طريقتان لحساب مَيْل فَلَك البروج
(من إخراج محمد بن الصبّاح)

للدكتور عبد المجيد نصير
(عضو المجمع)

مقدمـــــة :

فلــك البروج هو الدائرة العظمى على القبــة السماوية ، التـــي تمثل فلــك الشمس في سنة كاملة . وهي تتقاطع مع خــط الاستواء السماوي في نقطتين، هـمــا نقطة الاعتدال الربيعي (نقطة الشرق) ونقطة الاعتدال الخريفـــي ، ويكون فلك الشمس اليومي ، يـــوم الاعتـــدال الربيعي ، هو على وجــه التقريب ، خط الاستواء السماوي . وكذلــك الامر في يـــوم الاعتدال الخريفي ؛ وهمـــا يومان يتساوى فيهما الليـــل والنهـــار . وبعد انقضاء يـــوم الاعتدال الربيعي ، تتقدم الشمس ببطء شمالا على فلك البروج ، ويكون مدارها لأي يـــوم من هاتيك الايـــام دائرة صغرى موازيـــة لدائرة خط الاستواء السماوي . وتقطع هـــذه الدائرة الصغرى الافـــق في نقطة تبعد قليلا أو كثيرا عـــن نقطة المشرق . ومقدار القوس الافقي بين نقطـــة المشرق ونقطة تقاطع الدائـــــــرة الصغرى مع الافق تسمى ساعة المشرق ، ونرمز لهـــا بالرمز θ .

والقوس θ يعتمد على خــط الطول الشمسي λ ، الذي يحدد موضع الشمس بالنسبة الـى فلك البروج ، وعلـى ϕ التي تقيس خــط العرض على الارض بالنسبة الى من يرصد الحركة . أما الفرق بين دائرتي خــط الاستواء وفلك البروج فرمزه ϵ ويسمى ميل فلــك البروج . وهذا المقال يهتــم بمقياس مقدار ϵ اعتمادا على طريقتيــن منقولتين عن فلكي اسلامي اسمه محمد بن الصبــاح .

ومحمــد بن الصباح هو احد اخوة ثلاثة هــم محمد وابرهيــم والحسن ، اهتموا بالهندسة والفلك ، وكانــوا معاصرين لبني موســى المشهورين ، في أيــام الخليفة المأمون ، كما يذكر فؤاد سيزكين [١] ص ٢٥٢ ، ٢٥٣ . وذكرهم ابن النديــم والقفطي . ومن مؤلفات محمــد ابن الصباح : « رسالة في العمــل بساعة المبسوطة » و « رسالة فــي امتحــان موضع الشمس وميلها وساعة مشرقها وكمية مسارها » ؛ وينقل ابو نصر بن عراق مقتطفات من هــذه الرسالة ، ويعلق عليها فــي مخطوطته « رسالة في امتحــان الشمس » ، المنشورة ضمن مجموعــة « رسائل ابي نصر الــى البيروني » ، الصادرة عن هيئــة النشر الشرقية العثمانية بحيدرآباد بالهنــد . ولمحمد بن الصباح رسائل وكتب أخــرى بالاشتراك مع اخوتــه .

والذي نقدمه هنا هو نقــل عن كتاب البيروني « تحديد نهايــات الاماكن لتصحيح مسافات المساكن » المنشور في القاهرة سنة ١٩٦٢ [٢] . ويذكر فيه ، ابتداء من ص ١٤٦ ، (ص ١٤٩ بالمخطوطة) الى ص ١٥٥ (ص ١٦٠ بالمخطوطــة) طريقتين لاستخراج سعــة المشرق الكلــي ، ينسبهما البيروني الى محمد بن الصباح ، نقلا عن استاذه ابــن العراق . ونحــن نقدمهما محققين .

مبــادىء فلكيـــة :

في الشكل الاول نقدم بعض المبادىء الفلكية اللازمة . وتبين س موضع الشمس في اليوم ذي اطول نهــار ، اي تقاطع مــدار السرطان مع فلك البروج . يكون مــدار الشمس في ذلك اليوم دائرة صغرى يقع القطــب الشمالي في موضع قطبهــا . وهذه الدائرة مماسة ايضا لدائرة السرطان . وتقاطع تلك الدائرة مع الافــق هو النقطة المسماة $\theta_{ع}$ (θ العظمى) وتمثل اعظــم قيمة لساعة المشرق . فاذا رسمنا دائرة صغرى اخــرى تمــر بالنقطة $\theta_{ع}$ ، وقطبها هو النقطة ش ، فانهــا تمثل دائرة ساعة المشرق . والآن نسقط دائرة فلــك البروج على دائرة ســاعـــة المشرق . افرض نقطة مــا ، $\lambda_{م}$ ، على فلك البروج . اسقط $\lambda_{م}$ على الافــق لتحصل على $\theta_{م}$ برسم دائرة صغرى توازي خــط الاستواء . ثــم اسقط $\theta_{م}$ على دائــرة ساعة المشرق حسب دائــرة صغرى توازي العمود الرئيسي ش ز ، لتحصل على النقطـــة هـ

وبهـــذا الاسلوب فان صورة نقطة الاعتدال الربيعي ع تصير ع' ، ونحصل على ان درجات القوس ع'م تساوي درجات القوس ع $\lambda_{ا}$ ، وهكذا لجميع النقـــاط على فلك البروج . ومعنى هذا أن حركة الشمس على فلك البروج يمكـــن أن يمثلها حركة على دائـــرة ســاعـــة المشرق وبالسرعة نفسها . وهذا المبـــدا الرياضي كان واضحا لمحمـــد بن الصباح لانه استعمله في طريقته ، ولـــو انـــه لم يبرهن عليه . للبرهان انظـــر المرجـــع [٣] .

طريقة محمــد بن الصباح :

يذكــر البيروني ان محمدا بن الصباح عنده طريق مــن الحساب لاستخراج سعة المشرق الكلي من رصد سعة ثلاثــة مشارق ، على نهاية مدتيــن متتاليتين ، قد أرسله في مقالته مجردا من غير برهان،وهــــو حسن ، وإن بنى أمره على تساهل . ويذكــر البيروني حسابه ، ويستعمل ارصادا فلكية للتدليل عليــه ؛ وفيما يلي نقدم البنية الجبرية الرمزية لمـا يذكــره البيرونـــي .

ورغــم ما ذكره أعلاه عن اسقاط فلك البروج على دائرة ساعة المشرق ، فان البيروني لا يقيس الزوايــا على دائرة فلك المشرق لصعوبة ذلك ، بل يقوم بالقياس على دائــرة أخرى اسمها دائرة الميــل ؛ فاذا أديــر الافق حتى يصبح دائرة خــط الزوال ومعامدا لخــط الاستواء ، فان دائرة ساعة المشرق تصغر حتى تنطبق على دائـــرة الميل ذات نصف قطر يساوي جا ϵ . وعلى هذا فان القياسات علــى الميــل δ م للمسارات λ هي القياسات نفسها على دائـــرة ساعة المشرق من نقطة تقع على خــط استواء الارض. انظر الشكل (٢) .

وهنــا ننبــه الى ان العلاقات المثلثيــة التي استخدمهــا الرياضيــون المسلمون والتي نقدمها فيما يتلـــو ، ونميزهــــا بكتابتها ببنــط غليظ ، مختلفة قليلا عــن العلاقات المثلثيـــة المستخدمة اليــوم ، والعلاقة بينها هي جا أ = ل حا أ ، حيــث

ل هو نصف قطر دائرة التعريف ، ونفرضه = ٦٠ في هذا المقال ، لان ٦٠ هي اساس النظام الستيني • والقياسات المذكورة هي بالنظام السيتني ،حيث الفاصلة المنقوطة (؛) تقوم مقام الفاصلة العشرية • مثلا ؛

٤١؛٥٥ ؛٦ (ستيني) = ٥٥ +٤١ × ٦٠ + ٦ × ٦٠ × ٦٠ = ٢٤١١٥ (عشرى) ثان

وكما نعلم ،فان النظام الستيني يحوى درجات ،دقائق ،وثواني ،وهكذا •

والشكل (٣) منقول عن البيروني (ص ١٤٩) • فالدائرة الكبرى هي فلك البرو ونصف قطرها ر ،والدائرة الصغرى هي دائرة الميل ونصف قطرها ر' = جا ϵ ، حيث ϵ زاوية ميل فلك البروج •

افرض أ = λ ،وهو خط طول الشمس في وقت ما ،فان ميل λ هو أص ،وجيب أص يساوي س ومن المثلثات المتشابهه فان

$$\frac{\text{جا}\ \lambda}{\text{ر}} = \frac{\text{جا}\ \delta}{\text{ر}'} = \frac{\text{جا}\ \delta}{\text{جا}\ \epsilon}$$

ولاى رصدين ى ، ك بحيث ان ط ى = ى ط = ى ك فان س م = م ل • هذا مع افترا انتظام حركة الشمس . وهو من التساهل الذى يذكره البيروني •

ولاشتقاق الطريقة الاولى لابن الصباح ،فاننا نفرض دائرة الميل، الشكل(٤ وافرض الاقواس أب ، أج ، أد تمثل قياسات الرصد الثلاثة δ_1 ، δ_2 ، δ_3 على الترتيب فان ب ج = ج د (الافتراض انتظام حركة الشمس ،ولان القياسات تؤخذ بين اوقات متساوية في فصل واحد) •

فان الاقواس د ز = د هـ = ٢ب ج + ٢ أب = ٢ أ ج •

لذلك ب هـ = ٢ جا δ_1 = م$_1$

دز = ٢ جا δ_2 = م$_2$

ب ز = ٢جا δ_2 = م$_3$

ويسمى البيروني م ز = د ب = و بـالوتر المستخرج

د م = د ز ـ م ز = هـ د ـ ب د = هـ ب = م$_1$

وكذلك $\text{هـ ز} = \text{ب ز} + \text{ب هـ} = \frac{\text{م}_{١} + \text{م}_{٣}}{٢}$ ،حيث اعتبرنا هـ ب ز خطا

وبتطبيق نظرية بطليموس على ب ز م د فان

$$\text{م}_{٢}^{٢} = \text{م}_{١}\,\text{م}_{٣} + \text{و}^{٢}$$

$$\text{ع}^{٢} = \text{م}_{٢}^{٢} - \left(\frac{\text{م}_{١} + \text{م}_{٣}}{٢}\right)^{٢}$$

ومنها $\text{و} = \left(\text{م}_{٢}^{٢} - \text{م}_{١}\,\text{م}_{٣}\right)^{\frac{١}{٢}}$ ، $\text{ع} = \left[\text{م}_{٢}^{٢} - \left(\frac{\text{م}_{١} + \text{م}_{٣}}{٢}\right)^{٢}\right]^{\frac{١}{٢}}$

ومن تشابه المثلثين د هـ ب ،د زط فان

$$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ز}} = \frac{\text{د ي}}{\text{د ط}} \text{ ، اى ان } \frac{\text{ع}}{\text{م}_{٢}} = \frac{\text{و}}{٢\,\text{ر}} = \frac{\text{و}}{٢\,\underline{\text{جا}}\,\epsilon}$$

لذلك $\text{جا}\,\epsilon = \frac{\text{و} \cdot \text{م}_{٢}}{٢\,\text{ع}}$

او $\epsilon = \text{معكوس}\,\underline{\text{حا}}\,\frac{\text{و}\cdot\text{م}_{٢}}{٢\,\text{ع}}$

الرصد الفلكي

تتطلب هذه الطريقة ثلاثة ارصاد على فترات متساوية رفي الربع ذاته ، ولذلك فان البيروني قام بالقياسات في مرصده بخوارزم (الآن تحت الحكم السوفيتي) ،حيث درجة العرض ϕ = ١٧،٤٢° .

وقاس الزوايا δم عند ساعة الزوال على فترات متساوية مدة كل منها ثلاثون يوما . والقياس الاول يوم الجمعه بتاريخ ٢ مرداد سنة ٣٨٥ (بعد يزدجرد) الموافق ٣ صفر سنة ٧٠٤ للهجرة والموافق ١١ تموز سنة ١٠١٦ م والقياسات هي $\delta_{١}$ = ٢٨ ،٢١° ، $\delta_{٢}$ = ٠ ،١٤° ، $\delta_{٣}$ = ١٢ ،٣٠°

على ان البيروني يبدل $\delta_{١}$ ، $\delta_{٣}$ ليحفظ ترتيب الزوايا .

الحسابات

هناك بعض الاخطاء في الحسابات التي يذكرها البيروني في كتابه . وهو
الارقام اما بالحروف على طريقة حساب الجمل ، او بالنظام العشرى .
الحسابات كما يذكرها البيروني ،ونضع بين حاصرتين < > الص
يجب . ونرجح ان البيروني لم يخطىء . بل ان الخطأ قد جاء ربما من ن
الذين حسبوا او كتبوا .

$\text{م}_{\text{١}}$ = ١٥، ٤١، ٦؛ والصحيح < ٤٢٥٥، ٦٠ >

$\text{م}_{\text{٢}}$ = ٥٠، ١٠، ٢٩؛

$\text{م}_{\text{٣}}$ = ٥٥، ٥٤، ٤٣؛

$\dfrac{\text{م}_{\text{١}} + \text{م}_{\text{٣}}}{\text{٢}}$ = ٢٥، ١٨، ٢٥؛

وحسب النظام العشري فان $\text{م}_{\text{١}}$ = ٢٤٠٧٥ ثواني < ٢٤١١٥ >

$\text{م}_{\text{٢}}$ = ١٠٤٥١٠ ثواني

$\text{م}_{\text{٣}}$ = ١٥٨٠٩٥ ثواني

$\dfrac{\text{م}_{\text{١}} + \text{م}_{\text{٣}}}{\text{٢}}$ = ٩١١٠٥ ثواني

$\text{م}_{\text{١}} \cdot \text{م}_{\text{٣}}$ = ٣٨١٢٤٦٠٩ روابع

$\text{م}_{\text{٢}}^{\text{٢}}$ = ١٠٩٤٠٣٤٠١٠٠ روابع

$\text{م}_{\text{٢}}^{\text{١}} - \text{م}_{\text{١}} \cdot \text{م}_{\text{٣}}$ = ٧١٢٧٨٧٩١٧٥ < ٧١٠٩٨٧٩١٧٥ > روابع

و = ٨٤٤٢٧ < ٨٤٣٢٠ > ثواني

$\text{م}_{\text{٢}}^{\text{٢}} - \left(\dfrac{\text{م}_{\text{١}} + \text{م}_{\text{٣}}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}}$ = ٢٦٤٠٢١٩٠٧٥ < ٢٦٢٢٢١٩٠٧٥ > روابع

ع = ٥١٣٨٣ ‎< ٥١٢٠٨ < شواني

رَ = ٨٥٨٦٠ شواني < ٨٦٨٦٠> شواني

ج` = ٠ ٢٥٠ ؛ ٢٣° <٣٣، ٢٨، ٢٣°>

تعليق

يعلل البيروني عدم دقة الجواب الى سببين :-

(١) افتراض انتظام حركة الشمس . وقد احتجناه من فرضنا ب ج = ج د . وهذا غير صحيح .

(٢) عدد الخطوات اللازمه لإستخراج الجواب كبير نسبيا ، مما يؤدى الى اغلاط في الحساب والتقدير . خصوصا من حساب الجذور والجيوب .

ونلاحظ ان البيروني ، رغم معرفته بالتساهل الموجود في هذه الطريقة لاعتمادها على فرض غير صحيح، فانه آثر ان يبرهن على عدم دقتها بالرصد والمثل العددى . وهذا مثل آخر على الدقة التي كان يتوخاها العالم المسلم ، وعلى حبه للتجربه ، وتحمله المشاق في سبيل ذلك .

الطريقه الثانيه

وللتغلب على مزالق الطريقة الاولى ، فأن البيروني يقدم لنا طريقا آخر ، وان كان لايجزم بصحة نسبته الى محمد بن الصباح لفساد في النسخه من مقالة ابن الصباح التي كانت وقعت بين يدى البيروني "فاستخرج ابو نصر بن عراق طريقا اما ان يطابق صحيح ذاك ، واما ان يكون طريقا ثالثا" . وهذا الطريق يحتاج الى رصدين للشمس وهي في ربع واحد . ولاشتقاق المعادلة الخاصة فان الخطوات المتبعة هي فيما يلي . انظر الشكل (٥)

ارسم دائرة تمثل سعة المشرق ونصف قطرها يساوى جا ج ، ومركزها ع . افرض القوس أ ب سعة المشرق الاول – اى مقدار الرصد الاول – وخذ على المحيط القوس ب هـ ضعف القوس أ ب . وافرض القوس ب ج سعة المشرق الثاني – اى مقدار الرصد الثاني – وعين ز بحيث ان القوس ب ز ضعف القوس ب ج . نصف القوس

هـ ب ز في د . وانزل د ج عموداً على الوتر ب ز .

$\text{فاذا ب هـ} = ٢ \text{ جا } \theta_{١} = م_{١}$

$\text{ب ز} = ٢ \text{ جا } \theta_{١} = م_{٢}$

$$\text{فان ز ج} = \frac{م_{١}+م_{٢}}{٢}$$

وكذلك د ج = أ ب = ب ج − ب د

$$\text{و} = \text{د ب} = \frac{م_{٢} - م_{١}}{٢} = \text{الوتر المستخرج}$$

ننصف الزاويه د ع ب بالمنصف ع ف . فان الزاويه المركزية د ع ف تساوي الزاويه المحيطية ب ز د وهي الزواية $\frac{\Delta\lambda}{2}$. بينما ع د ف = تمام الزاوية

$\text{د ع ف} = ٩٠^{\circ} - \frac{\Delta\lambda}{2}$

ولذلك فان

$$\frac{\text{زد}}{\text{ز ج}} = \frac{\text{جا } ٩٠}{\text{جا}\left(٩٠ - \frac{\Delta\lambda}{2}\right)} = \frac{\text{ل}}{\text{جتا } \frac{\Delta\lambda}{2}}$$

$$\text{لذلك س} = \text{ز د} = \frac{\text{ل}\left(\frac{م_{١} + م_{٢}}{٢}\right)}{\text{جتا } \frac{\Delta\lambda}{٢}}$$

وفي المثلث ب د ز فان

$$\text{و}^{٢} = \text{ب د}^{٢} = \text{ب ز}^{٢} + \text{ز د}^{٢} - ٢ \text{ ب ز . د ز جتا } \frac{\Delta\lambda}{٢}$$

$$= \text{ز د}^{٢} + م_{٢}^{٢} - ٢ م_{٢} . \left(م_{١} + م_{٢}\right)/٢$$

$$= \text{س}^{٢} - م_{١} . م_{٢}$$

$$\frac{\text{و}}{٢} = \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{م}_{١} \cdot \text{م}_{٢}}}{٢}$$

ومن المثلث ع ف د فان

$$\text{ع د} = \underline{\text{جا}} ؛ = \frac{\text{ل} \cdot \frac{\text{و}}{٢}}{\underline{\text{جا}}\ \frac{\Delta\lambda}{٢}}$$

اى ان $\in$ = معكوس $\underline{\text{جا}}$ $\frac{\text{ل}}{\underline{\text{جا}}^{2}\ \frac{\Delta\lambda}{٢}}$

الرصد الفلكي والحساب

يذكر البيروني رصدين متتاليين بينهما ثلاثون يوما ،كما في الطريقة الاولى

$\delta_{١}$ = ١٢؛ ٣° $\text{م}_{١}$ = ٥٥ ،٤١ ؛٦

$\delta_{٢}$ = ٠ ؛ ١٤ $\text{م}_{٢}$ = ٥٠ ،١ ،٢٩٠

$\frac{\text{م}_{١} + \text{م}_{٢}}{٢}$ = ٣٢ ،٥١ ؛١٧ ⟨ ٥٣ ،٥١ ؛١٧ ⟩ = ⟨ ٦٤٢٩٢ ⟩ثواني

(الخطأ في معدل $\text{م}_{١}$ ، $\text{م}_{٢}$. والارقام مكتوبة بالاحرف ، مما يدل على انها خطأ اصلا ،وليست خطأ كتابيا لكن القيمة الصحيحة هي المستعملة بعد ذلك).

ومن زيج حبش ، يستخرج البيروني

$\Delta\lambda$ = ١٧؛٢٩°

لذلك متمم $\Delta\lambda$ = a = ١٩،٥٧ ؛٥٢° ⟨ ٤٢ ،٥٧ ،١٩ ؛٥٢° ⟩ .

(وليس لهذا الخطأ أثر فيما بعد لأنه لايستعمله).

$\frac{\Delta\lambda}{2}$ = ٣٠، ٣٨؛ ١٤°

جا $\frac{\Delta\lambda}{2}$ = ٥٩، ٩٠؛ ١٥ = ٥٤٥٩٩ ثواني

٩٠° − $\frac{\Delta\lambda}{2}$ = ٣٠، ٢١؛ ٧٥°

حا (٩٠ − $\frac{\Delta\lambda}{2}$) = جتا $\frac{\Delta\lambda}{2}$ = ٠، ٣٠؛ ٨٥ = ٢٠٨٩٨٠ ثواني

ل = ٦٠

س = $\frac{٦٤٢٩٢ \times ٦٠}{٢٠٨٩٨٠}$ = ٥٥، ٢٥؛ ١٨ <٣٢، ٢٧؛ ١٨>

(والخطأ هنا في القسمة ،ويؤثر في الجواب الاخير).

س = ٦٦٣٥٥ <٦٦٤٥٢> ثواني

س^{٢} = ٤٤٠٢٩٨٦٠٢٥ <٤٤١٥٨٦٨٣٠٤> روابع

م$_{١}$. م$_{٢}$ = ٢٥٢٠٢٥٨٦٥٠ روابع

س^{٢} − م$_{١}$. م$_{٢}$ = ١٨٨٢٧٢٧٣٧٥ <١٨٩٥٦٠٩٦٥٤> روابع

و = ٤٣٣٩٠ <٤٣٥٧٢> ثواني

$\frac{و}{٢}$ = ٢١٦٩٥ <٢١٧٨٦> ثواني

جا ε = ٨٥٨٢٨ <٨٥٨٣٢> ثواني
= ٢٨، ٠٥؛ ٢٣ <٣٢، ٠٥؛ ٢٣>

وعليه فان ε = ٢٤،٤٦ ؛ ٢٣° <٤، ٢٤؛ ٢٣°>

ولانعرف القيمة الصحيحة للزاوية ε في ذلك الوقت لكي نقارن بين النتائج .

عرفان (يشكر المؤلف استاذه ادوارد كندى اذ قرأ المسودة وعلق عليها على اخطائها).

المصادر

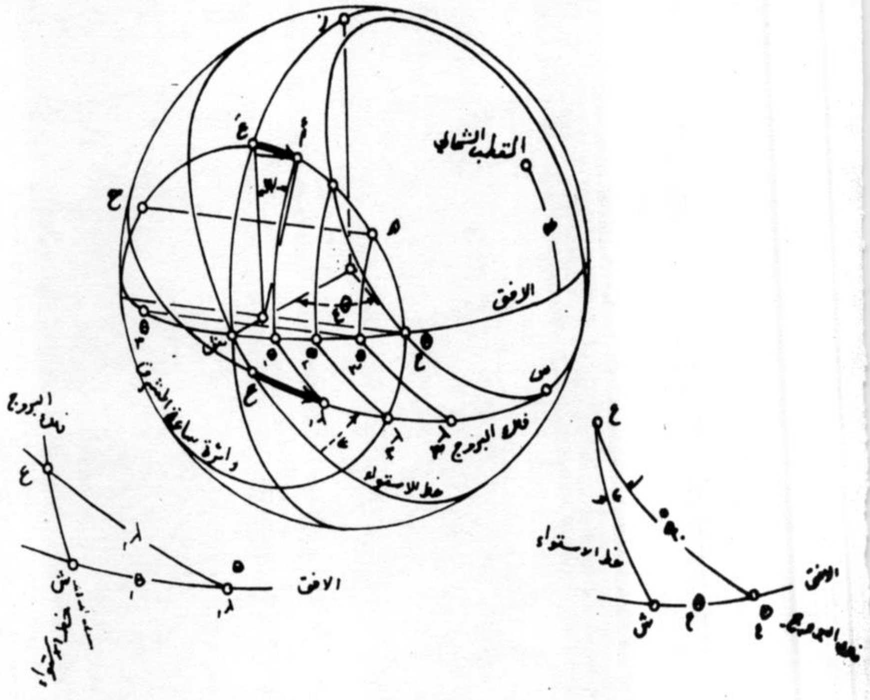
(١) Sezkin , Fuat , Geschichte Des Arabischen Schriftums, Band V , Leiden , 1974.

(٢) البيروني ،ابو الريحان ،" تحديد نهايات الاماكن في تصحيح مسافات المساكن " طبع القاهره ١٩٦٢ .

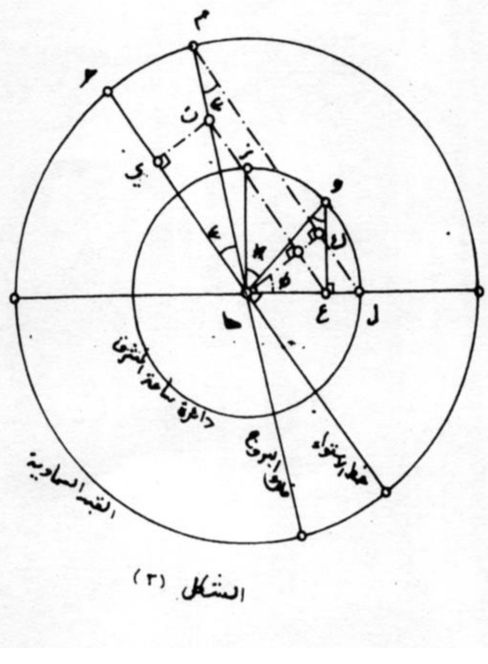
(٣) Kennedy, E.S. and Sharkas , H., " Two Medieval Methods for Determining the obliquity of the Ecliptic", The Mathehmatics Teacher , Vol. LV No 4 , April 1962

(٤) Colliers Encyclopedia , Vol. 5 P604 , Macmillan Educational Corporation , New York.

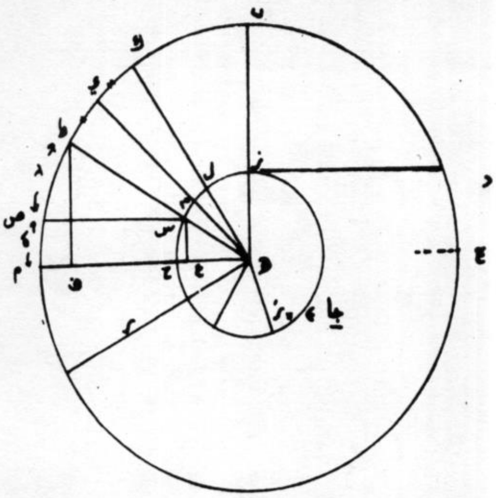
(٥) القفطي ،جمال الدين ابو الحسن علي بن القاضي الاشرف يوسف ،" اخبار العلماء في اخبار الحكماء " دار الآثار للطباعة والنشر والتوزيع، بيروت .



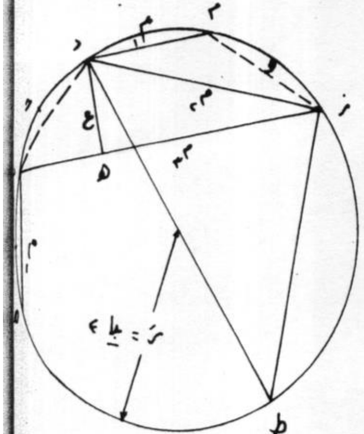
الشكل (١)



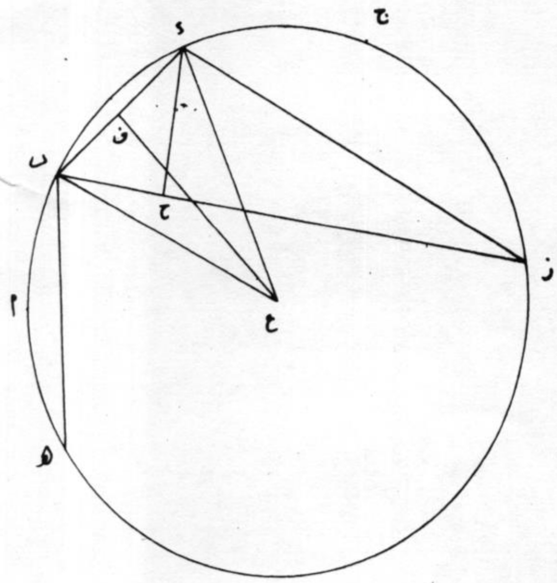
الشكل (٣)



الشكل (٣)



الشكل (٤)



الشكل (٥)