ$_{ر}$ – $جـ_{ر}^{٢}$) ، ٢ π جـ$_{ر}$ (٢ جـ$_{ر}$ – $جـ_{ر}^{٢}$) Δ س$_{ر}$.

وبأخذ المجموع ثم النهاية عندما تقرب $||ح||$ من الصفر نجد العزم ع س ع للجسم الصلب ، وبالتحديد

$$ع_{س ع} = \int_{٠}^{٢} \frac{١}{٢} (٢ س – س^{٢}) ٢ \pi س (٢ س – س^{٢}) ء س$$

$$= \pi \int_{٠}^{٢} (٤ س^{٣} – ٤ س^{٤} + س^{٥}) ء س$$

$$= \pi \left| (س^{٤} – \frac{٤}{٥} س^{٥} + \frac{١}{٦} س^{٦}) \right|_{٠}^{٢} = \pi \frac{١٦}{١٥}$$

ومن المثال (١) في الفصل (٦) من البند الثالث نجد ان ك = ١ × الحجم $= \frac{\pi ٨}{٣}$ ولذلك فان :

$$\frac{\text{ص}}{\text{ع س ع}} = \frac{\frac{16\pi}{15}}{\frac{80\pi}{3}} = \frac{2}{5}$$

تمارين :

لكل من التمارين ١ – ٦ أوجد مركز ثقل الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المخططات المعطاة معادلاتها ، حول محور السنات :

١ . ص = $\frac{1}{\text{س}}$ ، ص = ٠ ، س = ١ ، س = ٢

٢ . ص = (خا س) $\frac{1}{2}$ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = π

٣ . ص = $e^{\text{س}}$ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ١

٤ . ص = $\frac{1}{\sqrt{16 + \text{س}^2}}$ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ٤

٥ . ص = س^2 ، س = ص^3

٦ . س^2 = ص ، ص = ٢س .

في التمارين (٧ – ١٢) أوجد مركز كتلة الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخططات المعطاة معادلاتها حول محور الصادات :

٧ . $\text{ص}^2 - \text{س}^2 = 4$ ، ص = ٤

٨ . س = $\sqrt{\text{ص} - 1}$ ، س = ٠ ، ص = ١ ، ص = ٥

٩ . ص = $e^{2\text{س}}$ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ٢

١٠ . ص = $e^{-\text{س}}$ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = – ١

١١ . $ص = \frac{١}{س^{٢} + ٢٥}$ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ٥

١٢ . $ص = \frac{١}{٩ - س}$ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ٢

١٣ . أوجد مركز ثقل الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين النصف العلوي للشكل البيضوي $ب^{٢} س^{٢} + أ^{٢} ص^{٢} = ب^{٢} أ^{٢}$ ومحور السينات حول محور السينات .

١٤ . أوجد مركز كتلة الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالقطع الزائد $ب^{٢} ص^{٢} - أ^{٢} س^{٢} = أ^{٢} ب^{٢}$ ، ص = جـ ، حيث جـ > ٠ حول محور الصادات .

١٥ . أوجد مركز ثقل الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين ص = جتا س ومحور السينات من س = ٠ الى س = $\frac{\pi}{٢}$ حول محور الصادات .

١٦ . أوجد مركز كتلة الجسم الناتج عن دوران المنطقة المعرفة في تمرين (١٥) حول محور السينات .

٩ — تمارين للمراجعـــة :

شفهيـــة :

ناقش كلا مما يلي :

١ . التكامل بالاجزاء

٢ . التعويض المثلثي

٣ . الكسور الجزئية

٤ . العزوم ومراكز ثقل المساحات المستوية

٥ . العزوم ومراكز ثقل الاجسام الدورانية

تحريريـــة :

أوجد التكاملات في التمارين من ١ الى ٤٠ :

١. $\int$ س حا$^{-1}$ س ء س

٢. $\int$ قتا^{٣} س ء س

٣. $\int$ لط (١ + س) ء س

٤. $\int e^{\sqrt{س}}$ ء س

٥. $\int$ جتا^{٣} ٢س حا^{٢} ٢س ء س

٦. $\int$ جتا^{٤} س ء س

٧. $\int$ ظا س قا^{٥} س ء س

٨. $\int$ ظا س قا^{٦} س ء س

٩. $\int \frac{١}{(س^{٢} + ٢٥)^{\frac{٣}{٢}}}$ ء س

١٠. $\int \frac{١}{س^{٢}\sqrt{١٦ - س^{٢}}}$ ء س

١١. $\int \frac{\sqrt{٤ - س^{٢}}}{س}$ ء س

١٢. $\int \frac{س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$ ء س

١٣. $\int \frac{س^{٣} + ١}{س\ (س - ١)^{٣}}$ ء س

١٤. $\int \frac{١}{س + س^{٣}}$ د س

١٥. $\int \frac{س^{٣} - ٢٠ س^{٢} - ٣٦ س - ١٨٩}{س^{٤} - ٨١}$ د س

١٦. $\int \frac{س - ١}{(س + ٢)^{٥}}$ د س

١٧. $\int \frac{س}{\sqrt{٤ + ٤ س - س^{٢}}}$ د س

١٨. $\int \frac{س}{س^{٢} + ٦ س + ١٣}$ د س

١٩. $\int \frac{\sqrt[٣]{٨ + س}}{س}$ د س

٢٠. $\int \frac{حا\ ص}{٢ جتا\ ص + ٣}$ د ص

٢١. $\int e^{ع^{٢}}$ حا ٣ ع د ع

٢٢. $\int$ جتا (لط س) د س

٢٣. $\int$ حا^{٣} س جتا^{٣} س د س

٢٤. $\int$ ظتا ٣ هـ د هـ

٢٥. $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{٤ - \text{س}^٢}}$ د س

٢٦. $\int \frac{١}{\text{س}\sqrt{٩\text{س}^٢ + ٤}}$ د س

٢٧. $\int \frac{\text{س}^٥ - \text{س}^٣ + ١٠}{\text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢}$ د س

٢٨. $\int \frac{\text{س}^٣}{\text{س}^٣ - ٣\text{س}^٢ + ٩\text{س} - ٢٧}$ د س

٢٩. $\int \frac{١}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{س}^{\frac{١}{٢}}}$ د س

٣٠. $\int \frac{٢\text{س} + ١}{(\text{س} + ٥)^{١٠٠}}$ د س

٣١. $\int \text{e}^{\text{س}}$ قا $(\text{e}^{\text{س}})$ د س

٣٢. $\int$ س ظا س^٢ د س

٣٣. $\int$ ع^٢ حا ٥ ع د ع

٣٤. $\int$ حا ٢ص جتا ص د ص

٣٥. $\int$ حا^{٣} ع جتا $^{\frac{١}{٢}}$ع ع ع

٣٦. $\int$ حا ٣ص ظتا ٣ص ع ص

٣٧. $\int e^{س} \sqrt{١ + e^{س}}$ ع س

٣٨. $\int$ س (٤س^{٢} + ٢٥) $^{-\frac{١}{٢}}$ ع س

٣٩. $\int \frac{ع^{٢}}{\sqrt{٤ ع^{٢} + ٢٥}}$ ع ع

٤٠. $\int \frac{٢ + ع^{٣}}{ع^{٢} + ٨ع + ٢٥}$ ع ع

٤١. أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخطط ص = حا س ومحور السينات من س = ٠ الى س = π حول محور الصادات .

٤٢. أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخطط ص = ظا س ، ص = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٦}$ ، س = $\frac{\pi}{٤}$ ، حول محور السينات .

٤٣. أوجد طول منحنى المخطط ص = لط (قاس) من النقطة أ (٠ ، ٠) الى ب ($\frac{\pi}{٣}$ ، لط ٢)

٤٤. أوجد مساحة المنطقة المحدودة بمحور السينات ومحور الصادات والمخطط ص = $\frac{١}{٢}$ (٩ + ٤ س^{٢}) والمستقيم س = ٢

في كل من تمريني ٤٥ ، ٤٦ ارسم المنطقة المحدودة بمخططات المعادلات المعطاة ثم أوجد مركز ثقلها :

٤٥. ص = س^{٣} ، ص = س^{٢}

٤٦. ص = جتا س ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٢}$

في كل من التمرينين ٤٧ ، ٤٨ أوجد مركز ثقل الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمخططات المعادلات المعطاة حول محور السينات :

٤٧. ص = $\sqrt{س}$ ، ص = ٠ ، س = ٤

٤٨. ص = قا س ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٤}$

٤٩. أوجد مركز ثقل الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمخططات ص = $e^{-٣س}$ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ١ حول محور الصادات

٥٠. أوجد مركز ثقل الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمخططات ص = حا س^{٢} ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = $\sqrt{\pi}$ حول محور الصادات .

الفصل الحادي عشر

الصيغ غير المعينـة

التكاملات المعتلة وقانون تايلور

في هذا الفصل سنوسع مجموعة الاقترانات التي يمكن ايجاد نهاياتها وتكاملاتها المحدودة . وسنشرح طريقة لتقريب الاقترانات الى اقترانات حدودية . ولهذه الموضوعات تطبيقات رياضية وفيزيائية كثيرة . واكثر استخداماتها اهمية سيكون في الفصل القادم عند دراسة المتسلسلات اللانهائية . وفي البند الاخير من هذا الفصل سنبحث في طريقة نيوتن لتقريب الجذور .

١ — الصيغ غير المعينة : (Indeterminate Forms)

$\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

في دراستنا السابقة للنهايات عالجنا عبارات على الصورة $\text{نهـا}_{س \to جـ} \frac{ف(س)}{ج(س)}$

حيث نهاية كل من ف ، ج هي الصفر عندما تقترب س من جـ . وفي هذه الحالة تأخذ $\frac{ف(س)}{ج(س)}$ الصيغة غير المعينة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عند س = جـ . واذا اصبحت كل من ف، ج لانهائية سلبا أو ايجابا عند اقتراب س من جـ ، فان $\frac{ف(س)}{ج(س)}$ تأخذ الصيغة

غير المعينة $\frac{\infty}{\infty}$ عند س = جـ . واحيانا يمكن معالجة الصيغ غير المعينة باستخدام مهارات جبرية من نوع معين . واليك مثلا على ذلك مر معنا في البند ١ من الفصل الثاني :

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٢س^{٢} - ٥س + ٢}{٥س^{٢} - ٧س - ٦}$$

وحاصل القسمة هذا يأخذ الصورة غير المعينة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، ولكن يمكن ايجاد النهاية كما يلي :

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(٢س - ١)}{(س - ٢)(٥س + ٣)} = \text{نهـا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٢س - ١}{٥س + ٣} = \frac{٣}{١٣}$$

وهناك صيغ غير معينة اخرى تتطلب طرقا أكثر تعقيدا ، ففي الفصل الثامن مثلا استخدم برهان هندسي لاثبات ان

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{س} = ١$$

وفي هذا البند سنثبت قانون لوبتال (١١ – ٢) (L'Hopital) ونوضح كيف يمكن استخدامه لمعالجة الصيغ غير المعينة . ولبرهان (١١ – ٢) سنحتاج للصيغة التالية التي تحمل اسم الرياضي الفرنسي كوشي (١٧٨٩ – ١٨٥٧) .

(١١ – ١) صيغة كوشي : اذا كان كل من الاقترانين ف ، ج متصلا على الفترة المغلقة [أ ، ب] ، وقابلا للتفاضل على الفترة (أ ، ب) ، واذا كانت جَ (س) ≠ صفراً لجميع قيم س في (أ ، ب) ، فانه يوجد عدد و في (أ ، ب) بحيث

$$\frac{ف\ (ب) - ف\ (أ)}{ج\ (ب) - ج\ (أ)} = \frac{فَ\ (و)}{جَ\ (و)}$$

البرهـــان : نلاحظ أولا ان ج (ب) – ج (أ) ≠ صفرا ، وذلك لانه اذا كان ج (ب) = ج (أ) ، فانه طبقا لنظرية رول (٤ – ١٢) يوجد عدد جـ في (أ ، ب) يحقق جَ (جـ) = صفرا ، وهذا مناقض للفرض . ولنأخذ الآن اقترانا هـ معرفا بالقاعدة

هـ (س) = [ف (ب) – ف (أ)] ج (س) – [ج (ب) – ج (أ)] ف (س) لجميع قيم س في [أ ، ب] . ينتج من الفرض أن هـ متصل على [أ ، ب] ، وقابل للتفاضل على (أ ، ب) بالاضافة الى ان هـ (أ) = هـ (ب) = صفراً . وحسب نظرية رول للاقتران هـ ، يوجد و في (أ ، ب) يحقق هـَ (و) = صفرا ، أي أن [ف (ب) – ف (أ)] جَ (و) – [ج (ب) – ج (أ)] فَ (و) = صفراً

والمعادلة الاخيرة يمكن كتابتها بصورة المطلوب في النظرية .

وكحالة خاصة اذا وضعنا ج (س) = س في (١١ – ١) فان الناتج يتخذ الصورة التالية :

$$\frac{ف\ (ب) - ف\ (أ)}{ب - أ} = \frac{فَ\ (و)}{١}$$

وهذه تكافيء الصورة ف (ب) – ف (أ) = فَ (و) (ب – أ) وهذا يرينا ان صيغة كوشي ما هي الا تعميم لنظرية القيمة الوسطى (٤ – ١٥) .

والنتيجة التالية هي النظرية الرئيسية التي تستخدم لمعالجة الصيغ غير المعينة . وقد سميت نسبة لعالم فرنسي عاش في الفترة (١٦٦١ – ١٧٠٤) .

(١١ – ٢) قانون لوبتال اذا كان كل من الاقترانين ف ، ج قابلا للتفاضل لجميع س في (أ ، ب) ربما ما عدا جـ ، وكانت جَ (س) ≠ ٠ لجميع قيم س ≠ جـ

وكانت العباره $\frac{ف(س)}{ج(س)}$ تأخذ القيمة غير المعينة $\frac{\text{صفراً}}{\text{صفر}}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ عند

س = جـ ، فان

$$\text{نهـا}_{س \to جـ} \frac{ف(س)}{ج(س)} = \text{نهـا}_{س \to جـ} \frac{فَ(س)}{جَ(س)}$$

وذلك شريطة ان تكون نهاية العبارة $\frac{فَ(س)}{جَ(س)}$ موجودة أو لا نهائية

عندما تقترب س من جـ .

البرهـــان : لنفرض أن $\frac{ف(س)}{ج(س)}$ تأخذ الصيغة غير المعينة $\frac{\text{صفراً}}{\text{صفر}}$ عند س = جـ ،

بالاضافة الى أن $\text{نهـا}_{س \to جـ} \frac{فَ(س)}{جَ(س)}$ = ل حيث ل عدد حقيقي . ونريد ان نبرهن

$$\text{ان } \text{نهـا}_{س \to جـ} \frac{ف(س)}{ج(س)} = ل .$$

لنفرض أن كلا من الاقترانين فـه . ج معرف كما يلي :

فـه (س) = ف (س) اذا كانت س ≠ جـ . فـه (جـ) = صفرا .

ج (س) = ج (س) اذ كانت س ≠ جـ ، ج (جـ) = صفرا

وبما أن $\text{نهـا}_{س \to جـ}$ فـه (س) = $\text{نهـا}_{س \to جـ}$ ف (س) = صفرا = فـه (جـ)

فان الاقتران فـه متصل عند جـ وهكذا فانه متصل على (أ ، ب) وبالمثل فان الاقتران ج متصل على (أ ، ب) ايضا . وبالاضافة الى ذلك فان لجميع س ≠ جـ ، ف (س) = فـهَ (س) و جَ (س) = جَ (س) .

والآن فحسب صيغة كوشي للفترة [جـ ، س] أو [س ، جـ] ، فانه يوجد عدد و بين س و جـ يحقق :

$$\frac{\text{فـ}(\text{س}) - \text{فـ}(\text{جـ})}{\text{ج}(\text{س}) - \text{ج}(\text{جـ})} = \frac{\text{فـ}'(\text{و})}{\text{ج}'(\text{و})} = \frac{\text{ف}'(\text{و})}{\text{ج}'(\text{و})}$$

وباستخدام ف (س) = ف (س) ، ف (جـ) = صفرا ، ح (س) = ج (س) ، ح (جـ) = صفرا

$$\text{فان} \quad \frac{\text{ف}(\text{س})}{\text{ج}(\text{س})} = \frac{\text{ف}'(\text{و})}{\text{ج}'(\text{و})}$$

ولان و تقع بين س و جـ فان

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\text{جـ}} \frac{\text{ف}(\text{س})}{\text{ج}(\text{س})} = \text{نهـا}_{\text{س}\to\text{جـ}} \frac{\text{ف}'(\text{و})}{\text{ج}'(\text{و})} =$$

$$\text{نهـا}_{\text{و}\to\text{جـ}} \frac{\text{ف}'(\text{و})}{\text{ج}'(\text{و})} = \text{ل}$$

وهذا هو ما اردنا برهانه . ويمكن استخدام برهان شبيه بما سبق اذا كانت $\frac{\text{ف}'(\text{س})}{\text{ج}'(\text{س})}$ تصبح لا نهائية عندما تقترب س من جـ . ويمكن العثور على برهان للصيغة غير المعينة $\frac{\infty}{\infty}$ في كتاب اكثر تقدما

ملاحظـة : كثيرا ما يستخدم الطلبة المبتدئون قانون لوبتال استخداما خاطئا بتطبيق قانون خارج القسمة لمشتقة للاقتران $\frac{\text{ف}(\text{س})}{\text{ج}(\text{س})}$.

لاحظ اننا في (١١ – ٢) اخذنا مشتقة كل من ف (س) ، ج (س) على حدة وبعدها حسبنا نهاية حاصل قسمة المشتقتين .

مثـال ١ :

$$\text{جد} \quad \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جتا س} + ٢ س - ١}{س^{٣}}$$

الحـل : حاصل القسمة الذي يراد ايجاد نهايته يأخذ الصورة غير المعينة $\frac{\text{صفراً}}{\text{صفر}}$ عند س = صفرا . فحسب قانون لوبتال (١١ – ٢) :

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جتا س} + ٢ س - ١}{س^{٣}} = \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{- \text{جا س} + ٢}{٣}$$

$$= \frac{٢}{٣}$$

واذا اردنا الدقة وجب علينا في مثال (١) تعيين وجود

$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{- \text{جا س} + ٢}{٣}$ او عدم وجودها قبل أن نساويها بالعبارة المعطاة .

ولكن لتسهيل الحل فان خطواتنا ستكون على نمط الحل في المثال .
نحتاج احيانا لتطبيق قانون لوبتال أكثر من مرة في نفس المسألة كما هو

موضح في المثال التالي :

مثـال ٢ :

$$\text{جد} \quad \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{e^{س} + e^{-س} - ٢}{١ - \text{جتا ٢ س}}$$

الحـــل :

تأخذ العبارة الصيغة غير المعينة $\frac{\text{صفراً}}{\text{صفر}}$ عندما س = صفرا .

فباستخدام (١١ – ٢) :

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{e^{س} + e^{-س} - ٢}{١ - \text{جتا } ٢س} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{e^{س} - e^{-س}}{٢ \text{ جا } ٢س}$$

وذلك اذا وجدت النهاية في الطرف الايسر وبما أن العبارة الثانية تأخذ الصيغة

غير المعينة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عندما س = صفرا نستخدم (١١ – ٢) ثانية

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{e^{س} - e^{-س}}{٢ \text{ جا } ٢س} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٠} \frac{e^{س} + e^{-س}}{٤ \text{ جتا } ٢س} = \frac{١}{٢}$$

وهكذا فان النهاية المطلوبة موجودة وتساوي $\frac{١}{٢}$.

ويمكن استخدام قانون لوبتال للنهايات من اليمين أو للنهايات من اليسار كما هو موضح في المثال التالي :

مثـال ٣ :

$$\text{جد } \text{نهـــا}_{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}^-} \frac{٤ \text{ ظا س}}{١ + \text{قا س}}$$

الحـــل :

الصيغة غير المعينة هي $\frac{\infty}{\infty}$ عند س = $\frac{\pi}{٢}$.

$$\lim_{س \to -\frac{\pi}{2}} \frac{٤ \text{ ظا س}}{١ + \text{قا س}} = \lim_{س \to -\frac{\pi}{2}} \frac{٤ \text{ قا}^{٢} \text{ س}}{\text{قا س ظا س}}$$

$$= \lim_{س \to -\frac{\pi}{2}} \frac{٤ \text{ قا س}}{\text{ظا س}}$$

وحاصل القسمة الاخير يأخذ الصيغة غير المعينة $\frac{\infty}{\infty}$ عند س $= -\frac{\pi}{٢}$ ، كما ان اي تطبيق آخر للصيغة (١١ – ٢) سيؤدي الى $\frac{\infty}{\infty}$. وفي هذه الحالة توجد النهاية باستخدام المتطابقات المثلثية لتغيير الصورة :

$$\frac{٤ \text{ قا س}}{\text{ظا س}} = \frac{٤ \text{ جتا س}}{\text{جا س جتا س}} = \frac{٤}{\text{جا س}} \quad \text{وهكذا فان :}$$

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٤ \text{ ظا س}}{١ + \text{قا س}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٤}{\text{جا س}} = ٤$$

ملاحظـــة : يمكن اثبات ان (١١ – ٢) صحيحة ايضا اذا تغير س ← جـ الى س ← ∞ أو س ← – ∞ . وسنعطي فيما يلي برهانا جزئيا لهذه الحقيقة .

لنفرض أن

$$\lim_{س \to \infty} \text{ف} (\text{س}) = \lim_{س \to \infty} \text{ج} (\text{س}) = \text{صفرا}$$

فاذا وضعنا ص $= \frac{١}{\text{س}}$ وطبقنا قانون لوبتال يكون :

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{ف(س)}{ج(س)} = \text{نهـا}_{ص \to 0^+} \frac{ف\left(\frac{1}{ص}\right)}{ج\left(\frac{1}{ص}\right)} \qquad (١١-٣)$$

باستخدام قانون السلسلة في التفاضل نجد أن

$$د_{ص}\left(ف\left(\frac{1}{ص}\right)\right) = فَ\left(\frac{1}{ص}\right)\left(\frac{-1}{ص^{٢}}\right)$$

$$د_{ص}\left(ج\left(\frac{1}{ص}\right)\right) = جَ\left(\frac{1}{ص}\right)\left(\frac{-1}{ص^{٢}}\right)$$

وبالتعويض في (١١-٣) وتبسيط العبارة نحصل على

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{ف(س)}{ج(س)} = \text{نهـا}_{ص \to 0^+} \frac{فَ\left(\frac{1}{ص}\right)}{جَ\left(\frac{1}{ص}\right)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{فَ(س)}{جَ(س)}$$

وسنسمي الصيغة السابقة قانون لوبتال ايضا .

ويوضح المثالان التاليان تطبيق قانون لوبتال على الصيغة $\frac{\infty}{\infty}$.

مثـال ٤ :

جد $\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{\text{لط } س}{\sqrt{س}}$

الحـــل :

هذا يفضي الى الصيغة غير المعينة $\frac{\infty}{\infty}$. فبتطبيق قانون لوبتال يكون :

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow \infty} \frac{\text{لط } س}{\sqrt{س}} = \text{نهـا}_{س \leftarrow \infty} \frac{\frac{1}{س}}{\frac{1}{2} \sqrt{س}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \leftarrow \infty} \frac{2}{س \sqrt{س}} = \text{صفراً}$$

مثـال ٥ :

جد $\text{نهـا}_{س \leftarrow \infty} \frac{e^{3س}}{س^2}$

الحـــل : هنا الصيغة غير المعينة $\frac{\infty}{\infty}$. فبتطبيق قانون لوبتال مرتين :

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow \infty} \frac{e^{3س}}{س^2} = \text{نهـا}_{س \leftarrow \infty} \frac{3 e^{3س}}{2س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \leftarrow \infty} \frac{9 e^{3س}}{2} = \infty$$

وهكذا فان العبارة المذكورة تزداد بدون حاصر عندما تصبح س لا نهائية .

تمارينـــن :

احسب النهاية في التمارين ١ – ٣٠

١ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{\text{جا } س}{2س}$

٢ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{5س}{\text{ظا } س}$

٣. $\lim_{س \to ٥} \frac{٢ - \sqrt{س - ١}}{س^{٢} - ٢٥}$

٤. $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{٢ - \sqrt[٣]{س + ٤}}$

٥. $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^{٢} - ٥س + ٢}{٥س^{٢} - ٧س - ٦}$

٦. $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{٢س^{٢} + ٣س - ٩}$

٧. $\lim_{س \to ٠} \frac{جاس - س}{ظاس - س}$

٨. $\lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س - ظا س}$

٩. $\lim_{س \to ٠} \frac{e^{س} - ١ + س}{س^{٢}}$

١٠. $\lim_{س \to ٠^{+}} \frac{e^{س} - ١ + س}{س^{٣}}$

١١. $\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^{٣}}$

١٢. $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{١ - جا س}{جتا س}$

١٣. $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{٢ + قا س}{٣ ظا س}$

١٤. $\lim_{س \to ٠^+} \frac{لط س}{ظتا س}$

١٥. $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢}{لط س}$

١٦. $\lim_{س \to \infty} \frac{لط س}{س^٢}$

١٧. $\lim_{س \to ٠^+} \frac{لط جا س}{لط جا ٢ س}$

١٨. $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ س}{ظا^{-١} س}$

١٩. $\lim_{س \to ٠} \frac{e^{س} - e^{-س} - ٢ جا س}{س جا س}$

٢٠. $\lim_{س \to ٢} \frac{لط (س - ١)}{س - ٢}$

٢١. $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} + ٣س + ١}{٥س^{٢} + س + ٤}$

٢٢. $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٣} + س + ١}{٣س^{٣} + ٤}$

٢٣. $\lim_{س \to \infty} \frac{س \text{ لط } س}{س + \text{لط } س}$

٢٤. $\lim_{س \to \infty} \frac{٣^{س}_{e}}{\text{لط } س}$

٢٥. $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{ن}}{^{س}_{e}}$ ، ن > .

٢٦. $\lim_{س \to \infty} \frac{^{س}_{e}}{س^{ن}}$ ، ن > .

٢٧. $\lim_{س \to ٢^{+}} \frac{\text{لط } (س - ١)}{(س - ٢)^{٢}}$

٢٨. $\lim_{س \to .} \frac{\text{جا}^{٢} س + ٢ \text{ جتاس} - ٢}{\text{جتا}^{٢} س - س \text{ جا س} - ١}$

٢٩. $\lim_{س \to .} \frac{\text{جا}^{-١} ٢س}{\text{جا}^{-١} س}$

٣٠ . $\lim_{س \to \infty}$ $\frac{\text{لط (لط س)}}{\text{لط س}}$

٢ — صيغ اخرى غير معينة :

اذا كانت $\lim_{س \to جـ}$ ف (س) = صفرا ، $\lim_{س \to جـ}$ |ج (س)| = ∞ ، فانه يقال أن ف (س) . ج (س) تأخذ الصيغة غير المعينة صفر × ∞ عند س = جـ . وتستخدم نفس الاصطلاحات للنهايات من جهة واحدة ، أو اذا اصبحت س لا نهائية سلبا أو ايجابا . ويمكن تحويل هذه الصيغة الى الصيغة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ بكتابتها كما يلي :

$$\text{ف (س) . ج (س)} = \frac{\text{ف (س)}}{\text{١/ج (س)}} \quad ، \text{ أو}$$

$$\text{ف (س) . ج (س)} = \frac{\text{ج (س)}}{\text{١/ف (س)}}$$

مثال ١ :

جد $\lim_{س \to 0^+}$ $س^{٢}$ لط س

الحل :

الصيغة غير المعينة هنا هي صفر × ∞ فاذا وضعنا $س^{٢}$ لط س = $\frac{\text{لط س}}{\text{١/}س^{٢}}$

وطبقنا قانون لوبتال للصيغة $\frac{\infty}{\infty}$ نحصل على :

$$\text{نهـا}_{س \to 0^+} \; س^{٢} \; \text{لط} \; س = \text{نهـا}_{س \to 0^+} \frac{\text{لط} \; س}{١ / س^{٢}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0^+} \frac{١/س}{(-٢) / س^{٣}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0^+} \frac{(-س^{٢})}{٢} = \text{صفرا} .$$

مثـال ٢ :

جد $\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٢}} (٢س - \pi) \; \text{قا} \; س$

الحـــل :

الصورة غير المعينة هنا هي صفر × ∞ . نضع

$$(٢س - \pi) \; \text{قا} \; س = \frac{٢س - \pi}{\text{جتا} \; س}$$

والصيغة الاخيرة هي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$، فباستخدام قانون لوبتال :

$$\text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢ س - \pi}{\text{جتا} \; س} = \text{نهـا}_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢}{(- \text{جا} \; س)} = -٢$$

والصيغ غير المعينة التي تنجم عن عبارات على الصورة

[ف (س)] ج (س) تفضي الى الرموز (صفر)صفر أو (∞)صفر

أو (١)$^{\infty}$ حيث يوضح الرمز نفسه . واحدى الطرق لمعالجة هذه الصيغ تتأتى بوضع ص = [ف (س)]$^{\text{ج (س)}}$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

لط ص = ج (س) . لط ف (ص)

لاحظ انه عندما تكون الصيغة غير المعينة للمتغير ص هي (صفر) صفر أو (∞) صفر فان الصيغة غير المعينة للوغرتم لط ص تكون على الصورة صفر × ∞ التي يمكن معالجتها كما سبق . وعندما تكون لدينا الصيغة (١)$^{\infty}$ فان صيغة لط ص تكون على الصورة ∞ × صفر . وينتج مما سبق انه اذا كانت

$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{جـ}}$ لط ص = ل ، فإن

$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{جـ}}$ ص = $\text{e}^{\text{ل}}$. أي أن

$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{جـ}}$ [ف (س)]$^{\text{ج (س)}}$ = $\text{e}^{\text{ل}}$

مثـال ٣ :

جد $\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{٠}}$ (١ + ٣س)$^{\text{١/٢ س}}$

الحـــل :

الصورة غير المعينة هي ١$^{\infty}$ فباستخدام الطريقة المذكورة نجد أن

ص = (١ + ٣س)$^{\text{١/٢ س}}$

$$\text{لط ص} = \frac{\text{لط (١ + ٣س)}}{\text{٢ س}}$$

والعبارة الاخيرة تأخذ الصيغة غير المعينة $\frac{\text{صفراً}}{\text{صفر}}$ عند س = صفراوباستخدام قانون لوبتال :

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \text{ لط ص} = \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{لط } (١ + ٣ س)}{٢ س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{٣/(١ + ٣ س)}{٢} = \frac{٣}{٢}$$

وهكذا فان $\text{نهـا}_{س \to 0} (١ + ٣س)^{٢/١ س} = e^{٢/٣}$

وعندما تكون $\text{نهـا}_{س \to جـ}$ ف (س) = ∞، $\text{نهـا}_{س \to جـ}$ ج (س) = ∞.

فان ف (س) − ج (س) تأخذ الصيغة غير المعينة ∞ − ∞ عند س = جـ. وفي هذه الحالة يجب تحويل العبارة الى احدى الصور السابقة.

مثـال ٤ :

جد $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{١}{e^{س} - ١} - \frac{١}{س}$

الحـــل :

الصيغة غير المعينة هي ∞ − ∞، وعند كتابة العبارة في صورة اخرى نجد أن

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \left(\frac{١}{e^{س} - ١} - \frac{١}{س}\right) = \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{س - (e^{س} - ١)}{س (e^{س} - ١)}$$

وهذه تعطينا الصيغة غير المعينة $\frac{\text{صفراً}}{\text{صفر}}$ ، وبتطبيق قانون لوبتال مرتين نحصل على :

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{س - e^{س} + 1}{س\, e^{س} - س} = \text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{e^{س} - 1}{س\, e^{س} + e^{-س} - 1}$$

$$= \text{نهـا}_{س \leftarrow 0} \frac{e^{س} -}{س\, e^{س} + e^{2س}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

تمارين :

جد النهاية في كل من التمارين ١ - ٢٠ .

١ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow 0^+}$ س لط س

٢ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow \frac{\pi}{2}}$ ظا س لط جاس

٣ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow \infty} e^{-س^2} (س^2 - 1)$

٤ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow \infty}$ س $(e^{1/س} - 1)$

٥ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow 0^+}$ جا س لط جاس

٦ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow \infty}$ س $(\frac{\pi}{2} - ظا^{-1} س)$

٧ . $\text{نهـا}_{س \leftarrow \infty}$ س جا $\frac{1}{س}$

٨. $\lim_{س \to \infty} e^{-س}$ لط س

٩. $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{٥س}$

١٠. $\lim_{س \to -١} (e^{س} + ٣س)^{١/س}$

١١. $\lim_{س \to ٠} (e^{س} - ١)^{س}$

١٢. $\lim_{س \to ٠^+} س^{س}$

١٣. $\lim_{س \to \infty} س^{\frac{١}{س}}$

١٤. $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} (ظا س)^{جتا س}$

١٥. $\lim_{س \to ٠} (٢س + ١)^{ظتاس}$

١٦. $\lim_{س \to ٠} (١ + ٣ س)^{قتاس}$

١٧. $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^{٢}}{س - ١} - \frac{س^{٢}}{س + ١} \right)$

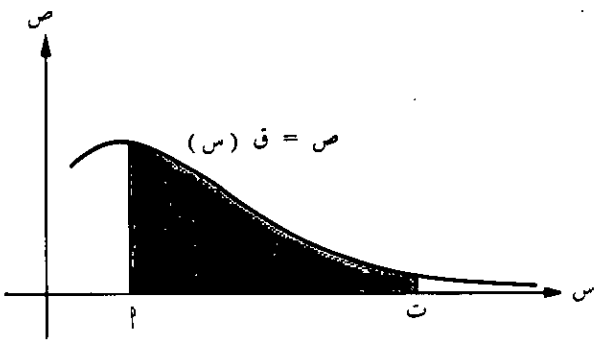
١٨. $\lim_{س \to ١} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{١}{\text{لط } س} \right)$

١٩. $\lim_{س \to ٠} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{\text{جا } س} \right)$

٢٠. $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} (\text{قا } س - \text{ظا } س)$

٣ ــ التكاملات التي حدودها لا نهائية :

اذا كان الاقتران ق متصلا وقيمه ليست سالبة على الفترة اللانهائية [أ ، ∞) ، وكانت $\lim_{س \to \infty}$ ق (س) = صفرا ، فانه لكل ت > أ ، تكون المساحة ح (ت) تحت منحنى الاقتران ق من أ الى ت (انظر الشكل ١١ – ١) معطاة بالصيغة



الشكل ١١ ــ ١

$$\text{ح } (ت) = \int_{أ}^{ت} \text{ق } (س) \, د س \qquad (١١ - ٤)$$

واذا كانت $\lim_{ت \to \infty}$ ح (ت) موجودة ، فان هذه النهاية يكن تفسيرها على انها

مساحة المنطقة تحت منحنى ق وفوق محور س الى اليمين من س = ﻫ .

ويستخدم الرمز $\int_{ﻫ}^{ت}$ ق (س) ء س للدلالة على هذه النهاية . وبصورة عامة

اذا كان ق أي اقتران متصل على [ﻫ ، ∞) فاننا نعرف تكامل ق (س) من ﻫ الى ∞ كما يلي :

$$\int_{ﻫ}^{\infty} \text{ق}(س)\,ء س = \text{نهـا}_{ت \leftarrow \infty} \int_{ﻫ}^{ت} \text{ق}(س)\,ء س \qquad (١١-٥)$$

وذلك اذا وجدت النهاية .

وبالمثل اذا كان الاقتران ق معرفا على (− ∞ ، ﻫ] نحصل على التعريف التالي :

$$\int_{-\infty}^{ﻫ} \text{ق}(س)\,ء س = \text{نهـا}_{ت \leftarrow -\infty} \int_{ت}^{ﻫ} \text{ق}(س)\,ء س \qquad (١١-٦)$$

وذلك اذا وجدت النهاية .

واذا كان ق (س) ≥ صفر لجميع قيم س فيمكن اعتبار (١١ − ٦) مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى ق وفوق محور السينات الى اليسار من س = ﻫ .

وتسمى كل من الصيغتين (١١ − ٥) و (١١ − ٦) التكامل المعتل (Impoper integral) وتختلف عن التكامل المحدود في أن احد طرفي التكامل ليس عدداً حقيقيا .

وتدعى هذه التكاملات تقاربية (Convergent) اذا وجدت نهايات الطرف الأيسر في كل من هذه العبارات عندما تزداد | ت | بدون حاصر . واذا لم توجد النهايات فان هذه التكاملات تسمى تكاملات تباعدية (divergent) وتكون التكاملات معتلة ايضا عندما تكون كل من نهايتي التكامل لا نهائية . فاذا كان ق متصلا وكان ﻫ أي عدد حقيقي فاننا نعرف تكامل ق (س) كما يلي :

(١١ – ٧) $\int_{-\infty}^{\infty} ق(س)\,د س = \int_{-\infty}^{أ} ق(س)\,د س + \int_{أ}^{\infty} ق(س)\,د س$

وذلك اذا كان كل من التكاملين في الطرف الايسر تقاربيا . اما اذا كان احد التكاملين تباعديا فان $\int_{-\infty}^{\infty} ق(س)\,د س$ يكون تباعديا ايضا . ويمكن البرهنة على أن (١١ – ٧) لا تعتمد على العدد أ (انظر التمرين ٢٠) كما يمكن البرهنة على أن $\int_{-\infty}^{\infty} ق(س)\,د س$ ليس بالضرورة مساويا لنهاية الصيغة :

$$\text{نهـا}_{ت \to \infty} \int_{-ت}^{ت} ق(س)\,د س$$ (انظر التمرين ١٩) .

مثـال ١ :

جد قيمة كل من التكاملات التالية اذا وجد :

(أ) $\int_{٢}^{\infty} \frac{١}{(س-١)^{٢}}\,د س$ (ب) $\int_{٢}^{\infty} \frac{١}{س-١}\,د س$

الحـل : (أ) باستخدام (١١ – ٥)

$$\int_{٢}^{\infty} \frac{١}{(س-١)^{٢}}\,د س = \text{نهـا}_{ت \to \infty} \int_{٢}^{ت} \frac{١}{(س-١)^{٢}}\,د س$$

$$= \text{نهـا}_{ت \to \infty} \left[\frac{-١}{س-١} \right]_{٢}^{ت}$$

$$= \text{نهـا}_{ت \to \infty} \left[\frac{-١}{ت-١} + \frac{١}{٢-١} \right]$$

$$= ١$$

(ب) باستخدام (١١ – ٥)

$$\int_{٢}^{\infty} \frac{١}{(س-١)^{٢}}\, د س = \text{نهـا}_{ت \to \infty} \int_{٢}^{ت} \frac{١}{(س-١)^{٢}}\, د س$$

$$= \text{نهـا}_{ت \to \infty} \left[\text{لط} \left| س - ١ \right| \right]_{٢}^{ت}$$

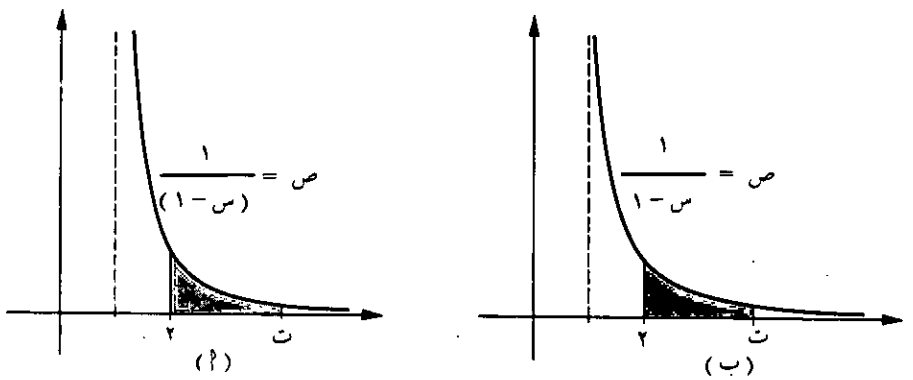
$$= \text{نهـا}_{ت \to \infty} [\text{لط} (ت - ١) - \text{لط} ١]$$

$$= \infty$$

والنتيجة ان هذا التكامل المعتل تباعدي .

لاحظ ان منحني الاقترانين المكاملين في (أ) ، (ب) من مثال (١) مرسومان في الشكل (١١ – ٢) . لاحظ انه على الرغم من أن لهما نفس الشكل العام لجميع س ≥ ٢ فانه يمكن ان تعين مساحة المنطقة تحت المنحنى في الشكل (أ) ولا يمكن عمل نفس الشيء لمساحة المنطقة في الشكل (ب) .

واليك معلومات عرضية اخرى لهذين المنحنيين : فاذا دارت المنطقة تحت منحنى ص = $\frac{١}{س - ١}$ من ٢ الى ت حول محور السينات ، فحسب



الشكل ١١ — ٢

(٦ – ١١) يكون حجم الجسم المتولد $\pi \int_{٢}^{ت} \frac{١}{(س - ١)^{٢}}$ ء س

ومنه يمكن تفسير التكامل المعتل $\pi \int_{٢}^{\infty} \frac{١}{(س - ١)^{٢}}$ ء س

على انه حجم الجسم غير المحصور المتولد من دوران المنطقة الواقعة تحت منحنى

ص = $\frac{١}{س - ١}$ لجميع قيم س ≥ ٢ . ومن المثال السابق (أ) فان قيمة هذا التكامل تساوي π . وهذا يقودنا الى الحقيقة المثيرة وهي انه على الرغم من أن مساحة المنطقة لا نهائية فان حجم الجسم المتولد من دورانها هو عدد منته .

مثـال ٢ :

عين مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى ص = $e^{-س}$ وفوق محور السينات الى اليسار من س = ١ .

الحـــل :

من ملاحظاتنا السابقة نجد أن المساحة المطلوبة تساوي

$$\int_{-\infty}^{١} e^{-س} \text{ ء س} = \text{نهـا}_{ت \leftarrow -\infty} \int_{ت}^{١} e^{-س} \text{ ء س}$$

$$= \text{نهـا}_{ت \leftarrow -\infty} \left[-e^{-س} \right]_{ت}^{١}$$

$$= \text{نهـا}_{ت \leftarrow -\infty} [e^{-ت} - e^{-١}]$$

$$= e$$

مثـال ٣ :

$$\text{جد} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{س^{٢} + ١} \, د س$$

الحـــل :

باستخدام (١١ – ٧) ، ∫ = صفرا

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{س^{٢} + ١} \, د س = \int_{-\infty}^{٠} \frac{1}{س^{٢} + ١} \, د س$$

$$+ \int_{٠}^{\infty} \frac{1}{س^{٢} + ١} \, د س$$

ثم بتطبيق (١١ – ٥)

$$\int_{٠}^{\infty} \frac{1}{س^{٢} + ١} \, د س = \text{نهـا}_{ت \leftarrow \infty} \int_{٠}^{ت} \frac{1}{س^{٢} + ١} \, د س$$

$$= \text{نهـا}_{ت \leftarrow \infty} \left[\text{ظا}^{-١} س \right]_{٠}^{ت}$$

$$= \text{نهـا}_{ت \leftarrow \infty} \left[\text{ظا}^{-١} ت - \text{ظا}^{-١} ٠ \right]$$

$$= \frac{\pi}{٢}$$

وبالمثل اعتمادا على (١١ – ٦) يمكن ان نثبت أن

$$\int_{-\infty}^{٠} \frac{1}{س^{٢} + ١} \, د س = \frac{\pi}{٢}$$

وهكذا فان المعتل المعطى تقاربي وقيمته تساوي $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

تمارين :

بين هل التكاملات في تمارين ١ – ١٢ تقاربية أم تباعدية وجد قيم التقاربية منها :

١ . $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2س}$ د س

٢ . $\int_{-\infty}^{0} e^{س}$ د س

٣ . $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{س^3}$ د س

٤ . $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{س + 1}}$ د س

٥ . $\int_{\infty}^{} \frac{1}{(س - 8)^{3/2}}$ د س

٦ . $\int_{1}^{\infty} \frac{س}{(1 + س^2)^2}$ د س

٧ . $\int_{1}^{\infty} \frac{س}{1 + س^2}$ د س

٨ . $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{س^2 + 4}$ د س

٩. $\int_{-\infty}^{\infty} س\, e^{-س^2}\, د س$

١٠. $\int_{-\infty}^{\infty} جتا^2 س\, د س$

١١. $\int_{1}^{\infty} \frac{لط\ س}{س}\, د س$

١٢. $\int_{٣}^{\infty} \frac{١}{س^2 - ١}\, د س$

في التمارين ١٣ – ١٦ جد قيمة ما يأتي (اذا وجدت) (أ) مساحة المنطقة ط (ب) حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة ط حول محور السينات .

١٣. $ط = \{(س ، ص) : س \geq ١ ، ٠ \leq ص \leq \frac{١}{س}\}$

١٤. $ط = \{(س ، ص) : س \geq ١ ، ٠ \leq ص \leq \frac{١}{\sqrt{س}}\}$

١٥. $ط = \{(س ، ص) : س \geq ٤ ، ٠ \leq ص \leq س^{-\frac{٣}{٢}}\}$

١٦. $ط = \{(س ، ص) : س \geq ٨ ، ٠ \leq ص \leq س^{-\frac{٢}{٣}}\}$

١٧. جد قيم ن التي تجعل التكامل $\int_{1}^{\infty} س^{ن}\, د س$ (أ) تقاربيا ، (ب) تباعديا

١٨. جد قيم ن الصحيحة التي تجعل التكامل $\int_{-\infty}^{-١} س^{ن}\, د س$ (أ) تقاربيا (ب) تباعديا .

١٩. جد اقترانا ق فيه $\int_{ت}^{ت+١} ق(س)\, د س$ موجودة و $\int_{-\infty}^{\infty} ق(س)\, د س$ تباعدي .

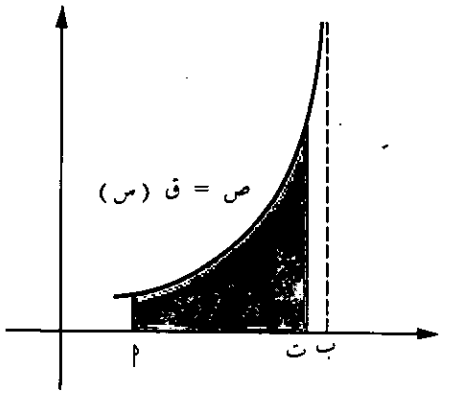
٢٠. برهن على انه اذا كان $\int_{-\infty}^{أ}$ ق (س) ء س = ل ، $\int_{أ}^{\infty}$ ق (س) ء س = ك

كان $\int_{-\infty}^{ب}$ ق (س) ء س + $\int_{ب}^{\infty}$ ق (س) ء س = ل + ك لجميع قيم ب العددية .

٤ — التكاملات التي اقترانها المكامل لا نهائي :

اذا كان الاقتران ق متصلا على الفترة [أ ، ب] ، فحسب (٥ – ١٩) فان التكامل $\int_{ب}^{أ}$ ق (س) ء س موجود . اما اذا كان للاقتران ق انقطاع لا نهائي عند عدد ما في الفترة [أ ، ب] ، فقد يكون ممكناً تعيين قيمة للتكامل فاذا كان ق متصلا وغير سالب على الفترة نصف المفتوحة [أ ، ب) ، وكانت $\lim_{س \to ت^-}$ ق (س) = ∞ ، وكانت أ < ت < ب فان المساحة ح (ت) تحت منحنى ق من أ الى ت (انظر الشكل ١١ – ٣) تعطى بالصيغة (١١ – ٤) . واذا كانت $\lim_{ت \to ب^-}$ ح (ت) موجودة

فانه يمكن تفسير النهاية على انها المساحة غير المحدودة الواقعة تحت منحنى ق وفوق محور السينات بين س = أ و س = ب . ومن الطبيعي أن نرمز لهذه النهاية بالرمز $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) ء س . وبصورة عامة اذا كان ق اقترانا متصلا على الفترة نصف المفتوحة [أ ، ب) ويصبح لا نهائيا عند ب فاننا نعتبر التعريف التالي :



الشكل ١١ — ٣

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س = \lim_{ت \to ب^-} \int_{أ}^{ت} ق(س)\,د س \qquad (١١-٨)$$

وذلك اذا وجدت النهاية .

وبالمثل اذا كان ق متصلا على الفترة (أ ، ب] ويصبح لا نهائيا عند أ فاننا نتخذ التعريف :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س = \lim_{ت \to أ^+} \int_{ت}^{ب} ق(س)\,د س \qquad (١١-٩)$$

وذلك اذا وجدت النهاية .

وكما مر في البند السابق فاننا نسمي (١١ – ٨) و (١١ – ٩) تكاملات معتلة . ونقول انها تقاربية اذا وجدت النهاية المذكورة والا فانها تباعدية .

واذا كان للاقتران ق نقطة عدم اتصال لا نهائية جـ في الفترة (أ ، ب) حيث ق متصل على (أ ، ب) ما عدا جـ . فاننا نعرّف

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,د س + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,د س \qquad (١١-١٠)$$

وذلك اذا كان كل من التكاملين في الطرف الايسر تقاربيا .

وهناك تعريف مماثل اذا كان للاقتران ق عدد منته من نقط عدم الاتصال النهائية في [أ ، ب]

مثـال ١ :

جد قيمة $\int_{.}^{٣} \frac{١}{\sqrt{٣ - س}}$ ء س

الحـــل :

للاقتران المكامل نقطة انقطاع لا نهائية عند ٣ . فبتطبيق (١١ – ٨)

$$\int_{.}^{٣} \frac{١}{\sqrt{٣ - س}} \text{ ء س} = \text{نهـا}_{ت \leftarrow ٣^-} \int_{.}^{ت} \frac{١}{\sqrt{٣ - س}} \text{ ء س}$$

$$= \text{نهـا}_{ت \leftarrow ٣^-} \left[- ٢ \sqrt{٣ - س} \right]_{.}^{ت}$$

$$= \text{نهـا}_{ت \leftarrow ٣^-} [- ٢ \sqrt{٣ - ت} + ٢ \sqrt{٣}]$$

$$= ٢ \sqrt{٣}$$

مثـال ٢ :

بين هل التكامل التالي تقاربي أم تباعدي $\int_{.}^{١} \frac{١}{س}$ ء س

الحـــل :

الاقتران المكامل ليس معرفا عند س = . ، فباستخدام (١١ – ٩)

$$\int_{.}^{١} \frac{١}{س} \text{ ء س} = \text{نهـا}_{ت \leftarrow ٠^+} \int_{ت}^{س} \frac{١}{س} \text{ ء س}$$

$$= \text{نهـا}_{ت \leftarrow ٠^+} \left[\text{لط س} \right]_{م}^{ب}$$

$$= \text{نهـا}_{ت \leftarrow ٠^+} [\text{لط ١ – لط ت}]$$

$$= \infty$$

وبما أن النهاية غير موجودة فان التكامل تباعدي .

مثـال ٣ :

بين التقارب والتباعد في التكامل $\int_{0}^{4} \frac{1}{(س-٣)^{٢}}$ د س

الحـــل :

الاقتران المكامل غير معرف عند س = ٣ . ولان ٣ في (٠ ، ٤) فاننا نستخدم (١١ – ١٠) حيث جـ = ٣ .

$$\int_{0}^{4} \frac{1}{(س-٣)^{٢}} \text{ د س} = \int_{0}^{3} \frac{1}{(س-٣)^{٢}} \text{ د س} + \int_{3}^{4} \frac{1}{(س-٣)^{٢}} \text{ د س}$$

وبتطبيق (١١ – ٨) للتكامل الاول في الطرف الايسر.

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{(س-٣)^{٢}} \text{ د س} = \text{نهـا}_{ت \to ٣^-} \int_{0}^{ت} \frac{1}{(س-٣)^{٢}} \text{ د س}$$

$$= \text{نهـا}_{ت \to ٣^-} \left[\frac{1}{س-٣} \right]_{0}^{ت}$$

$$= \text{نهـا}_{ت \to ٣^-} \left[\frac{-1}{ت-٣} - \frac{1}{٣} \right]$$

$$= \infty$$

وهكذا فان التكامل المطلوب تباعدي .

ملاحظـة : من المهم ملاحظة انه لا يمكن تطبيق النظرية الاساسية للتفاضل والتكامل في المثال (٣) لان الاقتران المكامل ليس متصلا على [٠ ، ٤] . واذا طبقنا النظرية الاساسية نحصل على

$$\int_{0}^{4} \frac{1}{(س-3)^{2}} \, د س = \left[\frac{-1}{س-1} \right]_{0}^{4}$$

$$= -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

وهذه النتيجة غير صحيحة بداهة لان الاقتران المكامل لا يكون سالبا ابدا .

تمارين :

بين التقارب والتباعد في كل من التكاملات في التمارين ١ – ١٤ ، وجد قيمة التكاملات التقاربية :

١ . $\int_{0}^{4} \frac{1}{(4-س)^{2/3}} \, د س$

٢ . $\int_{0}^{-1} \frac{10}{\sqrt[3]{1+س}} \, د س$

٣ . $\int_{0}^{4} \frac{1}{(4-س)^{3/2}} \, د س$

٤ . $\int_{1}^{2} \frac{س}{1-س^{2}} \, د س$

٥ . $\int_{-2}^{3} \frac{1}{(1+س)^{3}} \, د س$

٦ . $\int_{-1}^{1} س^{-3/4} \, د س$

٧. $\int_{-٢}^{٠} \frac{١}{\sqrt{٤ - س^٢}}$ د س

٨. $\int_{-٢}^{٠} \frac{س}{\sqrt{٤ - س^٢}}$ د س

٩. $\int_{-١}^{٢} \frac{١}{س}$ د س

١٠. $\int_{٠}^{٤} \frac{١}{س^٢ - س - ٢}$ د س

١١. $\int_{٠}^{١} س \, لط \, س$ د س

١٢. $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ظا^٢ س$ د س

١٣. $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ظا \, س$ د س

١٤. $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{١}{١ - جتا س}$ د س

في التمارين ١٥ – ١٨ أوجد اذا امكن (أ) مساحة المنطقة ط و (ب) حجم الجسم المتولد من دوران المنطقة حول محور س .

١٥. ط = { (س ، ص) : ٠ ≤ س ≤ ١ ، ٠ ≤ ص ≤ ١ / $\sqrt{س}$ }

١٦. ط = { (س ، ص) : ٠ ≤ س ≤ ١ ، ٠ ≤ ص ≤ ١/ $\sqrt[٣]{س}$ }

١٧. ط = {(س ، ص) : − ٤ ≤ س ≤ ٤ ، ٠ ≤ ص ≤ $\frac{١}{س + ٤}$}

١٨. ط = {(س ، ص) : ١ ≤ س ≤ ٢ ، ٠ ≤ ص ≤ $\frac{١}{س - ١}$}

جد جميع قيم ن التي تجعل التكامل في كل من التمرين ١٩ والتمرين ٢٠ تقاربيا .

١٩. $\int_{٠}^{١}$ س ن ى س

٢٠. $\int_{٠}^{١}$ س ن لط س ى س

٥ — صيغة تايلـــور :

الاقترانات الحدودية هي اسهل الاقترانات عند استخدامها في الحسابات وذلك لان قيمها توجد بجمع اعداد حقيقية وضربها فقط . وحساب قيم الاقترانات غير الجبرية والاقترانات الاكثر تعقيدا هو اصعب بلا شك . ولكن من الممكن احيانا تقريب الاقترانات الاخيرة هذه باستخدام الحدوديات . فمثلا ، لان نهـا $\frac{\text{حا س}}{\text{س}}$ = ١ ، س ← ٠

فعندما تكون قيم س صغيرة نجد أن جا س ≈ س ، أي ان قيمة اقتران الجيب قريبة جدا من قيمة الاقتران الحدودي س . ومن ذلك يمكن القول ان الاقتران جا س يمكن تقريبه للحدودي س (عندما تكون س قريبة من الصفر) . وبطريقة مشابهة سنجد في المثال ٤ من هذا البند انه عندما تكون س قريبة من الصفر فان $e^{س}$ يمكن تقريبها الى حدودية على الصورة :

$$١ + س + \frac{١}{٢!} س^{٢} + \frac{١}{٣!} س^{٣} + ... + \frac{١}{ن!} س^{ن}$$

حيث ن عدد صحيح موجب . والاساس الذي تبنى عليه صيغ التقريب هذه هي النتيجة (١١ – ١٦) التي سنبرهنها في هذا البند .

وسنوضح سبب توقعنا أن يكون (١١ – ١٦) صيغة معقولة للتقريب . افرض ان ق اقتران له مشتقات كثيرة ، وافرض أن أ نقطة في مجال ق . ان اقتران الحدودية من الدرجة الصفر الذي له نفس قيم ق عند أ هو الاقتران الثابت ق (أ) . واذا ما اردنا تقريب ق (س) بجوار أ باقتران حدودية من الدرجة الاولى فان الاقتران المتوقع هو الحدودي الذي منحناه يمس منحنى ق عند النقطة (أ ، ق (أ)) ، ولان معادلة هذا المماس هي

ص – ق (أ) = قَ (أ) (س – أ)

فان الحدودية من الدرجة الاولى المطلوبة هي :

ق (أ) + قَ (أ) (س – أ)

وعند استخدام الحدودية التي منحناها له نفس تقوس منحنى ق عند (أ ، ق (أ)) يجب ان نحصل على تقريب افضل . وسنترك للقاريء ان يثبت ان هذه الشروط متحققة بالحدودية ذات الدرجة الثانية :

ق (أ) + قَ (أ) (س – أ) + $\frac{١}{٢}$ قً (أ) (س – أ)^{٢}

واذا اخذنا الحدودية ذات الدرجة الثالثة :

$$ج (س) = ق (أ) + قَ (أ) (س - أ) + \frac{قً (أ)}{!٢} (س - أ)^{٢} + \frac{قٌ (أ)}{!٣} (س - أ)^{٣}$$

فمن السهل اثبات انه بالاضافة الى أن جَ (أ) = قَ (أ) ، جً (أ) فان كٌ (أ) = قٌ (أ) . ويبدو أنه اذا ما مضينا على هذا النهج فاننا سنحصل على تقريب افضل للاقتران ق (س) عندما تكون س بجوار أ . وهذا يقودنا الى الحدود الـ (ن + ١) الاولى في (١١ – ١٦) ، اما الحد الاخير فهو نتيجة للنظرية التالية التي تحمل اسم الرياضي الانجليزي بروك تايلور (١٦٨٥ – ١٧٣١) .

(١١–١١) صيغة تايلور : اذا كان ق اقترانا وكان ن عددا صحيحا موجبا بحيث أن ق$^{(ن+١)}$ (س) موجودة لجميع قيم س في فترة ما ، ت ، واذا كانت أ ، ب نقطتين مختلفتين في الفترة ت ، فانه يوجد عدد جـ بين أ ، ب حيث

$$ق(ب) = ق(أ) + \frac{قَ(أ)}{!١}(ب - أ) + \frac{قً(أ)}{!٢}(ب - أ)^{٢} + \cdots$$

$$+ \frac{ق^{(ن)}(أ)}{!ن}(ب - أ)^{ن} + \frac{ق^{(ن+١)}(جـ)}{!(ن+١)}(ب - أ)^{ن+١}$$

البرهـــان : يوجد عدد $ب_{ن}$ (يعتمد على أ ، ب ، ن) حيث أن

$$ق(ب) = ق(أ) + \frac{قَ(أ)}{!١}(ب - أ) + \frac{قً(أ)}{!٢}(ب - أ)^{٢} + \cdots + \frac{ق^{(ن)}(أ)}{!ن}(ب - أ)^{ن} + ب_{ن} \quad (١١-١٢)$$

وللحصول على قيمة $ب_{ن}$ فاننا نطرح مجموع الـ (ن + ١) حدا الاول في الطرف الايسر من ق (ب) . فلنعرف الاقتران ج كما يلي

$$ج(س) = ق(ب) - ق(س) - \frac{قَ(س)}{!١}(ب - س) \quad (١١-١٣)$$

$$- \frac{قً(س)}{!٢}(ب - س)^{٢} - \cdots$$

$$- \frac{ق^{(ن)}(س)}{!ن}(ب - س)^{ن} - ب_{ن}\frac{(ب - س)^{ن+١}}{(ب - أ)^{ن+١}}$$

لجميع قيم س في ت . فعند ايجاد جَ (س) فان الكثير من الحدود في الطرف الايسر من (١١ - ١٣) يختزل بعضها بعضاً ، ويمكننا ان نثبت أن

$$(١١-١٤) \quad جَ(س) = \frac{-\,ق_{(ن+١)}(س)}{ن\,!}(ب - س)^{ن}$$

$$+ ب_{ن}(ن+١)\,\frac{(ب - س)^{ن}}{(ب - م)^{ن+١}} .$$

كما يتبع من (١١ – ١٣) أن ج (ب) = صفرا ، وعند تعويض م بدل س واستخدام (١١ – ١٢) نجد ان ج (م) = صفرا،وباستخدام نظرية رول (٤ – ١٢) ينتج انه يوجد عدد جـ بين م ، ب يحقق جَ (جـ) = صفرا . وبتعويض جـ بدل س في (١١ – ١٤) نجد أن

$$(١١-١٥) \quad ب_{ن} = \frac{ق_{(ن+١)}(جـ)}{(ن+١)!}(ب - م)^{ن+١}$$

وبتعويض قيمة ب$_{ن}$ في (١١ – ١٢) نحصل على النتيجة المطلوبة . وبوضع س بدل ب في (١١ – ١١) ينتج أن

$$(١١-١٦) \quad ق(س) = ق(م) + \frac{قَ(م)}{١\,!}(س - م) + \frac{قً(م)}{٢\,!}(س - م)^{٢}$$

$$+ \ldots + \frac{ق_{(ن)}(م)}{ن\,!}(س - م)^{ن}$$

$$+ \frac{ق_{(ن+١)}(جـ)}{(ن+١)\,!}(س - م)^{ن+١}$$

حيث جـ عدد بين س و م

سندعو الصيغة (١١ – ١٦) قانون تايلور مع الباقي . وكثيرا ما يرمز الى مجموع

الحدود الـ (ن + ١) الاولى في الطرف الأيسر من (١١ – ١٦) بالرمز ح$_{ن}$ (س) ويسمى حدودية تايلور من الدرجة ن للاقتران ق عند ﻫ . وهكذا فان

$$(١١-١٧)\quad ح_{ن}(س) = ق(ﻫ) + \frac{ق'(ﻫ)}{١!}(س - ﻫ) + \frac{ق''(ﻫ)}{٢!}(س - ﻫ)^{٢}$$

$$+ \cdots + \frac{ق^{(ن)}(ﻫ)}{ن!}(س - ﻫ)^{ن}$$

والعبارة

$$(١١-١٨)\quad ب_{ن}(س) = \frac{ق^{(ن+١)}(جـ)}{(ن+١)!}(س - ﻫ)^{ن+١}$$

تسمى الباقي بعد (ن + ١) حدا .

وبناء على هذه الاصطلاحات يكون :

$$(١١-١٩)\quad ق(س) = ح_{ن}(س) + ب_{ن}(س)$$

وهكذا عندما تكون قيمة ب$_{ن}$ (س) صغيرة فانه يمكن تقريب ق (س) بحدودية تايلور من الدرجة ن للاقتران ق عند ﻫ ، أي أن

$$(١١-٢٠)\quad ق(س) \approx ح_{ن}(س)$$

وبما ان | ق (س) – ح$_{ن}$ (س) | = | ب$_{ن}$ (س) | فان الخطأ المتضمن باستخدام هذه الحدودية اقل من القيمة المطلقة | ب$_{ن}$ (س) | .

مثال ١ : اذا كان ق (س) = لط س ، جد حدودية تايلور مع الباقي عندما ن = ٣ ، ﻫ = ١ .

الحل: من المناسب ترتيب عملنا كالتالي :

ق (س) = لط س ق (١) = صفراً

$$ق'(س) = س^{-١} \qquad ق'(١) = ١$$

$$ق''(س) = \frac{-١}{س^{٢}} \qquad ق''(١) = -١$$

$$ق'''(س) = \frac{٢}{س^{٣}} \qquad ق'''(١) = ٢$$

$$ق^{(٤)}(س) = \frac{-٣}{س^{٤}} \qquad ق^{(٤)}(جـ) = \frac{-٣}{جـ^{٤}}$$

وبالتعويض في (١١ – ١٦) ينتج :

$$لط\ س = صفرا + \frac{١}{١!}(س-١) + \frac{١}{٢!}(س-١)^{٢} + \frac{٢}{٣!}(س-١)^{٣}$$

$$- \frac{٦\ جـ^{-٤}}{٤!}(س-١)^{٤}$$

. حيث جـ بين س ، ١ . ويمكن تبسيط الصورة الاخيرة الى

$$لط\ س = (س-١) + \frac{١}{٢}(س-١)^{٢}$$

$$+ \frac{١}{٣}(س-١)^{٣} - \frac{١}{٤\ جـ^{٤}}(س-١)^{٤}$$

مثـال ٢ : استخدم الصيغة الناتجة في المثال (١) لتقريب لط (١,١) ثم قدّر دقة التقريب .

الحـــل : بتعويض ١,١ بدل س في صيغة المثال (١) نجد أن

$$لط\ (١,١) = ٠,١ - \frac{١}{٢}(٠,١)^{٢} + \frac{١}{٣}(٠,١)^{٣} - \frac{١}{٤\ جـ^{٤}}(٠,١)^{٤}$$

حيث ١ < جـ < ١,١ وبجمع الحدود الثلاثة الاولى :

$$لط\ (١,١) \approx ٠,٠٩٥٣$$

وحيث أن جـ > ١ فان $\frac{١}{جـ}$ < ١ فيكون :

$$ب_{٣}(١,١) = \left|\frac{(٠,١)^{٤}}{٤\,جـ^{٤}}\right| < \left|\frac{٠,٠٠٠١}{٤}\right| < ٠,٠٠٠٠٢٥$$

وهكذا فان التقريب لط (١,١) ≈ ٠,٠٩٥٣ صحيح لاربع منازل عشرية .

مثـال ٣ :

الحـــل : بما أن ٦١° قريبة من ٦٠° . فمن المناسب استخدام (١١ – ١٦) بوضع $أ = \frac{\pi}{٣}$ ، حيث ق (س) = جتا س ، قَ (س) = – جا س ، قً (س) = – جتا س ، قً (س) = + جا س . وهكذا وباستخدام (١١ – ١٧) فان حدودية تايلور من الدرجة الثانية للاقتران ق عند $أ = \frac{\pi}{٣}$ هي

$$ح_{٢}(س) = \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}/٢}{!١}(س - \frac{\pi}{٣}) - \frac{(١/٢)}{!٢}(س - \frac{\pi}{٣})^{٢}$$

وباستخدام (١١ – ٢٠) ووضع س = ٦١° = ٦٠° + ١° = $\frac{\pi}{١٨٠} + \frac{٢}{٣}$

$$جتا\ ٦١° \approx \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}(\frac{\pi}{١٨٠}) - \frac{١}{٤}(\frac{\pi}{١٨٠})^{٢}$$

$$\approx ٠,٤٨٤٨١$$

ولتقدير دقة هذا التقريب ، نجد باستخدام (١١ – ١٨) أن

$$|ب_{٢}(س)| = |\frac{جا\,جـ}{!٣}(\frac{\pi}{١٨٠})^{٣}|$$

وبتعويض س = ٦١° واستخدام | جا جـ | ≤ ١

$$|ب_{٢}(٦١°)| = |\frac{جا\,جـ}{٦}(\frac{\pi}{١٨٠})^{٣}|$$

$$\leq \frac{١}{٦}(\frac{\pi}{١٨٠})^{٣} \leq ٠,٠٠٠٠٠١$$

وهكذا نرى أن جتا ٦١° ≈ ٠,٤٨٤٨١ صحيحة لاقرب خمس منازل عشرية . واذا رغبنا في تقريب اكثر دقة فمن الضروري ايجاد قيمة ن التي تجعل |ب$_{ن}$ (٦١°)| ضمن المدى المطلوب .

قانون ماكلورين : اذا استخدمنا صفرا بدل أ في (١١ – ١٦) ينتج :

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٠) + \frac{\text{ق}'(٠)}{!١}\text{س} + \frac{\text{ق}''}{!٢}\text{س}^{٢} + \cdots + \frac{\text{ق}^{(\text{ن})}(٠)}{!\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}} + \frac{\text{ق}^{(\text{ن}+١)}(\text{جـ})}{!(\text{ن}+١)}\text{س}^{\text{ن}+١} \quad (١١-٢١)$$

حيث جـ بين صفر و س ، وتسمى هذه الحالة الخاصة من (١١ – ١٦) صيغة ماكلورين او قانون ماكلورين ، وذلك نسبة الى الرياضي الاسكتلندي كولن ماكلورين (١٦٩٨ – ١٧٤٦) .

مثـال ٤ : جد صيغة ماكلورين اذا كان ق (س) = $e^{\text{س}}$ وكان ن اي عدد صحيح موجب .

الحـــل : لكل عدد صحيح موجب ك ، ق$^{(ك)}$ (س) = $e^{\text{س}}$ ومنه ق$^{(ك)}$ (صفر) = ١ وبالتعويض في (١١ – ٢١) نحصل على .

$$e^{\text{س}} = ١ + \text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{!٢} + \cdots + \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{!\text{ن}} + \frac{e^{\text{جـ}}\,\text{س}^{\text{ن}+١}}{!(\text{ن}+١)}$$

ويمكن استخدام الصيغة المشتقة في المثال ٤ لتقريب قيم $e^{\text{س}}$. كما ان هناك تطبيقا آخر مهما سنناقشه في الفصل التالي عند مناقشة تمثيل الاقترانات باستخدام المتسلسلات اللانهائية .

تمارين :

في التمارين ١ – ٦ جد صيغة تايلور مع الباقي للقيم المعطاة لـ أ ، ن :

١ . ق (س) = جا س ، أ = $\frac{\pi}{٢}$ ، ن = ٣ .

٢ . ق (س) = جتا س ، أ = $\frac{\pi}{٤}$ ، ن = ٣ .

٣ . ق (س) = $\sqrt{س}$ ، أ = ٤ ، ن = ٣ .

٤ . ق (س) = $e^{س}$ ، أ = ١ ، ن = ٣ .

٥ . ق (س) = ظا س ، أ = $\frac{\pi}{٤}$ ، ن = ٤ .

٦ . ق (س) = ١ / (س – ١)^{٢} ، أ = ٢ ، ن = ٥ .

في التمارين ٧ – ١٢ جد صيغة ماكلورين للقيمة المعطاة ن .

٧ . ق (س) = لط (س + ١) ، ن = ٤ .

٨ . ق (س) = جا س ، ن = ٧ .

٩ . ق (س) = جتا س ، ن = ٨ .

١٠ . ق (س) = ظا$^{-١}$ س ، ن = ٣ .

١١ . ق (س) = $e^{٢س}$ ، ن = ٥ .

١٢ . ق (س) = قا س ، ن = ٣ .

قرب القيم في التمارين ١٣ – ١٦ لاربع منازل عشرية باستخدام التمرين المشار اليه . وفي كل حالة برهن على صحة جوابك باثبات أن

$|ب_{ن}(س)| \leq (١٠)^{-٥}$.

١٣ . جا ٨٩° (استخدم التمرين ١ ، $\frac{\pi}{١٨٠}$ ≈ ٠,٠١٧٥)

١٤ . جتا ٤٧ (استخدم التمرين ٢ ، $\frac{\pi}{١٨٠}$ ≈ ٠,٠١٧٥) .

١٥ . $\sqrt{٤,٠٣}$ (استخدم التمرين ٣) .

١٦ . $e^{-١,٠٢}$ (استخدم التمرين ٤) .

استخدم صيغة ماكلورين لتحصل على صيغ التقريب في التمرينين ١٧ ، ١٨

واذكر دقة التقريب اذا كانت | س | ≤ ٠,١ ، وذلك بعدد المنازل العشرية الصحيحة التي يعطيها الجواب .

١٧ . جتا س ≈ ١ − $\frac{س^{٢}}{٢}$

١٨ . $\sqrt[٣]{١ + س}$ ≈ ١ + $\frac{١}{٣}$ س

١٩ . برهن (١١ − ١٤)

٢٠ . اذا كان ق (س) حدودية من درجة ن ، أ أي عدد حقيقي برهن على أن ق (س) = ح$_{ن}$ (س) ، حيث ح$_{ن}$ (س) معطاة بالصيغة (١١ − ١٧) .

٦ — طريقة نيوتن :

استخدمت صيغة تايلور في البند السابق لتحويل الاقترانات على وجه التقريب الى حدوديات . وكمثال على ذلك يمكن استخدام الحدودية الخطية .

ق (أ) + قَ (أ) (س − أ)

كتقريب للاقتران ق بجوار أ . وسنصف الآن طريقة لاستخدام هذه الحدودية لايجاد جذر حقيقي تقريبي للاقتران ق (س) ، أي لتقريب عدد حقيقي ر يحقق ق (ر) = صفرا : نبدأ ذلك باختيار تقريب أول س$_{١}$ للجذر ر ، ويكون ذلك بملاحظة أن ر هو الاحداثي السيني لنقطة تقاطع منحنى ق مع محور السينات ، فأي مخطط تقريبي للمنحنى يمكن من ايجاد تقريب مناسب س$_{١}$. فعندما نأخذ المماس ل للمنحنى عند النقطة (س$_{١}$ ، ق (س$_{١}$)) ، اذا كانت س$_{١}$ قريبة قربا كافيا من ر كما هو موضح في الشكل ١١ − ٤ فان الاحداثي السيني س$_{٢}$ للماس ل يجب أن يكون تقريبا افضل للجذر ر . وبما أن معادلة ل هي

ص = ق (س$_{١}$) + قَ (س$_{١}$) (س − س$_{١}$)

فان الاحداثي السيني س$_{٢}$ لنقطة تقاطع ل مع محور السينات تعطي بالصورة :

صفر = ق (س$_{١}$) + قَ (س$_{١}$) (س$_{٢}$ − س$_{١}$)

واذا كان قَ (س$_{١}$) ≠ صفرا فان الصورة الاخيرة تكافيء

$$س_{٢} = س_{١} - \frac{ق\ (س_{١})}{قَ\ (س_{١})}$$

ويمكن اعادة الطريقة باستخدام المماس عند ($س_{٢}$ ، ق ($س_{٢}$)) ، واذا كانت ق ($س_{٢}$) ≠ صفرا ، فان هذا يقودنا الى تقريب ثالث $س_{٣}$ يعطي بالمعادلة

$$س_{٣} = س_{٢} - \frac{ق\ (س_{٢})}{قَ\ (س_{٢})}$$

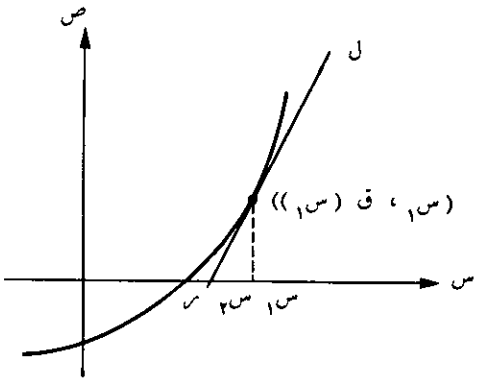
وتستمر العملية حتى نحصل على الدرجة المطلوبة من الدقة . وبصورة عامة اذا كان $س_{ن}$ اي تقريب فان التقريب الذي يليه $س_{ن+١}$ يعطى بالعلاقة

$$س_{ن+١} = س_{ن} - \frac{ق\ (س_{ن})}{قَ\ (س_{ن})} \qquad (١١-٢٢)$$

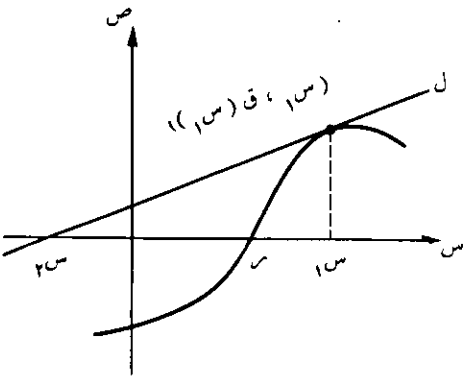
وذلك اذا كانت قَ ($س_{ن}$) ≠ صفرا . وتسمى هذه الطريقة من التقريبات المتتابعة للجذور **بطريقة نيوتن** . وتجب العناية عند اختيار التقريب الاول $س_{١}$. فاذا لم تكن $س_{١}$ قريبة قربا كافيا من ر فمن الممكن ان يكون التقريب التالي $س_{٢}$ أسوأ من التقريب الاول ، كما هو موضح في الشكل ١١ – ٥ . ومن الواضح من مقام الكسر في (١١ – ٢٢) اننا يجب الا نختار عددا $س_{ن}$ بحيث يكون قَ ($س_{ن}$) قريبا من الصفر . وبصورة خاصة يجب أن لا نختار قيما قريبة من النهايات العظمى أو الصغرى للاقتران ق .

مثـال ١ : استخدم طريقة نيوتن لتقريب $\sqrt{٧}$.

الحـــل : السؤال المعطى يكافيء تقريب جذر حقيقي موجب ر للاقتران ق (س) = $س^{٢} - ٧$. وبما أن ق (٢) = – ٣ ، ق (٣) = ٢ فانه ينتج من اتصال ق ان ٢ > ر > ٣ . واذا كان $س_{ن}$ أي تقريب للجذر ر فان التقريب الذي يليه $س_{ن+١}$ يعطى باستخدام (١١ – ٢٢) :



الشكل ١١ — ٤



الشكل ١١ — ٥

$$س_{ن+١} = س_ن - \frac{ق(س_ن)}{قَ(س_ن)} = س_ن - \frac{س_ن^{٢} - ٧}{٢ س_ن}$$

وهذه تختصر الى

$$س_{ن+١} = \frac{س_ن^{٢} + ٧}{٢ س_ن} \qquad (١١-٢٣)$$

فاذا اخترنا $س_١ = ٣$ كتقريب أول ، نجد باستخدام (١١ – ٢٣) أن

$$س_٢ = \frac{٣^{٢} + ٧}{٣ \times ٢} = \frac{١٦}{٦} = \frac{٨}{٣}$$

وباستخدام (١١ – ٢٣) مرة ثانية حيث ن = ٢ فان التقريب التالي

$$س_٣ = \frac{(\frac{٨}{٣})^{٢} + ٧}{\frac{٨}{٣} \times ٢} = \frac{١٢٧}{٤٨} \approx ٢,٦٤٥٨$$

ويمكن اثبات أن التقريب لست منازل عشرية يساوي

$$\sqrt{٧} \approx ٢,٦٥٧٥١$$

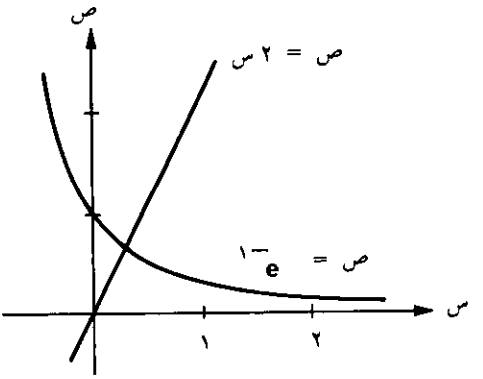
وهكذا فان تطبيق طريقة نيوتن مرتين أدى الى جواب صحيح لثلاث منازل عشرية .

مثـال ٢ : قرب الجذر الحقيقي للمعادلة ٢ س − $e^{-س}$ = صفرا

الحـــل : المطلوب ايجاد قيمة س التي تحقق $e^{س}$ = ٢ س ، وهي الاحداثي السيني لنقطة تقاطع منحني ص = $e^{س}$ ، ص = ٢ س . وكما يظهر من الشكل ١١ − ٦ فان $س_{١}$ = ٠,٣ تقريب أول معقول . فاذا وضعنا ق (س) = ٢ س − $e^{-س}$ واستخدمنا (١١ − ٢٢) ينتج :

$$س_{٢} = س_{١} - \frac{ق(س_{١})}{ق'(س_{١})} = س_{١} - \frac{٢ س_{١} - e^{-س_{١}}}{٢ + e^{-س_{١}}}$$

$$س_{٢} = ٠,٣ - \frac{٠,٦ - e^{٠,٣}}{٢ + e^{-٠,٣}}$$



الشكل ١١ — ٦

وباستخدام الجدول ٢ .

$$س_{٢} = ٠,٣ - \frac{٠,٦ - (٠,٧٤١)}{٢ + (٠,٧٤١)} \approx ٠,٣٥١$$

وعند استخدام $س_{٢}$ = ٠,٣٥ في (١١ - ٢٢) فان

$$س_{٣} = ٠,٣٥ - \frac{٠,٣٥ - e - ٠,٧}{٠,٣٥ - e + ٢}$$

$$\approx ٠,٣٥ - \frac{٠,٧ - ٠,٧٠٦}{٢ + ٠,٧٠٦}$$

$$\approx ٠,٣٥٢$$

واذا استخدمنا الحاسب الالكتروني فسنجد ان المنازل العشرية الخمس الاول للجذر ر هي ٠,٣٥١٧٣

تمارين :

في التمرينين ١ ، ٢ استخدم طريقة نيوتن لتقريب الاعداد المعطاة لاربع منازل عشرية :

١ . $\sqrt[٣]{٢}$ ٢ . $\sqrt[٥]{٣}$

في التمارين ٣ - ١٠ استخدم طريقة نيوتن لتقريب الجذر الحقيقي المطلوب لثلاث منازل عشرية .

٣ . اصغر جذر موجب للمعادلة $س^{٣} + ٥س - ٣ =$ صفرا .

٤ . أكبر جذر للمعادلة $س^{٣} - ٣س + ١ =$ صفرا .

٥ . جذر المعادلة $س^{٤} + ٢س^{٣} - ٥س^{٢} + ١ =$ صفرا الواقع بين ١ ، ٢ .

٦ . جذر المعادلة $س^{٤} - ٥س^{٢} + ٢س - ٥ =$ صفراً الواقع بين ٢ و ٣ .

٧ . اصغر جذر موجب للمعادلة $س - e^{-س} =$ صفرا .

٨ . جذر المعادلة جتا س + س = ٢ .

٩ . جذر المعادلة س + لط س = ٢ .

١٠ . أكبر جذر للمعادلة $e^{س} -$ جا س = صفرا .

٧ — اسئلة للمراجعـــة :

شفويـــة : عرف او ناقش كلاً مما يلي :

١ . الصيغ غير المعينة

٢ . قانون لوبتال .

٣ . صيغة كوشي .

٤ . التكاملات المعتلة .

٥ . صيغة تايلور .

٦ . صيغة ماكلورين .

٧ . طريقة نيوتن .

كتابيـــة : جد النهايات في كل من التمارين ١ – ١٤ .

١ . $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{لط} (٢ - س)}{e^{٢س} + ١}$

٢ . $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا} ٢س - \text{ظا} ٢س}{س^{٢}}$

٣ . $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} + ٢س + ٣}{\text{لط} (س + ١)}$

٤ . $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}^{-١}}{\text{جا}^{-١} س}$

٥ . $\lim_{س \to ٠} \frac{e^{٢س} - e^{-٢س} - ٤س}{س^{٣}}$

بين هل التكاملات في التمارين ١٥ – ٢٦ تقاربية أم تباعدية ، وجد قيمة التقاربية منها .

١٥. $\int_{٤}^{\infty} \frac{١}{\sqrt{س}}$ د س

١٦. $\int_{٤}^{\infty} \frac{١}{س\sqrt{س}}$ د س

١٧. $\int_{-\infty}^{٠} \frac{١}{س + ٢}$ د س

١٨. $\int_{٠}^{\infty}$ جا س د س

١٩. $\int_{٨-}^{١} \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$

٢٠. $\int_{٤-}^{٠} \frac{١}{س + ٤}$ د س

٢١. $\int_{}^{٢} \frac{س}{(س^{٢} - ١)^{٢}}$ د س

٢٢. $\int \frac{١}{س\sqrt{س^{٢} - ١}}$ د س

٢٣. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{١}{e^{س} + e^{-س}}$ د س

٢٤. $\int_{-\infty}^{\infty} س\, e^{س}\, ء س$

٢٥. $\int_{0}^{1} \frac{لط\ س}{س}\, ء س$

٢٦. $\int_{0}^{\pi} قتا\ س\ ء س$

٢٧. جد صيغة تايلور مع الباقي لكل مما يلي :

أ) ف (س) = لط (جتا س) ، أ = $\frac{\pi}{٦}$ ، ن = ٣ .

ب) ف (س) = $\sqrt{س - ١}$ ، أ = ٢ ، ن = ٤ .

٢٨. جد صيغة ماكلورين لما يلي :

أ) ف (س) = $e^{-٢س^{٢}}$ ، ن = ٣ .

ب) ف (س) = $\frac{١}{(١ - س)}$ ، ن = ٦ .

٢٩. استخدم صيغة تايلور لتقريب جا^{٢} ٤٣° لاربع منازل عشرية (ملاحظة :

جا^{٢} س = $\left(\frac{١ - \text{جتا}\ ٢س}{٢}\right)$

٣٠. اشتق الصيغة التقريبية جاس ≈ س − $\frac{س^{٣}}{٦}$ ، وجد دقة التقريب اذا كان

$|س| \leq ٢$.

٣١. استخدم طريقة نيوتن لتقريب أكبر جذور المعادلة ٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٣ س + ١ = صفراً لثلاث منازل عشرية .

٣٢. استخدم طريقة نيوتن لتقريب $\sqrt[٤]{٥}$ لثلاث منازل عشرية .

الفصل الثاني عشر

المتسلسلات اللانهائية

للمتسلسلات اللانهائية فائدة عظمى في الدراسات المتقدمة (العليا) في الرياضيات والفيزياء والهندسة ، وذلك لانها تستخدم في تمثيل الاقترانات بطريقة جديدة . وفي هذا الفصل سنناقش بعض المسائل الاساسية المرتبطة بهذا المفهوم الرياضي المهم :

١ — المتسلسلات اللانهائية : (Infinite Series)

اذا كانت سه ، صه مجموعتين فان الاقتران ق من سه الى صه هو بالتعريف ارتباط يعين لكل عنصر س في سه عنصرا وحيدا ه (س) في صه (انظر (١ — ١٨)) . وقد عالجنا حتى الان الاقترانات التي يكون مجال كل منها فترة من الاعداد الحقيقية . وفي هذا البند سنعالج مجموعة اخرى من الاقترانات .

(١٢ — ١) تعريف المتتالية اللانهائية (Infinite Sequences)

المتتالية اللانهائية اقتران مجاله مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة . وللتسهيل سنستخدم احيانا لفظ المتتاليات للدلالة على المتتاليات اللانهائية ، وفي هذا الكتاب سيكون مدى المتتالية اللانهائية مجموعة من الاعداد الحقيقية .

اذا كان الاقتران ه متتالية لا نهائية فلكل عدد صحيح موجب ن يوجد عدد حقيقي ه (ن) ، وهذه الاعداد في مدى الاقتران يمكن كتابتها في قائمة كما يلي :

(١٢ – ٢) ب (١) ، ب (٢) ، ب (٣) ، ... ، ب (ن) ، ...

حيث تشير النقط في آخر القائمة الى ان المتتالية لا تنتهي . ويسمى العدد ق (١) بالحد الاول للمتتالية . ب (٢) بالحد الثاني ، وبصورة عامة يسمى العدد ب (ن) بالحد النوني للمتتالية . ومن المعتاد استخدام الترقيم السفلي بدل صيغة الاقتران لكتابة حدود المتتالية ، فنكتب (١٢ – ٢) بالصورة :

(١٢ – ٣) أ١ ، أ٢ ، أ٣ ، ... ، أن ، ...

حيث يرمز أن للعدد الحقيقي ق (ن) وذلك لكل عدد صحيح موجب ن وبهذه الطريقة نحصل على مجموعة لا نهائية من الاعداد الحقيقية المرتبة ، بمعنى انه يوجد عدد اول وعدد ثان ، وعدد خامس وهكذا . ورغم ان المتتاليات هي اقترانات فان المجموعة مثل (١٢ – ٣) تسمى ايضا متتالية لا نهائية . واذا اردنا استخدام اصطلاح الاقتران ق للصيغة (١٢ – ٣) فاننا نضع ق (ن) = أن لجميع الاعداد الصحيحة الموجبة ن .

ولتحديد اي متتالية لا نهائية لا يكفي مجرد ذكر الاعداد التي في المدى ، ذلك لان الترتيب الذي تظهر به هذه الاعداد له ايضا نفس الاهمية فمثلا المتتالية التي حدودها الخمسة الاول :

١ ، ١/٢ ، ١/٣ ، ١/٤ ، ١/٥ ، ...

تختلف عن المتتالية التي حدودها الخمسة الاول :

١ ، ١/٣ ، ١/٢ ، ١/٤ ، ١/٥ ، ...

حتى ولو تساوت جميع الحدود المتناظرة بعد الحد الثالث في المتتاليتين وبصورة عامة فان متتالية مثل (١٢ – ٣) يقال انها مساوية للمتتالية

ب١ ، ب٢ ، ب٣ ، ... ، بن ، ...

اذا وفقط اذا كان أن = بن لجميع الاعداد الصحيحة ن . ولتجنب اي سوء فهم حول الترتيب ، جرت العادة على تعيين الحد النوني لعدد صحيح موجب اختياري ن ، وهذا يعطي بصيغة كالمبينة في المثال التالي :

مثال ١ : ضع الحدود الاربعة الاولى في قائمة وعين الحد العاشر للمتتالية التي حدها النوني معطي كما يلي :

(أ) أن = ن / (ن + ١)

(ب) أن = ٢ + (٠,١)^ن

(جـ) $ا_{ن} = (-١)^{ن+١} ن^{٢} / (٣ن - ١)$

(د) $ا_{ن} = ٤$

الحـــل : لايجاد الحدود الاربعة الاولى نعوض ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ على الترتيب بدل ن في الصيغة المعطاة للحد $ا_{ن}$ ، ويعين الحد العاشر بتعويض ١٠ بدل ن . وهكذا نحصل على ما يلي بعد تبسيط العبارات

	الحدود الاربعة الاولى	الحد العاشر
(أ)	٢/١ ، ٣/٢ ، ٤/٣ ، ٥/٤ ،	١١/١٠
(ب)	١ ,٢ ، ١ ,٠٢ ، ١ ,٠٠٢ ، ١ ,٠٠٠٢	١ ,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٢
(جـ)	٢/١ ، - ٥/٤ ، ٨/٩ ، - ١١/١٦ ، ..	(- ١٠٠)/ (٢٩)
(د)	٤ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ،	٤

وللتسهيل نرمز احيانا للمتتالية (١٢ - ٣) بالرمز { $ا_{ن}$ } . وكمثال على ذلك فان الحد النوني للمتتالية { ٢ } هو $ا_{ن}$ = ٢

ومن المهم ملاحظة انه اذا عرفت الحدود القليلة الاولى فقط من اي متتالية لا نهائية فمن المستحيل ان نعرف حدودا اخرى فيها على وجه التعيين . فلو اعطيت ٢ ، ٤ ، ٦ ، ... وسئلت ان تجد الحد الرابع فلا يمكنك ايجاده بدون معلومات اخرى . فالمتتالية التي حدها النوني

$ا_{ن} = ٢ن + (١ - ن)^{٣} (٢ - ن)^{٢} (٣ - ن)$

حدودها الاربعة الاولى هي ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١١٦ .

ومن السهل وضع متتاليات حدودها الثلاثة الاول ٢ ، ٤ ، ٦ وحدها الرابع اي عدد حقيقي (انظر التمرين ١٧) . وهذا يرينا انه عند معالجة المتتاليات اللانهائية من الضروري معرفة معلومات معينة حول الحد النوني .

ولبعض المتتاليات اللانهائية { $ا_{ن}$ } الخاصية المهمة التالية وهي انه كلما زادت ن فان الحد $ا_{ن}$ يزداد قربا من عدد حقيقي ل . ويمكن التعبير عن ذلك

بطريقة اخرى كأن نقول ان الفرق العددي | $ل_ن$ − ل | يصبح قريبا من الصفر عندما تكون ن كبيرة جدا . ولتوضيح ذلك . لنأخذ المتتالية

{ $ل_ن$ } حيث :

$$ل_ن = ٢ + (-١/٢)^{ن}$$

فالحدود الاولى هي :

$$٢ - \frac{١}{٢}، ٢ + \frac{١}{٤}، ٢ - \frac{١}{٨}، ٢ + \frac{١}{١٦}، ٢ - \frac{١}{٣٢}، \cdots$$

ويبدو ان الحدود تزداد قربا من ٢ كلما زادت ن ، ولكل عدد صحيح موجب ن نجد ان

$$|ل_ن - ٢| = |٢ + (-١/٢)^{ن} - ٢| = |(-١/٢)^{ن}| = (\frac{١}{٢})^{ن}$$

$$= \frac{١}{٢^{ن}}$$

والعدد $\frac{١}{٢^{ن}}$ وبالتالي | $ل_ن$ − ٢ | يمكن ان نجعلها قريبة من الصفر الى اي حد نشاء وذلك باختيار ن كبيرة كبرا كافيا . واعتمادا على التعريف (١٢ − ٤) اللاحق فان نهاية المتتالية المعطاة هي ٢ . وتكتب :

$$\text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} [٢ + (-١/٢)^{ن}] = ٢$$

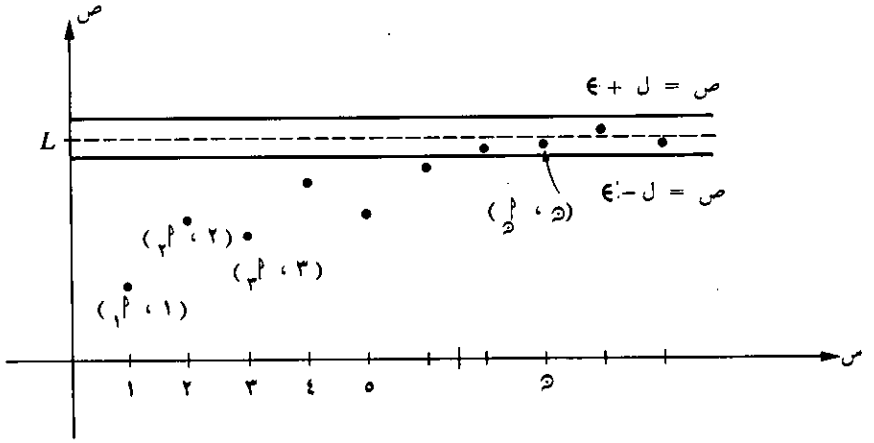
والوضع هنا متطابق تقريبا مع الوضع في الفصل الثاني حيث عرفت $\text{نهـا}_{س \leftarrow ه}$ (س) = ل . والفرق الوحيد انه اذا كانت ق (ن) = $ل_ن$ فان مجال ه $_{ن \leftarrow \infty}$ هو مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة وليس فترة لا نهائية من الاعداد الحقيقية . وكما في (٢ − ٣٩) ولكن باستخدام $ل_ن$ بدلا من ه (س) نقدم التعريف التالي :

(١٢−٤) تعريف $\text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} ل_ن$ = ل اذا كانت { $ل_ن$ } متتالية لا نهائية ، وكان

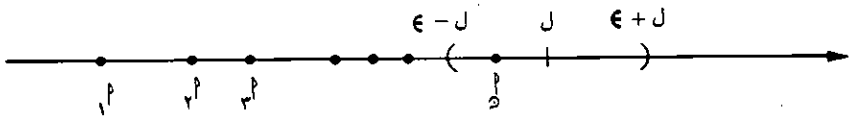
لكل عدد ٤ > صفر يوجد عدد مناظر م بحيث ان | $ل_ن$ − ل | < ٤ كلما كان ن > م ، نقول ان نهاية هذه المتتالية هي ل وتكتب $\text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} ل_ن$ = ل .

ويمكن اعطاء تفسير هندسي مماثل لذلك الذي في الشكل ٢ – ١٤ مع الفارق ان الاحداثي س للنقطة الموضحة على محور السينات يكون دائما عددا صحيحا موجبا . وفي الشكل ١٢ – ١ وضحنا سلوك النقط (ك ، $أ_{ك}$) للحالة الخاصة التي فيها نهـــا $أ_{ن}$ = ل . لاحظ انه لكل ٤ > صفر فان
ن ← ∞

النقط (ن ، $أ_{ن}$) تقع بين المستقيمين ص = ل ± ٤ وذلك اذا كانت كبيرة كبرا كافيا . وبالطبع فان اقتراب المتتالية من ل قد يختلف عن ذلك الموضح في الشكل . ويمكن اعطاء تفسير هندسي اخر للتعريف (١٢ – ٤) برسم النقط المناظرة للحدود $أ_{ك}$ على خط الاعداد كما هو موضح في الشكل ١٢ – ٢ . وفي هذه الحالة اذا اخذنا اي فترة (ل – ٤ ، ل + ٤) فان $أ_{ن}$ يكون عنصرا في هذه الفترة عندما تكون ن كبيرة كبرا كافيا .



الشكل ١٢ — ١



الشكل ١٢ — ٢

وعند دراسة المتتاليات اللانهائية فانه يمكن برهان نظريات شبيهة بالنظريات (٢ – ١٢) – (٢ – ١٩) ، وبصورة خاصة ، اذا اعطيت

متتاليتان لا نهائيتان { أ ن } ، { ب ن } فانه يمكن جمع الحدود المتناظرة لنحصل على متتالية جديدة { أ ن + ب ن } تسمى مجموع المتتاليتين . كما يمكن تكوين الفرق وحاصل الضرب او القسمة وذلك بطرح الحدود المتناظرة او ضربها او قسمتها (على الا يكون اي من الحدود المقسوم عليها صفرا) .

واذا كانت $\lim_{ن \to \infty} أ_ن = ل$ ، $\lim_{ن \to \infty} ب_ن = م$

فيمكن اثبات ان :

(١٢ – ٥)

$$\lim_{ن \to \infty} (أ_ن + ب_ن) = ل + م$$

$$\lim_{ن \to \infty} (أ_ن - ب_ن) = ل - م$$

$$\lim_{ن \to \infty} (أ_ن ب_ن) = ل م$$

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{أ_ن}{ب_ن} = \frac{ل}{م}$$

وفي الحالة الاخيرة يجب ان يكون م ≠ صفرا ، ب ن ≠ صفرا لجميع قيم ن .

واذا كان أ ن = جـ لجميع قيم ن ، فتكون المتتالية اللانهائية هي جـ ، جـ ، جـ ، ... ، جـ ، ... ، ومنها نجد ان

(١٢ – ٦)

$$\lim_{ن \to \infty} جـ = جـ$$

وبصورة مماثلة اذا كان جـ اي عدد حقيقي ، ك اي عدد نسبي موجب ، فانه كما في (٢ – ٤١)

(١٢–٧)

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{جـ}{ن^ك} = \text{صفرا}$$

ويمكننا الان حل مسائل شبيهة بتلك التي في البند السادس من الفصل الثاني .

مثـال ٢ : أوجد $\lim_{ن \to \infty} \frac{٢ن}{٥ن - ٣}$

الحـــل : بقسمة كل من البسط والمقام في الكسر المعطى على ن وتطبيق نظريات المتتاليات نحصل على

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{٢ن}{٥ن - ٣} = \frac{٢}{٥ - (٣ / ن)}$$

$$= \frac{\lim_{ن \to \infty} ٢}{\lim_{ن \to \infty} (٥ - (٣ / ن))}$$

$$= \frac{\lim_{ن \to \infty} ٢}{\lim_{ن \to \infty} ٥ - \lim_{ن \to \infty} (٣ / ن)}$$

$$= \frac{٢}{٥ - ٠} = \frac{٢}{٥}$$

ويمكن ان نثبت بطريقة مماثلة ان نهايات المتتاليات في (أ) ، (ب) ، (جـ) ، من المثال (١) هي ١ ، ٢ ، ٤ على الترتيب . اما المتتالية في الجزء (جـ) فليس لها نهاية .

والنظرية التالية شبيهة بالنظرية(٢ – ٦) وتنص على انه اذا امكن حصر

حدود متتالية نهائية بين الحدود المتناظرة لمتتاليتين لهما نفس النهاية ل فان نهاية المتتالية المعطاة هي ل .

(١٢ – ٨) نظرية الشريحة للمتتاليات اللانهائية . اذا كانت { أ ن } ، { ب ن } ، { جـ ن } متتاليات لا نهائية تحقق الشرط أ ن ≤ ب ن ≤ جـ ن لجميع قيم ن ، واذا كان

$$\text{نهـا}_{ن \to \infty} \text{ أ ن} = ل = \text{نهـا}_{ن \to \infty} \text{ جـ ن}$$

فان

$$\text{نهـا}_{ن \to \infty} \text{ ب ن} = ل$$

البرهـــان : لكل ε > ٠ يوجد عدد مناظر م بحيث انه اذا كان ن > م فان كل من | أ ن – ل | < ε ، | جـ ن – ل | < ε ي ان ل – ε < أ ن < ل + ε ، ل – ε < جـ ن < ل + ε وهكذا اذا كانت ن > م فان ل – ε < أ ن < ب ن ، جـ ن < ل + ε وبما أن أ ن ≤ ب ن ≤ جـ ن فان لكل ن > م يكون

ل – ε < ب ن < ل + ε او | ب ن – ل | < ε

وهذا يكمل البرهان .

مثـال ٣ : برهن ان $\text{نهـا}_{ن \to \infty} \frac{١}{ن^{٢}} = ٠$

الحـــل : من الممكن اثبات انه لكل عدد صحيح موجب ن

$$٠ < \frac{١}{ن^{٢}} < \frac{١}{ن}$$

وبما ان $\text{نهـا}_{ن \to \infty} ٠ = \text{صفرا}$ ، $\text{نهـا}_{ن \to \infty} \frac{١}{ن} = \text{صفرا}$

فان النتيجة المطلوبة تتبع من (١٢ – ٨) علما بان $أ_ن$ = صفرا ،

$$ب_ن = \frac{١}{ن^{٢}} ، جـ_ن = \frac{١}{ن} .$$

واليك النظرية التالية وبرهانها سهل نتركه كتمرين للقاريء .

(١٢–٩) نظرية : اذا كانت $\lim_{ن \to \infty} |أ_ن|$ = صفرا فان

$$\lim_{ن \to \infty} أ_ن = \text{صفرا} .$$

مثال ٤ : اذا كان $أ_ن = (-١)^{ن-١} / ن$ ، برهن ان

$$\lim_{ن \to \infty} أ_ن = \text{صفرا}$$

الحل : حدود المتتالية $\{ أ_ن \}$ موجبة وسالبة بالتناوب ، فمثلا الحدود الخمسة الاولى هي ١ ، – ١/٢ ، ١/٣ ، – ١/٤ ، ١/٥ وبما ان

$$\lim_{ن \to \infty} |أ_ن| = \lim_{ن \to \infty} \frac{١}{ن} = \text{صفراً}$$

فينتج من (١٢ – ٩) ان $\lim_{ن \to \infty} أ_ن$ = صفرا..

اذا كانت الحدود المتتابعة في متتالية لا نهائية $\{ أ_ن \}$ ، ليست متزايدة بمعنى ان $أ_١ \geq أ_٢ \geq \cdots \geq أ_ن \geq \cdots$ ، او ليست متناقصة ، بمعنى ان $أ_١ \leq أ_٢ \leq \cdots \leq أ_ن \leq \cdots$ فان المتتالية تسمى وتيرية

ويقال ان المتتالية محصورة اذا وجد عدد موجب ح بحيث ان $|أ_ن| \leq ح$ لجميع قيم ن . والنظرية التالية اساسية لما سيتبعها .

(١٢–١٠) نظرية : اذا كانت المتتالية اللانهائية وتيرية ومحصورة كان لها نهاية . من الضروري لبرهان (١٢ – ١٠) ان نستخدم خاصية مهمة من خواص الاعداد الحقيقية . وسنقدم اولا بعض التعريفات : اذا كانت ج

مجموعة من الاعداد الحقيقية غير خالية فان العدد الحقيقي ح يسمى حاصرا اعلى (Upper bound) للمجموعة ج اذا كان س ≤ ح لجميع قيم س في ج ويسمى العدد ص اصغر حاصر اعلى للمجموعة ج اذا كان ص حاصرا اعلى ولا يوجد حاصر اعلى اخر اصغر من ص . وهكذا فان اصغر حاصر اعلى للمجموعة ج هو عدد حقيقي أكبر من او مساو لكل عنصر في المجموعة ج . ولتوضيح ذلك ، اذا كانت ج = (أ ، ب) ، فان اي عدد أكبر من ب يكون حاصرا اعلى للمجموعة ولكن اصغر حاصر اعلى للمجموعة ج هو عنصر وحيد ويساوي ب . (انظر التمرين ٢٢) .

يمكن اعتبار العبارة التالية بديهية في نظام الاعداد الحقيقية .

(١٢-١١) خاصية التمام . اذا كان للمجموعة غير الخالية ج من الاعداد الحقيقية حاصر اعلى فانه يوجد لها اصغر حاصر اعلى .

وسنستخدم الان خاصية التمام لبرهان (١٢ - ١٠) . اذا كانت { $أ_ن$ } متتالية محصورة ، حدودها ليست متناقصة فانه يوجد عدد م بحيث ان $أ_ن$ ≤ م لجميع قيم ن . وهكذا فان المجموعة :

ج = { $أ_ك$: ك = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... }

لها حاصر اعلى م وباستخدام (١٢ - ١١) يوجد اصغر حاصر اعلى ل للمجموعة ج ، بحيث ل ≤ م . واذا كانت ε > ٠ فان ل - ε ليس حاصراً اعلى للمجموعة ج وهكذا يوجد حد واحد من المتتالية على الاقل أكبر من ل - ε اي انه يوجد عدد صحيح موجب ك بحيث ان ل - ε < $أ_ك$ وبما ان حدود المتتالية { $أ_ن$ } ليست متناقصة فان

$أ_ك$ ≤ $أ_{ك+١}$ ≤ $أ_{ك+٢}$ ≤ ... ، وهكذا

ل - ε < $أ_ن$ لجميع قيم ن > ك .

ويتبع ذلك ان :

٠ < ل - $أ_ن$ < ε أو | ل - $أ_ن$ | < ε

كلما كانت ن > ك . وباستخدام (١٢ - ٤) فان هذا يتضمن

$$\text{نهـا}_{ن \to \infty} \; أ_ن = ل \geq م$$

اي ان { $أ_ن$ } تقاربية

ولبرهان النظرية اذا كانت المتتالية { $أ_ن$ } ليست متزايدة يمكن ان نقوم بدراسة المتتالية { $- أ_ن$ } .

واذا تزايدت حدود المتتالية بدون حاصر عند زيادة ن تكون نهاية المتتالية غير موجودة ونقول ان

$$\text{نهـا}_{ن \to \infty} \; أ_ن = \infty$$

تمارين :

اذا كان الحد النوني لمتتالية لا نهائية هو $أ_ن$ المعطي في التمارين ١ – ١٦ ، جد الحدود الاربعة الاولى وجد $\text{نهـا}_{ن \to \infty} \; أ_ن$ اذا وجدت

١ . $$أ_ن = \frac{ن}{٣ن + ٢}$$

٢ . $$أ_ن = \frac{٦ن - ٥}{٥ن + ١}$$

٣ . $$أ_ن = \frac{٤ن^٢ - ٧}{٢ن^٢ + ٣}$$

٤ . $$أ_ن = \frac{٤}{٧ن - ٨}$$

٥. $أ_{ن} = -٥$

٦. $أ_{ن} = \sqrt{٢ن}$

٧. $أ_{ن} = \frac{(ن٢ - ١)(ن٣ + ١)}{ن^{٣} + ١}$

٨. $أ_{ن} = ن٨ + ١$

٩. $أ_{ن} = \frac{٢}{\sqrt{ن^{٢} + ٩}}$

١٠. $أ_{ن} = \frac{ن ١٠٠}{(٢/٣)^{ن} + ٤}$

١١. $أ_{ن} = (-١)^{ن+١} \frac{ن^{٣}}{ن^{٥} + ن٤ + ن}$

١٢. $أ_{ن} = (-١)^{ن+١} \frac{\sqrt{ن}}{ن + ١}$

١٣. $أ_{ن} = (١,٠ + ١)^{ن}$

١٤. $أ_{ن} = (١/٢ - ١)^{ن+١}$

١٥. $أ_{ن} = (-١ + ١)^{ن}$

١٦. $أ_{ن} = (ن + ١) / \sqrt{ن}$

١٧. اذا كانت الحدود الاربعة الاولى من متتالية هي ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ وسئلت ان تعين الحد الخامس . فاثبت ان الحد الخامس يمكن ان يكون اي عدد حقيقي وذلك بايجاد الحد النوني لمتتالية حدودها الخمسة الاولى ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، أ .

١٨. باستخدام تعريف نهاية المتتالية (١٢ – ٤) اثبت انه اذا كانت

$$\text{نهـا}_{ن\to\infty} \; أ_ن = ل \text{ فان } \text{نهـا}_{ن\to\infty} \; |أ_ن| = |ل|$$

١٩. اذا كان ك عددا صحيحا موجبا أكبر من الواحد الصحيح ، اثبت ان
$\text{نهـا}_{ن\to\infty} \; (١/ك^ن) =$ صفرا (ملاحظة استخدم (١٢ – ٨)).

٢٠. برهن (١٢ – ٩).

٢١. برهن (١٢ – ١٠) اذا كانت حدود المتتالية $\{أ_ن\}$ ليست متزايدة.

٢٢. برهن على ان ب هي اصغر حاصر اعلى للفترة (أ ، ب).

٢ — المتسلسلات اللانهائية : التقاربية والتباعدية :

اذا كانت $\{أ_ن\}$ متتالية لا نهائية فان العبارة التي على الصورة :

(١٢–١٢) $\quad أ_١ + أ_٢ + \cdots + أ_ن + \cdots$

تسمى متسلسلة لا نهائية او متسلسلة ، وباستخدام اصطلاح المجموع سنرمز لها باحد الرمزين :

$$\sum_{ن=١}^{\infty} أ_ن \quad \text{أو} \quad \sum أ_ن$$

حيث من المتعارف عليه ان متغير المجموع في الرمز الثاني هو ن . وكل عدد $أ_ك$ يسمى حدا في المتسلسلة والحد $أ_ن$ يسمى الحد النوني . ولاننا يمكن ان نجد المجموع الجبري لعدد محدود من الاعداد فيجب ان نعرف مأذا يعني المجموع اللانهائي (١٢ – ١٢) . وللوصول الى تعريف نبدأ بأخذ المجموع الجزئي م للمتسلسلة ، وذلك لكل عدد صحيح موجب ن ، حيث

$$م_ن = أ_١ + أ_٢ + \cdots + أ_ن$$

وهكذا فان

$$م_١ = أ_١$$

$$م_٢ = أ_١ + أ_٢$$

$$م_{٣} = م_{١} + م_{٢} + م_{٣}$$
$$م_{٤} = م_{١} + م_{٢} + م_{٣} + م_{٤}$$
وهكذا ، وتسمى المتتالية اللانهائية
$$م_{١} ، م_{٢} ، \cdots ، م_{ن} ، \cdots$$

متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة اللانهائية $\sum م_{ن}$ ولشرح المفهوم السابق لنأخذ المتسلسلة

$$(١٢-١٣) \quad ٠,٦ + ٠,٠٦ + ٠,٠٠٦ + \cdots + \frac{٦}{١٠^{ن}} + \cdots .$$

فالحدود الاولى لمتتالية المجاميع الجزئية هي :

$$٠,٦ ، ٠,٦٦ ، ٠,٦٦٦ ، ٠,٦٦٦٦ ، \cdots$$

وسنثبت في هذا البند ان نهاية هذه المتتالية هي ٣/٢ . ولكون المجاميع الجزئية م للمتسلسلة (١٢ – ١٣) تقترب من ٣/٢ كلما زادت ن ، فمن الطبيعي ان نقول ان ٣/٢ هي مجموع المتسلسلة اللانهائية ونكتب :

$$(٣/٢) = ٠,٦ + ٠,٠٦ + ٠,٠٠٦ + \cdots + \frac{٦}{١٠^{ن}} + \cdots$$

وهذا هو الاساس للتعبير عن العدد النسبي ٣/٢ بالكسر العشري الدوري ٠,٦٦٦٦٠٠٠ ، والتعريف التالي يوسع هذه الملاحظات لتشمل اي متسلسلة لا نهائية .

(١٢-١٤) تعريف التقارب والتباعد : لنأخذ المتسلسلة اللانهائية

$$م_{١} + م_{٢} + \cdots + م_{ن} + \cdots$$ ، التي تكون $م_{١} ، م_{٢} ، \cdots ، م_{ن} ، \cdots$ هي متتالية بمجاميعها الجزئية . يقال ان هذه المتسلسلة تقاربية (او تتقارب) اذا كانت $\lim_{ن \to \infty} م_{ن}$ موجودة . ويقال ان المتسلسلة تباعدية (او تتباعد) اذا لم توجد هذه النهاية .

واذا كانت $م_{١} + م_{٢} + \cdots + م_{ن} + \cdots$ متسلسلة تقاربية وكانت $\lim_{ن \to \infty} م_{ن} = م$ فان م يسمى مجموع المتسلسلة ونكتب

$$م = ا_{1} + ا_{2} + \cdots + ا_{ن} + \cdots$$

واذا كانت المتسلسلة تباعدية فلا يوجد لها مجموع .

مثـال ١ : برهن على ان المتسلسلة اللانهائية التالية تقاربية وجد مجموعها :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{ن(ن+1)} + \cdots$$

الحـــل : نضع كل $ا_{ن}$ على صورة كسور جزئية فنجد ان

$$ا_{ن} = \frac{1}{ن(ن+1)} = \frac{1}{ن} - \frac{1}{ن+1}$$

وهكذا يمكن كتابة المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة على الصورة

$$م_{ن} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{ن} - \frac{1}{ن+1})$$

$$= 1 - \frac{1}{ن+1} = \frac{ن}{ن+1}$$

وبما ان $\frac{ن}{ن+1} = 1$ فان المتسلسلة تقاربية ومجموعها $ن \leftarrow \infty$ نهـــا

يساوي ١ .

ولبعض المتسلسلات اللانهائية اهمية خاصة في التطبيقات وكمثال على ذلك المتسلسلة الهندسية :

(١٢-١٥) $$ا + ا ر + ا ر^{2} + \cdots + ا ر^{ن} + \cdots$$

حيث كل من ا ، ر عدد حقيقي . ومن السهل ان نعرف هل المتسلسلة (١٢ - ١٥) تقاربية ام تباعدية لان :

$$م_{ن} = ا + ا ر + ا ر^{2} + \cdots + ا ر^{ن-1}$$

$$ر\ م_{ن} = أ ر + أ ر^{٢} + أ ر^{٣} + \cdots + أ ر^{ن}$$

وبطرح طرفي كل من هاتين المعادلتين نجد ان

$$(١ - ر)\ م_{ن} = أ - أ ر^{ن}$$

واذا كانت $ر \neq ١$ فان

$$م_{ن} = \frac{أ}{١ - ر} - \frac{أ ر^{ن}}{١ - ر} \qquad (١٢-١٦)$$

واذا كانت $|ر| < ١$ فان $\lim_{ن \to \infty} ر^{ن} = ٠$ ، ويتبع من الصيغة

(١٢ – ١٦) ان

$$\lim_{ن \to \infty} م_{ن} = \frac{أ}{١ - ر}$$

وهذا يبرهن الجزء (أ) من النظرية التالية :

(١٢-١٧) نظرية : المتسلسلة الهندسية

$$أ + أ ر + أ ر^{٢} + \cdots + أ ر^{ن - ١} + \cdots$$

لها الخصائص التالية :

(أ) المتسلسلة تقاربية ومجموعها $\frac{أ}{١ - ر}$ ، اذا كان $|ر| < ١$

(ب) المتسلسلة تباعدية اذا كان $|ر| \geq ١$.

وسنعطي برهان الجزء (ب) بعد اثبات (١٢ – ١٩) .

المتسلسلة (١٢ – ١٣) ، التي سبق ذكرها ، هندسية ، حيث أ = ٠,٦ ، ر = ٠,١ . فباستخدام (١٢ – ١٧) نجد انها تقاربية ومجموعها :

$$م = \frac{٠,٦}{١ - ٠,١} = \frac{٠,٦}{٠,٩} = \frac{٢}{٣}$$

كما ذكر سابقا .

مثـال ٢ : برهن ان المتسلسلة اللانهائية

$$٢ + \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣^{٢}} + \cdots + \frac{٢}{١ - \frac{١}{٣}} + \cdots$$

تقاربية وجد مجموعها .

الحـل : المتسلسلة تقاربية لانها هندسية وفيها $ر = \frac{١}{٣} < ١$.

فباستخدام (م) من (١٢ – ١٧) نجد ان المجموع يساوي

$$٢ / (١ - \frac{١}{٣}) = ٣ .$$

يمكن التعبير عن الحد النوني في اي متسلسلة لا نهائية كالتالي :

$$أ_{ن} = م_{ن} - م_{ن-١}$$

واذا كانت $\lim_{ن \to \infty}$ م$_{ن}$ = م فان $\lim_{ن \to \infty}$ م$_{ن-١}$ = م

وينتج ان $\lim_{ن \to \infty}$ أ$_{ن}$ = $\lim_{ن \to \infty}$ م$_{ن}$ – $\lim_{ن \to \infty}$ م$_{ن-١}$

= ٠

وهذا يبرهن النتيجة التالية :

(١٢–١٨) نظرية : اذا كانت المتسلسلة اللانهائية تقاربية فان

$\lim_{ن \to \infty}$ أ$_{ن}$ = صفرا .

اختبار لتباعد المتسلسلة . اذا كانت $\lim_{ن \to \infty}$ أ$_{ن}$ ≠ صفراً

فان المتسلسلة اللانهائية $\sum$ أ$_{ن}$ تباعدية .

مثـال ٣ : حقق هل المتسلسلة التالية تقاربية ام تباعدية

$$\frac{١}{٣} + \frac{٢}{٥} + \frac{٣}{٧} + \cdots + \frac{ن}{١ + ن٢} + \cdots$$

الحـــل : بما ان

$$\text{نهـــا}_{ن \to \infty} \; م_ن = \text{نهـــا}_{ن \to \infty} \frac{ن}{١ + ن٢} = \frac{١}{٢}$$

فباستخدام (١٢ – ١٩) نجد ان المتسلسلة تباعدية .

كما يمكن استخدام (١٢ – ١٩) لنثبت انه اذا كانت $|ر| \geq ١$ فان المتسلسلة اللانهائية $\sum م_ن ر^ن$ تباعدية ، لان

$$\text{نهـــا}_{ن \to \infty} \; م_ن = \text{نهـــا}_{ن \to \infty} \; م_ن ر^ن \neq .$$

وهذا ينهي برهان (١٢ – ١٧) .

(١٢–٢٠) نظرية : اذا كانت المتسلسلة اللانهائية $\sum م_ن$ تقاربية فانه لكل $\epsilon > .$ يوجد عدد صحيح ن بحيث ان

$$|م_ك - م_ل| < \epsilon \text{ كلما كانت } ك ، ل > ن$$

البرهان : اذا كان مجموع المتسلسلة يساوي م فان

$$|م_ك - م_ل| = |ك_ك - م + م - م_ل| \geq |م_ك - م| + |م - م_ل|$$

وبما ان $\text{نهـــا}_{ن \to \infty} \; م_ن = م = \text{نهـــا}_{ن \to \infty} \; م_ك$ ، فانه لكل $\epsilon > .$

يوجد عدد ن بحيث ان

$$|م_ك - م| < \frac{\epsilon}{٢} ، |م_ل - م| < \frac{\epsilon}{٢}$$

عندما ك ، ل > ن ، ومنه يتبع المطلوب في النظرية .

مثـال ٤ : برهن على ان المتسلسلة ١ + $\frac{١}{٢}$ + ... + $\frac{١}{ن}$ + ... تباعدية .

الحـــل : اذا كان ن > ١ فان

$$م_{٢ن} - م_{ن} = \frac{١}{ن + ١} + \frac{١}{ن + ٢} + ... + \frac{١}{٢ ن}$$

$$> \frac{١}{٢ن} + \frac{١}{٢ن} + ... + \frac{١}{٢ن} = \frac{١}{٢}$$

ولو كانت المتسلسلة المعطاة تقاربية فانه باستخدام (١٢ – ٢٠) حيث $\frac{١}{٢}$ = ε ، $|م_{٢ن} - م_{ن}| > \frac{١}{٢}$ عندما تكون ن كبيرة كبرا كافيا ، ولان المتباينة الاخيرة خطئة دائما نجد ان المتسلسلة تباعدية .

تسمى المتسلسلة اللانهائية في المثال (٤) بالمتسلسلة التوافقية (Harmonic Series) وتعطينا مثالا للمتسلسلة التباعدية التي نهاية حدها النوني تساوي صفرا ، نهـــا $\underset{ن \leftarrow \infty}{}$ $ا_{ن}$ = ٠ وهذا يرينا ان عكس

(١٢ – ١٨) غير صحيح وبالتالي للتحقق من تقارب المتسلسلة فلا يكفي ان نثبت ان نهـــا $\underset{ن \leftarrow \infty}{}$ $ا_{ن}$ = ٠ ، لان العبارة الاخيرة قد تكون صحيحة مع ان

المتسلسلة تباعدية .

وتنص النظرية التالية على انه اذا تساوت حدود متسلسلتين لا نهائيتين بعد حد معين كانت كلتا المتسلسلتين تقاربيتين او كلتاهما تباعديتين .

(١٢ – ٢١) نظريـة : اذا كانت $\sum ا_{ن}$ ، $\sum ب_{ن}$ متسلسلتين لا نهائيتين بحيث ان $ا_{ر} = ب_{ر}$ لجميع قيم ر > ك ، حيث ك عدد صحيح موجب كانت كلتا المتسلسلتين تقاربيتين او كلتاهما تباعديتين .

البرهـــان : من الفرض يمكننا كتابة :

$$\sum_{ن=1}^{ك+1} أ_ن = أ_1 + أ_2 + \cdots + أ_ك + أ_{ك+1} + \cdots + أ_ن + \cdots$$

$$\sum_{ن=1}^{ك+1} ب_ن = ب_1 + ب_2 + \cdots + ب_ك + أ_{ك+1} + \cdots + أ_ن + \cdots$$

فاذا كانت $ج_ن$ ، $ج'_ن$ هي المجاميع الجزئية النونية للمتسلسلتين $\sum أ_ن$ ، $\sum ب_ن$ فان

$$ج_ن - ح_ن = ج_ك - ح_ك \text{ لجميع } ن \geq ك .$$

وهكذا $\lim_{ن \to \infty} ج_ن = \lim_{ن \to \infty} ج'_ن + (ج_ك - ح_ك)$

وهكذا اما ان توجد النهايتان الاخيرتان معا أو ألا توجدا معاً وهذا يعطينا المطلوب . واذا تقاربت المتسلستان فان الفرق بين مجموعها يساوي $ج_ك - ح_ك$.

وتتضمن النظرية السابقة انه اذا تغير عدد منته من حدود متسلسلة لا نهائية فان هذا لا يؤثر على تقاربها او تباعدها (ولكنه قد يؤثر على مجموعها اذا كانت تقاربية) . وبصورة خاصة اذا استبدلنا الصفر بكل من الحدود الاولى التي عددها ك في المتسلسلة $\sum أ_ن$ فان تقارب المتسلسلة او تباعدها لا يتغير ، وينتج ان المتسلسلة (١٢ – ٢٢)

$$أ_{ك+1} + أ_{ك+2} + \cdots + أ_ن + \cdots$$

تتقارب او تتباعد تبعا لكون $\sum أ_ن$ تقاربية او تباعدية . ونقول اننا حصلنا على المتسلسلة (١٢ – ٢٢) من $\sum أ_ن$ باستبعاد الحدود الاولى .

مثـال ٥ : اثبت ان المتسلسلة التالية تقاربية :

$$\frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(ن+1)(ن+2)} + \cdots$$

الحـــل : المتسلسلة تقاربية لانها يمكن الحصول عليها بحذف الحدين الاولين من المتسلسلة التقاربية في المثال (١) .

والنظرية التالية ينتج برهانها مباشرة من (١٢ – ١٤) وسنتركه كتمرين .

(١٢ – ٢٣) نظرية : اذا كانت $\sum أ_ن$ ، $\sum ب_ن$ متسلسلتين تقاربيتين مجموعهما $ج_أ$ ، $ج_ب$ فان الخصائص التالية صحيحة .

أ) المتسلسلة $\sum (أ_ن + ب_ن)$ تقاربية ومجموعها $ج_أ + ج_ب$

ب) اذا كان ث عددا حقيقيا فان المتسلسلة $\sum$ ث $أ_ن$ تقاربية ومجموعها ث $ج_أ$. ومن السهل ايضا ان نثبت انه اذا كانت $\sum أ_ن$ تباعدية فان $\sum$ ث $أ_ن$ تباعدية ايضا لجميع قيم ث $\neq$.

تمارين :

في التمارين ١ – ١٠ حقق هل المتسلسلات الهندسية التالية تقاربية ام تباعدية ، واذا كانت تقاربية فأوجد مجموعها :

١ . $\quad ٣ + \frac{٣}{٤} + \cdots + \frac{٣}{٤^{ن}} + \cdots$

٢ . $\quad ٣ + \frac{٣}{(-٤)} + \cdots + \frac{٣}{(-٤)^{ن}} + \cdots$

٣ . $\quad ١ + \frac{(-١)}{\sqrt{٥}} + \cdots + (\frac{-١}{\sqrt{٥}})^{ن-١} + \cdots$

٤ . $\quad ١ + (\frac{e}{٣}) + \cdots + (\frac{e}{٣})^{ن-١} + \cdots$

٥ . $\quad ٠,٣٧ + ٠,٠٠٣٧ + \cdots + \frac{٣٧}{(١٠٠)^{ن}} + \cdots$

٦. $٠,٦٢٨ + ٠,٠٠٠٦٢٨ + ٠ + \cdots + \frac{٦٢٨}{ن^{(١٠٠٠)}} + \cdots$

٧. $\sum_{ن=١}^{} ٣ \times ٢^{-ن} - ١$

٨. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-٥)^{ن-١} \times ٤^{-ن}$

٩. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١}$

١٠. $\sum (\sqrt{٢٧})^{ن-١}$

استخدم الامثلة والنظريات التي ناقشناها في هذا البند للتحقق هل المتسلسلات في التمارين ١١ – ٢٢ تقاربية ام تباعدية :

١١. $\frac{١}{٤ \times ٥} + \frac{١}{٥ \times ٦} + \cdots + \frac{١}{(ن+٣)(ن+٤)} + \cdots$

١٢. $\frac{-١}{١ \times ٢} + \frac{-١}{٢ \times ٣} + \cdots + \frac{-١}{ن(ن+١)} + \cdots$

١٣. $\frac{٥}{١ \times ٢} + \frac{٥}{٢ \times ٣} + \cdots + \frac{٥}{ن(ن+١)} + \cdots$

١٤. $\frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + \cdots + \frac{١}{ن+٣} + \cdots$

١٥. $\frac{٣}{ن} + \cdots + \frac{٣}{٢} + ٣$

١٦. $\frac{ن}{ن + ١} + \cdots + \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} + \cdots$

١٧. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن٣}{١ - ن٥}$

١٨. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{ن(٠,٣) + ١}$

١٩. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{ن\sqrt{e}}$

٢٠. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن}{لط (ن + ١)}$

٢١. $\sum_{ن=١}^{\infty} \left(\frac{١}{ن٨} + \frac{١}{ن (ن + ١)} \right)$

٢٢. $\sum \left(\frac{١}{ن٣} - \frac{١}{ن٤} \right)$

استخدم الطريقة الموضحة في حل المثال (١) لتبرهن ان المتسلسلتين في التمرينين ٢٣ ، ٢٤ تقاربيتان وأوجد مجموعها :

٢٣. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٤ ن^{٢} - ١}$

٢٤ . $\frac{١}{٩ ن^{٢} + ٣ ن - ٢}$

٢٥ . برهن (١٢ – ٢٣) .

٢٦ . برهن على انه اذا كانت $\sum$ $أ_{ن}$ تباعدية فان $\sum$ ث $أ_{ن}$ تباعدية ايضا لجميع قيم ث

٣ — المتسلسلات الموجبة الحدود :

كثيرا ما يكون من الصعب اختبار تقارب المتسلسلة او تباعدها باستخدام الصيغة (١٢ – ١٤) ، لانه في معظم الحالات لا يمكن ايجاد صيغة مناسبة للمجموع الجزئي $ج_{ن}$. ولكن من الممكن تطوير طرق لاستخدام الحد النوني $أ_{ن}$ لاختبار تقارب المتسلسلة او تباعدها وفي هذا البند سنعالج المتسلسلات اللانهائية التي حدودها موجبة . واذا كانت $\{ م_{ن} \}$ متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة موجبة الحدود فان

$م_{١} < م_{٢} < \cdots < م_{ن} < \cdots$

وهكذا فان $\{ م_{ن} \}$ متتالية وتيرية . واذا وجد عدد حقيقي ح بحيث ان $م_{ن} < ح$ لجميع قيم ن . فكما في برهان (١٢ – ١٠) فان $\lim_{ن \to \infty} م_{ن} = م \leq ح$ حيث م عدد ما وهكذا فان المتسلسلة تقاربية .

واذا لم يوجد عدد حقيقي ح يحقق الشرط السابق فان $\lim_{ن \to \infty} م_{ن} =$ وتكون المتسلسلة تباعدية . وهذا يبرهن ما يلي :

(١٢ – ٢٤) نظريـــة :

اذا كانت $\sum$ $أ_{ن}$ متسلسلة موجبة الحدود ووجد عدد حقيقي ح بحيث ان $م_{ن} < ح$ لجميع قيم ن فان المتسلسلة تقاربية ومجموعها $م \leq ح$. واذا لم يوجد عدد حقيقي ح يحقق الشرط فان المتسلسلة تباعدية .

اذا كان ق اقترانا معرفا لجميع الاعداد الحقيقية $س \geq ١$ فيمكننا اخذ المتسلسلة اللانهائية :

$$\sum_{ن=1}^{\infty} ب_ن = ب_{(1)} + ب_{(2)} + \cdots + ب_{(ن)} + \cdots$$

فمثلا : اذا كانت $ب_ن = \frac{1}{س^{2}}$ فان

$$\sum_{ن=1}^{\infty} ب_{(ن)} = \frac{1}{1^{2}} + \frac{1}{2^{2}} + \cdots + \frac{1}{ن^{2}} + \cdots \quad (12-25)$$

ويمكن اختبار تقارب او تباعد متسلسلة من هذا النوع باستخدام تكامل معتل كما في النظرية التالية :

(١٢ – ٢٦) اختبار التكامل . اذا كان الاقتران $ب_ن$ موجب القيم وكان متصلا ومتناقصا لجميع قيم $س \geq 1$. فان المتسلسلة اللانهائية .

$$ب_{(1)} + ب_{(2)} + \cdots + ب_{(ن)} + \cdots$$

لها الخصائص التالية :

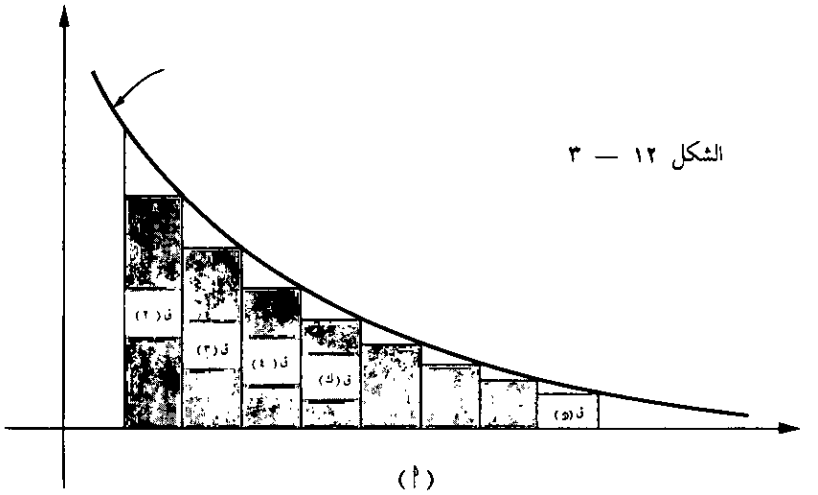
(أ) تتقارب المتسلسلة اذا وجد التكامل $\int_{1}^{\infty} ب_{(س)}\, د س$.

(ب) تتباعد المتسلسلة اذا لم يوجد التكامل $\int_{1}^{\infty} ب_{(س)}\, د س$.

البرهـــان : اذا كان ن عددا صحيحا موجبا أكبر من ١ فان مساحة كثير الاضلاع الداخلي الموضح في الشكل ١٢ – ٣ (أ) يعطي بالصيغة :

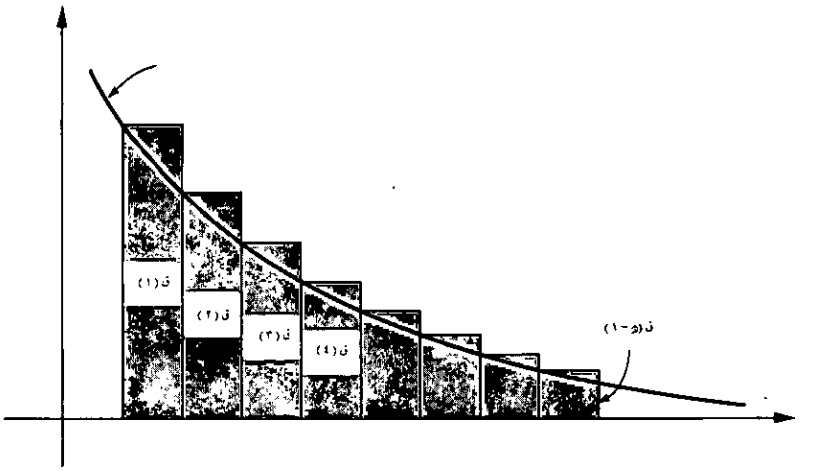
$$\sum_{ك=1}^{ن} ب_{(ك)} = ب_{(2)} + ب_{(3)} + \cdots + ب_{(ن)}$$

وبالمثل فان مساحة كثير الاضلاع الموضح في الشكل ١٢ – ٣ (ب) يعطي بالصيغة :



الشكل ١٢ — ٣

(أ)



(ب)

$$\sum_{ك=١}^{ن-١} ب(ك) = ب(١) + ب(٢) + \cdots + ب(ن-١)$$

وبما ان $\int_{١}^{ن} ب(س)\,د س$ هو مساحة المنطقة تحت منحنى ب من ١ الى ن

فان

$$\sum_{ك=٢}^{ن} ب(ك) \geq \int_{١}^{ن} ب(س)\,د س \geq \sum_{ك=١}^{ن-١} ب(ك)$$

واذا كانت $م_ن = ب(١) + ب(٢) + \cdots + ب(ن)$ فيمكن كتابة المتباينة السابقة بالصورة

$$م_ن - ب(١) \geq \int_{١}^{ن} ب(س)\,د س \geq م_{ن-١}$$

وتتضمن المتباينة الاخيرة انه اذا وجد التكامل $\int_{١}^{\infty} ب(س)\,د س$ وكانت قيمته تساوي ل فان $م_ن \leq ل + ق(١)$ لجميع قيم ن . وباستخدام (١٢ – ٢٤) فان المتسلسلة $\sum ق(ن)$ تقاربية . واذا لم يوجد التكامل فان $\lim_{ن \to \infty} \int_{١}^{ن} ق(س)\,د س = \infty$. وهكذا ينتج من (١٢ – ٢٧)

ان $\lim_{ن \to \infty} م_{ن-١} = \infty$ اي ان المتسلسلة تباعدية .

اذا كان $ق(س) = \frac{١}{س^{ب}}$ حيث ب > ١ . فان المتسلسلة $\sum ق(ن)$ تأخذ الصورة

$$١ + \frac{١}{٢^{ب}} + \frac{١}{٣^{ب}} + \cdots + \frac{١}{ن^{ب}} + \cdots$$

وتسمى متسلسلة (القوة) ب

والحالة الخاصة عندما ب = ١ هي المتسلسلة التوافقية (التباعدية) (انظر

المثال (٤) في البند ٢). واذا كانت ب ≠ ١ فان

$$\int_{١}^{\infty} \frac{١}{س^{ب}}\, د س = \lim_{ت \to \infty} \int_{١}^{ت} \frac{١}{س^{ب}}\, د س$$

$$= \lim_{ت \to \infty} \left| \frac{س^{١-ب}}{١-ب} \right|_{١}^{ت}$$

$$= \frac{١}{١-ب} \lim_{ت \to \infty} [ت^{١-ب} - ١]$$

وتوجد هذه النهاية اذا كانت ب > ١ ولكنها لا توجد اذا كانت ب < ١ .
وبتطبيق اختبار التكامل نحصل على النتيجة الهامة التالية :

(١٢-٢٨) نظرية : تكون المتسلسلة $\sum \frac{١}{ن^{ب}}$ تقاربية اذا كانت ب > ١

وتباعدية اذا كانت ب ≤ ١ .

واعتماداً على نظرية (١٢ - ٢٨) فان المتسلسلة (١٢ - ٢٥) تقاربية لانها متسلسلة القوة ب حيث ب = ٢ > ١ ، كما ان المتسلسلة

$$١ + \frac{١}{٢^{٧}} + \cdots + \frac{١}{٣^{٧}} + \cdots + \frac{١}{ن^{٧}} + \cdots$$

تباعدية لانها متسلسلة القوة ب ، حيث ب = $\frac{١}{٢}$ < ١ .

مثال ١ : بين هل المتسلسلة $\sum ن e^{-ن^{٢}}$ تقاربية ام تباعدية .

الحـــل : اذا وضعنا $ه(س) = س\, e^{-س^2}$ فان المتسلسلة المعطاة هي نفسها

$\sum ه(ن)$ واذا كانت $س \geq 1$ فان $ه(س)$ تكون موجبة ، كما ان

$ه'(س) = e^{-س^2} - 2س^2 e^{-س^2} = e^{-س^2}(1 - 2س^2) < $ صفر ،

وهذا يتضمن ان ق متناقصة على $[1 ، \infty)$ ، وبما ان

$$\int_1^\infty س\, e^{-س^2}\, د س = \text{نهـا}_{ت \to \infty} \int_1^ت س\, e^{-س^2}\, د س$$

$$= \text{نهـا}_{ت \to \infty} \left[(-\frac{1}{2})\, e^{-س^2} \right]_1^ت$$

$$= (-\frac{1}{2})\ \text{نهـا}_{ت \to \infty} \left(\frac{1}{e^{ت^2}} - \frac{1}{e} \right)$$

$$= \frac{1}{2e}$$

فان المتسلسلة تقاربية .

ويمكن استخدام اختبار التكامل اذا حقق الاقتران $ه$ شروط (١٢ – ٢٦) لجميع $س \geq$ و حيث و عدد صحيح موجب وفي هذه الحالة نستبدل التكامل في (١٢ – ٢٦) بالتكامل $\int_و^\infty ه(س)\, د س$ ، وهذا يناظر حذف الـ (و – ١) حداً الاولى .

والنظرية التالية تتيح لنا استخدام المتسلسلات التي تقاربها (او تباعدها) معروف لمعرفة تقارب او تباعد متسلسلات اخرى .

(١٢ – ٢٩) اختبار المقارنة الاول . لنفرض ان $\sum أ_ن$ ، $\sum ب_ن$ متسلسلتان موجبتا الحدود .

(أ) اذا كانت $\sum ب_ن$ تقاربية وكان $|أ_ن| \leq ب_ن$ لجميع قيم ن فان $\sum أ_ن$ تقاربية .

(ب) اذا كانت $\sum ب_ن$ تباعدية وكان $أ_ن \geq ب_ن$ لجميع قيم ن فان $\sum أ_ن$ تباعدية .

البرهـــان : لتكن $م_ن$ ، $ل_ن$ تعني المجاميع الجزئية النونية للمتسلسلتين $\sum |أ_ن|$ ، $\sum ب_ن$ على الترتيب . ولنفرض ان $\sum ب_ن$ تقاربية ومجموعها ل . فاذا كانت $|أ_ن| \leq ب_ن$ لجميع قيم ن فإن $م_ن \leq ل_ن$. وينتج باستخدام (١٢ – ٢٤) ان $\sum |أ_ن|$ تقاربية وهذا ينهي برهان (أ) .

لبرهان (ب) نفرض ان $\sum ب_ن$ تباعدية ، $|أ_ن| \geq ب_ن$ لجميع قيم ن ، وهكذا فان $م_ن \geq ل_ن$ تتزايد بدون حصر عندما تكبر ن فان $م_ن$ تسلك نفس السلوك ، وهكذا نستنتج ان $\sum |أ_ن|$ تباعدية .

بما ان تقارب وتباعد المتسلسلة لا يتأثر بحذف عدد محدود من حدودها ، فان الشرطين $|أ_ن| \geq ب_ن$ او $|أ_ن| \leq ب_ن$ في (١٢ – ٢٩) نحتاج اليهما فقط ابتداء من حد ما مثل $|أ_ك|$ ، $ب_ك$ وما بعده من الحدود ، حيث ك عدد صحيح موجب .

ويقال للمتسلسلة $\sum ء_ن$ انها تتحكم بالمتسلسلة $\sum جـ_ن$ اذا كان $٠ \leq جـ_ن \leq ء_ن$ لجميع الاعداد الصحيحة الموجبة ن . وباستخدام هذا الاصطلاح يمكن اعادة كتابة (١٢ – ٢٩) (أ) كالتالي :

اذا تحكمت متسلسلة تقاربية موجبة الحدود بمتسلسلة اخرى فان هذه المتسلسة الاخيرة تكون تقاربية ايضا . كما ان الجزء (ب) من نفس النظرية يكتب كالتالي : كل متسلسلة تتحكم بمتسلسلة تباعدية تكون تباعدية ايضا .

مثـال ٢ : حقق هل كلا المتسلسلتين التاليتين تقاربيتان ام تباعديتان

$$(أ) \quad \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٢ + ٥ ن}$$

(ب) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$

الحـــل : (أ) لجميع $n \geq 1$.

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{n}} > \frac{1}{\sqrt[5]{n+2}}$$

وبما ان $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{5}}}$ متسلسلة هندسية تقاربية ، فباستخدام (١٢ – ٢٩ ب) فان المتسلسلة المعطاة تقاربية ايضا .

(ب) المتسلسلة $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ تباعدية ، كما ان المتسلسلة التي نحصل عليها بحذف الحد الاول من هذه المتسلسلة تكون تباعدية ايضا وبما ان

$\frac{3}{\sqrt{n}-1} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ لجميع قيم $n \geq 2$ ينتج من (١٢ – ٢٩ ب) ان المتسلسلة المعطاة تباعدية .

(١٢–٣٠) اختبار المقارنة الثاني : اذا كانت $\sum أ_n$ ، $\sum ب_n$

متسلسلتين موجبتي الحدود وكانت $\lim_{n \to \infty} \frac{أ_n}{ب_n} = ك$ ، $ك > 0$. فان المتسلسلتين تقاربيتان معا او تباعديتان معا .

البرهـــان : اذا كانت $\lim_{n \to \infty} \frac{أ_n}{ب_n} = ك$ ، $ك > 0$. فانه يوجد عدد م بحيث ان

$$\frac{ك}{٢} < \frac{أ_ن}{ب_ن} < \frac{٣ك}{٢} \quad \text{لجميع قيم } ن > م$$

وهذا مكافيء للمتباينة $\frac{ك}{٢} ب_ن < أ_ن < \frac{٣ك}{٢} ب_ن$ لجميع قيم $ن > م$.

فاذا كانت $\sum أ_ن$ تقاربية فان $\sum \frac{ك}{٢} ب_ن$ تقاربية ايضا لانها محكومة بالمتسلسلة $\sum أ_ن$. وباستخدام (١٢ – ٢٣) فان $\sum ب_ن$ $= \sum (\frac{٢}{ك})(\frac{ك}{٢}) ب_ن$ تقاربية . وبالعكس اذا كانت $\sum ب_ن$ تقاربية فان $\sum أ_ن$ تقاربية ايضا لانها محكومة بالمتسلسلة التقاربية $(\frac{٣ك}{٢}) ب_ن$. وهكذا فان المتسلسلة $\sum أ_ن$ تقاربية اذا وفقط اذا كانت $\sum ب_ن$ متسلسلة تقاربية ايضا . وبالنتيجة فان $\sum أ_ن$ تباعدية اذا وفقط اذا كانت $\sum ب_ن$ تباعدية ايضا . وهناك اختباران اخران للمقارنة في التمرينين ٢٧ ، ٢٨ .

مثال ٣ : بين هل كل من المتسلسلتين التاليتين تقاربية ام تباعدية :

$$(أ) \quad \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{\sqrt{١ + ن^٢}}$$

$$(ب) \quad \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٣ن^٢ + ٥}{٢ن(١ + ن^٢)}$$

الحل : سنطبق (١٢ – ٣٠) على اعتبار ان :

$$أ_ن = \frac{١}{\sqrt{١ + ن^٢}} ، \quad ب_ن = \frac{١}{ن^{٣/٢}}$$

المتسلسلة $\sum \frac{1}{ن^{3/2}}$ تباعدية لان $\frac{2}{3} < 1$ ، وبما ان

$$\text{نهـا}_{ن \to \infty} \frac{أ_ن}{ب_ن} = \text{نهـا}_{ن \to \infty} \frac{\frac{3}{2} ن}{\sqrt{3} \sqrt{1 + ن^2}}$$

$$= \text{نهـا}_{ن \to \infty} \sqrt{\frac{ن^2}{1 + ن^2}}^3$$

$$= 1 > .$$

فالمتسلسلة $\sum أ_ن$ تباعدية .

(ب) اذا وضعنا

$$أ_ن = \frac{ن^3 + 3ن^2 + 5ن}{ن^2 (ن + 1)^2} \quad ، \quad ب_ن = \frac{1}{ن^2}$$

فان $\text{نهـا}_{ن \to \infty} \frac{أ_ن}{ب_ن}$

$$= \text{نهـا}_{ن \to \infty} \frac{ن^3 + 3ن^2 + 5ن}{ن^2 + 1} = 3 > .$$

ولان $\frac{1}{ن^2}$ متسلسلة هندسية تقاربية فان المتسلسلة $\sum أ_ن$ المعطاة تقاربية ايضا .

وعند البحث عن متسلسلة مناسبة $\sum ب_ن$ لاستخدامها في المقارنة مع $\sum أ_ن$ حيث $أ_ن$ كسر فان هناك طريقة جيدة هي استبعاد جميع

العناصر من البسط والمقام ما عدا تلك التي لها اكبر تأثير على مقدار الكسر.
فمثلا اذا كان

$$أ_ن = \frac{٣ ن^{٢} + ٧ن}{٥ + ن^{-١} + ٧/٢ ن}$$

فاننا نحذف جميع العناصر ما عدا تلك التي لها اعلى قوة في البسط والمقام وهذا يؤدي الى

$$\frac{٣ن^{٢}}{٧/٢ ن} = \frac{٣}{٣/٢ ن}$$

وهذا يشير الى اختيار $ب_ن = \frac{١}{٣/٢ ن}$

وفي هذه الحالة :

$$نهـا \frac{أ_ن}{ب_ن} = نهـا \frac{٣ن + ٧/٢ ن^{٢} + ٣ن}{١ - ٧/٢ ن + ن} = ٣$$

وبما ان $\sum ب_ن$ متسلسلة تقاربية (٣ / ٢ > ١) ينتج من (١٢ – ٣٠)
ان $\sum أ_ن$ تقاربية ايضا :
واذا اتبعنا هذه الطريقة في المثال (٣) ب حيث

$$أ_ن = \frac{٣ن^{٢} + ٥ن}{٢ن^{٢} + ٢ن^{٢}}$$

فان هذا يقودنا الى

$$\frac{٣}{٢ ن} = \frac{٢ ٣}{٢ ن^{٢}}$$

مما يشير الى اختيار ب$_{ن}$ = $\frac{١}{٢ ن}$ كما حصل في حل المثال .

سنختتم هذا البند بملاحظات عامة حول المتسلسلات الموجبة الحدود لنفرض ان $\sum$ أ$_{ن}$ متسلسلة موجبة الحدود ، واننا قمنا بتجميع حدودها على نحو ما ، مثلا :

$$(أ_{١} + أ_{٢}) + أ_{٣} + (أ_{٤} + أ_{٥} + أ_{٦} + أ_{٧}) + \cdots$$

فاذا سمينا المتسلسلة الاخيرة $\sum$ ب$_{ن}$ ، حيث ب$_{١}$ = أ$_{١}$ + أ$_{٢}$ ، ب$_{٢}$ = أ$_{٣}$ ب$_{٣}$ = أ$_{٤}$ + أ$_{٥}$ + أ$_{٦}$ + أ$_{٧}$ ، وهكذا . فان اي مجموع جزئي للمتسلسلة $\sum$ ب$_{ن}$ هو مجموع جزئي للمتسلسلة $\sum$ أ$_{ن}$ ويتبع ذلك انه اذا تقاربت المتسلسلة $\sum$ أ$_{ن}$ فان المتسلسلة $\sum$ ب$_{ن}$ تتقارب ايضا ولها نفس المجموع . ويمكن استخدام نفس النقاش لاي تجميع لحدود المتسلسلة $\sum$ أ$_{ن}$. وهكذا اذا كانت المتسلسلة الموجبة الحدود تقاربية فان المتسلسلة التي نحصل عليها بتجميع الحدود باي شكل تقاربية ايضا ولها نفس المجموع .

والان لنفرض ان المتسلسلة الموجبة الحدود $\sum$ أ$_{ن}$ تقاربية ومجموعها م واننا كونا متسلسلة $\sum$ ب$_{ن}$ باعادة ترتيب حدود المتسلسلة $\sum$ أ$_{ن}$ بطريقة ما ، فمثلا قد تكون المتسلسلة $\sum$ ب$_{ن}$ هي المتسلسلة :

فاذا كان ل$_{ن}$ المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة $\sum$ ب$_{ن}$ ، فانها مجموع حدود من المتسلسلة $\sum$ أ$_{ن}$ واذا كان ك هو اكبر دليل سفلي للحدود أ$_{ى}$ في ل$_{ن}$ فان ل$_{ن}$ ≤ م$_{ك}$ < م وهكذا فان ل$_{ن}$ ≤ م لجميع قيم ن . وباستخدام (١٢ – ٢٤) فان $\sum$ ب$_{ن}$ تقاربية ومجموعها ل ≤ م . والبرهان السابق لا يعتمد على اي اعادة

يعتمد على اي اعادة ترتيب خاصة للحدود ، ويمكن اعتبار اننا قد حصلنا على المتسلسلة $\sum أ_ن$ باعادة ترتيب حدود المتسلسلة $\sum ب_ن$ ، وباستخدام نفس البرهان السابق فان م $\leqslant$ ل وهذا يثبت انه اذا اعيد ترتيب حدود متسلسلة تقاربية موجبة الحدود $\sum أ_ن$ باي طريقة فان المتسلسلة الناتجة تقاربية ولها نفس المجموع .

تمارين :

استخدم اختبار التكامل لتحقيق التقارب والتباعد في المتسلسلات في التمارين ١٠ - ١ :

١ . $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{(٣ + ٢ن)^{٢}}$

٢ . $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{(٤ + ن)^{٢/٣}}$

٣ . $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{٧ + ٤ن}$

٤ . $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{ن (لط ن)^{٢}}$

٥ $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{لط ن}{ن}$

٦ . $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن}{ن^{٢} + ١}$

٧. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{\sqrt[٣]{٢ن + ١}}$

٨. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{١ + ١٦ ن^{٢}}$

٩. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{\text{قوظا } ن}{١ + ن^{٢}}$

١٠. $\sum_{ن=١}^{\infty} ن \, e^{-ن}$

استخدم اختبارات المقارنة لتحقيق تقارب وتباعد المتسلسلات في التمارين ١١ – ٢٦

١١. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{١ + ن^{٢} + ن^{٤}}$

١٢. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{\sqrt{ن}}{٢ + ن^{٢}}$

١٣. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{ن \times ٣ن}$

١٤. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن^{٢}.}{١ + ن^{٣}}$

١٥. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٢ ن + ن^{٢}}{١ + ن^{٣}}$

١٦. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٢}{٣ + \sqrt{ن}}$

١٧. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{\sqrt{ن}}{ن + ٤}$

١٨. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن^{٥} + ٤ن^{٣} + ١}{٢ن^{٨} + ن^{٤} + ٢}$

١٩. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{٢ + \text{جتا } ن}{ن^{٢}}$

٢٠. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{\text{قوظا } ن}{ن^{٢}}$

٢١. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{(٢ن + ١)^{٣}}{(ن^{٣} + ١)^{٢}}$

٢٢. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{\sqrt{ن (ن + ١) (ن + ٢)}}$

٢٣. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{\sqrt{٥ن^{٢} + ١}}$

٢٤. $\sum_{ن=١}^{} \frac{٣ ن + ٥}{ن \times ٢^{ن}}$

٢٥. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{ن^{ن}}$

٢٦. $\sum \frac{١}{ن!}$

٢٧. برهن انه اذا كانت $\lim_{ن \to \infty} \frac{|أ_ن|}{|ب_ن|}$ = صفرا ، وكانت المتسلسلة $\sum ب_ن$ تقاربية فان المتسلسلة $\sum |أ_ن|$ تقاربية ايضا . (هذا ليس صحيحا بالضرورة للمتسلسلات التي بعض حدودها سالبة) .

٢٨. برهن انه اذا كانت $\lim \frac{|أ_ن|}{|ب_ن|} = \infty$ ، وكانت المتسلسلة $\sum ب_ن$ تباعدية فان المتسلسلة $\sum |أ_ن|$ تباعدية ايضا .

٤ ــ المتسلسلات المتناوبة : (Alternating Series)

تسمى المتسلسلات اللانهائية التي تتناوب حدودها الاشارتين الموجبة والسالبة بالمتسلسلات المتناوبة ويعبر عن المتسلسلة المتناوبة باحدى الصورتين :

$$أ_١ - أ_٢ + أ_٣ - أ_٤ + \cdots + (-١)^{ن-١} أ_ن + \cdots \quad \text{أو}$$

$$-أ_١ + أ_٢ - أ_٣ + أ_٤ - \cdots + (-١)^{ن} أ_ن + \cdots$$

حيث كل $أ_ن > ٠$ ، والنظرية التالية تزودنا بالاختبار الرئيسي لتعيين تقارب وتباعد المتسلسلة المتناوبة .

(١٢ – ٣١) اختبار المتسلسلات المتناوبة . اذا كان $أ_ك \geq أ_{ك+١}$ لجميع الاعداد الصحيحة الموجبة ك ، وكانت $نهـــا_{ن\to\infty} أ_ن$ = صفرا ، فان المتسلسلة المتناوبة $\sum (-١)^{ن-١} أ_ن$ تقاربية .

البرهـــان : لنأخذ المجاميع الجزئية التالية اولا :

$م_٢$ ، $م_٤$ ، $م_٦$ ، ... ، $م_{٢ن}$ ، ...

التي تحوى اعداداً زوجية من حدود المتسلسلة ، وبما ان

$م_{٢ن} = (أ_١ - أ_٢) + (أ_٣ - أ_٤) + ... + (أ_{٢ن-١} - أ_{٢ن})$

بالاضافة الى ان $أ_ك - أ_{ك+١} \geq$ صفرا لجميع قيم ك فاننا نجد ان

$٠ \leq م_٢ \leq م_٤ \leq ... \leq م_{٢ن} \leq ...$

اي ان $م_{٢ن}$ متتالية وتيرية . ويمكن كتابة $م_{٢ن}$ بالصورة

$م_{٢ن} = أ_١ - (أ_٣ - أ_٤) - (أ_٥ - أ_٦) - ... - (أ_{٢ن-٢} - أ_{٢ن-١}) - أ_{٢ن}$

وهكذا نجد ان $م_{٢ن} \leq أ_١$ لجميع الاعداد الصحيحة ن ، وكما في برهان (١٢ – ١٠) فان :

$نهـــا_{ن\to\infty} م_{٢ن} = م \leq أ_١$

واذا اخذنا المجاميع الجزئية $م_{٢ن+١}$ اي مجاميع اعداد فردية من حدود المتسلسلة ، فان

$م_{٢ن+١} = م_{٢ن} + أ_{٢ن+١}$

وبما ان $نهـــا_{ن\to\infty} أ_{ن+١}$ = صفرا ، فان $نهـــا_{ن\to\infty} م_{٢ن+١} = نهـــا_{ن\to\infty} م_{٢ن} = م$

اي ان المتسلسلة تقاربية .

مثـال ١ : بين هل المتسلسلات التالية تقاربية ام تباعدية ؟

$$(أ) \quad \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{(-١)^{ن-١} ن^{٢}}{٣ - ٤ن^{٢}}$$

$$(ب) \quad \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{(-١)^{ن-١} ن^{٢}}{٣ - ٤ن}$$

الحـــل : اذا وضعنا ق (س) $= \frac{٢ س}{٤ س^{٢} - ٣}$ فان

$$ق' (س) = \frac{-٨ س^{٢} - ٦}{(٤ س^{٢} - ٣)^{٢}} < ٠$$

وهكذا فان ق (س) متناقصة لجميع قيم س ≥ ١ ، وبما ان الحد النوني $أ_{ن}$ في المتسلسلة هو ق (ن) فان $أ_{ن} \geq أ_{ن+١}$ لجميع قيم ن الموجبة ، كما ان

$$\text{نهـــا}_{ن \to \infty} أ_{ن} = \text{نهـــا}_{ن \to \infty} \frac{٢ ن}{٣ - ٤ن^{٢}} = \text{صفرا}$$

فباستخدام اختبار المتسلسلات المتناوبة فان هذه المتسلسلة تقاربية .

(ب) حدود المتسلسلة متناقصة ايضا ولكن

$$\text{نهـــا}_{ن \to \infty} \frac{٢ ن}{٣ - ٤ن} = \frac{١}{٢} \neq \text{صفرا}$$

وهكذا حسب (١٢ – ١٩) تكون المتسلسلة تباعدية .

في (أ) من المثال السابق استخدمنا المشتقة التفاضلية لاثبات ان $أ_ن \geq أ_{ن+١}$ لجميع قيم ن . ومن الممكن اثبات ذلك مباشرة باثبات ان $أ_ن - أ_{ن+١} \geq ٠$ ، وبالتحديد ، اذا كان

$$أ_ن = \frac{ن^٢}{٣ - ٤ن^٢} \quad \text{فان}$$

$$أ_ن - أ_{ن+١} = \frac{ن^٢}{٣ - ٤ن^٢} - \frac{(ن+١)^٢ \times ٢}{٣ - ٤(ن+١)^٢}$$

$$= \frac{٦ + ٨ن + ٨ن^٢}{(٣ - ٤ن^٢)(١ + ٨ن + ٤ن^٢)} \geq \text{صفر}$$

وهناك طريقة ثالثة لاثبات ان $أ_ن \geq أ_{ن+١}$ هي باثبات ان

$$\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} \leq ١ \cdot$$

ان المتسلسلة المتناوبة $\sum (-١)^{ن-١} أ_ن$ التي تحقق شروط (١٢ – ٣١) لها مجموع ، وليكن م . والمتسلسلة التي نحصل عليها بترك الـ (ن) حدا الاولى اي

$$(-١)^ن أ_{ن+١} + (-١)^{ن+١} أ_{ن+٢} + (-١)^{ن+٢} أ_{ن+٣} + \cdots$$

تحقق ايضا شروط (١٢ – ٣١) ، وليكن مجموعها ب ن

وهكذا فان $م - م_ن = ب_ن = (-١)^ن (أ_{ن+١} - أ_{ن+٢} + \cdots)$

وهكذا فان $|ب_ن| = أ_{ن+١} - أ_{ن+٢} + أ_{ن+٣} - \cdots$

وكما في برهان (١٢ – ٣١) $|\ ب_ن\ | \leq \ل_{ن+١}$ ، وهكذا فان

$$|\ م - م_ن\ | = |\ ب_ن\ | \leq \ل_{ن+١}$$

وهذا يثبت النظرية التالية :

(١٢–٣٢) نظرية : اذا كانت $\sum (-١)^{ن-١} \ل_ن$ متسلسلة متناوبة بحيث ان $\ل_ك \geq \ل_{ك+١}$ لجميع قيم ك ، وكانت $\lim_{ن \to \infty} \ل_ن = ٠$ فان الخطأ المتضمن في تقريب م ، مجموع المتسلسلة ، بالمجموع الجزئي النوني اصغر عدديا من $\ل_{ن+١}$.

مثـال ٢ : برهن ان المتسلسلة :

$$١ - \frac{١}{!٣} + \frac{١}{!٥} - \frac{١}{!٧} + \cdots + (-١)^{ن-١} \frac{١}{!(٢ن-١)} + \cdots$$

تقاربية وجد تقريبا لمجموعها صحيحا لخمس منازل عشرية .

الحـــل : باستخدام اختبار تقارب المتسلسلات المتناوبة نجد ان المتسلسلة تقاربية والقيمة العددية للحد الخامس هي

$$\frac{١}{!٩} < ٠,٠٠٠٠٠٣$$

وهكذا فان التقريب

$$م \approx ١ - \frac{١}{٦} + \frac{١}{١٢٠} - \frac{١}{٥٠٤٠} \approx ٠,٨٤١٤٧$$

صحيح لخمس منازل عشرية . كما سيتبع من (١٢ – ٥٠) ان مجموع المتسلسلة المعطاة يساوي جا ١ وهكذا فان جا ١ ≈ ٠,٨٤١٤٧ . وهذا يشرح لنا احدى الطرق المتبعة لحساب الجداول المثلثية .

تمارين :

حقق هل المتسلسلات في التمارين ١ – ١٢ تقاربية ام تباعدية :

١ . $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١} \frac{١}{\sqrt{٢ن+١}}$

٢ . $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١} \frac{١}{ن^{٣/٢}}$

٣ . $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١} \frac{١}{\text{لط}(ن+١)}$

٤ . $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١} \frac{ن}{ن^{٢}+٤}$

٥ . $\sum_{ن=٢}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{ن}{\text{لط } ن}$

٦ . $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{\text{لط } ن}{ن}$

٧ . $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١} \frac{ن^{٢}+١}{ن^{٣}+١}$

٨ . $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١} \frac{٤+ن٣}{٧+ن٥}$

٩ . $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{e^{ن}}{ن^{٤}}$

١٠. $\sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{\sqrt{ن+١}}{٥+٨ن}$

١١. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{٣\sqrt{ن}}{٥+ن^{٢}}$

١٢. $\sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{ن^{٤}+١}{ن^{٣}+١}$

في التمارين ١٣ – ١٦ قرب مجموع المتسلسلات الى ثلاث منازل عشرية

١٣. $\sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{١}{ن!}$

١٤. $\sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن+١} \frac{١}{(٢ن)!}$

١٥. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن+١} \frac{ن+١}{٣^{ن}}$

١٦. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١} \frac{١}{ن^{٥}}$

في التمارين ١٧ – ٢٠ أوجد اصغر عدد صحيح موجب ن بحيث يكون المجموع الجزئي $م_{ن}$ تقريبا للمجموع م لاربع منازل عشرية (ملاحظة : أوجد ن بحيث ان $|م - م_{ن}| < ١٠^{-٥}$).

١٧. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{١}{ن^{٢}}$

١٨ . $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{١}{\sqrt{ن}}$

١٩ . $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{١}{ن^{٢}}$

٢٠ . $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{١}{١ + ن^{٣}}$

٥ — التقارب المطلق : (Absolute Convergence)

يقال بان تقارب المتسلسلة اللانهائية $\sum أ_{ن}$ مطلق اذا كانت المتسلسلة :

$$\sum |أ_{ن}| = |أ_{١}| + |أ_{٢}| + \cdots + |أ_{ن}| + \cdots \quad (٣٣-١٢)$$

التي نحصل عليها بأخذ القيمة المطلقة لكل حد ، تقاربية . والمتسلسلة التقاربية التي ليس تقاربها مطلقا يسمى تقاربها مشروطا (Conditional) . واذا كانت $\sum أ_{ن}$ متسلسلة موجبة الحدود فان $|أ_{ن}| = أ_{ن}$ وفي هذه الحالة فان التقارب المطلق هو نفس التقارب العادي

مثـال ١ : اختبر التقارب المطلق للمتسلسلات التالية :

(أ) $١ - \frac{١}{٢^{٢}} + \frac{١}{٣^{٢}} - \frac{١}{٤^{٢}} + \cdots + (-١)^{ن-١} \frac{١}{ن^{٢}} + \cdots$

(ب) $١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \cdots + (-١)^{ن-١} \frac{١}{ن} + \cdots$

الحـــل : (أ) المتسلسلة التي نحصل عليها بأخذ القيمة المطلقة لكل حد هي :

$$١ + \frac{١}{٢^{٢}} + \frac{١}{٣^{٢}} + \frac{١}{٤^{٢}} + \cdots + \frac{١}{ن^{٢}} + \cdots$$

وهي متسلسلة القوة ب التقاربية لان ب = ٢ > ١ . وهكذا فان المتسلسلة $\sum (-١)^{ن-١} / ن^{٢}$ تقاربية تقاربا مطلقا .

(ب) بما ان

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \cdots + \frac{١}{ن} + \cdots$$

هي المتسلسلة التوافقية التباعدية ، فالمتسلسلة المعطاة ليست تقاربية تقاربا مطلقا ، ولكن المتسلسلة $\sum (-١)^{ن-١} / ن$ متسلسلة متناوبة تقاربية وهكذا فان تقاربها مشروط .

(١٢-٣٤) نظرية : اذا كان تقارب المتسلسلة $\sum م_ن$ مطلقا تكون المتسلسلة تقاربية ، كما ان

$$| \sum_{ن=١}^{\infty} م_ن | \leq \sum_{ن=١}^{\infty} | م_ن |$$

البرهـــان : لتكن المجاميع الجزئية للمتسلسلات

$$\sum_{ن=١}^{\infty} م_ن \ ، \ \sum_{ن=١}^{\infty} | م_ن | \ ، \ \sum_{ن=١}^{\infty} (م_ن + | م_ن |)$$

هي $م_ن$ ، $ل_ن$ ، $ك_ن$ على الترتيب . فاذا كان تقارب $\sum م_ن$ مطلقا فان

نهـــا $ل_ن$ = ل ، حيث ل مجموع $\sum | م_ن |$.

وبما ان $٠ \leq م_ن + | م_ن | \leq ٢ | م_ن |$ فانه لكل عدد صحيح موجب ن

$٠ \leq ك_ن \leq ٢ ل_ن \leq ٢ ل$

وهكذا فان المتتالية $\{ك_ن\}$ تقاربية كما انها وتيرية لان $ك_1 \leq ك_2 \leq \cdots \leq ك_ن \leq \cdots$. وباستخدام (١٢ - ١٠) يوجد عدد ك بحيث ان

$$\text{نهـــا}_{ن \to \infty} ك_ن = ك \leq ٢ ل$$

وبما ان $م_ن = ك_ن - ل_ن$ ، فان

$$\text{نهـــا}_{ن \to \infty} م_ن = \text{نهـــا}_{ن \to \infty} ك_ن - \text{نهـــا}_{ن \to \infty} ل_ن = ك - ل \leq ل$$

اي ان $\sum |م_ن|$ تقاربية ومجموعها م $\leq$ ل .

وبما ان $-م = \sum (-|م_ن|)$ ، ل $= \sum ||م_ن|-|م_ن||$ ، فان نفس البرهان ينطبق على المتسلسلة $(-|م_ن|)$ مما يعني ان $-م \leq ل$. والمتباينتان م $\leq$ ل ، $-م \leq$ ل تتضمنـــــــان ان $|م| \leq$ ل اي ان

$$|\sum |م_ن|| \leq \sum |م_ن|$$

مثـال ٢ : بين هل المتسلسلة التالية تقاربية ام تباعدية ؟

$$\text{جا}\,١ + \frac{\text{جا}\,٢}{٢^{٢}} + \frac{\text{جا}\,٣}{٣^{٢}} + \cdots + \frac{\text{جا}\,ن}{ن^{٢}} + \cdots$$

الحـــل : تشمل المتسلسلة حدودا موجبة واخرى سالبة ولكنها ليست متناوبة لان الحدود الثلاثة الاولى موجبة ، والثلاثة التالية سالبة . وبما ان

$$\left|\frac{\text{جا}\,ن}{ن^{٢}}\right| = \frac{|\text{جا}\,ن|}{ن^{٢}} \leq \frac{١}{ن^{٢}}$$

فان متسلسلة الحدود المطلقة $\sum \left|\frac{\text{جا}\,ن}{ن^{٢}}\right|$ محكومة بالمتسلسلة التقاربية

$\sum \frac{1}{ن^{2}}$ وهكذا فان تقارب المتسلسلة المعطاة مطلق ولذا فهي تقاربية باستخدام (١٢ – ٣٤) .

(١٢ – ٣٥) اختبار النسبة : كل متسلسلة لا نهائية $\sum$ $ا_{ن}$ حدودها ليست صفرية لها الخصائص التالية :

(أ) المتسلسلة تقاربية تقاربا مطلقا اذا كانت

$$\text{نهـــا}_{ن \to \infty} \left| \frac{ا_{ن+1}}{ا_{ن}} \right| = ل < 1 .$$

(ب) المتسلسلة تباعدية اذا كانت

$$\text{نهـــا}_{ن \to \infty} \left| \frac{ا_{ن+1}}{ا_{ن}} \right| = ل > 1$$

البرهـــان : (أ) لنفرض ان $\text{نهـــا}_{ن \to \infty} \left| \frac{ا_{ن+1}}{ا_{ن}} \right| = ل > 1 .$

فاذا كان $ر$ اي عدد يحقق $ل < ر < 1$ فانه يوجد عدد صحيح م بحيث ان

$$\left| \frac{ا_{ن+1}}{ا_{ن}} \right| < ر \text{ لجميع قيم } ن \geq م$$

وهذا يتضمن :

$$|ا_{م+1}| < |ا_{م}| ر$$

$$|ا_{م+2}| < |ا_{م+1}| ر < |ا_{م}| ر^{2}$$

$$|ا_{م+3}| < |ا_{م+2}| ر < |ا_{م}| ر^{3}$$

وبصورة عامـــة :

$$|أ_{م+ن}| < |أ_م| ر^ن \text{ لجميع } ن > ٠$$

وينتج من اختبار النسبة (١٢ – ٢٩) ان المتسلسلة

$$|أ_{م+١}| + |أ_{م+٢}| + \cdots + |أ_{م+ن}| + \cdots$$

تقاربية لان كل حد من حدودها اقل من الحد المناظر له من المتسلسلة التقاربية ، او يساويه

$$|أ_م| ر + |أ_م| ر^٢ + \cdots + |أ_م| ر^ن + \cdots$$

ولان التقارب والتباعد لا يتأثران بحذف عدد محدود من حدود المتسلسلة ، فان المتسلسلة $\sum_{ن=١}^{\infty} |أ_ن|$ تقاربية .

(ب) لنفرض ان نهـــا $\left|\frac{أ_{ن+١}}{أ_ن}\right|$ = ل > ١ ، فاذا كان ر اي عدد $ن \to \infty$

يحقق الشرط ١ < ر < ل فانه يوجد عدد صحيح م بحيث ان

$$\frac{|أ_{ن+١}|}{|أ_ن|} > ر > ١ \text{ لجميع قيم } ن \geq م$$

وبالنتيجة فان $|أ_{ن+١}| > |أ_ن|$ ، اذا كانت $ن \geq م$ ، وهكذا فان نهـــا $ن \to \infty$

$أ_ن \neq$ صفرا ، وباستخدام (١٢ – ١٩) نجد ان المتسلسلة $\sum أ_ن$

تباعدية . والبرهان عندما تكون نهـــا $\frac{|أ_{ن+١}|}{|أ_ن|} = \infty$ مماثل لما سبق وسيترك كتمرين للقاريء .

اذا كانت $\sum_{ن} أ_ن$ متسلسلة موجبة الحدود فان $|أ_ن| = أ_ن$ وفي هذه الحالة يمكن حذف اشارات الحد المطلق في (١٢ – ٣٥) .

مثـال ٣ : تحقق من ان كلا من المتسلسلتين التاليتين تقاربية تقاربا مطلقا ، او تقاربا مشروطا ، او تباعدية :

$$(أ) \quad \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{(-١)^{ن} ن^{٣}}{ن!} \qquad (ب) \quad \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن^{٣}}{ن^{٢}}$$

الحـل : (أ) بما ان

$$\text{نهـا}_{ن \to \infty} \left| \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} \right|$$

$$= \text{نهـا}_{ن \to \infty} \left| \frac{(ن+١)^{٣}}{ن!} \right| \cdot \left| \frac{ن!}{ن^{٣}} \right| \cdot \left| \frac{(ن+١)^{٣}}{(ن+١)!} \right|$$

$$= \text{نهـا}_{ن \to \infty} \frac{٣}{ن+١} = ٠ < ١$$

فان المتسلسلة تقاربية تقاربا مطلقا (باستخدام اختبار النسبة) .

(ب) بما ان

$$\text{نهـا}_{ن \to \infty} \left| \frac{أ_{ن+١}}{أ_ن} \right| = \text{نهـا}_{ن \to \infty} \left| \frac{(ن+١)^{٣}}{(ن+١)^{٢}} \cdot \frac{ن^{٢}}{ن^{٣}} \right|$$

$$= \text{نهـا}_{ن \to \infty} \frac{٣ ن^{٢}}{ن^{٢} + ٢ن + ١} = ٣ < ١$$

فان المتسلسلة تباعدية (باستخدام اختبار النسبة) .

من المفيد ان نذكر ان اختبار النسبة لا يعطينا اية معلومات مفيدة عندما تكون

$$\text{نهـــا}_{ن\to\infty} \frac{ن^{ن+1}}{ن^{ن}} = 1$$. ومن السهل اثبات ان قيمة هذه النهاية

تساوي ١ لكل من المتسلسلة التقاربية $\sum \frac{1}{ن^{2}}$ والمتسلسلة التباعدية $\sum \frac{1}{ن}$.

وهكذا اذا ساوت النهاية الوحدة يجب استخدام اختبار آخر .

تمارين :

تحقق هل كل من المتسلسلات في التمارين ١ – ٢٠ تقاربية تقاربا مطلقا ام تقاربا مشروطا ام تباعدية :

١ . $\sum_{ن=1}^{\infty} (-1)^{ن-1} \frac{3ن+1}{2ن}$

٢ . $\sum_{ن=1}^{\infty} (-1)^{ن-1} \frac{3ن}{ن^{2}+4}$

٣ . $\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{5ن}{ن(3ن^{2}+1)}$

٤ . $\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{2ن^{-1}}{5ن^{2}(ن+1)}$

٥ . $\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{(-100)^{ن}}{ن!}$

٦ . $\sum_{ن=1}^{\infty} \frac{10-ن^{2}}{ن!}$

٧ . $\sum_{ن=1}^{\infty} (-1)^{ن-1} \frac{\sqrt{ن}}{ن^{2}+1}$

٨. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١} \frac{\sqrt{ن}}{ن+١}$

٩. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{ن^{٢}+١}{ن^{٣}+١}$

١٠. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{ن^{٢}+١}{ن^{٣}+ن^{٢}}$

١١. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{١}{ن^{٥}(\ln ن)}$

١٢. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{ن!}{(ن+١)^{٥}}$

١٣. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١} \frac{٢}{ن^{٣}+e^{ن}}$

١٤. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١} \frac{ن \times ٣^{٢ن}}{٥^{ن-١}}$

١٥. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{(٢ن)!}{(ن!)^{٢}}$

١٦. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{ن^{٢}+٣}{(٢ن-٥)^{٢}}$

١٧. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{\sqrt[٤]{ن}}{\sqrt{ن^{٣}+١}}$

١٨ . $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن}{ن!}$

١٩ . $١ + \frac{٣ \times ١}{٢!} + \frac{٥ \times ٣ \times ١}{٣!} + \cdots + \frac{١ \times ٣ \times ٥ \times \cdots \times (٢ - ٣ن)}{ن!} + \cdots +$

٢٠ . $\frac{١}{٢} + \frac{٤ \times ١}{٤ \times ٢} + \frac{٧ \times ٤ \times ١}{٦ \times ٤ \times ٢} + \cdots + \frac{١ \times ٤ \times ٧ \times \cdots \times (٣ن - ٢)}{(٢ن) \times \cdots \times ٦ \times ٤ \times ٢} + \cdots +$

٦ ـــ متسلسلات القوى : (Power Series)

في البنود السابقة ركزنا على المتسلسلات اللانهائية التي حدودها ثابتة . ولكن المتسلسلات التي تحوي حدودها متغيرات لها أهمية عظمى في التطبيقات ، وبصورة خاصة اذا كان س متغيرا فان المتسلسلة

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} أ_ن س^ن = أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + \cdots + أ_ن س^ن + \cdots + \quad (٣٦-١٢)$$

تسمى متسلسلة قوى في س . واذا عوضنا عن س بعدد ما فاننا نحصل على متسلسلة حدودها ثابتة يمكن اختبار تقاربها وتباعدها . ولتسهيل الحد النوني في متسلسلة القوى (١٢ – ٣٦) فاننا نضع س^{٠} = ١ ، حتى ولوكانت س = ٠ ، وهدفنا الرئيسي في هذا البند هو معرفة جميع قيم س التي عندها تكون المتسلسلة تقاربية . ومن الواضح ان كل متسلسلة قوى (١٢ – ٣٦) تتقارب عند ما تكون س = صفرا . ولايجاد اعداد اخرى

تكون عندها المتسلسلة تقاربية فاننا كثيرا ما نستخدم اختبار النسبة ، كما هو موضح في المثال التالي :

مثـال ١ : أوجد جميع قيم س التي تجعل المتسلسلة

$$١ + \frac{١}{٥} س + \frac{٢}{٥} س^{٢} + \cdots + \frac{ن}{٥^{ن}} س^{ن} + \cdots$$

تقاربية تقاربا مطلقا .

الحـــل : اذا وضعنا $ا_{ن} = (ن \,/\, ٥^{ن}) \, س^{ن}$ فان

$$\text{نهـــا}_{ن \to \infty} \left| \frac{ا_{ن+١}}{ا_{ن}} \right|$$

$$= \text{نهـــا}_{ن \to \infty} \left| \frac{(ن+١) \, س^{ن+١}}{٥^{ن+١}} \times \frac{٥^{ن}}{س^{ن}} \right|$$

$$= \text{نهـــا}_{ن \to \infty} \left| \frac{(ن+١) \, س}{٥} \right| = \frac{١}{٥} \, |س|$$

فمن اختبار النسبة فان المتسلسلة المعطاة تكون تقاربية تقاربا مطلقا اذا كان

$|س| \,/\, ٥ < ١$ اي ان $- ٥ < س < ٥$ ، وتكون تباعدية اذا كان $|س| \,/\, ٥ > ١$

اي ان $س > ٥$ او $س < - ٥$.

واذا كانت $\frac{|س|}{٥} = ١$ فان اختبار النسبة لا يعطينا اية معلومات وهكذا فان العددين ٥ ، $- ٥$ يحتاجان الى عناية خاصة . وبتعويض ٥ بدل س في المتسلسلة المعطاة نحصل على

$$\sum_{ن=0}^{\infty} \frac{ه^{ن}}{ه^{٥}} = \sum_{ن=0}^{\infty} ه^{ن} = ه^{0} + ه^{1} + ه^{2} + ه^{3} + \cdots$$

وهي تباعدية ، كما ان المتسلسلة تباعدية ايضا اذا كانت س = − ٥ (لماذا ؟)

وهكذا فان $\sum$ (ه / ٥) س^{ن} تقاربية تقاربا مطلقا في الفترة المفتوحة (− ٥ ، ٥) وتباعدية خارجها .

مثـال ٢ : جد قيم س التي تجعل المتسلسلة التالية تقاربية تقاربا مطلقا .

$$١ + \frac{١}{!١} س + \frac{١}{!٢} س^{٢} + \cdots + \frac{١}{!ن} س^{ن} + \cdots$$

الحـــل: باستخدام نفس الطريقة التي في المثال (١) نجد ان

$$\text{نهـــا}_{ن \leftarrow \infty} \left| \frac{س^{ن+١}}{!(ن+١)} \times \frac{!ن}{س^{ن}} \right|$$

$$= \text{نهـــا}_{ن \leftarrow \infty} \left| \frac{س}{ن + ١} \right| = ٠$$

وبما ان النهاية اقل من ١ لجميع قيم س ، فيتبع من اختبار النسبة ان المتسلسلة المعطاة تقاربية تقاربا مطلقا لجميع الاعداد الحقيقية .

مثـال ٣ : جد جميع قيم س التي تجعل المتسلسلة $\sum$ ن ! س^{ن} تقاربية .

الحـــل : اذا كانت س ≠ صفرا ، فان

$$\text{نهـــا}_{ن \leftarrow \infty} \left| \frac{(ن+١)!\ س^{ن+١}}{ن!\ س^{ن}} \right|$$

$$= \lim_{ن \to \infty} |(ن + ١) س| = \infty$$

ويتبع من اختبار النسبة ان المتسلسلة تباعدية . وهكذا فان المتسلسلة تقاربية فقط عندما س = صفرا .

سنثبت في (١٢ – ٣٨) ان حلول الامثلة السابقة نموذجية بمعنى انه اذا كانت متسلسلة القوى تقاربية لقيم غير س = ٠ فانها اما ان تكون تقاربية تقاربا مطلقا لجميع الاعداد الحقيقية او تكون تقاربية تقاربا مطلقا في فترة مفتوحة (–ر ، ر) وتباعدية خارج الفترة المغلقة [–ر ، ر] ، وبرهان هذه الحقيقة يعتمد على النظرية التالية :

(١٢ – ٣٧) نظريـــة : (أ) اذا كانت متسلسلة القوى $\sum أ_ن س^ن$ تقاربية لعدد جـ $\neq$ ٠ ، فانها تتقارب تقاربا مطلقا لجميع قيم س حيث | س | < | جـ | .

(ب) اذا كانت متسلسلة القوى $\sum أ_ن س^ن$ تباعدية لعدد

ء $\neq$ ٠ ، فانها تكون تباعدية ايضا لجميع قيم س حيث | س | > | ء | .

البرهـــان : اذا كانت المتسلسلة $\sum أ_ن جـ^ن$ تقاربية ، حيث جـ $\neq$ ٠ ، فان نهـــا $أ_ن جـ^ن$ = ٠ ، وباستخدام (١٢ – ٤) حيث ٤ = ١ ، فانه يوجد عدد صحيح موجب م بحيث ان

| $أ_ن جـ^ن$ | < ١ لجميع قيم ن $\geq$ م .

وهكذا

$$| أ_ن س^ن | = \left| \frac{أ_ن جـ^ن س^ن}{جـ^ن} \right|$$

$$= | أ_ن جـ^ن | \left| \frac{س}{جـ} \right|^ن < \left| \frac{س}{جـ} \right|^ن$$

وذلك اذا كانت $\nu \leq م$. واذا كانت $|س| < |جـ|$ فان $\left|\frac{س}{جـ}\right| < ١$

والمتسلسلة $\sum \left|\frac{س}{جـ}\right|^{\nu}$ متسلسلة هندسية تقاربية . وباستخدام اختبار المقارنة (١٢ – ٢٩) فان المتسلسلة التي نحصل عليها بحذف الـ م حدا الاولى من $\sum أ_{\nu} س^{\nu}$ تكون تقاربية ، ويتبع ذلك ان $\sum أ_{\nu} س^{\nu}$ تقاربية ، وهذا ينهي برهان (أ) .

لبرهان (ب) لنفرض ان المتسلسلة تباعدية لقيمة $س = ء \neq ٠$. فاذا كانت المتسلسلة تقاربية لاي قيمة $جـ_{١}$ حيث ان $|جـ_{١}| > |ء|$ فانه باستخدام (أ) تكون المتسلسلة تقاربية لجميع قيم س حيث $|س| \geq |جـ_{١}|$ ، وبصورة خاصة فانها تقاربية عندما $س = ء$ وهذا مناقض للفرض . وهكذا فان المتسلسلة تباعدية كلما كانت $|س| \leq |ء|$.

(١٢ – ٣٨) نظريـــة : اذا كانت $\sum أ_{\nu} س^{\nu}$ متسلسلة قوى فان واحدا فقط من الخواص التالية يكون صحيحا :

(أ) المتسلسلة تقاربية فقط عندما $س = ٠$ ،

(ب) المتسلسلة تقاربية تقاربا مطلقا لجميع الاعداد الحقيقية س ،

(جـ) يوجد عدد موجب $ر$ حيث تكون المتسلسلة تقاربية تقاربا مطلقا اذا كانت

$|س| < ر$ وتباعدية اذا كانت $|س| > ر$.

البرهـــان : اذا لم يكن (أ) ولا (ب) صحيحا فانه يوجد عددان جـ ، ء ليسا صفرين حيث ان المتسلسلة تقاربية اذا كانت $س = جـ$ ، وتباعدية اذا كانت $س = ء$ لتكن ج مجموعة الاعداد الحقيقية التي تتقارب المتسلسلة عندها تقاربا مطلقا . فحسب (١٢ – ٣٧) ، تكون المتسلسلة تباعدية اذا كانت $|س| > |ء|$ وهكذا فان كل عدد في ج اصغر من $|ء|$. ومن خاصية التمام (١٢ – ١١) فان ج لها اصغر حاصر اعلى $ر$ وينتج من ذلك ان المتسلسلة تقاربية تقاربا مطلقا اذا كانت $|س| < ر$ وتباعدية اذا كانت $|س| > ر$.

اذا كان الجزء (جـ) من (١٢ – ٣٨) صحيحا فان المتسلسلة الاسية $\sum$ $أ_ن س^ن$ تقاربية تقاربا مطلقا في الفترة (– ر ، ر) وتباعدية خارج الفترة [– ر ، ر] ويسمى ر نصف قطر التقارب للمتسلسلة . وقد يحدث تقارب او تباعد عند س = ر او س = – ر وذلك يعتمد على طبيعة المتسلسلة .

وتسمى مجموعة الاعداد التى عندها تكون متسلسلة القوى تقاربية فترة التقارب ، واذا كان نصف قطر التقارب ر > ٠ فان فترة التقارب هي احدى الفترات التالية :

(– ر ، ر) ، (– ر ، ر] ، [– ر ، ر) ، [– ر ، ر]

واذا كان الجزء (أ) او الجزء (ب) من (١٢ – ٣٨) صحيحا ، فان نصف قطر التقارب يرمز له بصفر او ∞ على التوالي . وفترة التقارب في المثال (١) من هذا البند هي (– ٥ ، ٥) ونصف قطر التقارب يساوي ٥ . وفترة التقارب في مثال ٢ هي (– ∞ ، ∞) ونكتب ر = ∞ . وفي المثال (٣) ر = صفراً .

واذا كان جـ عددا حقيقيا فان

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} أ_ن (س - جـ)^ن = أ_٠ + أ_١ (س - جـ) + أ_٢ (س - جـ)^٢ + \cdots + أ_ن (س - جـ)^ن + \cdots \quad (١٢ - ٣٩)$$

تسمى متسلسلة قوى في س – جـ ولتبسيط الحد النوني فاننا نفرض ان (س – جـ)^٠ = ١ حتى ولوكان س = جـ . واذا وضعنا ص = س – جـ فاننا نحصل على متسلسلة قوى في ص هي $\sum$ $أ_ن ص^ن$. ويمكن استخدام فترة التقارب للمتسلسلة الاخيرة لايجاد فترة التقارب للمتسلسلة (١٢ – ٣٩) . فمثلا اذا كانت فترة التقارب للمتسلسلة $\sum$ $أ_ن ص^ن$ هي (– ر ، ر] فانها تقاربية لجميع – ر < ص ≤ ر . وهكذا فان (١٢ – ٣٩) تقاربية كلما كان – ر < س – جـ ≤ ر ، اي الفترة (جـ – ر ، جـ + ر) وتسمى الفترة الاخيرة فترة التقارب للمتسلسلة (١٢ – ٣٩) كما ان ر هو نصف قطر تقاربها .

مثـال ٤ : أوجد فترة التقارب للمتسلسلة :

$$١ - \frac{١}{٢}(س - ٣) + \frac{١}{٣}(س - ٣)^{٢} + \cdots$$

$$+ (-١)^{ن}(س - ٣)^{ن} + \cdots$$

الحـــل : اذا وضعنا ب = $(-١)^{ن}(س - ٣)^{ن}/(ن + ١)$ فان

$$\left| \frac{ب_{ن+١}}{ب_{ن}} \right|_{\text{نهـا}_{ن \to \infty}}$$

$$= \text{نهـا}_{ن \to \infty} \left| \frac{(س - ٣)^{ن+١}}{ن + ٢} \times \frac{ن + ١}{(س - ٣)^{ن}} \right|$$

$$= \text{نهـا}_{ن \to \infty} \left| (س - ٣) \frac{ن + ١}{ن + ٢} \right| = |س - ٣|$$

ويتبع من اختبار النسبة ان المتسلسلة تقاربية تقاربا مطلقا اذا كان $|س - ٣| < ١$ ، أي أن $-١ < س - ٣ < ١$ أو $٢ < س < ٤$. فالمتسلسلة تباعدية اذا كانت $س < ٢$ أو $س > ٤$. ويجب اختبار العددين ٢ ، ٤ كلاً على حدة . فاذا كانت س = ٤ فان المتسلسلة الناتجة هي :

$$١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \cdots + (-١)^{ن-١} \frac{١}{ن + ١} + \cdots$$

وهي متسلسلة متناوبة تقاربية وذلك من اختبار المتسلسلات المتناوبة .

وعندما س = ٢ فان المتسلسلة الناتجة هي

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \cdots + \frac{١}{ن + ١} + \cdots$$

وهي المتسلسلة التوافقية التباعدية وهكذا فان فترة التقارب هي (٢ ، ٤] .

تمارين :

أوجد فترة التقارب لكل من المتسلسلات القوى في التمارين ١ – ٢٠ :

١ . $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{س^{ن}}{ن + ٤}$

٢ . $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{ن! \, س^{ن}}{ن^{٢} + ٤}$

٣ . $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{ن^{٢} \, س^{ن}}{٢^{ن}}$

٤ . $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(-٣)^{ن} \, س^{ن+١}}{ن}$

٥ . $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{(-١)^{ن-١} \, س^{ن}}{\sqrt{ن}}$

٦ . $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{س^{ن}}{لط (ن + ١)}$

٧ . $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{ن! \, س^{ن}}{١٠٠^{ن}}$

٨ . $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(٣ن)! \, س^{ن}}{(٢ن)!}$

٩. $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{س^{٢ن+١}}{(-٤)^{ن}}$

١٠. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{(-١)^{ن-١} \, س^{ن}}{\sqrt[٣]{ن} \times ٣^{ن}}$

١١. $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{٤^{ن} \times س^{٢ن}}{(٢ن)!}$

١٢. $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{١٠^{ن} \times س^{ن}}{ن!}$

١٣. $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{٣^{٢ن} \, (س-٢)^{ن}}{ن+١}$

١٤. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{(س-٥)^{ن}}{ن^{-١} \times ٥^{ن}}$

١٥. $\sum \frac{ن^{٢} \, (س+٤)^{ن}}{ن^{٣}_{٢}}$

١٦. $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(س+٣)^{ن}}{ن^{٢}+١}$

١٧. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{\text{لط } ن}{ن^{e}} \, (س - e)^{ن}$

١٨. $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{ن^{٢} \, (س-١)^{ن}}{٣^{ن^{٢}}-١}$

١٩. $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(-١)^{ن} (٢س-١)^{ن}}{٦ن \times ن}$

٢٠. $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(٣س+٤)^{ن}}{\sqrt{٣ن+٤}}$

٧ ــ تفاضل وتكامل متسلسلات القوى :

يمكن استخدام متسلسلة القوى $\sum أ_ن س^ن$ لتعريف اقتران ه مجاله ج هو فترة التقارب للمتسلسلة . وبصورة خاصة فانه لكل س في ج فاننا نضع ه (س) تساوي مجموع المتسلسلة ، اي ان :

(١٢-٤٠) ق (س) = $أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + ... + أ_ن س^ن + ...$ وهذه يمكن التعبير عنها بالقول ان المتسلسلة الاسية $\sum أ_ن س^ن$ تمثل الاقتران ه (س) . ولشرح ذلك . اذا كان |س| < ١ فان

(١٢-٤١) $\frac{١}{١ + س} = ١ - س + س^٢ - س^٣ + ... + (-١)^ن س^ن + ...$

حيث انه باستخدام (١٢ - ١٧) فان هذه المتسلسلة الهندسية تقاربية ومجموعها $\frac{١}{١ + س}$. وهكذا فان $\sum (-١)^ن س^ن = \frac{١}{١ + س}$ هي متسلسلة قوى تمثل الاقتران ق (س) = $\frac{١}{١ + س}$.

والاقتران ق المعرف في (١٢ - ٤٠) له خواص شبيهة بخواص الحدوديات وبصورة خاصة يمكن اثبات ان الاقتران متصل وله مشتقة تفاضلية تمثل بمتسلسلة قوى يمكن الحصول عليها بتفاضل حدود المتسلسلة المعطاة . ويمكن ايجاد التكاملات المحدودة للاقتران ق بتكامل كل حد في المتسلسلة . والنظرية التالية التي نضع نصها بدون برهان تلخص هذه الخصائص التي ناقشناها .

(١٢-٤٢) نظرية : اذا كان لمتسلسلة القوى $\sum$ $أ_ن س^ن$ نصف قطر تقارب $ر$ لا يساوي صفرا ، واذا عرفنا الاقتران $ق$ بالقاعدة

$$ق(س) = أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + \cdots + أ_ن س^ن + \cdots$$

فانه لكل س في الفترة $(-ر ، ر)$:

(أ) $ق$ متصل عند س .

(ب) $ق$ قابل للتفاضل عند س حيث

$$ق'(س) = أ_١ + ٢ أ_٢ س + ٣ أ_٣ س^٢ + \cdots + ن أ_ن س^{ن-١} + \cdots ،$$

$$(جـ) \int_{٠}^{س} ق(ت)\,د ت = أ_٠ س + \frac{١}{٢} أ_١ س^٢ + \frac{١}{٣} أ_٢ س^٣ + \cdots + \frac{١}{ن+١} أ_ن س^{ن+١} + \cdots$$

مثال ١ : أوجد تمثيلا بمتسلسلة قوى للاقتران

$$ق(س) = \frac{١}{(١ + س)^٢}$$

الحل : اذا فاضلنا كل حد من المتسلسلة (١٢ – ٤١) فانه ينتج من (١٢ – ٤٢)

$$\frac{-١}{(١ + س)^٢} = -١ + ٢ س - ٣ س^٢ + \cdots + (-١)^ن ن س^{ن-١} + \cdots$$

حيث $|س| < ١$ ، ومنه

$$\frac{١}{(١ + س)^٢} = ١ - ٢ س + ٣ س^٢ - \cdots + (-١)^{ن+١} ن س^{ن-١} + \cdots$$

ويمكن استخدام اختبار النسبة لاثبات ان نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى التي حصلنا عليها ، بالتفاضل في المثال (١) ، يساوي ١ ، وهو نفس

نصف قطر التقارب للمتسلسلة الاولى (١٢ – ٤١) . ويمكن اثبات ان نصف قطر التقارب هذا لا يتغير في اي من الحالتين (ب) ، (جـ) من النظرية (١٢ – ٤٢) .

مثـال ٢ : أوجد تمثيلا بمتسلسلة قوى للاقتران لط (١ + س) واستخدمها لحساب لط (١ , ١) لخمس منازل عشرية .

الحـــل : اذا كان | س | < ١ ، فان

$$\text{لط } (١ + س) = \int_{٠}^{س} \frac{١}{١ + ت} \, د ت$$

وباستخدام (١٢ – ٤٢) جـ في (١٢ – ٤١) نحصل على

$$\text{لط } (١ + س) = س - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} - \cdots +$$

$$(-١)^{ن} \frac{س^{ن+١}}{ن + ١} + \cdots$$

وبتعويض ١ , ٠ بدل س :

$$\text{لط } (١ , ١) = ١ , ٠ - \frac{(١ , ٠)^{٢}}{٢} + \frac{(١ , ٠)^{٣}}{٣} - \frac{(١ , ٠)^{٤}}{٤} + \frac{(١ , ٠)^{٥}}{٥} - \cdots$$

$$= ١ , ٠ - ٠ , ٠٠٥ + ٠ , ٠٠٠٣٣٣ - ٠ , ٠٠٠٠٢٥ + ٠ , ٠٠٠٠٠٢ +$$

واذا جمعنا الحدود الاربعة الاولى وقربنا لخمس منازل عشرية فان

$$\text{لط } (١ , ١) \approx ٠ , ٠٩٥٣١$$

وباستخدام (١٢ – ٣٢) فان الخطأ اقل من ٠ , ٠٠٠٠٠٢ وهو القيمة

العددية للحد الخامس ، وهكذا فان العدد ٠,٠٩٥٣١ صحيح لاقرب خمس منازل عشرية . ويجب على القاريء مقارنة هذا الحل بالحل الذي تقدم في المثال (٢) من البند ٥ من الفصل الحادي عشر.

مثـال ٣ : أوجد تمثيلا بمتسلسلة قوى للاقتران قو ظا س .

الحـــل : نلاحظ اولا ان

$$\text{قو ظا س} = \int_{0}^{\text{س}} \frac{1}{1 + \text{ت}^2} \, \text{د ت}$$

ثم نلاحظ انه لكل | س | < ١ ، فانه باستخدام (١٢ – ١٧)

$$\frac{1}{1 + \text{س}^2} = 1 - \text{س}^2 + \text{س}^4 - \cdots + (-1)^{\text{ن}} \text{س}^{2\text{ن}} + \cdots$$

وباستخدام (جـ) من (١٢ – ٤٢) يمكن تكامل كل حد لنحصل على

$$\text{قو ظا س} = \text{س} - \frac{\text{س}^3}{3} + \frac{\text{س}^5}{5} - \cdots + (-1)^{\text{ن}} \frac{\text{س}^{2\text{ن}+1}}{2\text{ن}+1} + \cdots$$

ويمكن الحصول على نتائج مشابهة لتمثيل الاقترانات بمتسلسلات قوى على الصورة $\sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{أ}_{\text{ن}} (\text{س} - \text{جـ})^{\text{ن}}$. وبصورة خاصة فانه يمكن اثبات نظرية شبيهة بالنظرية (١٢ – ٤٢) . وفي البند القادم سنعالج طريقة عامة لايجاد تمثيل للاقترانات بمتسلسلات قوى

تمارين :

أوجد تمثيلا بمتسلسلات قوى للعبارات في التمارين ١ – ١٠ :

١. ١ / (١ – س) ٢. ١ / (١ + س^2)

٣. $١ / (١ + س)^{٢}$ ٤. $١ / (١ - ٤س)$

٥. $س^{٢} / (١ - س^{٢})$ ٦. $س / (١ - س^{٤})$

٧. $س / (٢ - ٣س)$ ٨. $س^{٣} / (٤ - س^{٣})$

٩. $(س^{٢} + ١) / س - ١)$ ١٠. $٣ / (٢س + ٥)$

١١. اثبت ان

$$\text{لط}\,(١ - س) = \sum_{ن=١}^{\infty} \frac{-س^{ن}}{ن}$$ ، اذا كانت $|س| < |$

واستخدم هذه الحقيقة لتقريب لط (١,٢) لثلاث منازل عشرية .

١٢. استخدم المثال (٣) لتثبت ان مجموع المتسلسلة

$$\sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} / (٢ن + ١)\,٣^{ن} / ٢^{ن}$$ هو $\frac{\pi}{٦}$

استخدم المتسلسلات اللانهائية لتقريب كل من التكاملات في التمارين ١٣ - ١٦ لاربع منازل عشرية :

١٣. $\int_{٠}^{١/٣} \frac{١}{١ + س^{٦}}$ ء س

١٤. $\int_{٠}^{١/٢}$ قوظا $س^{٢}$ ء س

١٥. $\int_{٠}^{١,٠} \frac{\text{قوظا } س}{س}$ ء س

١٦. $\int_{٠}^{٠,٢} \frac{س^{٣}}{١ + س^{٥}}$ ء س

١٧ . استخدم تمثيل العبارة $\frac{١}{١ - س^{٢}}$ بمتسلسلة قوى لايجاد متسلسلة قوى تمثل

$$\frac{٢ س}{(١ - س^{٢})^{٢}} .$$

١٨ . استخدم طريقة المثال (٢) لايجاد تمثيل للاقتران لط (٣ + ٢ س) بمتسلسلة قوى

٨ — متسلسلات تايلور وماكميلان :

لنفرض ان الاقتران ن معرف بالقاعدة :

$$ن (س) = \sum_{ن=١}^{\infty} أ_{ن} (س - جـ)^{ن} ، \quad (١٢-٤٣)$$

حيث مجال ق هو الفترة المفتوحة ج التي تحتوي على جـ . وكما في البند السابق يمكن ايجاد تمثيل بمتسلسلات قوى لكل من ق (س) ، فبتفاضل حدود المتسلسلة (١٢ – ٤٣) ينتج :

$$ن' (س) = \sum_{ن=١}^{\infty} ن أ_{ن} (س - جـ)^{ن-١}$$

$$ن'' (س) = \sum_{ن=٢}^{\infty} ن (ن - ١) أ_{ن} (س - جـ)^{ن-٢}$$

$$ن''' (س) = \sum_{ن=٣}^{\infty} ن (ن - ١) (ن - ٢) أ_{ن} (س - جـ)^{ن-٣}$$

ولكل عدد صحيح موجب ك

$$ن^{(ك)} (س) = \sum_{ن=ك}^{\infty} ن (ن - ١) \cdots (ن - ك + ١) أ_{ن} (س - جـ)^{(ن-ك)}$$

وعلاوة على ذلك فان كل متسلسلة نحصل عليها بهذه الطريقة لها نفس نصف قطر تقارب المتسلسلة (١٢ – ٤٣) . وبتعويض جـ بدل س في كل من هذه المتسلسلات نحصل على ق (جـ) = $أ_{٠}$ ، ق (جـ) = $أ_{١}$ ، ق′ (جـ) = ٢ $أ_{٢}$ ، ولكل عدد صحيح موجب ن ، $ق^{(ن)}$ (جـ) = ن ! × $أ_{ن}$ أو

$$أ_{ن} = \frac{ق^{(ن)}(جـ)}{ن!} \quad ، \quad ن = ١ ، ٢ ، \cdots$$

والنتيجة ان (١٢ – ٤٣) يمكن كتابتها على الصورة :

$$ق(س) = ق(جـ) + ق'(جـ)(س - جـ) \quad (١٢-٤٤)$$

$$+ \frac{ق''(جـ)}{٢!}(س - جـ)^{٢} + \cdots$$

$$+ \frac{ق^{(ن)}(جـ)}{ن!}(س - جـ)^{ن} + \cdots$$

وتسمى المتسلسلة الاخيرة متسلسلة تايلور للاقتران ق عند جـ . وهكذا اثبتنا انه اذا كان للاقتران ق تمثيل بمتسلسلة قوى على الصورة (١٢ – ٤٣) فانها تكون متسلسلة تايلور . والحالة الخاصة عندما جـ = صفرا ، اي

$$ق(س) = ق(٠) + ق'(٠)س + \frac{ق''(٠)}{٢!}س^{٢} + \cdots$$

$$+ \frac{ق^{(ن)}(٠)}{ن!}س^{ن} + \cdots$$

تسمى متسلسلة ماكلورين للاقتران ق (س) . والمتسلسلات التي حصلنا عليها في الامثلة ١ – ٣ من البند السابق هي متسلسلات ماكلورين .

والمجموع الجزئي النوني للمتسلسلة (١٢ – ٤٤) هو حدودية تايلور من الدرجة

النونية $ح_ن$ (س) للاقتران ق عند جـ . (انظر (١١ – ٢٧)) . وكذلك باستخدام (١١ – ١٩) ،

(١٢–٤٦) $$خ_ن \ (س) = ه \ (س) - ب_ن \ (س)$$

حيث

(١٢–٤٧) $$ب_ن \ (س) = \frac{ه^{(ن+١)} \ (ع)}{(ن+١)!} \ (س - جـ)^{ن+١}$$

حيث ع عدد بين جـ و س .

والنظرية التالية تعطينا الشروط الكافية لكي يوجد للاقتران ه تمثيل بمتسلسلة قوى

(١٢–٤٨) نظرية : اذا كان للاقتران ه مشتقات تفاضلية من جميع الرتب في الفترة المفتوحة ت المحتوية على جـ وكانت

$$\text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} \ ب_ن \ (س) = \text{صفرا} .$$

لكل س في الفترة ت . فان للاقتران ق تمثيل بمتسلسلة تايلور (١٢ – ٤٤) في ت .

البرهـــان : بما ان $ح_ن$ (س) المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة (١٢ – ٤٤) فانه باستخدام (١٢ – ٤٦)

$$\text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} \ ح_ن (س) = ه \ (س) - \text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} \ ب_ن \ (س) = ه \ (س)$$

لجميع قيم س في ت . وهذا ينهي برهان النظرية .

اثبتنا في المثال (٢) من البند (٦) ان متسلسلة القوى $\sum \frac{س^ن}{ن!}$ تقاربية تقاربا مطلقا لجميع الاعداد الحقيقية ، وينتج من (١٢ – ١٨) ان

(١٢–٤٩) $$\text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} \left| \frac{س^ن}{ن!} \right| = \text{صفرا}$$

لجميع الاعداد س . وسنستخدم هذه الحقيقة في حل المثال التالي

مثـال ١ : أوجد متسلسلة ماكلورين للاقتران حا س وبرهن انها تمثل حا س لجميع قيم س .

الحـــل : نبدأ بترتيب الحل كالتالي :

$$\text{ب}(\text{س}) = \text{حا س} \qquad \text{ب}(٠) = ٠$$
$$\text{ب}'(\text{س}) = \text{جتا س} \qquad \text{ب}'(٠) = ١$$
$$\text{ب}''(\text{س}) = -\text{حا س} \qquad \text{ب}''(٠) = ٠$$
$$\text{ب}'''(\text{س}) = -\text{جتا س} \qquad \text{ب}'''(٠) = -١$$

والمشتقات التالية تتبع نفس هذا النمط . والتعويض في (١٢ – ٤٥) يعطينا متسلسلة ماكلورين .

$$\text{حا س} = \text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{!٣} + \frac{\text{س}^{٥}}{!٥} - \cdots$$
$$+ (-١)^{\text{ن}} \frac{\text{س}^{٢\text{ن}+١}}{!(٢\text{ن}+١)} + \cdots \quad (١٢ - ٥٠)$$

وحتى هذه اللحظة كل ما حصلنا عليه هو انه اذا كانت حا س ممثلة بمتسلسلة قوى فانها تعطي بالصيغة (١٢ – ٥٠) . ولاثبات ان هذا التمثيل صحيح لكل س سنستخدم (١٢ – ٤٨) . فاذا كان ن عددا صحيحا موجبا ، فان :

$$|\text{ب}^{(\text{ن}+١)}(\text{س})| = |\text{جتا س}| \text{ أو } |\text{ب}^{(\text{ن}+١)}(\text{س})| = |\text{حا س}|$$

ومنه نجد ان $|\text{ق}^{(\text{ن}+١)}(\text{س})| \leq ١$ لكل عدد حقيقي س .

وباستخدام (١٢ – ٤٧) حيث جـ = صفرا نجد ان

$$|\text{ب}_{\text{ن}}(\text{س})| = \left|\frac{\text{ق}^{(\text{ن}+١)}(\text{ع})}{!(\text{ن}+١)}\right| |\text{س}^{\text{ن}+١}| \leq \frac{|\text{س}|^{\text{ن}+١}}{!(\text{ن}+١)}$$

ويتبع من (١٢ – ٤٩) ، (١٢ – ٨) ان $\lim_{ن \to \infty} |ب_ن (س)| = ٠$

ومنه نجد ان تمثيل حا س بمتسلسلة ماكلورين (١٢ – ٥٠) هو تمثيل حقيقي لجميع قيم س .

مثـال ٢ : أوجد متسلسلة ماكلورين للاقتران حتا س .

الحـــل : يمكننا ايجاد المتسلسلة مباشرة كما في المثال (١) ، ولكننا سنحصل على المتسلسلة المطلوبة بتفاضل (١٢ – ٥٠)

$$\text{(١٢–٥١)} \quad \text{جتا س} = ١ - \frac{س^{٢}}{٢\ !} + \frac{س^{٤}}{٤\ !} - \cdots$$

$$+ (-١)^{ن} \frac{س^{٢ن}}{(٢ن)\ !} + \cdots$$

ويمكن الحصول على هذه المتسلسلة بتكامل حدود (١٢ – ٥٠) .

مثـال ٣ : أوجد تمثيلا للاقتران $e^{س}$ بمتسلسلة ماكلورين لجميع الاعداد الحقيقية

الحـــل : اذا كان $ب_ن (س) = e^{س}$ فان $ب_ن^{(ن)} (س) = e^{س}$ لكل عدد صحيح موجب ن . وهكذا فان $ب_ن^{(ن)} (٠) = ١$ وبالتعويض في (١٢ – ٤٥) نجد ان

$$\text{(١٢–٥٢)} \quad e^{س} = ١ + س + \frac{س^{٢}}{٢\ !} + \cdots + \frac{س^{ن}}{ن\ !} + \cdots$$

وكما في مثال (١) نستخدم (١٢ – ٤٨) للبرهان على ان هذه المتسلسلة تمثل

الاقتران $e^{س}$ تمثيلا حقيقيا لكل عدد س . فباستخدام (١٢ – ٤٧)
حيث جـ = ٠

$$ب_{ن}(س) = \frac{e^{ع}}{(ن+١)!} \; س^{ن+١}$$

حيث ع عدد بين س ، صفر . واذا كان . < س فان $e^{ع} < e^{س}$ وهكذا لكل عدد صحيح ن

$$٠ < ب_{ن}(س) < \frac{e^{س} \; س^{ن+١}}{(ن+١)!}$$

وباستخدام (١٢ – ٤٩)

$$\text{نهـا}_{ن \to \infty} \frac{e^{س} \; س^{ن+١}}{(ن+١)!} = e^{س} \; \text{نهـا}_{ن \to \infty} \frac{س^{ن+١}}{(ن+١)!} = ٠ \quad .$$

ومن (١٢ – ٨) ينتج ان

$$\text{نهـا}_{ن \to \infty} ب_{ن}(س) = ٠$$

واذا كان س < . فان ع < . ايضا ومنه $e^{ع} < ١$ وهكذا فان

$$٠ < |ب_{ن}(س)| < \left| \frac{س^{ن+١}}{(ن+١)} \right|$$

ونجد ان نهاية $ب_{ن}(س)$ هي الصفر عندما تزداد ن بدون حصر . ويتبع من (١٢ – ٤٨) ان تمثيل $e^{س}$ بالمتسلسلة (١٢ – ٥٢) صحيح لجميع قيم س غير الصفر . ومن ملاحظة انه عندما س = ٠ فان (١٢ – ٥٢) تصبح $e^{٠} = ١$. وهكذا فان التمثيل صحيح لجميع قيم س .

مثـال ٤ : أوجد متسلسلة تايلور للاقتران حا س في قوى (س − $\frac{\pi}{٦}$) .

الحـــل : تجد مشتقات ن (س) = حا س في المثال (١) . وعند ايجاد قيمها عند $\frac{\pi}{٦}$ تكون النتائج : ن ($\frac{\pi}{٦}$) = $\frac{١}{٢}$ ، ن ($\frac{\pi}{٦}$) = $\sqrt{٣} / ٢$ ،

ن″ ($\frac{\pi}{٦}$) = − $\frac{١}{٢}$ ، ق‴ ($\frac{\pi}{٦}$) = − $\sqrt{٣} / ٢$

ثم يعيد هذا الترتيب من الاعداد الاربعة نفسه . وبالتعويض في (١٢ − ٤٤) نجد ان :

$$\text{حا س} = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}(\text{س} - \frac{\pi}{٦}) - \frac{١}{٢(٢!)}(\text{س} - \frac{\pi}{٦})^{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢(٣!)}(\text{س} - \frac{\pi}{٦})^{٣} + \cdots$$

والحد العام $أ_{ج}$ لهذه المتسلسلة معطى بالصورة

$$أ_{ج} = \begin{cases} (-١)^{ج/٢} \frac{١}{٢(ج!)}(\text{س} - \frac{\pi}{٦})^{ج} & \text{اذا كانت ج} = ٠ ، ٢ ، ٤ ، \cdots \\ (-١)^{(ج-١)/٢} \frac{١}{٢(ج!)}(\text{س} - \frac{\pi}{٦})^{ج} & \text{اذا كانت ج} = ١ ، ٣ ، ٥ ، \cdots \end{cases}$$

وبرهان ان هذه المتسلسلة تمثل حا س لجميع قيم س مماثل لذلك الذي اعطي في المثال (١) .

ويمكن استخدام المتسلسلات المعطاة في هذا البند للحصول على متسلسلات قوى تمثل اقترانات اخرى . ولشرح ذلك ، بما ان (١٢ − ٥٢) صحيح لجميع قيم س ، فان تمثيلا للاقتران $e^{-س^{٢}}$ بمتسلسلة قوى يمكن الحصول عليه بوضع (− س^{٢}) بدلا من س . وهذا يعطينا

$$e^{-س^2} = 1 - س^2 + \frac{س^4}{2} - \cdots + (-1)^{ن} \frac{س^{2ن}}{ن!} + \cdots \quad (١٢-٥٣)$$

وبالمثل

$$e^{-س} = 1 - س + \frac{س^2}{2!} - \cdots + (-1)^{ن} \frac{س^{ن}}{ن!} + \cdots \quad (١٢-٥٤)$$

وبما ان جتا ز س $= \frac{1}{2}(e^{س} + e^{-س})$ ، يمكن ايجاد متسلسلة قوى تمثل الاقتران جتا ز س بجمع الحدود المتناظرة للمتسلسلين (١٢ – ٥٢) ، (١٢ – ٥٤) ثم الضرب في $\frac{1}{2}$. وهكذا فان

$$\text{جتا ز س} = 1 + \frac{س^2}{2!} + \frac{س^4}{4!} + \cdots + \frac{س^{2ن}}{(2ن)!} + \cdots \quad (١٢-٥٥)$$

ومن المفيد مقارنة هذه المتسلسلة مع المتسلسلة (١٢ – ٥١) الممثلة للاقتران جتا س . وهناك امثلة اخرى تركت كتمارين .

ويمكن استخدام متسلسلات تايلور وماكلورين لتقريب قيم الاقترانات بطريقة مشابهة لتلك التي استخدمت في البند السابق ، مثل ايجاد حا (١ ، ٠) والتي نستخدم (١٢ – ٥٠) لايجادها :

$$\text{حا}(١,٠) = ١,٠ - \frac{٠,٠٠١}{٦} + \frac{٠,٠٠٠٠١}{١٢٠} - \cdots$$

وباستخدام (١٢ – ٣٢) فان الخطأ المتضمن عند استخدام مجموع الحدين الاولين اقل من $\frac{٠,٠٠٠٠١}{١٢٠}$. وبصورة عامة فاننا نحصل على الحدودية التالية كصيغة للتقريب

$$\text{حا س} \approx \text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٦}$$

والخطأ اقل من $\frac{|\ \text{س}^{٥}\ |}{!\ ٥}$

ويوضح لنا المثال التالي استخدام المتسلسلات اللانهائية لتقريب قيم التكاملات المحدودة .

مثال ٥ : $\int_{٠}^{١}$ حا $\text{س}^{٢}$ ء س لاربع منازل عشرية

الحل : من (١٢ – ٥٠)

$$\text{حا س}^{٢} = \text{س}^{٢} - \frac{\text{س}^{٦}}{!\ ٣} + \frac{\text{س}^{١٠}}{!\ ٥} - \frac{\text{س}^{١٤}}{!\ ٧} + \cdots$$

وبتكامل كل حد من المتسلسلة نجد ان

$$\int_{٠}^{١} \text{حا س}^{٢}\ \text{ء س} = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤٢} + \frac{١}{١٣٢٠} - \frac{١}{٧٥٦٠٠} + \cdots$$

وبجمع الحدود الثلاثة الاولى

$$\int_{٠}^{١} \text{حا س}^{٢}\ \text{ء س} \approx = ٠,٣١٠٣$$

والخطأ أقل من القيمة المطلقة للحد التالي $\frac{١}{٧٥٦٠٠} \approx ٠,٠٠٠٠١٣$

لاحظ اننا حققنا الدقة في المثال السابق لاربع منازل عشرية بجمع ثلاثة حدود فقط من المتسلسلة التي حصلنا عليها بتكامل حا $س^{٢}$. ولتحقيق هذه الدقة باستخدام قانون شبه المنحرف او قانون سمبسون للتكامل يلزمنا استخدام تجزئة دقيقة للفترة [٠ ، ١] . وحتى لو استخدمنا الحاسب الالي فانه يلزم زمن اطول لحساب التكامل العددي من الزمن اللازم لجمع الحدود الثلاثة الاولى للمتسلسلة . وهذا يظهر وجهة نظر مهمة وهي انه للتطبيقات العددية ، بالاضافة لتحليل المسألة يجب النظر الى افضل طريقة لحساب الاجابة .

تمارين :

استخدم (١٢ – ٤٥) ، (١٢ – ٤٨) لايجاد متسلسلات ماكلورين لكل من التمارين ١ – ٤ ، وبرهن ان المتسلسلة تمثل الاقتران لجميع قيم س .

١ . حتا س ٢ . $e^{-س}$

٣ . $e^{٢س}$ ٤ . جتا ز س

أوجد متسلسلات ماكلورين لكل من التمارين ٥ – ١٢ وعين نصف قطر التقارب :

٥ . $س^{٢} e^{س}$ ٦ . $س e^{-٢س}$

٧ . جا ز س ٨ . (جا س) / س

٩ . س جا ٣ س ١٠ . جتا $س^{٢}$

١١ . جتا^{٢} س (ملاحظة : استخدم جتا^{٢} س = (١ + جتا ٢س) / ٢)

١٢ . جا^{٢} س

١٣ . أوجد تمثيلا للاقتران $e^{٢س}$ بمتسلسلة في قوى (س + ١) .

١٤ . أوجد تمثيلا للاقتران لط س بمتسلسلة في قوى (س – ١) .

في التمرينين ١٥ ، ١٦ أوجد الحدود الاربعة الاولى في متسلسلة تايلور للعبارة المعطاة عند القيمة المعطاة لـ جـ .

١٥. قا س ، جـ = $\frac{\pi}{٣}$.

١٦. ظا س ، جـ = $\frac{\pi}{٤}$.

قرب كلا من التمارين ١٧ – ٢٠ لاربع منازل عشرية :

١٧. $\sqrt{e}$ ١٨. حا ١°

١٩. $\int_{0}^{1} e^{-س^{٢}}$ د س ٢٠. $\int_{0}^{١/٢}$ س جتا س^{٣} د س

٩ — متسلسلات ذات الحديـــن :

تنص نظرية ذات الحدين على انه اذا كان ك عددا صحيحا موجبا فانه لكل عددين أ ، ب

$$(أ + ب)^{ك} = أ^{ك} + أ^{ك-١}\,ب + \frac{ك\,(ك-١)}{٢!}\,أ^{ك-٢}\,ب^{٢} + \cdots$$

$$+ \frac{ك\,(ك-١)\cdots(ك-ن+١)}{ن!}\,أ^{ك-ن}\,ب^{ن}$$

$$+ \cdots + ب^{ك}$$

فاذا وضعنا أ = ١ ، ب = س فان

$$(١ + س)^{ك} = ١ + ك\,س + \frac{ك\,(ك-١)}{٢}\,س^{٢} + \cdots \qquad (١٢-٥٦)$$

$$+ \frac{(ك-١) \cdots (ك - ن + ١)}{ن !} س^{ن} + \cdots + س ك$$

وذلك لكل عدد صحيح موجب ك ، (أو صفر) . ومن المفيد دراسة متسلسلة القوى

$$\sum أ_{ن} س^{ن} \text{ حيث } أ_{.} = ١ ،$$

$$أ_{ن} = \frac{ك (ك - ١) \cdots (ك - ن + ١)}{ن !} \quad \text{عندما } ن \geq ١ . \text{ وهذه المتسلسلة}$$

تأخذ الصورة :

$$(٥٧-١٢) \qquad ١ + ك س + \frac{ك (ك - ١)}{٢ !} س^{٢} + \cdots$$

$$+ \frac{ك (ك-١) \cdots (ك - ن + ١)}{ن !} س^{ن}$$

$$+ \cdots$$

وتسمى متسلسلة ذات الحدين . فاذا كان ك عددا صحيحا غير سالب فان (١٢ – ٥٧) تصبح مجموعا منتهيا (١٢ – ٥٦) . والا فان المتسلسلة ذات الحدين لا تنتهي . وسنترك اثبات التالي كتمرين :

$$(٥٨-١٢) \qquad \text{نهـا}_{ن \to \infty} \left| \frac{أ_{ن+١} س^{ن+١}}{أ_{ن} س^{ن}} \right| = \text{نهـا}_{ن \to \infty} \left| \frac{ن - ك}{ن + ١} \right| \cdot |س|$$

$$= |س|$$

وهكذا باستخدام اختبار النسبة نجد ان (١٢ – ٥٧) تقاربية تقاربا مطلقا لجميع قيم س| < ١| وتباعدية اذا كان |س| > ١ . وهكذا تمثل المتسلسلة ذات الحدين اقترانا ق حيث :

$$\text{ب}(\text{س}) = \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \text{أ}_{\text{ن}}\, \text{س}^{\text{ن}} \quad ، \text{ اذا كان } |\text{س}| < 1 .$$

فاذا كان ك عددا صحيحا غير سالب فان $\text{ب}(\text{س}) = (1 + \text{س})^{\text{ك}}$ وسنثبت ان نفس الشيء صحيح لكل عدد حقيقي ك. ولان ب (س) معطى بالصورة (١٢ – ٥٧) فان

$$\text{ب}(\text{س}) = 1 + \text{ك}\,\text{س} + \frac{\text{ك}(\text{ك}-1)}{2!}\text{س}^2 + \cdots + \frac{\text{ك}(\text{ك}-1)\cdots(\text{ك}-\text{ن}+1)}{\text{ن}!}\text{س}^{\text{ن}} + \cdots$$

وهكذا فان

$$\text{س}\,\text{ب}'(\text{س}) = \text{ك}\,\text{س} + \text{ك}(\text{ك}-1)\text{س}^2 + \cdots + \frac{\text{ن}\,\text{ك}(\text{ك}-1)\cdots(\text{ك}-\text{ن}+1)}{\text{ن}!}\text{س}^{\text{ن}} + \cdots$$

فاذا جمعنا الحدود المتناظرة في كل من المتسلسلتين الاخيرتين نجد أن معامل $\text{س}^{\text{ن}}$ هو :

$$\frac{(\text{ن}+1)\,\text{ك}(\text{ك}-1)\cdots(\text{ك}-\text{ن})}{(\text{ن}+1)!} + \frac{\text{ن}\,\text{ك}(\text{ك}-1)\cdots(\text{ك}-\text{ن}+1)}{\text{ن}!}$$

الذي يمكن تبسيطه الى :

$$\left(\frac{\text{ك (ك − ١) ... (ك − ن + ١)}}{\text{ن !}} \right) [\text{ن} + (\text{ن} - \text{ك})]$$

$$= \text{ك}^{\text{ن}+١}$$

والنتيجة ان

$$\text{ب}'(\text{س}) + \text{س}\ \text{ب}'(\text{س}) = \sum_{\text{ن}=٠}^{\infty} \text{ك}^{\text{ن}+١}\ \text{س}^{\text{ن}} = \text{ك}\ \text{ب}(\text{س})$$ وهكذا

$$\text{ب}'(\text{س})\ (١ + \text{س}) - \text{ك}\ \text{ب}(\text{س}) = \text{صفرا}$$

فاذا عرفنا الاقتران ف بالقاعدة ف (س) $= \frac{\text{ب}(\text{س})}{(١ + \text{س})^{\text{ك}}}$، فان

$$\text{ف}'(\text{س}) = \frac{(١ + \text{س})^{\text{ك}}\ \text{ب}'(\text{س}) - \text{ك}\ \text{ب}(\text{س})\ (١ + \text{س})^{\text{ك}-١}}{(١ + \text{س})^{٢\text{ك}}}$$

$$= \frac{(١ + \text{س})\ \text{ب}'(\text{س}) - \text{ك}\ \text{ب}(\text{س})}{(١ + \text{س})^{\text{ك}+١}}$$

وباستخدام (٤ − ٣٤) فان ف$'$ (س) = جـ حيث جـ ثابت اي أن

$$\text{جـ} = \frac{\text{ب}(\text{س})}{(١ + \text{س})^{\text{ك}}}$$

وبما ان ب (٠) = ١ ، فيتبع ان جـ = ١ وهكذا فان ب (س) = $(١ + \text{س})^{\text{ك}}$ وهذه هي النتيجة المطلوبة . ولتلخيص ما سبق : اذا كان |س| < ١ فان

$$(١ + \text{س})^{\text{ك}} = ١ + \text{ك س} + \frac{\text{ك (ك − ١)}}{٢\ !}\ \text{س}^{٢} + \cdots \quad (\textbf{١٢-٥٩})$$

$$\frac{ك\,(ك-١)\cdots(ك-ن+١)}{ن!}س^{ن}+\cdots$$

لكل عدد حقيقي ك.

مثـال ١ : أوجد متسلسلة قوى تمثل $\sqrt[٣]{١+س}$.

الحـــل : باستخدام (١٢ - ٥٩) بحيث $ك=\frac{١}{٣}$

$$\sqrt[٣]{١+س}=١+\frac{١}{٣}س+\frac{\frac{١}{٣}\left(\frac{١}{٣}-١\right)}{!٢}س^{٢}+$$

$$\frac{\frac{١}{٣}\left(\frac{١}{٣}-١\right)\left(\frac{١}{٣}-٢\right)}{!٣}س^{٣}+$$

$$\frac{\frac{١}{٣}\left(\frac{١}{٣}-١\right)\cdots\left(\frac{١}{٣}-ن+١\right)}{ن!}س^{ن}+\cdots$$

وهذه يمكن كتابتها بالصورة

$$\sqrt[٣]{١+س}=١+\frac{١}{٣}س-\frac{٢}{!٢\times٣^{٢}}س^{٢}$$

$$+\frac{١\times٢\times٥}{!٣\times٣^{٣}}س^{٣}+\cdots$$

$$+(-١)^{ن+١}\frac{١\times٢\times\cdots\times(٣ن-٤)}{!ن\times٣^{ن}}س^{ن}$$

$$+\cdots$$

حيث $|س|<١$ والصيغة للحد النوني من هذه المتسلسلة صحيحة عندما $ن\geq٢$.

مثـال ٢ : أوجد متسلسلة قوى تمثل $\sqrt[٣]{١ + س^{٤}}$

الحـــل : يمكن الحصول على المتسلسلة المطلوبة بتعويض $س^{٤}$ بدل س في متسلسلة المثال (١) وهكذا ، اذا كانت $|س| < ١$ فان

$$\sqrt[٣]{١ + س^{٤}} = ١ + \frac{١}{٣} س^{٤} - \frac{٢}{!٢ \times ٢^{٣}} س^{٨} + \cdots$$

$$+ \frac{١ \times ٢ \times ٣ \cdots}{!ن \times ٣^{ن}} (-١)^{ن+١} س^{٤} + \cdots$$

مثـال ٣ : قرب $\int_{٠,٣}^{٠} \sqrt[٣]{١ + س^{٤}}$ د س

الحـــل : بتكامل حدود المتسلسلة المعطاة في المثال ٢ نجد ان

$$\int_{٠,٣}^{٠} \sqrt[٣]{١ + س^{٤}} \text{ د س} = ٠,٣ + ٠,٠٠٠١٦٢ - ٠,٠٠٠٠٠٠٢٤٣ + \cdots$$

والنتيجة ان التكامل يمكن تقريبه بالعدد ٠,٣٠٠١٦٢ وهذا صحيح لست منازل عشرية لان الخطأ اصغر من ٠,٠٠٠٠٠٠٢٤٣ (لماذا ؟)

وتستخدم المتسلسلات ذات الحدين للحصول على تقريبات للصيغ $(١ + س)^{ك}$ بحدوديات . ولتوضيح ذلك ، اذا كان $|س| < ١$ فانه من المثال ١ ينتج ان

$$\sqrt[٣]{١ + س} \approx ١ + \frac{١}{٣} س$$

والخطأ الحاصل في هذا التقريب اقل من الحد التالي $\frac{س^{٢}}{٩}$.

تمارين :

أوجد تمثيلا بمتسلسلات قوى لكل من التمارين ١ – ٦ واذكر نصف قطر التقارب

١ . (أ) $\sqrt{١ + س}$ ، (ب) $\sqrt{١ - س^{٣}}$

٢ . (أ) $\frac{١}{\sqrt[٣]{١ + س}}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt[٣]{١ - س^{٢}}}$

٣ . $(١ + س)^{-٣}$

٤ . $س (١ + ٢س)^{-٢}$ ٥ . $\sqrt[٣]{٨ + س}$

٦ . $(٤ + س)^{٣/٢}$

٧ . أوجد متسلسلة القوى للاقتران جا$^{-١}$ س باستخدام

$$جا^{-١} س = \int_{٠}^{س} \frac{١}{\sqrt{١ - ت^{٢}}} \, د ت$$

وما هو نصف قطر التقارب لهذه المتسلسلة

٨ . أوجد تمثيلا للاقتران جا ز$^{-١}$ (س) بمتسلسلة قوى وذلك باستخدام

$$جاز^{-١} (س) = \int_{٠}^{س} \frac{١}{\sqrt{١ + ت^{٢}}} \, د ت$$

وما هو نصف قطر التقارب .

قرب كلا من التمرينين ٩ ، ١٠ لثلاث منازل عشرية

٩ . $\int_{٠}^{٢/١} \sqrt{١ - س^{٣}} \, د س$

١٠. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{1 - س^{2}}}$ د س (انظر التمرين ٢ ب)

تمارين مراجعـــة :

شفويـــة :

عرف او ناقش كلا مما يلي :

١ . المتتالية اللانهائية .

٢ . نهاية المتتالية اللانهائية .

٣ . النظريات على نهايات المتتاليات .

٤ . المتتاليات الوتيرية .

٥ . متتاليات المجاميع الجزئية للمتسلسلات اللانهائية .

٦ . المتسلسلة اللانهائية التقاربية .

٧ . المتسلسلة اللانهائية التباعدية .

٨ . المتسلسلة الهندسية .

٩ . المتسلسلة التوافقية .

١٠ . متسلسلة القوة ب .

١١ . اختبار التكامل .

١٢ . اختبارات المقارنة .

١٣ . اختبار المتسلسلات المتناوبة .

١٤ . التقارب المطلق .

١٥ . التقارب المشروط .

١٦ . اختبار النسبة .

١٧ . متسلسلات القوى .

١٨ . نصف قطر التقارب .

١٩ . فترة التقارب .

٢٠ . تفاضل وتكامل متسلسلات القوى .

٢١ متسلسلات تايلور .

٢٢. متسلسلات ماكلورين .

٢٣. متسلسلات ذات الحدين .

٢٤. التقريب باستخدام المتسلسلات .

كتابـــة :

ابحث هل المتسلسلات في التمارين ١ – ١٢ تقاربية ام تباعدية :

١. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{\sqrt[٣]{ن(ن+١)(ن+٢)}}$

٢. $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(٣+٢ن)^{٢}}{(١+ن)^{٣}}$

٣. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-٢/٣)^{ن-١}$

٤. $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{١}{ن^{(٢/١)}+٢}$

٥. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١+ن^{٢}٣}{ن \times ٥^{ن-١}}$

٦. $\sum_{ن=١٠}^{\infty} \frac{١}{٢+ن^{٣}}$

٧. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن!}{\text{لط}(ن+١)}$

٨. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن^{٢}-١}{ن^{٢}+١}$

٩. $\sum_{ن=١}^{\infty} (ن^{٢}+٩)(-٢)^{ن-١}$

١٠. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن+\text{جتا}ن}{ن^{٣}+١}$

١١. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن^{e}}{e^{ن}}$

١٢. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١} \frac{ن}{ن^{٢}+١}$

استخدم اختبار التكامل لتعيين التقارب والتباعد في المتسلسلات في التمارين ١٣ – ١٦ :

١٣. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١}{(٣ن+٢)^{٣}}$

١٤. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{ن}{\sqrt{ن^{٢}+١}}$

١٥. $\sum_{ن=١}^{\infty} ن^{-٢} e^{(١/ن)}$

١٦. $\sum_{ن=٢}^{\infty} \frac{١}{ن (\text{لط } ن)^{٣}}$

حقق هل المتسلسلات في التمارين ١٧ – ٢٠ تقاربية تقاربا مطلقا ام مشروطا ام تباعدية :

١٧. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن-١} \frac{\sqrt{ن}}{ن+١}$

١٨. $\sum_{ن=١}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{٢ن+٣}{ن!}$

١٩. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{١ - \text{جتا } ن}{ن^{٢}}$

٢٠. $\frac{٢}{١!} - \frac{٢ \times ٤}{٢!} + \cdots + (-١)^{ن-١} \frac{٢ \times ٤ \times \cdots \times (٢ن)}{ن!} + \cdots$

قرب المجموع لكل من المتسلسلتين ٢١ ، ٢٢ لثلاث منازل عشرية :

٢١. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{(-١)^{ن-١}}{(٢ن+١)!}$

٢٢. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{(-١)^{ن-١}}{ن^{٢}(ن^{٢}+١)}$

أوجد فترة التقارب لكل من المتسلسلات في التمارين ٢٣ – ٢٨ .

٢٣. $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{ن+١}{(-٣)^{ن}}$

٢٤. $\sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \frac{٤^{٢ن}\, س^{ن}}{\sqrt{ن+١}}$

٢٥. $\sum_{ن=١}^{\infty} \frac{(س+١٠)^{ن}}{ن \times ٢^{ن}}$

٢٦. $\sum_{ن=٢}^{\infty} \frac{(س-١)^{ن}}{ن\,(\ln ن)^{٢}}$

٢٧. $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(٢ن)!}{(ن!)^{٢}}\, س^{ن}$

٢٨. $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(س+٥)^{ن}}{(ن+٥)!}$

أوجد متسلسلة ماكلورين لكل من الاقترانات في التمارين ٢٩ – ٣٤ واذكر نصف قطر التقارب .

٢٩ ·
$$\frac{١ - \text{جتا س}}{\text{حا س}}$$

٣٠ · $س\ e^{-٢س}$

٣١ . حا س . جتا س

٣٢ · لط (٢ + س)

٣٣ · $(١ + س)^{٣/٢}$

٣٤ ·
$$\frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$$

٣٥ · أوجد تمثيلا للعبارة $e^{-س}$ بمتسلسلة في قوى س + ٢ .

٣٦ · أوجد تمثيلا للعبارة جتا س بمتسلسلة في قوى $س - \frac{\pi}{٢}$.

٣٧ · أوجد تمثيلا للعبارة $\sqrt{س}$ بمتسلسلة في قوى س − ٤ .

استخدم المتسلسلات اللانهائية لتقريب كل من التمارين ٣٨ − ٤٠ لثلاث منازل عشرية :

٣٨ · $\sqrt[٣]{e^{٣}}\ /\ ١$

٣٩ · $\int_{٠}^{١} س^{٢}\ e^{-س^{٢}}\ د س$

٤٠ · $\int_{٠}^{١} \frac{\text{حا س}}{\sqrt{س}}\ د س$

الملحـق الاول

الاستنتاج الرياضي

Mathematical Induclion

يمكن استخدام طريقة البرهان المعروفة بالاستنتاج الرياضي لاثبات عبارات أو صيغ معينة تصح لجميع الاعداد الصحيحة الموجبة . وترتكز الطريقة على المسلمات الاساسية التالية لمجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة ط .

(م ١ – ١) مسلمات الاستنتاج الرياضي .

لنكن سـ مجموعة جزئية من ط لها الخواص التالية :

(١) ١ ∈ سـ

(٢) اذا كان ك ∈ سـ فان ك + ١ ∈ سـ .

فتكون سـ = ط .

اذا كانت سـ هي مجموعة اعداد طبيعية تحقق (٢) فعندما تحتوي على عدد طبيعي اختياري ك فيجب أن تحتوي على العدد الذي يليه ك + ١ . واذا حققت س الخاصية (١) فهي تحتوي على ١ وباستعمال (٢) تحتوي سـ على ١ + ١ أي ٢ ، وبتطبيق (٢) مرة اخرى نرى أن س تحتوي على ٢ + ١ أو ٣ . وبالاستمرار بهذه الطريقة يمكن أن نقول انه اذا كان ن أي عدد طبيعي معين فان ن ∈ سـ لانه يمكن التقدم خطوة خطوة كما تقدم حتى نصل الى ن . ومع ان هذا الجدال لا يبرهن (م ١ – ١) الا انه يظهر انه معقول . وسنستعمل (م ١ – ١) لاستنتاج النظرية الأساسية التالية .

(م ١ – ٢) مبدأ الاستنتاج الرياضي

افرض ان كل عدد صحيح موجب ، ن ، يرتبط به عبارة محددة $ع_ن$.

فتكون جميع العبارات $ع_ن$ صحيحة بشرط ان تتحقق الشروط التالية

(٢) اذا كان ك عددا صحيحا موجبا اختياريا بحيث $ع_ك$ صحيحة فتكون

$ع_{ك+١}$ صحيحة ايضا .

البرهـــان : افرض أن (١) و (٢) في (م ١ – ٢) صحيحتان وضع

$س = \{ن \in ط : ع_ن \text{ صحيحة}\}$

$ع_١$ صحيحة فرضا ومن ثم فان ١ $\in$ س . وهكذا فان س تحقق الخاصية (م ١ – ١) ، (١) . ولنفرض أن ك $\in$ س . فتكون $ع_ك$ صحيحة ومن (م ١ – ٢) ، (٢) $ع_{ك+١}$ صحيحة ايضا . ولهذا فان ك + ١ $\in$ س . وتكون الخاصية ، (م ١ – ١) ، (٢) صحيحة . ونتيجة لذلك فان س = ط وهذا يعني ان $ع_ن$ صحيحة لجميع الاعداد الصحيحة الموجبة ن .

(م ١ – ٣) وهناك صور مختلفة لمبدأ الاستنتاج الرياضي . وفي (م ١ – ٧) تعميم له بسيط . وفي معظم التطبيقات تعطى العبارة $ع_ن$ بصيغة معادلة تتضمن العدد الاختياري الموجب ن .

وعند تطبيق (م ١ – ٢) فيجب دائما اتباع الخطوتين التاليتين :

(١) برهن على أن $ع_١$ صحيحة .

(٢) اذا كانت $ع_ك$ صحيحة فبرهن على أن $ع_{ك+١}$ تكون صحيحة .

وفي العادة تتضمن الخطوة ٢ الصعوبة الكبرى للطالب المبتديء . اننا لا نبرهن أن $ع_ك$ تكون صحيحة (الا في حالة ك = ١) . ولكننا نبين انه اذا كانت $ع_ك$ صحيحة فتكون العبارة التالية $ع_{ك+١}$ صحيحة . وهذا كل ما نحتاجه حسب

(م ١ – ٢) . ونشير احيانا الى افتراض أن ع$_{ن}$ صحيحة بفرضية الاستنتاج الرياضي .

مثال ١ : اثبت انه لاي عدد صحيح موجب ن يكون حاصل جمع أول ن من الاعداد الصحيحة الموجبة هو $\frac{ن\ (ن + ١)}{٢}$

الحـــل : اذا كان ن عددا صحيحا موجبا فلنجعل ع$_{ن}$ ترمز للعبارة

$$(م ١ – ٤) \quad ١ + ٢ + ٣ + ... + ن = \frac{ن\ (ن + ١)}{٢}$$

وهنالك اتفاق على انه عندما تكون ن ≥ ٤ يوضع في الطرف الايمن ن من الحدود بالضبط . ونريد أن نثبت أن ع$_{ن}$ صحيحة لجميع قيم ن وانه من المستحسن تحقيق (م ١ – ٤) بفرض عدة قيم للرمز ن ولكن هذا ليس ضروريا . علينا فقط اتباع الخطوتين ١ و ٢ في (م ١ – ٣) .

١ ــ اذا عوضنا ن = ١ في (م ١ – ٤) فيتحول الطرف الايمن الى ١ والطرف الايسر الى

$$\frac{(١)\ (١ + ١)}{٢}$$

وهذا يساوي ١ . وهذا يثبت ان ع$_{١}$ صحيحة .

٢ ــ نفترض ان ع$_{ك}$ صحيحة وبهذا تكون فرضية الاستنتاج الرياضي هي

$$(م ١ – ٥) \quad ١ + ٢ + ... + ك = \frac{ك\ (ك + ١)}{٢}$$

وهدفنا هو برهان أن ع$_{ك + ١}$ تكون صحيحة أي أن

(م١-٦) ١ + ٢ + ٣ + ٠٠ + (ك+١)

$$= \frac{(ك+١)\ ((ك+١)+١)\ (ك+١)}{٢}$$

فباستخدام فرضية الاستنتاج الرياضي نحصل على صيغة لحاصل جمع أول ك من الاعداد الصحيحة الموجبة . وبهذا يمكن ايجاد صيغة لحاصل جمع أول ك + ١ من الاعداد الصحيحة الموجبة ، بجمع ك + ١ الى كل من طرفي (١ – ٥) . فباستعمال هذا والاختصار نحصل على أن

$$١ + ٢ + ٣ + ٠٠٠ + ك + (ك+١) = \frac{ك\ (ك+١)}{٢} + (ك+١)$$

$$= \frac{ك\ (ك+١) + (ك+١)\ ٢}{٢}$$

$$= \frac{ك^{٢} + ٣ك + ٢}{٢}$$

التي يمكن كتابتها بالصيغة (م$_{١}$ – ٦) . وهذا يبين أن ع$_{ك+١}$ تكون صحيحة ويكون البرهان بالاستنتاج الرياضي قد تم .

خذ عددا موجبا ر وافترض انه لكل عدد صحيح ن ≥ ر توجد عبارة مرافقة ع$_{ن}$. فمثلا اذا كانت ر = ٦ ترقم العبارات ع$_{٦}$ ، ع$_{٧}$ ، ع$_{٨}$ وهكذا . ويمكن تعميم مبدأ الاستنتاج الرياضي ليشمل هذه الحالة . فكما سبق تستعمل الخطوتين التاليتين لبرهان ان جميع العبارات س$_{ن}$ صحيحة لكل ن ≥ ر .

١ — برهن ان س$_{ر}$ صحيحة

٢ — افترض أن $س_ك$ صحيحة لاي ك ≥ ر وبرهن على أن
$س_{ك+١}$ تكون صحيحة

مثـال ٢ : اذا كان م عددا حقيقيا غير الصفر وكان م > − ١ .
برهن على أن $(١ + م)^{ن} > ١ + ن م$ لجميع الاعداد الصحيحة ن ≥ ٢ .

الحـــل : اذا كان ن عددا صحيحا موجبا نأخذ $ع_ن$ لتمثل المتباينة
$(١ + م)^{ن} > ١ + ن م$. لاحظ ان $ع_١$ تكون خطأ لان $(١ + م)^{١} = ١ + م$. ولكننا يمكن أن نثبت أن $ع_ن$ تكون صحيحة لكل ن ≥ ٢ باستخدام (م ١ − ٧) على فرض أن ر = ٢ .

١ — نكتب $(١ + م)^{٢} = ١ + ٢ م + م^{٢}$. وبما أن م > . ، فان $م^{٢} >$.
وبهذا فان $١ + ٢ م + م^{٢} > ١ + ٢ م$. وهذا يعطينا $(١ + م)^{٢} > ١ + ٢ م$ ومن ثم فان $ع_٢$ تكون صحيحة .

٢ — افترض أن $ع_ك$ تكون صحيحة . وهكذا فان فرضية الاستنتاج الرياضي

(م ١ − ٨) $(١ + م)^{ك} > ١ + ك م$.

ونرغب في اثبات ان $ع_{ك+١}$ تكون صحيحة أي أن

$(١ + م)^{ك+١} > ١ + (ك + ١) م$. علما بأن م > − ١ و م + ١ > .

فنضرب ١ + م في طرفي (م ١ − ٨) وهذا لا يغير اشارة المتباينة . ولهذا فان
$(١ + م)^{ك} (١ + م) > (١ + ك م) (١ + م)$
وهذه يمكن اعادة كتابتها كما يلي :

$(١ + م)^{ك+١} > ١ + ك م + م + ك م^{٢}$

أو

$$(١ + ﻫ)^{ك+١} > ١ + (ك+١)\ ﻫ + ك\ ﻫ^{٢}$$

وبما أن $ك\ ﻫ^{٢} > ٠$ فإن

$$١ + (ك+١)\ ﻫ + ك\ ﻫ^{٢} > ١ + (ك + ١)\ ﻫ$$

ونتيجة لذلك فان

$$(١ + ﻫ)^{ك+١} > ١ + (ك+١)\ ﻫ$$

وهكذا فان $ع_{ك+١}$ تكون صحيحة وهو المطلوب .

تمارين :

في التمارين ١ – ١٠ برهن على أن العبارة المعطاة تكون صحيحة لكل عدد صحيح موجب ن .

١ . $٢ + ٤ + ٦ + \cdots + ٢ن = ن\ (ن+١)$

٢ . $١ + ٤ + ٧ + \cdots + (٣ن - ٢) = \frac{١}{٢}\ (٣ن - ١)$

٣ . $١^{٢} + ٢^{٢} + \cdots + ن^{٢} = \dfrac{ن\ (ن+١)\ (٢ن+١)}{٦}$

٤ . $١^{٣} + ٢^{٣} + \cdots + ن^{٣} = \left[\dfrac{ن\ (ن+١)}{٢}\right]^{٢}$

٥ . $\dfrac{١}{١ \times ٢} + \dfrac{١}{٢ \times ٣} + \dfrac{١}{٣ \times ٤} + \cdots + \dfrac{١}{ن\ (ن+١)}$

$$= \frac{ن}{ن+١}$$

٦ $\frac{١}{٣\times٢\times١} + \frac{١}{٤\times٣\times٢} + \frac{١}{٥\times٤\times٣} + \cdots$

$$+ \frac{١}{ن\,(ن+١)\,(ن+٢)} = \frac{ن\,(ن+٣)}{٤\,(ن+١)\,(ن+٢)}$$

٧ . $١^{٢} + ٣^{٢} + ٥^{٢} + \cdots + (٢ن-١)^{٢}$

$$= \frac{ن\,(٢ن-١)\,(٢ن+١)}{٣}$$

٨ . $١^{٣} + ٣^{٣} + \cdots + (٢ن-١)^{٣} = ن^{٢}\,(٢ن^{٢}-١)$.

٩ . $ن < ٢^{ن}$

١٠ . $١ + ٢ن \leqslant ٣^{ن}$

١١ . استعمل الاستنتاج الرياضي لاثبات انه اذا كان $أ$ أي عدد حقيقي اكبر من ١ فان

$أ^{ن} > ١$ لكل عدد صحيح موجب ن .

١٢ . اذا كانت $أ \neq ١$ اثبت ان

$$١ + أ + أ^{٢} + \cdots + أ^{ن-١} = \frac{أ^{ن}-١}{أ-١}$$

لكل عدد صحيح موجب ن .

١٣ . استعمل الاستنتاج الرياضي لاثبات أن $أ - ب$ هو احد عوامل $أ^{ن} - ب^{ن}$ لكل عدد صحيح موجب ن (ملاحظة : $أ^{ك+١} - ب^{ك+١} = أ^{ك}\,(أ-ب) + (أ^{ك} - ب^{ك})\,ب$

١٤ . اثبت أن $أ + ب$ هو أحد عوامل $أ^{٢ن+١} + ب^{٢(ن+١)}$ لكل عدد صحيح موجب ن .

الملحق الثاني

نظريات على النهايات والتكاملات المحدودة

يحتوي هذا الملحق على براهين بعض النظريات المذكورة في الفصلين الخامس والسادس . ونظام الترقيم هنا هو نفس النظام المتبع في الفصلين المذكورين .

(٢ – ١٢) نظريـــة :

اذا كانت $\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$

و $\lim_{س \to أ} هـ(س) = م$ فان

(١) $\lim_{س \to أ} [ق(س) + هـ(س)] = ل + م$

(٢) $\lim_{س \to أ} ق(س) . هـ(س) = ل . م$

(٣) $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط ان تكون $م \neq 0$.

البرهـــان :

(١) حسب (٢ – ٦) علينا اثبات انه لكل $\varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث أن

$|ق(س) + هـ(س) - (ل + م)| < \varepsilon$ عندما تكون $0 < |س - أ| < \delta$. فنبدأ بكتابة

(م ٢ - ٢) | ق (س) + هـ (س) - (ل + م) | = |(ق (س) - ل) + (هـ (س) - م) | وبتطبيق المتباينة المثلثية (١ - ٣) ينتج

| ق (س) - ل) + (هـ (س) - م)| ≥ |ق (س) - ل | + | هـ (س) - جـ

وبربط المتباينة الاخيرة مع (م ١ - ٢) نجد أن

(م ٢ - ٣) | ق (س) + هـ (س) - (ل + م) | ≥ |ق (س) - ل | + | هـ (س) - م | وبما أن نهـــا ق (س) = ل ونهـــا هـ (س) = م
س ← أ س ← أ

فيمكن ان نجد عددين | ق (س) - ل | و |هـ (س) - م | صغيرين كما نشاء باختيار س قريبة من أ . وبشكل خاص يمكن جعلها اقل من $\frac{\epsilon}{٢}$.

وهكذا توجد $\delta_١ > ٠$ و $\delta_٢ > ٠$ بحيث أن

(م ٢ - ٤) | ق (س) - ل | < $\frac{\epsilon}{٢}$ عندما تكون ٠ < |س - أ | < $\delta_١$

| ق (س) - م | < $\frac{\epsilon}{٢}$ عندما تكون ٠ < | س - أ | < $\delta_٢$

واذا اخذنا δ اصغر من $\delta_١$ و $\delta_٢$ فعندما ٠ < س - أ | < δ تكون المتباينتان في (م ٢ - ٤) اللتان تشملان ق (س) ، هـ (س) صحيحتين . ونتيجة لذلك اذا كانت

٠ < | س - أ | < δ فمن (م ٢ - ٤) و (م ٢ - ٣) يكون

| ق (س) + هـ (س) - (ل + م) | < $\frac{\epsilon}{٢} + \frac{\epsilon}{٢} = \epsilon$

وهي العبارة المطلوبة (م ٢ - ١) .

(٢) نبين اولا انه اذا كان ك اقترانا و

(م ٢ – ٥) اذا كانت نهـــا ك(س) = ٠ فان نهـــا ق (س) ك (س) = ٠
س ← أ س ← أ

فما أن نهـــا ق (س) = ل يتبع من (٢ – ٦) (باخذ ٤ = ١) انه
س ← أ

توجد δ_1 > ٠ بحيث انه عندما تكون ٠ < | س – أ | < δ_1

فان | ق (س) – ل | < | ومن ثم فان

| ق (س) | = | ق (س) – ل + ل | ≥ | ق (س) – ل | + | ل | < ١
+ | ل | ونتيجة لذلك

(م ٢ – ٦) ق (س) ك (س) | < (١ + | ل |) | ك (س) | عندما تكون
٠ < | س – أ | < δ_1

وبما أن نهـــا ك (س) = ٠ فلاي ٤ > ٠ توجد δ_2 > ٠
س ← أ

بحيث أن

(م ٢ – ٧) ك (س) – ٠ | < $\frac{٤}{١ + |ل|}$ عندما تكون

٠ < | س – أ | < δ_2 .

واذا كانت δ اقل من δ_1 و δ_2 فعندما تكون ٠ < س – أ < δ
تكون كلا المتباينتين في (م ٢ – ٦) ، (م ٢ – ٧) صحيحتين ومن ثم فان

ق (س) ك (س) | < (١ + | ل |) × $\frac{٤}{١ + |ل|}$

ولهذا فان
| ك (س) ق (س) – ٠ | < ٤ عندما تكون ٠ < | س – أ | < δ وهذا
يبرهن (م ٢ – ٥) .
والآن خذ المتطابقة :

(م ٢ – ٨) ق (س) – ل م = ق (س) [هـ (س) – م] + م [ق (س) – ل]

وبما أن $\lim_{س \to ا}$ [ق (س) – م] = ٠ فيتبع من (م ٢ – ٥) بأخذ

$س \to ا$

ك (س) = هـ (س) – م ان

$\lim_{س \to ا}$ م [ق (س) – ل] = ٠

$س \to ا$

ومن (م ٢ – ٨) فان

$\lim_{س \to ا}$ [ق (س) هـ (س) – م ل] = ٠

$س \to ا$

اي ان

$\lim_{س \to ا}$ ق (س) هـ (س) = ل م .

$س \to ا$

(٣) يكفي اثبات أن

$$\lim_{س \to ا} \frac{١}{هـ (س)} = \frac{١}{م}$$

فاذا برهنا هذه الصيغة فيمكن ايجاد النتيجة المطلوبة بتطبيق (٢) لحاصل الضرب ق (س) . $\frac{١}{هـ (س)}$.

خذ :

$$(م ٢ – ٩) \quad \left| \frac{١}{هـ (س)} - \frac{١}{م} \right| = \left| \frac{م - هـ (س)}{م \, هـ (س)} \right|$$

$$= \frac{١}{|م| \, |هـ (س)|} \, |هـ (س) - م|$$

وبما أن $\lim_{س \to ا} هـ (س) = م$ فتوجد $\delta_1 > 0$ بحيث أن

$|هـ (س) - م| < \frac{|م|}{2}$ عندما تكون $0 < |س - ا| < \delta_1$ ونتيجة لذلك

فلجميع قيم س التي تحقق ما سبق

$$|م| = |هـ (س) + (م - هـ (س))|$$
$$\geq |هـ (س)| + |م - هـ (س)|$$
$$< |هـ (س)| + \frac{|م|}{2}$$

ولهذا فان

$$\frac{|م|}{2} < |هـ (س)| \text{ أي أن } \frac{1}{|هـ (س)|} < \frac{2}{|م|}$$

وبالتعويض في (م٢ - ٩) ينتج

$$(م٢ - ١٠) \quad \left|هـ (س)^{-1} - \frac{1}{م}\right| < \frac{2}{|م|^2} |هـ (س) - م|$$

عندما تكون $0 < |س - ا| < \delta_1$

ومرة اخرى استعمل الحقيقة $\lim_{س \to ا} هـ (س) = م$

يتبع انه لاي $\epsilon > 0$ توجد $\delta_2 > 0$ بحيث

$$(م٢ - ١١) \quad |هـ (س) - م| < \frac{|م|^2}{2} \text{ عندما تكون}$$

$0 < |س - ا| < \delta_2$.

واذا كانت δ اقل من δ_1 و δ_2 فتكون المتباينتان (م٢ - ١٠) و (م٢ - ١١) صحيحتين. وهكذا فان

$$\left| \frac{1}{\text{هـ}(س)} - \frac{1}{م} \right| < \epsilon \quad \text{عندما تكون} \quad \delta > |س - أ| < |م|$$

وهذا يعني أن $\lim_{س \to أ} \frac{1}{\text{هـ}(س)} = \frac{1}{م}$.

(٢ - ٢٤) نظريـــة :

اذا كانت $أ >$ ، وكان ن عدد صحيحا موجبا أوكانت $أ < 0$ ، وكان ن عدد فرديا موجبا فان

$$\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{س} = \sqrt[ن]{أ}$$

البرهـــان : افترض أن $أ >$ ، وان ن اي عدد صحيح موجب . فيجب ان نبين انه لاي $\epsilon > 0$ ، توجد δ بحيث ان

$$|\sqrt[ن]{س} - \sqrt[ن]{أ}| < \epsilon \quad \text{عندما تكون} \quad \delta > |س - أ| > 0$$ أوما يكافئه :

$$-\epsilon < \sqrt[ن]{س} - \sqrt[ن]{أ} < \epsilon \quad \text{عندما تكون} \quad -\delta < س - أ < \delta \ ،$$

$س \neq أ$ ويكفي برهان (م ٢ - ١٢) اذا كان $\epsilon < \sqrt[ن]{أ}$ لانه اذا وجدت δ تحت هذا الشرط فيمكن استعمال نفس δ لاي قيمة أكبر للرمز ϵ .

ولهذا فسنعتبر فيما تبقى من البرهان أن $\epsilon - \sqrt[ن]{أ}$ عدد موجب اقل من δ . والمتباينات الاتية كلها متكافئة .

$$-\epsilon < \sqrt[ن]{س} - \sqrt[ن]{أ} < \epsilon$$

$$\sqrt[ن]{أ} - \epsilon < \sqrt[ن]{س} < \epsilon + \sqrt[ن]{أ}$$

$$(\sqrt[ن]{أ} - \epsilon)^{ن} < س < (\epsilon + \sqrt[ن]{أ})^{ن}$$

$$(\sqrt[ن]{ا} - \epsilon) < س - ا < (\sqrt[ن]{ا} + \epsilon)$$

$$- [ا - (\sqrt[ن]{ا} - \epsilon)] < س - ا < (\sqrt[ن]{ا} + \epsilon) - ا$$

واذا كانت δ اصغر من $ا - (\sqrt[ن]{ا} - \epsilon)$ و $(\sqrt[ن]{ا} + \epsilon) - ا$

فعندما تكون $- \delta < س - ا < \delta$ تكون المتباينة الاخيرة في القائمة صحيحة ومن ثم فالاولى صحيحة. وهذا يعطينا (م ٢ - ١٢).

ولنفترض الان ان $ا <$. وان ن عدد فردي موجب. في هذه الحالة يكون $- ا$ و $\sqrt[ن]{- ا}$ موجبين ومن برهان الجزء الاول يمكن كتابة

$$\lim_{س \to ا} \sqrt[ن]{- س} = \sqrt[ن]{- ا}$$

وهكذا فلكل $\epsilon >$ ، توجد δ بحيث ان

$$| \sqrt[ن]{- س} - \sqrt[ن]{- ا} | < \epsilon \text{ عندما تكون } \delta > | - س - (- ا) | ، <$$

أو ما يكافئه :

$$| \sqrt[ن]{س} - \sqrt[ن]{ا} | < \epsilon \text{ عندما تكون } \delta > | س - ا | ، <$$

والمتباينتان الاخيرتان تعطيان

$$\lim_{س \to ا} \sqrt[ن]{س} = \sqrt[ن]{ا} .$$

(٢ - ٢٦) نظريـــة السندويش (البشريحة)

اذا كانت $ق (س) \leq ك (س) \leq هـ (س)$ لجميع قيم س في فترة مفتوحة تحتوي على ا (ربما باستثناء $س = ا$) واذا كانت

$$\lim_{س \to ا} ق (س) = ل = \lim_{س \to ا} هـ (س)$$ فان

$$\lim_{س \to ا} ك (س) = ل .$$

البرهـــان :

لكل $\epsilon > 0$ ، توجد $\delta_1 > 0$ و $\delta_2 > 0$ بحيث أن

(م ٢ – ١٣) $|$ ق (س) – ل $| < \epsilon$ عندما تكون $0 < |$ س – أ $| < \delta_1$

، $|$ هـ (س) – ل $| < \epsilon$ عندما تكون $0 < |$ س – أ $| < \delta_2$

فاذا كانت δ اصغر من δ_1 و δ_2 فعندما تكون $0 < |$ س – أ $| < \delta$

فتكون المتباينتان في (م ٢ – ١٣) اللتان تشتملان على ϵ صحيحتين أي أن

$\epsilon -$ < ق (س) – ل < ϵ و $\epsilon -$ < هـ (س) – ل < ϵ .

ونتيجة لذلك اذا كانت $0 < |$ س – أ $| < \delta$. فان ل – ϵ < ق (س)

وكذلك هـ (س) < ل + ϵ . وبما أن ق (س) ≤ ك (س) ≤ هـ (س)

فيتبع انه عندما تكون $0 < |$ س – أ $| < \delta$ فتكون ل – ϵ < ك (س) < ل + ϵ أو ما يكافئه :

$|$ ك (س) – ل $| < \epsilon$ وهذا ما نريد برهنته .

(٥ – ٢٢) نظريـــة :

اذا كانت ق قابلة للتكامل على الفترة [أ ، ب] و ك أي عدد فتكون ك ق قابلة للتكامل على [أ ، ب] و

$$\int_{أ}^{ب} ك\ ق\ (س)\ د س = ك \int_{أ}^{ب} ق\ (س)\ د س$$

البرهـــان : اذا كانت ك = ٠ فالنتيجة تتبع من (٥ – ٢١) . ولهذا فسنفترض أن ك ≠ ٠ فبما أن ق قابلة للتكامل فيمكن وضع

$$\int_{أ}^{ب} ق\ (س)\ د س = جـ$$

حيث جـ عدد ما .

واذا كانت ت تجزئة للفترة [أ ، ب] فتكون صيغة كل مجموع ريماني جـ ت للاقتران ك ق هي

$\sum_{ن}$ ك ق ($و_ن$) Δ $س_ن$

حيث انه لكل ن تكون $و_ن$ منتمية الى الفترة الجزئية النونية

[$س_{ن-١}$ ، $س_ن$] للتجزئة ت . ونريد اثبات انه لكل ε > . توجد

δ > . بحيث انه عندما || ت || < δ فان

(م٢ - ١٤) $\sum_{ن}$ ك ق ($و_ن$) Δ $س_ن$ - ك جـ

لكل و ن $\in$ [$س_{ن-١}$ ، $س_ن$] . فاذا وضعنا ε' = $\frac{\varepsilon}{|\ ك\ |}$ فبما

أن ق قابلة للتكامل فتوجد δ > . بحيث انه عندما تكون || ت ||< δ فان .

$$|\ \sum_{ن}\ ق\ (و_ن)\Delta\ س_ن - جـ\ | < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\ ك\ |}$$

وبضرب طرفي هذه المتباينة بالعدد ك نحصل على (م ٢ - ١٤) . ومن ثم فان

نهـــا $\sum_{ن}$ ك ق ($و_ن$) Δ $س_ن$ = ك جـ

|| ت || ← .

$$= ك \int_{أ}^{ب} ق\ (س)\ د\ س$$

(٥ - ٢٣) نظريـــة :

اذا كان ق و هـ اقترانين قابلين للتكامل على الفترة [أ ، ب] فان ق + هـ تكون قابلة للتكامل على [أ ، ب] و

$$\int_{أ}^{ب} ق\ (س) + هـ\ (س)\ د\ س = \int_{أ}^{ب} ق\ (س)\ د\ س + \int_{أ}^{ب} هـ\ (س)\ د\ س .$$

البرهـــان : باستخدام الفرض يوجد عددان جـ١ و جـ٢ بحيث أن

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س = جـ_١ \quad و \quad \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,د س = جـ_٢$$

فاذا كانت ت تجزئة للفترة [أ ، ب] و ر ت مجموع ريماني اختياري للاقتران ق + هـ الذي يرافق ت أي ان

$$(م٢-١٥) \quad ر_ت = \sum_{ن} [ق(و_ن) - هـ(و_ن)]\,\Delta س_ن$$

حيث و ن ∈ [س ن ـ ١ ، س ن] لكل ن . ونريد اثبات انه لاي ε > ٠ توجد δ > ٠ بحيث عندما تكون ||ت|| < δ تكون :

$$| ر_ت - (جـ_١ + جـ_٢) | < ε .$$

وباستخدام (٥ - ١١) ، (١) يمكن كتابة (م٢ - ١٥) بالصيغة

$$ر_ت = \sum_{ن} ق(و_ن)\,\Delta س_ن + \sum_{ن} هـ(و_ن)\,\Delta س_ن$$

وباعادة ترتيب الحدود واستعمال المتباينة المثلثية (١ - ٣) يكون :

$$(م٢-١٦) \quad | ر_ت - (جـ_١ + جـ_٢) | = | (\sum_{ن} ق(و_ن)\,\Delta س_ن - جـ_١) + (\sum_{ن} هـ(و_ن)\,\Delta س_ن - جـ_٢) | + | \sum_{ن} هـ(و_ن)\,\Delta س_ن - جـ_٢ |$$

ومن قابلية ق و هـ للاشتقاق واخذ $ε' = \frac{ε}{٢}$ توجد $δ_١ > ٠$ و $δ_٢ > ٠$

بحيث عندما تكون $|| ت || < δ_١$ و $|| ت || < δ_٢$ يكون :

$$(م٢-١٧) \quad \left| \sum_{ن} \text{ق}(و_ن)\, \Delta س_ن - جـ_١ \right| < \frac{\epsilon}{٢} = \epsilon' \text{ و}$$

$$\left| \sum_{ن} \text{هـ}(ن)\, \Delta س_ن - جـ_٢ \right| < \frac{\epsilon}{٢} = \epsilon$$

لكل $و_ن$ ∈ $[س_{ن-١} ، س_ن]$ ، فاذا كانت δ عددا اصغر من $\delta_١$ و $\delta_٢$ فعندما تكون $||ت|| < \delta$ فان كلا المتباينتين (م ٢ - ١٧) صحيحتان ومن ثم فباستخدام (م ٢ - ١٦) فان

$$\left| ر_ت - (جـ_١ + جـ_٢) \right| < \frac{\epsilon}{٢} + \frac{\epsilon}{٢} = \epsilon$$

وهذا ما اردنا برهنته .

(٥ - ٢٥) نظريـــة :

اذا كانت $أ < ء < ب$ و ق قابلة للتكامل على كل من $[أ ، ء]$ و $[ء ، ب]$ فان ق قابلة للتكامل على $[أ ، ب]$

$$و \int_{أ}^{ب} \text{ق}(س)\, ء س = \int_{أ}^{ء} \text{ق}(س)\, ء س + \int_{ء}^{ب} \text{ق}(س)\, ء س$$

البرهـــان : حسب الفرض هنالك عددان $جـ_١$ ، $جـ_٢$ حيث

$$(م٢-١٨) \quad \int_{أ}^{ء} \text{ق}(س)\, ء س = جـ_١ \text{ و } \int_{ء}^{ب} \text{ق}(س)\, ء س = جـ_٢$$

لتكن $ت_١$ تجزئة للفترة $[أ ، ء]$ و $ت_٢$ تجزئة للفترة $[ء ، ب]$ و ت تجزئة $[أ ، ب]$. ونرمز لمجاميع ريمان الاختيارية المرافقة للتجزئات $ت_١$ ، $ت_٢$ ، $ت_٣$ بالرموز $ر_{ن_١}$ ، $ر_{ن_٢}$ ، $ر_{ن_٣}$ على الترتيب . وعلينا نبين لكل $\epsilon > ٠$ توجد $\delta > ٠$ بحيث اذا كانت $||ت_٣|| < \delta$ فان $\left| ر_{ن_٣} - (جـ_١ - جـ_٢) \right| < \epsilon$

واذا وضعنا $\epsilon = \frac{\epsilon}{٤}$ فحسب (م ٢ – ١٨) هنالك عددان موجبان $\delta_١$ و $\delta_٢$ بحيث انه اذا كانت $||ت_١|| < \delta_١$ و $||ت_٢|| < \delta_٢$ فان

$$(م ٢ - ١٩) \quad |ر_{ت_١} - ج_١| < \epsilon = \frac{\epsilon}{٤}$$

$$، \quad |ر_{ت_٢} - ج_٢| < \epsilon = \frac{\epsilon}{٤}$$

واذا كان δ عددا موجبا اصغر من $\delta_١$ و $\delta_٢$ فتكون المتباينتان (م ٢ – ١٩) صحيحتين عندما تكون $||ت|| < \delta$. وبما أن ق قابلة للتكامل على الفترتين [أ ، و] و [و ، ب] فتكون محصورة في كل من الفترتين ومن ثم فيوجد عدد م بحيث أن

$|ق(س)| \leq م$ لجميع قيم س في [أ ، ب]

وسنفترض الان أن δ قد اختيرت بحيث تحقق بالاضافة الى المتطلب السابق أن

$$\delta < \frac{\epsilon}{٤ م} .$$

واذا كانت ت تجزئة للفترة [أ ، ب] بحيث أن $||ت|| < \delta$. واذا كانت الاعداد التي تعين ت هي $أ = س_٠ ، س_١ ، س_٢ ، ٠٠٠٠ ، س_ن = ب$ فتوجد فترة نصف مفتوحة وحيدة بالصيغة $(س_{ن-١} ، س_ن]$ تحتوي على و . واذا كانت $ر_ن = \sum_{ع=١}^{ن} ق(و_ع) \Delta س_ع$

فيمكن كتابة :

$$(م٢-٢٠)\quad ر_ت = \sum_{ع=١}^{ك-١} ق(و_ع)\,\Delta س_ع + ق(و_ك)\,س_ك$$

$$+ \sum_{ع=ك+١}^{ن} ق(و_ع)\,\Delta س_ع$$

ولنفرض أن $ت_١$ ترمز لتجزئة $[أ ، ء]$ المعينة بواسطة

$[أ ، س_١ ، س_٢ ، ... ، س_{ك-١} ، ء]$، $ت_٢$ ترمز لتجزئة $[جـ ، ب]$ التي تعينها $[ء ، س_ك ، س_{ك+١} ، ... ، س_{ن-١} ، ب]$

واعتبر مجاميع ريمان

$$(م٢-٢١)\quad \left\{ \begin{array}{l} ن_ن = \sum_{ع=١}^{ك-١} ق(ق_ع)\,\Delta س_ع + ق(ء)\,(ء - س_{ك-١}) \\ ن_ن = ق(ء)\,(س_{ك+ء} - ء) + \sum_{ع=ك+١}^{ن} ق(ق_ع)\,\Delta س_ع \end{array} \right.$$

وباستخدام المتباينة المثلثية و (م٢-١٩)

$$(م٢-٢٢)\quad |(ر_{ت_١} + ر_{ت_٢}) - (جـ_١ + جـ_٢)| \leqslant |ر_{ت_١} - جـ_١| + |ر_{ت_٢} - جـ_٢|$$

$$\frac{\epsilon}{٢} = \frac{\epsilon}{٤} + \frac{\epsilon}{٤}$$

ويتبع من (م٢-٢٠) و (م٢-٢١) أن

$$| ر_ت - (ر_{ت_1} + ر_{ت_2}) | = ق(و_ك) - ق(ء) \quad \Delta س_ك$$

وبتطبيق المتباينة المثلثية واختيار δ نحصل على أن

$$(م ٢ - ٢٣) \quad | ر_ت - (ر_{ت_1} + ر_{ت_2}) | \leq ق(و_ك) - ق(ء) \quad \Delta س_ك$$

$$(م + م) \frac{\epsilon}{٤ م} = \frac{\epsilon}{٢}$$

بشرط أن يكون $|| ت || < \delta$.

واذا كتبنا

$$| ر_ت - (جـ_1 + جـ_2) | = | ر_ت - (ر_{ت_2}) + ر_{ت_2}) - (جـ_1 + جـ_2)$$

$$| ر_ت - (ر_{ت_1} + ر_{ت_2}) | + | ر_{ت_1} + ر_{ت_2} - (جـ_1 + جـ_2) |$$

فيتبع من (م ٢٣٠٢) و (م ٢ - ٢٢) انه عندما يكون $|| ت || < \delta$ فان

$$| ر_ت - (جـ_1 + جـ_2) | < \frac{\epsilon}{٢} + \frac{\epsilon}{٢} = \epsilon$$

لكل مجموع ريماني $ر_ت$. وهذا يكمل البرهان .

(٥ - ٢٧) نظريـــة :

اذا كانت ق قابلة للتكامل على [أ ، ب] وكانت
ق (س) ≥ . لجميع س ∈ [أ ، ب] فان

$$\int_أ^ب ق(س) ء س \geq .$$

البرهـــان : سنعطي برهانا غير مباشر. فلنأخذ $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) ء س = جـ.

ولنفترض أن جـ < ٠ اعتبر أي تجزئة ت للفترة [أ ، ب] ولتكن $ر_ت$

$= \sum_{ن}$ ق (و ن)Δ س ن أي جمع ريماني اختياري يرافق ت . فبما أن ق

(و ن) ≥ ٠ لجميع و ن ∈ [س ن − ١ ، س ن] فيتبع أن $ر_ت \geq$ ٠.

فلو اخذنا $\varepsilon = -\frac{جـ}{٢}$ فحسب (٥ − ١٥) فعندما يكون

||ت|| صغيرا بما فيه الكفاية فان

$$| ر_ت - جـ | < \varepsilon = -\frac{جـ}{٢}.$$

ويتبع أن $ر_ن < جـ - \frac{جـ}{٢} = \frac{جـ}{٢} <$ ٠ وهذا تناقض ٠ ولذا فالافتراض أن جـ < ٠ خاطيء ومن ثم فان جـ ≥ ٠

الملحـــق الثالث

الاقترانات المثلثيـــة

لنأخذ ى دائرة وحدة فهي دائرة نصف قطرها ١ ومركزها نقطة الاصل في نظام احداثيات متعامدة ولنأخذ م النقطة (١ ، ٠) . فاذا كان ن أي عدد بين ٠ ، ٢ π فكما يتضح بالشكل م ٣ – ١ توجد نقطة واحدة فقط و (س ، ص) على ى بحيث أن طول القوس م و مقيسا بعكس اتجاه عقارب الساعة من م هو ن . وبصورة عامة اذا كانت ن تمثل عدداً حقيقيا سالبا فيمكن ايجاد نقطة وحيدة و بقياس مسافة ن من م بعكس اتجاه عقارب الساعة على ى . وبالطبع اذا كانت ن > ٢ π فمن الضروري دوران ى اكثر من مرة حتى تصل الى و . فمثلا اذا كانت ن = ٣ π فالنقطة و احداثياها (– ١ ، ٠) . وبالمثل مع كل عدد حقيقي سالب ن يمكن ايجاد نقطة و بقياس مسافة | ن | من م باتجاه عقارب الساعة على ى . والنقطة و التي نعنيها بهذه الطريقة هي النقطة الواقعة على ى مقابلة للعدد الحقيقي ن . وبما أن طول ى يساوي ٢ π فالنقطة التي تقابل ن هي نفس النقطة التي تقابل ن + ٢ π ، ن + ٤ π ، ن – ٢ π . وبصورة عامة ن + ٢ م π حيث م أي عدد صحيح . ويمكن استعمال دائرة الوحدة ى لتعريف الاقترانات المثلثية . ويشار الى هذه الاقترانات باقترانات الجيب ، وجيب التمام ، والظل ، وقاطع التمام ، و القاطع ، وظل التمام ، ويرمز لها بالرموز جا ، جتا ، ظا ، قتا ، قا ، ظتا على الترتيب . فاذا كان ن عددا حقيقيا فنرمز للعدد الذي يرافقه اي اقتران الجيب بالرمز جا (ن) أو جان . ويمكن استعمال رموز مشابهة للاقترانات الخمسة الاخرى .

(م ٣ - ١) تعريف الاقترانات المثلثية :

اذا كان ن أي عدد حقيقي و ﻫ (س ، ص) نقطة واقعة على دائرة الوحدة ى وتقابل ن فان

جا ن = ص قتا ن = $\frac{١}{ص}$ (اذا كانت ص ≠ ٠)

جتا ن = س قا ن = $\frac{١}{س}$ (اذا كانت س ≠ ٠)

ظا ن = $\frac{ص}{س}$ (اذا كانت س ≠ ٠)

ظتا ن = $\frac{س}{ص}$ (اذا كانت ص ≠ ٠)

وبما انه يمكن الحصول على نفس النقطة ﻫ (س ، ص) لـ ن + ٢ م π حيث م اي عدد صحيح فتكرر قيم الاقترانات المثلثية على التتابع في فترات اطوالها ٢ π . نقول أن الاقتران ق الذي مجاله س دوري (Periodic) اذا امكن ايجاد عدد حقيقي موجب ك بحيث ق (ن + ك) = ق (ن) لجميع ن في س . ويعني هذا هندسيا أن بيان ق يكرر نفسه كلما تغيرت الاحداثيات السينية للنقط على فترات متتابعة اطوالها ك . ويسمى اصغر عدد حقيقي ك يحقق ما ذكر اعلاه (ان وجد) بدورة ق . ويمكن اثبات ان اقترانات الجيب ، وجيب التمام ، وقاطع التمام والقاطع لها دورة مقدارها ٢ π بينما دورة الاقترانين الظل وظل التمام هي π . ويتبع من (م ٣ - ١) أن

(م ٣ - ٢) قتا ن = $\frac{١}{جا\ ن}$ ، قا ن = $\frac{١}{جتا\ ن}$

ظتا ن = $\frac{١}{ظا\ ن}$ ، ظا ن = $\frac{جا\ ن}{جتا\ ن}$

ظتا ن = $\frac{جتا\ ن}{جا\ ن}$

بشرط ألا تكون المقامات مساوية للصفر.

والصيغ التالية نتيجة لحقيقة انه اذا كانت أ (س ، ص) تقع على ى فان س^{٢} + ص^{٢} = ١

(م ٣ – ٣) جا^{٢} ن + جتا^{٢} = ١

(م ٣ – ٤) ظا^{٢} ن + ١ = قا^{٢} ن

ظتا^{٢} ن + ١ = قتا^{٢} ن

ومن المفيد احيانا استخدام الزوايا عندما نعمل بالاقترانات المثلثية . وتنتج الزوايا عن دوران شعاع ل$_{١}$ حول نقطة نهايته م في المستوى الى مركز يعينه شعاع آخر ل$_{٢}$. ويسمى الشعاعان ل$_{١}$ و ل$_{٢}$ بالضلعين الابتدائي والنهائي على الترتيب وتسمى م برأس الزاوية . ويمكن ايجاد الموضع المعياري للزاوية θ بأخذ الرأس عند نقطة الاصل في نظام احداثيات متعامدة والضلع الابتدائي محور السينات الموجب . وفي هذه الحالة تنشأ θ عن دوران محور السينات الموجب حول م في المستوى س ص . واذا كان الدوران بعكس اتجاه عقارب الساعة فنعتبر الزاوية موجبة واذا كان الدوران باتجاه عقارب الساعة فنحصل على زاوية سالبة . واذا كانت ى دائرة وحدة مركزها م فكلما دار محور السينات الى موضعه النهائي تتحرك نقطة تقاطعه مع ى مسافة معينة ن قبل وصولها الى موضعها الاخير أ كما هو موضح في الشكل م ٣ – ٢ . وحسب ما تقدم تكون أ النقطة المقابلة للعدد الطبيعي ن . والطريقة الطبيعية لتعيين قياس θ هي استعمال ن . فعندها يشار الى θ بانها ن وحدات دائرية ونكتب θ = ن . وبشكل خاص اذا كانت θ = ١ تكون θ الزاوية المقابلة لقوس طوله الوحدة يقع على دائرة الوحدة ى .

ويمكن ايجاد القياس الدائري باستعمال دائرة بأي نصف قطر وبالتحديد اذا كانت θ زاوية مركزية في دائرة نصف قطرها ر وتقابل θ قوسا طوله ل حيث . ≤ ل ≤ π ر فيتبع من الهندسة المستوية أن المقياس الدائري للزاوية θ يعطى بالصيغة

(م ٣ – ٦) $\theta = \frac{ل}{ر}$

ويمكن اثبات ان المساحة ح لقطعة من دائرة نصف قطرها ر تعينها زاوية مركزية مقياسها الدائري θ هي

(م ٣ – ٧) $ح = \frac{1}{2} ر^2 \theta$

واذا كانت الزاوية θ ناشئة عن نصف دورة كاملة بعكس اتجاه عقارب الساعة فان $\theta = ١٨٠^\circ$. والمقياس الدائري للزاوية θ هو π . وهذا يعطينا العلاقة الاساسية $١٨٠^\circ = \pi$ وحدات دائرية . والصيغ الاتية متكافئة .

$$١^\circ = \frac{\pi}{١٨٠} \text{ دائرية و } ١ \text{ دائرية} = \left(\frac{١٨٠}{\pi}\right)^\circ .$$

وبالقسمة الطويلة نحصل على

$١^\circ \approx ١٧٤٥$ و٠ دائرية و ١ دائرية $\approx ٢٩٦ , ٥٧^\circ$.

والجدول الآتي يعطينا العلاقة بين القياس الدائري والدرجات لعدة زوايا عامة .

دائرية	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{\pi ٢}{٣}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٦}$	π
درجات	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٢٠°	١٣٥°	١٥٠°	١٨٠°

ومن الملائم في تطبيقات معينة تغيير مجالات الاقترانات المثلثية من مجموعة جزئية للمجموعة ح الى مجموعة الزوايا . ويمكن اتمام هذا باستخدام التعريف التالي :

(م ٣ – ٨) تعريف الاقترانات المثلثية للزوايا

اذا كانت θ زاوية مقياسها الدائري ن فتكون قيمة كل اقتران مثلثي عند θ بقيمته عند العدد الحقيقي ن .

ويتبع من (م ٣ – ٨) ان جا θ = جا ن .جتا θ = جتا ن وهكذا حيث ن هي المقياس الدائري للزاوية . وللسهولة سنستعمل تعبير الاقترانات المثلثية بغض النظر عن مجالاتها من الزوايا أو الاعداد الحقيقية .

ويمكن تعيين قيم الاقترانات المثلثية عند الزاوية θ بواسطة نقطة اختيارية على ضلع θ النهائي كما في النظرية التالية :

(م ٣ – ٩) **نظريـــة** :

افترض أن θ هي زاوية في موضع معياري بنظام احداثيات متعامدة

جا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ قتا θ = $\frac{\text{ر}}{\text{ص}}$ (اذا كانت ص ≠ ٠)

جتا θ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ قا θ = $\frac{\text{ر}}{\text{س}}$ (اذا كانت س ≠ ٠)

ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ (اذا كانت س ≠ ٠)

ظتا θ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ (اذا كانت ص ≠ ٠)

وباستعمال المثلثات المتشابهة يمكن اثبات ان الصيغ المعطاة في (م ٣ – ٩) لا تعتمد على النقطة أ (س ، ص) التي اختيرت لتقع على الضلع النهائي . لاحظ انه اذا كانت ر = ١ فتتحول (م ٣ – ٩) الى (م ٣ – ١) .

ويمكن اعتبار الزاوية الحادة θ زاوية للمثلث القائم الزاوية ويمكن الاشارة لاطوال الوتر ، والضلع المقابل ، والضلع المجاور بالطريقة العادية . ومن الملائم ان نستعمل الاسماء الوتر ، والمقابل ، والضلع للدلالة على هذه الاعداد على الترتيب . وباستعمال نظام الاحداثيات المتعامدة كما في الشكل م ٣ – ٣ ، (٢) نرى أن طولي الضلع المجاور والضلع المقابل للزاوية θ هما الاحداثي السيني والصادي على الترتيب للنقطة أ الواقعة على ضلع θ النهائي . ومن هنا فباستعمال

(م ٣ – ١٠) جا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

قتا θ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ ، قا θ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

ظا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ، ظتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

والصيغ المعطاة في (م ٣ – ١٠) مفيدة للمسائل التي تدور حول المثلثات . وتسمى الصيغ (م ٣ – ٢) – (م ٣ – ٥) بالمتطابقات الرئيسية . واليك متطابقات اخرى تشمل الاقترانات المثلثية :

(م٣-١١) جا (-ع) = - جاع ، جتا (-ع) = جتاع

ظا (-ع) = - ظتا ع ، قتا (-ع) = قتا ع

قا (-ع) = قاع ، ظتا (-ع) = - ظتا ع .

(م-١٢) صيغ الجمع

جا (ع ± ل) = جاع جتال ± جتاع جال

جتا (ع ± ل) = جتا ع جتا ل ± جاع جال

$$\text{ظا (ع} \pm \text{ل)} = \frac{\text{ظاع} \pm \text{ظال}}{١ \pm \text{ظاع ظال}}$$

(م٣-١٣) صيغ ضعف الزاوية

جا ٢ع = ٢ جاع جتاع

جتا ٢ع = جتا^{٢}ع - جا^{٢}ع = ١ - ٢ جا^{٢} ع

= ٢ جتا^{٢} ع - ١ .

$$\text{ظا ٢ع} = \frac{٢ \text{ ظا ع}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{ع}}$$

(م٣-١٤) صيغ نصف الزاوية

$$\text{جا}^{٢}\frac{\text{ع}}{٢} = \frac{١ - \text{جتاع}}{٢} \qquad \text{جتا}^{٢}\frac{\text{ع}}{٢} = \frac{١ + \text{جتاع}}{٢}$$

$$\text{ظا}\frac{\text{ع}}{٢} = \frac{١ - \text{جتاع}}{\text{جاع}} = \frac{\text{جاع}}{١ + \text{جتاع}}$$

(م٣-١٥) صيغ حاصل الضرب

جاع جتان = $\frac{١}{٢}$ [جا (ع+ن) - جا (ع-ن)]

جتاع جان = $\frac{١}{٢}$ [جا (ع + ن) - جا (ع-ن)]

$$\text{جتا ع جتا ن} = \frac{1}{2}\left[\text{جتا (ع + ن)} + \text{جتا (ع − ن)}\right]$$

$$\text{جا ع جا ن} = \frac{1}{2}\left[\text{جتا (ع − ن)} - \text{جتا (ع + ن)}\right]$$

(م ٣ − ١٦) صيغ للعوامل

$$\text{جا ع} \pm \text{جا ن} = 2\ \text{جتا}\ \frac{\text{ع} \pm \text{ن}}{2}\ \text{جا}\ \frac{\text{ع} \pm \text{ن}}{2}$$

$$\text{جتا ع} + \text{جتا ن} = 2\ \text{جتا}\ \frac{\text{ع} + \text{ن}}{2}\ \text{جتا}\ \frac{\text{ع} - \text{ن}}{2}$$

$$\text{جتا ع} - \text{جتا ن} = 2\ \text{جا}\ \frac{\text{ع} + \text{ن}}{2}\ \text{جا}\ \frac{\text{ع} - \text{ن}}{2}$$

تمارين :

١ . حقق القرآت الموجودة في الجدول الذي يسبق (م ٣ − ٨) للدائريات والدرجات .

٢ . حقق (م ٣ − ٤) و (م ٣ − ٥) .

٣ . أوجد القياس الدائري الذي يقابل قياس الدرجات التالية :
٢٢٥° ، ١٥٠° ، − ١٢٠° ، ٢٧٠° ، ٣٠° .

٤ . أوجد قياسات الدرجات المقابلة للقياسات الدائرية التالية

$$-\frac{\pi}{4}\ ،\ \frac{7\pi}{6}\ ،\ 3\pi\ ،\ -\frac{4\pi}{3}\ ،\ \frac{5\pi}{2}\ .$$

في التمارين ٥ − ٨) أوجد قيم الاقترانات المثلثية الستة عند الزاوية

٥ . $\theta = 90°$

٦ . $\theta = 330°$

٧ . $\theta = \frac{3\pi}{4}$

٨ . $\theta = 3\pi$

٩ . تقابل الزاوية المركزية θ قوسا طوله ٥ انشات على دائرة نصف قطرها ٣ انشات .

(أ) أوجد قياس θ بالدائري وبالدرجات

(ب) أوجد مساحة القطعة الدائرية المعينة بالزاوية .

١٠ . أوجد طول القوس المعين بزاوية مركزية قدرها ٤٠° في دائرة نصف قطرها ٦ انشات .

حقق المتطابقات في التمارين ١١ – ١٤ .

١١ . $\frac{\text{جتا ن}}{\text{١ – جا ن}} = \text{قا ن} + \text{ظا ن}$

١٢ . $\text{ظا}^{٢}\theta \ \text{جا}^{٢}\theta = \text{ظا}^{٢}\theta - \text{جا}^{٢}\theta$.

١٣ . $\text{جا}^{٤}\theta = \frac{٣}{٨} - \frac{١}{٢}\ \text{جتا}\ ٢\theta + \frac{١}{٨}\ \text{جتا}\ ٤\theta$.

١٤ . جا ٤ س = ٤ جتا س جا س (١ – ٢ جا^{٢} س) .

في التمارين ١٥ – ١٨ أوجد حلول المعادلات المعطاة في الفترة [٠ ، ٢ π] .

١٥ . ٢ جا^{٢} س + جا ن – ١ = ٠

١٦ . جا θ + جتا θ = ١

١٧ . جتا س – جا ٢ س = ٠

١٨ . ظا ٢ س = ظا س

١٩ . استعمل (م ٣ – ١٢) لاثبات (م ٣ – ١٣)

٢٠ . استعمل (م ٣ – ١٣) لاثبات (م ٣ – ١٤)

الملحـق الرابع

الجـداول

الجدول الاول : الاقترانات المثلثية

درجات	دائري	جـا	ظـا	ظتـا	جتـا		
٠	٠,٠٠٠	٠,٠٠٠			١,٠٠٠	١,٥٧١	٩٠
١	٠,٠١٧	٠,٠١٧	٠,٠١٧	٥٧,٢٩	١,٠٠٠	١,٥٥٣	٨٩
٢	٠,٠٣٥	٠,٠٣٥		٢٨,٦٤	١,٩٩٩	١,٥٣٦	٨٨
٣	٠,٠٥٢	٠,٠٥٢	٠,٠٥٢	١٩,٠٨١	٠,٩٩٩	١,٥١٨	٨٧
٤	٠,٠٧٠	٠,٠٧٠	٠,٠٧٠	١٤,٢٠١	٠,٩٩٨	١,٥٠١	٨٦
٥	٠,٠٨٧	٠,٠٨٧	٠,٠٨٧	١١,٤٣٠	٠,٩٩٦	١,٤٨٤	٨٥
٦	٠,١٠٥	٠,١٠٥	٠,١٠٥	٩,٥١٤	٠,٩٩٥	١,٤٦٦	٨٤
٧	٠,١٢٢	٠,١٢٢	٠,١٢٣	٨,١٤٤	٠,٩٩٣	١,٤٤٩	٨٣
٨	٠,١٤٠	٠,١٣٩	٠,١٤١	٧,١١٥	٠,٩٩٠	١,٤٣١	٨٢
٩	٠,١٥٧	٠,١٥٦	٠,١٥٨	٦,٣١٤	٠,٠٨٨	١,٤١٤	٨١
١٠	٠,١٧٥	٠,١٧٤	٠,١٧٦	٥,٦٧١	٠,٩٨٥	١,٣٩٦	٨٠
١	٠,١٩٢	٠,١٩١	٠,١٩٤	٥,١٤٥	٠,٩٨٢	١,٣٧٩	٧٩
١٢	٠,٢٠٩	٠,٢٠٨	٠,٢١٣	٤,٧٠٥	٠,٩٧٨	١,٣٦١	٧٨
١٣	٠,٢٢٧	٠,٢٢٥	٠,٢٣١	٤,٣٣١	٠,٩٧٤	١,٣٤٤	٧٧
١٤	٠,٢٤٤	٠,٢٤٢	٠,٢٤٩	٤,٠١١	٠,٩٧٠	١,٣٢٦	٧٦
١٥	٠,٦٢٦	٠,٢٥٩	٠,٢٦٨	٣,٧٣٢	٠,٩٦٦	١,٣٠٩	٧٥
١٦	٠,٢٧٩	٠,٢٧٦	٠,٢٨٧	٣,٤٨٧	٠,٩٦١	١,٢٩٢	٧٤
١٧	٠,٢٩٧	٠,٢٩٢	٠,٣١٦	٣,٢٧١	٠,٩٥٦	١.٢٧٤	٧٣
١٨	٠,٣١٤	٠,٣٠٩	٠,٣٢٥	٣,٠٧٨	٠,٩٥١	١.٣٥٧	٧٢
١٩	٠,٣٣٢	٠,٣٢٦	٠,٣٤٤	٢,٩٠٤	٠,٩٤٦	١,٢٣٩	٧١
٢٠	٠,٣٤٩	٠,٣٤٢	٠,٣٦٤	٢,٧٤٧	٠,٩٤٠	٠,٢٢٢	٧٠
٢١	٠,٣٦٧	٠,٣٥٨	٠,٣٨٤	٢,٦٠٥	٠,٩٣٤	١,٢٠٤	٦٩
٢٢	٠,٣٨٤	٠,٣٧٥	٠,٤٠٤	٢,٤٧٥	٠,٩٢٧	٠,١٨٧	٦٨
٢٣	٠,٤٠١	٠,٣٩١	٠,٤٢٤	٢,٣٥٦	٠,٩٢١	١,١٦٩	٦٧
٢٤	٠,٤١٩	٠,٤٠٧	٠,٤٤٥	٢.٢٤٦	٠,٩١٤	١,١٥٢	٦٦
		جتا	ظتا	طا	جا	دائري	درجات

الجدول ٢ . الاقترانات الأسية :

س	$e^{س}$	$e^{-س}$
٠,٠	١,٠٠	١,٠٠
٠,١	١,١١	٠,٩٠٥
٠,٢	١,٢٢	٠,٨١٩
٠,٣	١,٣٥	٠,٧٤١
٠,٤	١,٤٩	٠,٦٧٠
٠,٥	١,٦٥	٠,٦٠٧
٠,٦	١,٨٢	٠,٥٤٩
٠,٧	٢,٠١	٠,٤٩٧
٠,٨	٢,٢٣	٠,٤٤٩
٠,٩	٢,٤٦	٠,٤٠٧
١,٠	٢,٧٢	٠,٣٦٨
١,١	٣,٠٠	٠,٣٣٣
١,٢	٣,٣٢	٠,٣٠١
١,٣	٣,٦٧	٠,٢٧٣
١,٤	٤,٠٦	٠,٢٤٧
,٥	٤,٤٨	٠,٢٢٣
١,٦	٤,٩٥	٠,٢٠٢
١,٧	٥,٤٧	٠,١٨٣
١,٨	٦,٠٥	٠,١٦٥
١,٩	٦,٦٩	٠,١٥٠
٢,٠	٧,٣٩	٠,١٣٥
٢,١	٨,١٧	٠,١٢٢
٢ ٢	٩,٠٢	٠,١١١
٢,٣	٩,٩٧	٠,١٠٠
٢,٤	١١,٠	٠,٠٩١
٢,٥	١٢,٢	٠,٠٨٢
٢,٦	١٣,٥	٠,٠٧٤
٢,٧	١٤,٩	٠,٠٦٧
٢,٨	١٦,٤	٠,٠٦١
٢,٩	١٨,٢	٠,٠٥٥

س	$e^{س}$	$e^{-س}$
٣,٠	٢٠,١	٠,٠٥٠
٣,١	٢٢,٢	٠,٠٥٤
٣,٢	٢٤,٥	٠,٠٤١
٣,٣	٢٧,١	٠,٠٣٧
٣,٤	٣٠,٠	٠,٠٣٣
٣,٥	٣٣,١	٠,٠٣٠
٣,٦	٣٦,٦	٠,٠٢٧
٣,٧	٤٠,٤	٠,٠٢٥
٣,٨	٤٤,٧	٠,٠٢٢
٣,٩	٤٩,٤	٠,٠٢٠
٤,٠	٥٤,٦	٠,٠١٨
٤,١	٦٠,٣	٠,٠١٧
٤,٢	٦٦,٧	٠,٠١٥
٤,٣	٧٣,٧	٠,٠١٤
٤,٤	٨١,٥	٠,٠١٢
٤,٥	٩٠,٠	٠,٠١١
٤,٦	٩٩,٥	٠,٠١٠
٤,٧	١١٠,٠	٠,٠٠٩١
٤,٨	١٢٢,٠	٠,٠٠٨٢
٤,٩	١٣٤,٠	٠,٠٠٧٤
٥,٠	١٤٨,٠	٠,٠٠٦٧
٥,١	١٦٤,٠	٠,٠٠٦١
٥,٢	١٨١,٠	٠,٠٠٥٥
٥,٣	٢٠٠,٠	٠,٠٠٥٠
٥,٤	٢٢١,٠	٠,٠٠٤٥
٥,٥	٢٤٥,٠	٠,٠٠٤١
٥,٦	٢٧٠,٠	٠,٠٠٣٧
٥,٧	٢٩٩,٠	٠,٠٠٣٣
٥,٨	٣٣٠,٠	٠,٠٠٣٠
٥,٩	٣٦٥,٠	٠,٠٠٢٧

الجدول ١ . الاقترانات المثلثيـة (تكملة)

درجات	جتا	ظتا	ظا	جا	دائري	درجات
٢٥	٠,٤٣٦	٠,٤٢٣	٠,٤٦٦	٢,١٤٤	٠,٩٠٦	١,١٣٤	٦٥
٢٦	٠,٤٥٤	٠,٤٣٨	٠,٤٨٨	٢,٠٥٠	٠,٨٩٩	١,١١٧	٦٤
٢٧	٠,٤٧١	٠,٤٥٤	٠,٥١٠	١,٩٦٣	٠,٨٩١	١,١٠٠	٦٣
٢٨	٠,٤٨٩	٠,٤٦٩	٠,٥٣٢	١,٨٨١	٠,٨٨٣	١,٠٨٢	٦٢
٢٩	٠,٥٠٦	٠,٤٨٥	٠,٥٥٤	١,٨٠٤	٠,٨٧٥	١,٠٦٥	٦١
٣٠	٠,٥٢٤	٠,٥٠٠	٠,٥٧٧	١,٧٣٢	٠,٨٦٦	١,٠٤٧	٦٠
٣١	٠,٥٤١	٠,٥١٥	٠,٦٠١	١,٦٦٤	٠,٨٥٧	١,٠٣٠	٦٩
٣٢	٠,٥٥٩	٠,٥٣٠	٠,٦٢٥	١,٦٠٠	٠,٨٤٨	١,٠١٢	٥٨
٣٣	٠,٥٧٦	٠,٥٤٥	٠,٦٤٩	١,٥٤٠	٠,٨٣٩	٠,٩٩٥	٥٧
٣٤	٠,٥٩٣	٠,٥٥٩	٠,٦٧٥	١,٤٨٣	٠,٨٢٩	٠,٩٧٧	٥٦
٣٥	٠,٦١١	٠,٥٧٤	٠,٧٠٠	١,٤٢٨	٠,٨١٩	٠,٩٦٠	٥٥
٣٦	٠,٦٢٨	٠,٥٨٨	٠,٧٢٧	١,٣٧٦	٠,٨٠٩	٠,٩٤٢	٥٤
٣٧	٠,٦٤٦	٠,٦٠٢	٠,٧٥٤	١,٣٢٧	٠,٧٩٩	٠,٩٢٥	٥٣
٣٨	٠,٦٦٣	٠,٦١٦	٠,٧٨١	١,٢٨٠	٠,٧٨٨	٠,٩٠٨	٥٢
٣٩	٠,٦٨١	٠,٦٢٩	٠,٨١٠	١,٢٣٥	٠,٧٧٧	٠,٨٩٠	٥١
٤٠	٠,٦٩٨	٠,٦٤٣	٠,٨٣٩	١,١٩٢	٠,٧٦٦	٠,٨٧٣	٥٠
٤١	٠,٧١٦	٠,٦٥٦	٠,٨٦٩	١,١٥٠	٠,٧٥٥	٠,٨٥٥	٤٩
٤٢	٠,٧٣٣	٠,٦٦٩	٠,٩٠٠	١,١١١	٠,٧٤٣	٠,٨٣٨	٤٨
٤٣	٠,٧٥٠	٠,٦٨٢	٠,٩٣٣	١,٠٧٢	٠,٧٣١	٠,٨٢٠	٤٧
٤٤	٠,٧٦٨	٠,٦٩٥	٠,٩٦٦	١,٠٣٦	٠,٧١٩	٠,٨٠٣	٤٦
٤٥	٠,٧٨٥	٠,٧٠٧	١,٠٠٠	١,٠٠٠	٠,٧٠٧	٠,٧٨٥	٤٥
درجات	دائري	جـا	ظـا	ظتا	جتا		

الجدول ٣ . اللوغرتمات الطبيعية

ن	٠,٠	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩
٠*	٧,٦٩٧	٨,٣٩١	٨,٧٩٦	٩,٠٨٤		٩,٣٠٧	٩,٤٨٩	٩,٦٤٣	٩,٧٧٧	٩,٨٩٥
١	٠,٠٠٠	٠,٠٩٥	٠,١٨٢	٠,٢٦٢	٠,٤٠٥	٠,٣٣٦	٠,٤٧٠	٠,٥٣١	٠,٥٨٨	٠,٦٤٢
٢	٠,٦٩٣	٠,٧٤٢	٠,٧٨٨	٠,٨٣٣	٠,٩١٦	٠,٨٧٥	٠,٩٥٦	٠,٩٩٣	١,٠٣٠	١,٠٦٥
٣	١,٠٩٩	١,١٣١	١,١٦٣	١,١٩٤	١,٢٥٣	١,٢٢٤	١,٢٨١	١,٣٠٨	١,٣٣٥	١,٣٦١
٤	١,٣٨٦	١,٤١١	١,٤٣٥	١,٤٥٩	١,٥٠٤	١,٤٨٢	١,٥٢٦	١,٥٤٨	١,٥٦٩	١,٥٨٩
٥	١,٦٠٩	١,٦٢٩	١,٦٤٩	١,٦٦٨	١,٧٠٥	١,٦٨٦	,٧٢٣	١,٧٤٠	١,٧٥٨	١,٧٧٥
٦	١,٧٩٢	١,٨٠٨	١,٨٢٥	١,٨٤١	١,٨٧٢	١,٨٥٦	١,٨٨٧	١,٩٠٢	١,٩١٧	١,٩٣٢
٧	١,٩٤٦	١,٩٦٠	١,٩٧٤	١,٩٨٨	٢,٠١٥	٢,٠٠١	٢,٠٢٨	٢,٠٤١	٢,٠٥٤	٢,٠٦٧
٨	٢,٠٧٩	٢,٠٩٢	٢,١٠٤	٢,١١٦	٢,١٤٠	٢,١٢٨	٢,١٥٢	٢,١٦٣	٢,١٧٥	٢,١٨٦
٩	٢,١٩٧	٢,٢٠٨	٢,٢٣٠	٢,٢٤١		٢,٢٥١	٢,٢٦٢	٢,٢٧٢	٢,٢٨٢	٢,٢٩٣
١٠	٢,٣٠٣	٢,٣١٣	٢,٣٢٢	٢,٣٣٢	٢,٣٥١	٢,٣٤٢	٢,٣٦١	٢,٣٧٠	٢,٣٨٠	٢,٣٨٩

* اطرح ١٠ اذا كانت ن > ١ . فمثلا لط ٠,٣ ≃ ٨,٧٩٦ − ١٠ = − ١,٢٠٤

الملحق الخامس

قواعـد هندسية

من الرموز التي تستعمل مرارا في هذا الكتاب الرموز التالية :

ر = نصف القطر

ع = الارتفاع

ل (أ و ق) طول القاعدة

ف = المساحة

ح = المحيط

ح (أو ج) = الحجم

س = مساحة السطح المنحني

م = مساحة القاعدة

وصيغ مساحات ومحيط الدائرة والحجوم ومساحة السطح المنحني هي كما يلي :

المثلث $\quad ف = \frac{١}{٢} \text{ ق ع}$

الدائرة $\quad ف = \pi \text{ ر}^{٢}$

$ح = ٢ \pi \text{ ر}$

متوازي الاضلاع	$ف = ل \times ع$
شبه المنحرف	$ف = \frac{1}{2} (ل + ق) \times ع$
الاسطوانة الدائرية القائمة	$ح = \pi \times ر^2 \times ع$
	$س = 2 \times \pi \times ر \times ع$
المخروط الدائري القائم	$ح = \frac{1}{3} \times \pi \times ر^2 \times ع$
	$س = ر \times \pi \times \sqrt{ر^2 + ع^2}$
الكرة	$ج = \frac{4}{3} \times \pi \times ر^3$
	$ح = 4 \times \pi \times ر^2$
المنشور	$ج = ج \times ع$
الهرم	$ج = \frac{1}{3} ح \times ع$.

قاموس

المصطلحات الواردة في هذا الكتاب ورموزها

abscissa	الاحداثي السيني
absolute valus, |n|	القيمة المطلقة : |ن|
absolute convergence	تقارب مطلق
absolutely	اطلاقاً
acceleration	تسارع
acceleration, angular	تسارع زاويّ
alternating	متبادل ، متناوب
alternating angles	زوايا متبادلة
alternating series	متسلسلة متناوبة
analytical geometry	الهندسة التحليلية
angle	زاوية
angular uelocity	سرعة زاويّة
antiderivative	أصل المشتقة
arbitrary	عشوائي ، اعتباطي
arc	قوس
arc cosine	قوس جيب التمام

are cos, $(\cos^{-1})$	قوجتا ، (جتا$^{-1}$)
arc cosecant	قوس قاطع التمام
arc cosec, (cosec^{-1})	قوقتا ، (قتا$^{-1}$)
arc cotangent	قوس ظل التمام
arc cot, $(\cot^{-1})$	قوظتا ، (ظتا$^{-1}$)
arc sine	قوس الجيب
arc sin, $(\sin^{-1})$	قوجا ، (جا$^{-1}$)
arc secant	قوس القاطع
arc sec, $(\sec^{-1})$	قوقا ، (قا$^{-1}$)
arc tangent	قوس الظل
arc tan, $(\tan^{-1})$	قوظا ، (ظا$^{-1}$)
asymptote	خط تقارب
axes, axis	محاور ، محور
axes, coordinate	المحاور الاحدائية
major axis	المحور الأكبر
minor axis	المحور الأصغر

base	قاعدة
base angles	زوايا القاعدة
belonging, (ϵ)	انتماء ($\ni$)
binomial	ذات الحدين ، حدّانية
binomial theorem	نظرية ذات الحدين
binomial expansion	فك (أو مفكوك) الحدانية
calculus	(حساب) التفاضل والتكامل ، الحسبان
calculus, differential	(حساب) التفاضل
calculus, integral	(حساب) التكامل
cardioid	(المنحنى) القلبي
cartesian	ديكارتي
cartesian coordinates	احداثيات ديكارتية
cartesian product	ضرب ديكارتي
catenary	الكاتينة

boundary conditions	شروط جانبية
boundary values	قيم حاصرة
bound, lower	حاصرة دنيا
bound, upper	حاصرة عليا
bounded	محصور
bounds	حواصر
concave	مقوّس
concave downward	محدب
concave upward	مقعر
concavity	التقوس ، التحدب والتقعر
conchoid	كنكويد
conditional convergence	تقارب مشروط
cone	مخروط
configuration	تشكل

centripetal force vector	متجه القوة المركزية
centroid	مركز الكتلة
chain rule	قاعدة السلسلة
change of variables	تغيير المتغيرات
chord	وتر
circle	دائرة
circle, great	دائرة كبرى
circle, small	دائرة صغرى
circle, unit	دائرة وحدة
circle of curvature	دائرة الانحناء
circular	دائري
circular function	اقتران دائري
circular helix	لولب دائري
circular paraboloid	مكافئي دائري
coefficient	معامل
coefficient, leading	المعامل الأول (المقدم)
complement	متممة
complementary equation	معادلة تكميلية
completeness property	خاصية التمام
complex variable	متغير مركب
component	مركبة (مر)
composite function	اقتران مركب
composition of functions	تركيب الاقترانات
cosecant, hyperboblic	قاطع التمام الزائدي
cosech	قتاز
cosine	جيب التمام
cos	جتا
cosine, hyperbolic	جيب التمام الزائدي
cosh	جتاز
cotangent	ظل التمام
cot	ظتا
cotangent, hyperbolic	ظل التمام الزائدي
coth	ظتاز
critical number	عدد حاسم
cross product	الضرب التصالبي
conic	محروطي
conics	القطوع المخروطية
conic section	قطع مخروطي
conjugate	مرافق ، مترافق
conservative field	حقل محافظ
continuous	متصل ، متواصل
continuity	اتصال ، تواصل
contour curve	منحنى كنتوري
convergence	تقارب
cconvergence, absolute	تقارب مطلق
convergence, conditional	تقارب مشروط
convergent	تقاربي
coordinates	احداثيات
coordinates, cylindrical	احداثيات اسطوانية
coordinates, polar	احداثيات قطبية
coordinates, rectangular	احداثيات متعامدة
coordinates, spherical	احداثيات كروية
coordinate axes	محاور احداثيات
coordinate line	خط احداثيات
coordinate system	نظام احداثيات
correspondence	تناظر
correspondence, one-to-one	تناظر واحد لواحد
cosecant	قاطع التمام
cosec	قتا
cube	مكعب
cubic	تكعيبي
cubic, twisted	تكعيبي ملوي
curl	جعدة (جع ، Δ)
curvature	انحناء
curvature, radius of	نصف قطر الانحناء
curve	منحنى
curve, level	منحنى سويّ
curve, plane	منحنى مستوٍ
curve, smooth	منحنى ممهد
cycloid	دوارة
cycloid, inverted	دوارة مقلوبة

decay, law of	قانون التلاشي
definite	محدد
definite integral	تكامل محدد
defined	معرف
definition	تعريف
degenerate conic	قطع منحل
derived	مشتق
derivative	مشتقة (تفاضلية)
derivative, nth order	مشتقة الرتبة ن
determinant	محددة
differential, (dx)	المفاضل (د س)
differential calculus	حساب التفاضل
differential equation	معادلة تفاضلية
differential equation, partial	معادلة تفاضلية جزئية
differentiation	التفاضل
differentiation, partial	التفاضل الجزئي
direction angles	زوايا اتجاهات
direction cosines	جيوب تمام الاتجاهات
directrix	الخط الدليل
discontinuity	انقطاع
discontinuous	منقطع
disjoint	منفصل
divergence (div)	التباعد (بع)
domain	مجال
dot product	الضرب النقطي ، الداخلي ، القياسي
double integration	التكامل الثنائي

eccentricity	الاختلاف المركزي
element	عنصر
elementary region	منطقة اولية
ellipse	قطع ناقص
ellipsoid, ellipsoidal	(مجسم) ناقصي
elliptic	ناقصي
empty set ($\emptyset$)	المجموعة الخالية $\emptyset$
epicycloid	دوارة علوية
equality	مساواة
equation	معادلة
equation of continuity	معادلة الاستمرارية
equiangular	متساوي الزوايا
equilateral	متساوي الأضلاع
equipotential surface	سطح تساوي الجهد
equivalent	مكافيء
error	خطأ
error, average	متوسط الخطأ
error, relative	خطأ نسبي
evaluation theorem	نظرية التقييم
even number	عدد زوجي
even function	اقتران شفعي
exact equation	معادلة مضبوطة
explicit	صريح
exponent	أس
exponential	أسي
exp	سـا
exponential function, natural	اقتران طبيعي
extrema	قيم ، ذرى
extremum	قمة ، ذروة

family of curves	طائفة منحنيات
figure	شكل
flux	دفق
focal chord	وتر بؤري
foci	بؤرات
focus	بؤرة
function	اقتران ، دالة ، تابع
function, constant	اقتران ثابت
function, hyperbolic	اقتران زائدي
function, identity	اقتران محايد
function, implicit	اقتران ضمني
function, inverse	اقتران عكسي (أو معاكس)

form	شكل ، صيغة
formula	صيغة ، قاعدة ، قانون
four-leaved rose	وردة رباعية
fraction	كسر
fractions, partial	كسور جزئية
free vector	متجه حر
function, inverse hyperbolic	اقتران زائدي معاكس
functions, inverse	اقترانات متعاكسة
function, jump	اقتران قافز
function, linear	اقتران خطي
function, logarithmic (log)	اقتران لوغرتمي (لو)
function, natural logarithmic (ln)	اقتران لوغرتمي طبيعي (لط)
function, quadratic	اقتران تربيعي
function, step	اقتران سلمي
grad (grad.)	مدرج (مج)
gradient	ميلان
graph	مخطط ، رسم بياني ، بيان
Gomperz growth carve	منحنى غمبيرز للتكاثر
govern	يحكم ، يتحكم
growth, law of	قانون التكاثر
gyration. radius of	نصف قطر الدوران
harmonic	توافقي
harmonic motion	سرعة توافقية
helix	(منحنى) لولبي او حلزوني
homogeneous	متجانس
horizontal	افقي
hyperbola	قطع زائد
hyperbolic	زائدي
hyperbolic function	اقتران زائدي
hyperbolic cosecant	قاطع تمام زائدي
hyperbolic cosine	جيب تمام زائدي
hyperbolic cotangent	ظل تمام زائدي
hyperbolic secant	قاطع زائدي
hyperbolic sine	جيب زائدي
hyperbolic tangent	ظل زائدي
hyperbolic paraboloid	مكافيء زائدي
hyperboloid	مجسم (زائدي)
hyperboloid of one sheet	زائدي احادي
hypocycloid	دوارة سفلية
if and only if (iff.)	اذا وفقط اذا
image	صورة
implicit	ضمني
improper integral	تكامل معتل
inclination	زاوية الميل
increment	زيادة (Δ)
independence of path	الاستقلال عن المسار
indeterminate form	صيغة غير معينة
inequality	متباينة
inflection, point of	نقطة انعطاف
initial conditions	شروط ابتدائية
initial point	نقطة ابتداء
inner partition	تجزئة داخلية
inner product	ضرب داخلي (أو نقطي)
instantaneous	آني ،
integer	عدد صحيح
integral (∫)	تكامل (∫)
integral calculus	حساب التكامل

integral, double	تكامل ثنائي
integral, iterated	تكامل تكراري
integral, multiple	تكامل مضاعف
integral, triple	تكامل ثلاثي
integrel, definite	تكامل محدد
integral, indefinite	تكامل غير محدد

inequality, triangle	متباينة مثلثية
inertia	القصور الذاتي
inertia, moment of	عزم القصور الذاتي
infinite	لامتناهٍ
infinite series	متسلسلة لا متناهية
infinity (∞)	اللانهاية (∞)

integrand	مكامَل
integrating factor	معامل تكامل
integration	تكامل
integration by parts	تكامل بالأجزاء
integration, partial	تكامل جزئي
intercept	مقطع
intermediate value theorems	نظرية القيم المتوسطة
interpolation	استكمال
intersection ($\cap$)	تقاطع ($\cap$)
interval	فترة
interval, closed	فترة مغلقة
interval, open	فترة مفتوحة
irrational	لا نسبي ، أصم
irrotational	لا دوراني
inverse	عكسي ، معكوس ، معاكس ، متعاكس
inverse sine ($\sin^{-1}$)	معكوس الجيب (جا$^{-1}$)
inverse cosine ($\cos^{-1}$)	معكوس جيب التمام (حتا$^{-1}$)
inverse tangent ($\tan^{-1}$)	معكوس الظل (ظا$^{-1}$)
inverse cotangent ($\cot^{-1}$)	معكوس ظل التمام (ظتا$^{-1}$)
inverse secant ($\sec^{-1}$)	معكوس القاطع (قا$^{-1}$)
inverse cosecant (cosec^{-1})	معكوس قاطع التمام (قتا$^{-1}$)
inverse hyperbolic sine ($\sinh^{-1}$)	معكوس الجيب الزائدي (جاز$^{-1}$)
inverse hyperbolic cosine ($\cosh^{-1}$)	معكوس جيب التمام الزائدي
inverse hyperholic tangent ($\tanh^{-1}$)	معكوس الظل الزائدي
inverse hyperbolic cotangent ($\coth^{-1}$)	معكوس ظل التمام الزائدي
inverse hyperbolic secant (sech^{-1})	معكوس القاطع الزائدي
inverse hyperbolic cosecant (cosech^{-1})	معكوس قاطع التمام الزائدي
inverse square field	حقل تربيع عكسي
isobar	منحنى تساوي الضغط
isothermal surface	سطح تساوي الحرارة

lamina	صفيحة
Lagrange multipliers	مضروبات لاغرانج
Laplacian (Lap)	لابلاسية (لب)
line, normal	خط عمودي
line, vertical	خط رأسي
line, ruling	راسم

level curve	منحنى سوي
L'Hopital rule	قاعدة لوبتال
limacone	ليماكون
limniscate	لمنسكيت
line	خط ، خط مستقيم
line, horizontal	خط افقي
linear	خطي
linear equation	معادلة خطية
linear relation	علاقة خطية
linear function	اقتران خطي
linearisation	تقريب خطي

magnitude	مقدار
multiple, scalar	مضاعف قياسي
maxima	قمم ، قيم عظمى
maxima, local	قمم (او قيم عظمى) محلية
maximum	قمة ، قيمة عظمى
mean value	قيمة متوسطة
midpoint	منتصف
minima	قيم صغرى
minima, local	قيم صغرى محلية
minimum	قيمة صغرى
moment	عزم
moment of inertia	عزم القصور الذاتي
monotone	وتيري
monotonic	وتيري

neighborhood	جوار
n-leaved rose	وردة ذات ن ورقات
norm ll n ll	مقياس || ن ||
norm of partition ll p ll	مقياس التجزئة || ج ||
normal	عمودي
normal, lower	عمودي سفلي
normal, upper	عمودي علوي
number line	خط الأعداد

odd function	اقتران وتري
odd number	عدد فردي
one-to-one	واحد لواحد
operator	مؤثر ، فاعل
operator, differential (D)	مؤثر تفاضلي (د)
orbit	مدار
ordered pair	زوج مرتب
ordinary equations	معادلات عادية
oriented plane	سطح معدول
origin	نقطة الأصل
orthogonal trajectory	راسم عمودي

parabola	قطع مكافيء
parabolic	مكافيء
paraboloid	(مجسم) مكافئي
paraboloid of revolution	مكافئي دوراني
parameter	(متغير) وسيط
parametric equation	معادلة وسيطية
partial fractions	كسور جزئية
path	مسار
period	دورة
periodic	دوري
polar axis	محور قطبي
polar coordinates	احداثيات قطبية
polar equation	معادلة قطبية
polynomial	حدودية ، كثيرة حدود
position function	اقتران موضع
position vector	متجه موضع
potential	جهد
potential function	اقتران ممكن
power rule	قاعدة القوى
power series	متسلسلة قوى

periodicity	دورية
piecewise	جزءاً جزءاً
piecewise smooth	ممهد جزءاً جزءاً
plane	مستوى ، مستوٍ
plane curve	منحنى مستوٍ
product rule	قاعدة المضروبين
product set	مجموعة حاصل الضرب
product, scalar	ضرب قياسي
product, vector	ضرب متجه
p-series	متسلسلة قوة
quadrangle	رباعي الزوايا
quadratic	تربيعي
quadric surface	سطح تربيعي
quadrilateral	شكل رباعي
quadrilateral, Sacceri	رباعي سكيري
quantity	كمية
quantity, scalar	كمية قياسية
quantity, vector	كمية متجهة
quotient rule	قاعدة المقسومين
radical ($\sqrt{}$)	اشارة الجذر ($\sqrt{}$)
range	مدى
rational	مُنطق ، نسبي
reciprocal	مقلوب
rectify	يعدل
rectifiable	قابل للتعديل
rectilinear	عديل
reduction formula	صيغة اختزال
reflection	انعكاس
region	منطقة
related rates	سرعات مترابطة
removable	زائل
revolution, volume of	حجم دوراني
Riemann sum	مجموع ريمان
rotation of axes	تدوير المحاور
sandwiching theorem	نظرية التشطير السندويش)
section	مقطع
section, conic	مقطع مخروطي
separable	قابل للفصل
sequence	متسلسلة
series	متتالية
series solution	الحل بمتسلسلة
set	مجموعة
set, solution	مجموعة الحل
shell	قشرة
shell, cylindrical	قشرة اسطوانية
simpson's rule	قاعدة سمسون
singular solution	حل منعزل
singularity	نقطة منعزلة
sink	غور
solid revolution	مجسم دوراني
solinoid	لفافة
solinoidal	ملتف
source	نبع
smooth curve	منحنى ممهد
space	فضاء
space curve	منحنى في الفضاء
space, vector	فضاء متجه (مجـ٢ ، مجـ٣)
standard	قياسي ، معياري
subset	مجموعة جزئية
surface of revolution	سطح دوراني

tangent line	مماس
tangent of angle	ظل الزاوية
transcendentul	غير جبري ، متسامٍ
translation	ازاحة ، انسحاب
translation of axes	سحب المحورين
trapezoidal rule	نظرية شبه المنحرف
terminal point	نقطة نهاية
triple scalar product	ضرب قياسي ثلاثي

Union (U)	اتحاد (∪)
unit, unity	وحدة
unit circle	دائرة وحدة
variable	متغير
variable, dependent	دالة ، تابع
variable, independent	متغير مستقل
vector space	فضاء متجه
vector space, 2-dimensional	فضاء متجه ذو بعدين (مج٢)
vector space, 3-dimensional	فضاء متجه ذو ثلاثة ابعاد (مج٣)
vector valued	متجه القيمة
velocity	سرعة متجهة
vertex	رأس
vertices	رؤوس
vector field	حقل متجه
vector field, steady	حقل متجه مستقر
zero vector	متجه صفري
zeros of a function	اصفار الأقتران