

التركيب المتقطعة

Discrete Structures

الطالبة / علم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
وهندسة الحاسوب

لجنة التأليف

1. الدكتور صادق عثمان الحموز (مقرراً) / جامعة عمان العربية للدراسات العليا
2. الدكتور نعيم العجلوني / جامعة عمان العربية للدراسات العليا
3. الدكتور محمد ضاهر / جامعة الإسراء
4. الأستاذ الدكتور غسان العتيبي / الأكاديمية العربية للعلوم المالية والمصرفية
5. الدكتور غسان عيسى / جامعة العلوم التطبيقية الخاصة
6. الدكتور خالد الكعابنه / جامعة عمان العربية للدراسات العليا

التدقيق اللغوي: الأستاذ الدكتور عبد الفتاح أحمد الحموز / جامعة مؤتة

جميع المراسلات تتم مع مقرر لجنة التأليف

[mailto: sadeq@aaau.edu.jo](mailto:sadeq@aaau.edu.jo)



نشر بدعم من مجمع اللغة العربية الأردني

المملكة الاردنية الهاشمية
رقم الايداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(٢١٠٤/٩/٢٣٠٣ م)

٥١٩,٤

التركيب المتقطعة / إعداد صادق عثمان السمو (مؤلفون)
جرش: المجلد، ٢٠٠٤ .
ر.إ: (٢٠٠٤/٩/٢٣٠٣).
(٤٢٦) ص
الواصفات: / الحواسيب // الرياضيات // علم الحاسوب /

* تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

* رقم الإجازة المتسلسل لدى دائرة المطبوعات والنشر ٢٣٢٧/٩/٢٠٠٤

* رقم الإيداع لدى دائرة المكتبات والوثائق الوطنية ٢٣٠٣/٩/٢٠٠٤



تلفون ٥٦٩٦٦٧٢ فاكس ٥٦٦٧١٧٠

ص.ب ٥٩١ - عمان - ١١١١٨ الأردن

جميع حقوق الطبع والنشر محفوظة

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو أي جزء منه أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات أو نقله بأي شكل من الأشكال (طبع ، تصوير ، نسخ ، ترجمة ، إدخال على الحاسوب بواسطة أقراص ضوئية أو ممغنطة أو أي نوع من وسائط التخزين الثابتة أو القابلة للنقل) دون إذن خطي من مقرر لجنة التأليف.

بسم الله الرحمن الرحيم

الإهداء

إلى مجمع اللغة العربية الأردني

حامل لواء التعريب في الأردن

إلى أساتذة الجامعات والكليات

الغيارى على لغتهم تدريساً وتأليفاً

إلى طلبة الجامعات والكليات

أساتذة المستقبل وحاملي لواء النهضة العلمية

مقرر لجنة التأليف
الدكتور صادق الحموز

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين. والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين. فلقد يسر الله لنا كتابة هذا المؤلف (التراكيب المتقطعة) وهو الذي كان يطلق عليه أحياناً الرياضيات المنفصلة، ودفعه الى المكتبة العربية في عامين. أفدنا من تجربتنا في تدريس مادة التراكيب المتقطعة لفصول دراسية عدة في كلية علم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات في جامعة العلوم التطبيقية الخاصة حيث يدرس مساق التراكيب المتقطعة (Discrete Structures) متطلب كلية إجبارياً لطلبة قسم علم الحاسوب و قسم نظم المعلومات الحاسوبية و هندسة البرمجيات في الفصل الأول من السنة الدراسية الأولى¹. ولقد أقمنا تجربتنا التدريسية في الجامعات الأردنية والكليات والجامعات العربية بوجوب تأليف كتاب في هذا الموضوع ليكون بين يدي الطالب العربي أياً كان مستواه الأكاديمي أو معدله في شهادة الثانوية العامة أو ما يعادلها.

مزايا الكتاب:-

1. الكتاب عربي في سطره ولم أترك فيه مصطلحاً بالإنجليزية إلا وقد وضعت نظيراً له بالعربية يكاد يتفوق على الأصل، إيماناً مني بأن اللغة العربية غنية بمفرداتها وقادرة على استيعاب العلوم كافة وما نجده في دفتي هذا الكتاب دليل ساطع على قدرة لغة الضاد على استيعاب مفردات علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات.
2. لقد قمت شخصياً بطباعة هذا المؤلف للتأكد من خلوه من الأخطاء المطبعية والعلمية. أما الأخطاء اللغوية فقد تكفل بملاحقتها وتصحيحها أخي الحبيب أبو مضر العلامة الأستاذ الدكتور عبد الفتاح الحموز أستاذ النحو والصرف في جامعة مؤتة حفظه الله.
3. إن ترتيب موضوعات الكتاب جاء على وفق ترتيب محاضراتنا في تدريس مادة التراكيب المتقطعة وهو يعكس تجربة وخبرة أكاديمية من الأفضل أن يقتدي بها أساتذة هذه المادة وطلابها.
4. يتميز هذا الكتاب بجدة أسلوبه وتصميمه وتأليفه إذ وضعنا مقابل كل مصطلح عربي ما يقابله في الإنجليزية. وعدد المصطلحات العلمية

¹ مساق التراكيب المتقطعة متطلب إجباري لطلبة تكنولوجيا المعلومات في كل الجامعات والكليات في العالم. ويدرس المساق في فصل واحد أو فصلين دراسيين على حسب التخصص العلمي للطالب.

تزيد على الأربعمائة، ينقل ربيعها للعربية للمرة الأولى وهي مسألة شجعتنا على وضع قاموس لمفردات التراكيب المتقطعة، أفدنا فيه من المصطلحات الواردة في المؤلفات التالية:

أ- منشورات مجمع اللغة العربية الأردني

- (1) مشروع مجمع اللغة العربية الأردني للرموز العلمية والعربية (1985م) للدكتور أحمد سعيدان مقرر لجنة الرموز العلمية والعربية
- (2) قاموس مصطلحات الرياضيات الابتدائية (1987م) للدكتور أحمد سعيدان
- (3) مبادئ التحليل الرياضي. (1984م) ترجمة الدكتور وليد ديب

ب- منشورات أردنية وعربية

- (1) الشامل في الرياضيات العامة. اربد . (1985م). للأستاذ الدكتور عبد المجيد نصير
- (2) قاموس المواكب. الأستاذ ناصر الشوباصي. سلسلة الرضا للمعلومات. دار الرضا للنشر. دمشق. 2000م
5. أتبعنا التعريف العربي نظيره الإنجليزي وهذا كله ينبىء عن أن لغة الضاد قادرة على استيعاب ما يجد من علوم.
6. يحتوي كل فصل في نهايته على عدة تمارين أجيب عنها زيادة على الأمثلة المضمنة أصلاً في الفصل. وذلك لتيسير المادة العلمية للطلبة الدارسين.
7. يحتوي الكتاب على موضوعات متنوعة في التراكيب المتقطعة على وفق ما يأتي: المنطق الرياضي ، نظرية المجموعات ، الاقترانات ، المتتاليات والسلاسل والمصفوفات ، أساليب البرهان والاستقراء الرياضي ، يكون الدارس مؤهلاً لتلقي العلاقات ، علاقات الترتيب ، تراكيب الشجر والجبر البولي. والمعالجة فيها نطمح من خلالها أن تسهم في جذب انتباه الدارس إلى هذه الموضوعات.

لقد أثرت البدء من اليسار إلى اليمين ومن أعلى إلى أسفل في كتابة المعادلات والقوانين الرياضية حيث إن العرب المسلمين هم أول من وضع نظام المنازل العشري الذي يكتب ويقرأ من اليسار إلى اليمين.

و أثرت الحروف اللاتينية في استخدام الرموز العلمية لعدة أسباب:

الأول: من باب التوسعة في مواصلة استخدام رموز أصبحت شائعة ومألوفة في الاستخدام لدى الدارس والمدرس.

الثاني: إغناء اللغة العربية برموز جديدة لايعبينا أبداً استخدامهما، كيف لا والغرب يستخدم الأعداد العربية التي كانت بلا شك أحد أسباب تقدم نهضته العلمية والفكرية.

الثالث: قناعتني الشخصية بأن نتاج جيلنا هو نتاج جيل الجسر الذي ستستخدمه أجيال المستقبل للتغريب التام وليس للتغريب المشوه والمنقوص إدراكه.

الرابع: عدم توافر أشكال الرموز العربية والعلمية التي أقرها مجمع اللغة العربي الأردني في جهاز الحاسوب. لذلك نوصي بأن يعمل المجمع على زيادتها على مجموعة رموز الحاسوب في اللغة العربية لتيسير طباعتها وإشاعة استخدامها.

من الجدير ذكره أن الكتاب قد طبق على ثلاث مجموعات من الطلبة (تم تصنيفهم على حسب التالي: متفوقون ووسط وضعاف القدرات الاستيعابية) فكان الكتاب خير عون لهم في دراسة مادة التراكيب وأخذنا بملاحظاتهم القيمة قبل إرسال الكتاب للطباعة. فإذا كان الطلبة من متوسطي القدرات الاستيعابية ، فإننا نوصي الزملاء المحاضرين بالبدا بتدريس الفصل الثاني (نظرية المجموعات) وتأجيل تدريس المنطق الرياضي إلى حين الوصول إلى الفصل السادس (أساليب البرهان) إذ يقتصر فيه على تدريس الاستقراء الرياضي ولاداعي للخوض في طرق البرهان الأخرى.

وسوف -إن شاء الله- تزداد الموضوعات التالية في الطبعة القادمة:

1. الرسوم البيانية Graphs (تم تحضيره ولكن لم يتم تنقيحه ففضلنا زيادته على الطبعة الثانية)

2. تراكيب التحكم في البرمجة Control Structures in programming

3. علاقات المعاودة Recurrence Relations

4. الاحتمالات المتقطعة Discrete Probability

ولن يخلو جهد بشري من خطأ، وإنني أتحمل مسؤولية هذه الأخطاء جميعاً،
سائلاً الله أن يوفقنا.

وأخيراً نأمل أن نكون قد وفقنا في انجاز كتاب عربي رياضي جامعي، لكي
يكون هو وأمثاله حافزاً لنا ولزملائنا للكتابة في موضوعات جديدة في علوم
الحاسوب المختلفة. والخير أردنا ، والله قصدنا ، وإياه رجونا ، وعليه توكلنا
وإليه أنبنا، وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين.

جرش - المجر الغربي
الأردن

الأثنين 21 رجب 1425 هـ
الموافق 6 أيلول 2004 م

مقرر لجنة التأليف

الدكتور صادق عثمان الحموز

1.....	Mathematical Logic	الفصل الأول: المنطق الرياضي
40.....	Sets Theory	الفصل الثاني: نظرية المجموعات
79.....	Functions	الفصل الثالث: الاقترانات
		الفصل الرابع: المتتاليات، المتسلسلات، المصفوفات
125.....	Sequences, Series, Matrices	
168.....	Combinatorics	الفصل الخامس: الرياضيات التوافقية
		الفصل السادس: أساليب البرهان والاستقراء الرياضي
194.....	Methods of Prove and Mathematical Induction	
216	Relations	الفصل السابع: العلاقات
264.....	Ordered Relations	الفصل الثامن: علاقات الترتيب
304.....	Trees	الفصل التاسع: الشجر
337.....	Boolean Algebra	الفصل العاشر: الجبر البولي
		مصطلحات علمية عربي إنجليزي
375.....	Terminology Arabic English	
		مصطلحات علمية إنجليزي عربي
391.....	Terminology English Arabic	
		مراجع كتب مختارة
407.....	References for Selected Text Books	

1 الفصل الأول

1 Mathematical Logic المنطق الرياضي

2 Atomic Logical Propositions القضايا المنطقية البسيطة

3 Truth Values قيم الصدق

3 Logical Operators العوامل المنطقية

3 Negation النفي

5 Conjunction العطف

7 Properties of Conjunction خصائص العطف

8 Disjunction الاختيار

9 Properties of Disjunction خصائص الاختيار

9 خصائص أخرى للعطف و الاختيار والنفي

10 Exclusive Or (XOR) الاختيار المقصور

11 Implication التضمين

13 Equivalence التكافؤ

تحصيل حاصل، تناقض ومصادفة

15 Tautology, Contradiction, and Contingency

16 Precedence الأسبقية

17 Logical Equivalence التكافؤ المنطقي

18 Logic and Bit Operations المنطق والعمليات الثنائية

20 Normal Form الصيغة الطبيعية

22 Predicate الجملة المفتوحة

23 Quantifiers المسورات

24 Universal Quantification السور الكلي

25 خصائص السور الكلي

26 Existential Quantification السور الجزئي

27 خصائص السور الجزئي

29 The Negation of a Quantified expression نفي العبارة المسورة

31 ملخص جدول خصائص العوامل المنطقية:

32 Solved Problems مسائل محلولة

36 Unsolved Exercises تمارين غير محلولة

37 Terminology المصطلحات العلمية

40 الفصل الثاني

40 Sets Theory نظرية المجموعات

42 The Sets المجموعات

42 The Set المجموعة

43 Singleton Set المجموعة الأحادية العنصر

44 The Empty Set المجموعة الخالية من العناصر

44 Set Membership عضوية المجموعة

45 Describing Sets وصف المجموعات

47 The Sets of Numbers مجموعات الأعداد

47 The Set of Natural Numbers مجموعة الأعداد الطبيعية ط

الموضوع	الصفحة
47 The Set of Integers مجموعة الأعداد الصحيحة ص	47
47 The Set of Rational Numbers مجموعة الأعداد النسبية ك	47
48 The Set of Real Numbers مجموعة الأعداد الحقيقية ح	48
49 Set Cardinality عدد أساس المجموعة	49
50 Subsets مجموعات جزئية	50
50 من خصائص الاحتواء	50
51 Power Set مجموعة القوة	51
53 Sets Equality مجموعات متساوية	53
54 Finite and Infinite Sets مجموعات منتهية وغير منتهية	54
56 The Universal Set and Venn Diagrams المجموعة الشاملة وأشكال فن	56
57 Operations on Sets العمليات على المجموعات	57
58 Sets Union اتحاد المجموعات	58
58 من خصائص الاتحاد:	58
59 Sets Intersection تقاطع المجموعات	59
60 خصائص التقاطع	60
60 Addition Principle قاعدة الجمع	60
61 Sets Difference فرق المجموعات	61
62 خصائص فرق المجموعات:	62
63 Symmetric Difference فرق التناظر	63
Algebraic properties of Set خصائص جبرية للعمليات على المجموعات	
64 Operations الإتحاد والتقاطع المعمم	64
66 Generalized Unions and Intersections تمثيل المجموعات في الحاسوب	66
69 Computer Representation of Sets مسائل محلولة	69
70 Solved Problems تمارين غير محلولة	70
74 Unsolved Exercises المصطلحات العلمية	74
76 Terminology الفصل الثالث	76
79 Functions الاقترانات	79
82 Cartesian Product الضرب الديكارتي	82
83 خصائص الضرب الديكارتي	83
85 Function الاقتران	85
86 الاقتران	86
The Domain and the Range of the Function تعيين النطاق والمدى للاقتران	
88	88
89 Functions Properties of الصفات المميزة للاقترانات	89
89 One-to-one (injective) اقتران واحد- لواحد	89
90 Onto (surjective) الاقتران الشامل	90
92 Everywhere Defined الاقتران في كل مكان	92
93 One-to-one Correspondence (bijective) اقتران تقابل	93
95 Function Inverse معكوس الاقتران	95
96 Composition الاقتران المركب	96

98	معكوس الاقتران المركب
98	الاقتران لقوة n:
98	الإقترانات المتساوية
	نظرية: 981:
	نظرية: 992:
	نظرية 3 99:
101	اقتران التجاهل Overriding
102	اقتران المعاودة Recursive
104	اقتران حافظ الصفة Isomorphism
104	اقتران التباديل Permutations
106	تبديل دوري Cyclic Permutation
107	تجزئة التبديل إلى عدة دورات
	تحديد الدورات: 107
108	التباديل الزوجية والفردية Even and Odd Permutations
109	اقتران الحاسوب Computer Function
109	الانتماء Characteristic
	اقترانا أكبر وأصغر عددا صحيحين Ceiling and Floor functions The
	110
110	اقتران أكبر عدد صحيح The Ceiling function
111	اقتران أصغر عدد صحيح The Floor function
112	مسائل محلولة Solved Problems
120	تمارين غير محلولة Unsolved Exercises
123	المصطلحات العلمية Terminology
125	الفصل الرابع
125	المتتاليات Sequences المتسلسلات Series المصفوفات Matrices
129	صيغ المتتالية Sequence Formulas
129	الأولى: الصيغة البسيطة Explicit Formula
130	الثانية: صيغة المعاودة Recursive Formula
	إرشادات للطالب عليه الاستفادة منها عند إيجاد الحد العام للنوني لمتتالية ما وذلك قبل البدء في كتابة الحل. 134
135	المتسلسلات Series
141	متسلسلات التعرف عليها فيه الإفادة للطالب إن شاء الله
144	المصفوفات Matrices
146	أنواع المصفوفات The Matrices Types
146	المصفوفة الصفرية: Zeros Matrix
146	المصفوفة المربعة: Square Matrix
146	المصفوفة القطرية Diagonal Matrix
146	المصفوفة الذاتية Identity Matrix
147	المصفوفة المثلثية: Triangular Matrix
148	منقول المصفوفة The Transpose of Matrix
148	المصفوفة المتماثلة The Symmetric Matrix

المحتويات	التركيبة المتقطعة
الصفحة	الموضوع
149	حساب المصفوفات Matrix Arithmetic
149	تساوي المصفوفات Matrix Equality
149	جمع المصفوفات Matrix Addition
150	خوارزمية جمع مصفوفتين Algorithm Matrix Addition
151	ضرب المصفوفات Matrix Multiplication
153	خوارزمية ضرب مصفوفتين Algorithm Matrix Multiplication
153	مصفوفة الأس Power of Matrix
153	خصائص حساب المصفوفات Matrix Arithmetic Characteristics of
154	المصفوفات البولية Matrices Boolean
154	حساب المصفوفات البولية Boolean Matrices Arithmetic
155	ضم مصفوفتين صفر - واحد Matrices The Join of two Zero-One
156	لقاء مصفوفتان صفر - واحد Matrices The Meet of two Zero-One
156	الضرب البولي لمصفوفتين صفر - واحد
159	تمارين محلولة Solved exercises
163	تمارين غير محلولة Unsolved exercises
165	المصطلحات العلمية Terminology
168	الفصل الخامس
168	الرياضيات التوافقية Combinatorics
170	اقتران المضروب The Factorial Function
170	قاعدة (1)
170	قاعدة (2)
171	معاملات ذات الحدين Binomial Coefficients
172	قاعدة (3)
172	قاعدة (4)
173	قاعدة (5)
174	نظرية ذات الحدين Binomial Theorem
176	المبدأ الأساسي للعد Fundamental Principle of Counting
177	قاعدة تعميم المبدأ الأساسي للعد Generalization of Fundamental Principle of Counting
178	التباديل Permutations
181	التوافيق Combinations
183	نظرية 1 Theorem One
184	متساوية فاندروني Vandermonde's Identity
184	مخططات الشجرة Tree Diagrams
185	تباديل لمجموعات مكررة فيها بعض العناصر
186	قاعدة (6)
187	التباديل والتوافيق في حالة السحب مع الإعادة
187	Permutations and Combinations with repetitions
188	تمارين محلولة Solved Exercises
192	تمارين غير محلولة Unsolved Exercises
193	المصطلحات العلمية Terminology

الفصل السادس 194

أساليب البرهان والاستقراء الرياضي 194

194 Methods of Proof and Mathematical Induction

195 أساليب البرهان Methods of Proof

195 البرهان المباشر Direct Proof

196 البرهان غير المباشر Indirect Proof

196 1- برهان التناقض Proof by Contradiction

196 2- برهان المعاكس الايجابي Proof by Contrapositive

197 A.Proof by Mathematical Induction برهان الاستقراء الرياضي

201 قوانين التعويض Laws of Substitution

201 نظرية 1 Theorem One (انفصال) Modus Ponens

202 نظرية 2 Theorem Two (قانون التعويض) Law of Substitution

202 نظرية 3 Theorem Three (قوانين دومورغان) De Morgan's Law

203 نظرية 4 Theorem Four (الصيغة الأخرى لقانون التعويض)

203 نظرية 5 Theorem Five

204 نظرية 6 Theorem Six

205 قواعد الاستنتاج Rules of Inference

206 مسائل محلولة Solved Problems

213 تمارين غير محلولة Unsolved Exercises

215 Terminology المصطلحات العلمية

216 الفصل السابع

216 The Relations العلاقات

218 الأزواج المرتبة Ordered Pair

218 تساوي الأزواج المرتبة:

218 مصطلحات Terms

218 العلاقات الثنائية Binary Relations

Sets Arising from Binary Relations مجموعات ناشئة من العلاقات الثنائية

221

221 نطاق Dom(R)

221 مدى Ran(R)

221 مجموعة العناصر المنسوبة لـ x بالعلاقة R (R-Relative x) $R(X)$ مجموعة العناصر المنسوبة لـ A بالعلاقة R (R-Relative A) $R(A)$

221

222 نظرية 1 Theorem one

223 تمثيل العلاقات Representing Relations

223 (a) استخدام المصفوفات Using Matrices

225 (b) استخدام رسم بياني موجه Directed Graph Using

226 مصطلحات Terms

227 حصر العلاقة في مجموعة Restriction of Relation to a Set

227 مركب العلاقات Composition Relational

229 نظرية 2 Theorem Two

الموضوع	الصفحة
المسارات في الرسم البياني الموجهه	230
Directed Graph Paths in	230
معكوس العلاقة	235
Relational Inverse	235
خصائص العلاقات	235
Properties of Relations	235
1. انعكاسية Reflexivity	235
2. غير انعكاسية Irreflexivity	235
3. التماثلية Symmetry	237
4. اللاتماثلية Asymmetry	237
5. التخالفية Antisymmetry	238
6. التعدي Transitivity	240
نظرية 3 Theorem Three	240
مصطلحات Terms	241
مخطط العلاقة Graph of R	241
المجموعة المترابطة (متصلة) Connected Set	242
نظرية 4 Theorem Four	242
7. تكافؤ Equivalence	242
تطابق الباقي Congruence Modulo	244
نظرية 5 Theorem Five	245
تجزئة Partition	246
علاقة التكافؤ والتجزئة Equivalence Relation and Partition	247
نظرية 6 Theorem Six	247
صفوف التكافؤ Equivalence Classes	248
نظرية 7 Seven Theorem	248
نظرية 8 Eight Theorem	248
نظرية 9 Nine Theorem	249
تمارين محلولة Solved Exercises	251
تمارين غير محلولة Unsolved Exercises	259
المصطلحات العلمية Terminology	261
الفصل الثامن	264
علاقات الترتيب Order Relations	264
الترتيب الجزئي Partial Order	266
مقارنة العناصر Comparison Elements	267
مزدوج الترتيب الجزئي Dual Partial Order	268
مجموعة مرتبة كلياً Totally Ordered Set	269
مخططات هاس Hasse Diagrams	269
خطوات رسم مخطط هاس	270
عناصر النهاية العظمى والصغرى Maximal and Minimal Elements	273
النهاية العظمى Maximal Element	273
النهاية الصغرى Minimal Element	273
العناصر العظمى والصغرى The Greatest and the Least Elements	275
العنصر الأعظم The Greatest Element	275

المحتويات	التركيبة المتقطعة
الصفحة	الموضوع
276	The Least Element العنصر الأصغر
276	Theorem One 1 نظرية
277	Theorem Two 2 نظرية
279	The Upper and the Lower Bounds الحدود العليا والدنيا
279	The Least Upper and the Greatest Lower Bounds أصغر حد أعلى وأكبر حد أدنى
280	Theorem Three 3 نظرية
282	Lattice شبك
283	Sub lattice شبك جزئي
284	Special Types of Lattice نماذج خاصة من الشبكات
284	Bounded lattice شبك محدد
284	Distributive lattice شبك توزيعي
286	متعمم العنصر
287	الشبكات المتممة
288	Solved Exercises تمارين محلولة
300	Unsolved Exercises تمارين غير محلولة
303	Terminology المصطلحات العلمية
304	الفصل التاسع
304	الشجر
306	Tree الشجرة Trees
309	Leaves الأوراق
309	Levels of the Tree مستويات الشجرة
309	Height of the Tree ارتفاع الشجرة
310	Ordered Tree الشجرة المرتبة
310	Subtree الشجرة الجزئية
311	Complete n-tree الشجرة النونية التامة
311	Binary Tree الشجرة الثنائية
312	Labeled Trees الشجر الموسوم
314	Searching Tree البحث في الشجرة
315	Binary Search Tree شجرة البحث الثنائي
318	Tree Traversal Algorithms خوارزميات اجتياز الشجرة
318	Prefix Notation or Polish Form تدوين الصيغة البولندية أو الصيغة البولندية
318	تدوين الخلف أو معكوس الصيغة البولندية
319	Infix Notation تدوين الوسط
319	Preorder Algorithm خوارزمية الصدارة
320	Inorder Algorithm خوارزمية الوسط
321	Postorder Algorithm خوارزمية الخلف
324	نسخ شبه برامج خوارزميات اجتياز الشجرة
324	Algorithms Pseudocode Versions for Tree Traversal
325	Searching General Trees البحث المعمم على الشجر
326	Spanning tree الشجرة المولدة
327	Minimal Spanning Trees الأشجار المولدة ذات الأقل تكلفة

	الموضوع	الصفحة
	تمارين محلولة	330
	تمارين غير محلولة؟	335
336	Terminology المصطلحات العلمية	
	الفصل العاشر	337
337	Boolean Algebra الجبر البولي	
339	Boolean Product الضرب البولي	
	Boolean Sum الجمع البولي	339
	Boolean Complement المتمم البولي	339
339	Precedence Rules for Boolean Operators أسبقية التنفيذ لعوامل الجبر البولي	
340	Boolean Expressions and Functions التعبيرات والاقترانات البولية	
342	Identities of Boolean Algebra قواعد الجبر البولي	
	Absorption law قانون الامتصاص	344
345	Dual of Boolean Expression مزدوج التعبير البولي	
	Dual of Boolean Function مزدوج الاقتران البولي	345
346	Representing Boolean Functions تمثيل الاقترانات البولية	
	Sum-of-Products Expansion جمع النواتج الموسع	346
	Minterm الناتج الحرفي	347
	Logic Gates البوابات المنطقية	348
	AND Gate بوابة "و"	348
	OR Gate بوابة "أو"	349
349	Inverter Gate (NOT Gate) بوابة عاكس	
	Combinations of Gates توافقية البوابات	350
353	Examples of Circuits أمثلة الدوائر الكهربائية	
	Flip-Flop الذاكرة القلابة	353
	Half - Adder جامع نصفى	354
355	جدول مدخلات ومخرجات الجامع النصفى	
	Full-Adder الجامع الكلى	355
	جدول مدخلات ومخرجات الجامع الكلى	355
	Minimization of Circuits تصغير الدوائر	356
	Karnugh Maps خرائط كارنوف	357
	خرائط كارنوف لثلاث متغيرات	359
	خرائط كارنوف لأربعة متغيرات	361
	تمارين محلولة	364
373	Terminology المصطلحات العلمية	
375	Terminology Arabic English مصطلحات علمية عربي إنجليزي	
391	Terminology English Arabic مصطلحات علمية إنجليزي عربي	
407	References for Selected Text Books مراجع كتب مختارة	

الفصل الأول

المنطق الرياضي

Mathematical Logic

1.....	الفصل الأول
1.....	المنطق الرياضي
1.....	Mathematical Logic
2.....	Atomic Logical Propositions القضايا المنطقية البسيطة
3.....	Truth Values قيم الصدق
3.....	Logical Operators العوامل المنطقية
3.....	Negation النفي
5.....	Conjunction العطف
7.....	Properties of Conjunction خصائص العطف
8.....	Disjunction الاختيار
9.....	Properties of Disjunction خصائص الاختيار
9.....	خصائص أخرى للعطف و الاختيار والنفي
10.....	Exclusive Or (XOR) الاختيار المقصور
11.....	Implication التضمين
13.....	Equivalence التكافؤ
	Tautology, Contradiction, and تناقض ومصادفة
15.....	Contingency
16.....	Precedence الأسبقية
17.....	Logical Equivalence التكافؤ المنطقي
18.....	Logic and Bit Operations المنطق والعمليات الثنائية
20.....	Normal Form الصيغة الطبيعية
22.....	Predicate الجملة المفتوحة
23.....	Quantifiers المتغيرات
24.....	Universal Quantification $\forall$ السور الكلي
25.....	خصائص السور الكلي
26.....	Existential Quantification $\exists$ السور الجزئي
27.....	خصائص السور الجزئي
29.....	The Negation of a Quantified expression نفي العبارة المسورة
31.....	ملخص جدول خصائص العوامل المنطقية:
32.....	Solved problems مسائل محلولة
36.....	Unsolved Exercises تمارين غير محلولة
36.....	Terminology المصطلحات العلمية

القضايا المنطقية البسيطة Atomic Logical Propositions

القضية المنطقية البسيطة (الأساسية) هي عبارة خبرية تفيد معنى واحداً يمكن أن يكون صواباً أو خطأ ولا يكون صواباً وخطأ في آن واحد.

A proposition is a statement that is either true or false but not both.

مثال (1): قضايا منطقية صائبة

1. عَمَّان عاصمة المملكة الأردنية الهاشمية
2. $8 = 4 + 4$
3. 2 عدد زوجي
4. 3 عدد فردي
5. الأرض دحاها الله

مثال (2): قضايا منطقية خاطئة

1. حلب عاصمة الجمهورية العربية السورية
2. $6 = 2 + 5$
3. صفر أكبر من واحد
4. $2 = 1 * 1$
5. الليل سابق النهار
6. النهار سابق الليل. (الليل والنهار دائماً موجودان معاً منذ خلق الله الشمس والأرض. فسيحان الله الذي يكور الليل على النهار¹ ورحمة الله وبركاته على الشيخ الشعراوي)

مثال (3): عبارات خبرية صائبة و خاطئة في آن واحد وهي ليست قضايا منطقية

1. $x + 1 = 2x$ ، عبارة صحيحة عندما تكون قيمة $x = 1$ و خاطئة لباقي قيم x الأخرى.
2. هل تتكلم اللغة الصينية؟ (صيغة السؤال ليست قضية منطقية)
3. اشتر لي قلماء، من فضلك. (صيغة الأمر ليست قضية منطقية)
4. $5 < x$
5. أنت طالب أنيق! (صيغة التعجب ليست قضية منطقية)
6. لا يوجد شيء على جهاز التلفاز. (عبارة مبهمة و غامضة: هل لا يوجد حقاً ما يستحق المشاهدة على التلفاز من البرامج أو لا يوجد شيء موضوع فوق التلفاز).

¹ الشيخ الإمام محمد متولي الشعراوي. المختار من تفسير القرآن العظيم، الجزء الأول ، مكتبة التراث الاسلامي ، القاهرة 1977م

قيم الصدق Truth Values

كل قضية منطقية بسيطة يمكن إقرانها بإحدى القيم المنطقية التالية التي تدعى قيم الصدق:

1. صواب، أو صحيح، $True (T)$ مثل: "يوم الجمعة هو اليوم الذي يلي الخميس" قضية دائماً صواب؛ وكذلك $2 = 1 + 1$.
2. خطأ، $False (F)$ مثل: " عدد أيام شهر شباط 30 يوماً" قضية دائماً خطأ؛

العوامل المنطقية ² Logical Operators

في التعبير الجبري نستخدم الحروف x, y, z للدلالة على متغير عددي والذي نعوض عنه قيمة محددة عند حساب قيمة التعبير. الأحرف $p, q, r, s, t, \dots$ سترمز إلى متغير قضية، تأخذ قيمًا مختلفة من القضايا المنطقية البسيطة.

القضايا المنطقية البسيطة وقيم الصدق والعوامل المنطقية Logical Operators تشكل معاً قوالب البناء للقضايا المنطقية المركبة Compound Logical Propositions. وأولى العوامل المنطقية هو النفي.

النفي Negation

إذا كانت p قضية، فيمكن التحدث عن نفيها ونرمز لها بـ $\sim p$ ونلفظ (ليست p) وباللغة الإنجليزية نلفظ $NOT p$. إذا كانت القضية p صواباً فإن القضية $NOT p$ تكون خطأ والعكس صحيح. و توضيحاً لذلك، نعطي الجدول التالي الذي يسمى بجدول الصدق للنفي Truth Table for Negation.

p	$\sim p$
T	F
F	T

جدول الصدق للنفي

² العوامل المنطقية أو طرق تكوين القضايا ناقشها عالم الرياضيات الإنجليزي George Boole في كتابه The Laws of Thought ولد عام 1815 في Lincoln إنجلترا. درس مؤلفات الرياضي الفرنسي Lagrange. شغل منصب أستاذ الرياضيات في Queen's College في Cork وتوفي فيها عام 1864.

لاحظ أن عامل النفي يستخدم قضية منطقية بسيطة واحدة هي موضوع النفي. لذلك يسمى معاملاً أحادياً *Unary Operator*، أو عملية أحادية *Unary operation*. العوامل المنطقية مثل: العطف *and* والاختيار *or* والتضمين *implies* و التكافؤ *equivalence* تستخدم قضيتين لتكوين القضية المنطقية المركبة *Compound Logical Propositions* لذلك تسمى عوامل ثنائية *Binary Operators*.

من جدول الصدق لعامل النفي نستنتج الخواص التالية للقضايا المنطقية

1. $(\sim \text{True})$ يكافئ $(\text{False})^3$
2. $(\sim \text{False})$ يكافئ (True)
3. $(\sim \sim P)$ يكافئ (P)
4. $(\sim \sim \text{True})$ يكافئ (True)
5. $(\sim \sim \text{False})$ يكافئ (False)

مثال (1): إذا كانت p "القدس عاصمة فلسطين" فإن $\sim p$ "القدس ليست عاصمة فلسطين" لاحظ إذا كانت p صواباً فإن $\sim p$ خاطئة

مثال (2): اكتب صيغة النفي للقضايا التالية:

1. p "اليوم هو الجمعة"
2. q " $5 + 4 > 3$ "
3. r "It is cold"
4. s " x أكبر من y "
5. t " x علي يحب جمالاً"

الحل:

1. $\sim p$ اليوم ليس هو الجمعة.
2. $\sim q$ $5 + 4 \leq 3$
3. $\sim r$ It is not cold
4. $\sim s$ x أصغر من أو يساوي y
5. $\sim t$ علي لا يحب جمالاً.

تمارين (1) : احسب قيمة الصدق للقضايا التالية

1. $\sim (0 < 4)$

³ سوف نستخدم الرمز $\Leftrightarrow$ بدل كلمة "يكافئ" في الفقرات الآتية

$$2. \sim(2 + 2 = 4)$$

$$3. (الأرض تدور حول الشمس) \sim$$

العطف Conjunction

لتكن p قضية و q قضية أخرى فإن القضية الجديدة p و q ويرمز لها $p \wedge q$ وتلفظ بالإنجليزية p and q وتكون صائبة فقط اذا كان كل من p و q صائبين معاً و إلا خطأ للقيم الأخرى.

Let p and q be two propositions. The new proposition p and q denoted by $p \wedge q$ is true only if both p and q are true and is false otherwise.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

جدول الصدق للعطف

The truth table for Conjunction

مثال (1): لتكن القضية (p) = السماء تمطر والقضية (q) = الشوارع مبللة. فإن القضية الجديدة المركبة من عطف q على p هي $p \wedge q$ = "السماء تمطر و الشوارع مبللة".

مثال (2): أوجد قيمة الصدق للقضية $r = (8 < 8) \wedge (5 < 6)$.

الحل: لتكن القضية $p = 5 < 6$ فإن قيمة الصدق لها صواب ولتكن القضية $q = 8 < 8$ فإن قيمة الصدق لها خاطئة وعليه فإن قيمة الصدق للقضية r خاطئة.

تمارين (1) : أوجد قيمة الصدق للقضايا التالية:

$$1. (11 < 10) \wedge (10 < 11)$$

$$2. (11 \leq 11) \wedge (10 < 11)$$

$$3. (15 < 10) \wedge (15 < 14)$$

تمارين (2) : أوجد جدول الصدق للقضايا التالية:

1. $p \wedge \sim q$ ملاحظة الأعمدة التي يتكون منها جدول الصدق هي عمود

للقضية p و عمود للقضية q و عمود للقضية $\sim q$ و عمود

للقضية $p \wedge \sim q$

2. $p \wedge (True)$

3. $(\sim p) \wedge (\sim q)$

4. $\sim (p \wedge q)$

تمارين (3): ما عدد الأسطر والأعمدة التي يتكون منها جدول الصدق للقضية

$$?(p \wedge q) \wedge r$$

قاعدة تكوين جدول الصدق للقضايا المنطقية

1. إذا كانت n عدد المتغيرات المختلفة للقضايا البسيطة في القضية

المركبة، فإن عدد الأسطر في جدول الصدق هو $2^n + 1$. حيث أضفنا

سطراً لعناوين أعمدة الجدول (ترويسة الجدول) وهي تتكون من أسماء

المتغيرات واسم النتيجة النهائية و أسماء النتائج الفرعية.

2. عدد الأعمدة يساوي $n + 1$ بالإضافة إلى عدد أعمدة النتائج الفرعية

حل تمارين (3): عدد متغيرات القضايا هو 3، وعليه فإن عدد الأسطر هو 9

($2^3 + 1 = 9$) وعدد الأعمدة هو 5 ($2^3 + 1 + 1 = 5$). أما

بخصوص قيم السطور في جدول الصدق، فهي مسارات

الشجرة الآتية من اليسار إلى اليمين، ومن أعلى إلى أسفل.

نعد كل متغير قضية مرحلة من مراحل النمو للشجرة، و

الشجرة تتفرع في هذه المراحل على حسب الاحتمالات

الممكنة للقضية المنطقية من كونها صائبة أو خاطئة. و كل

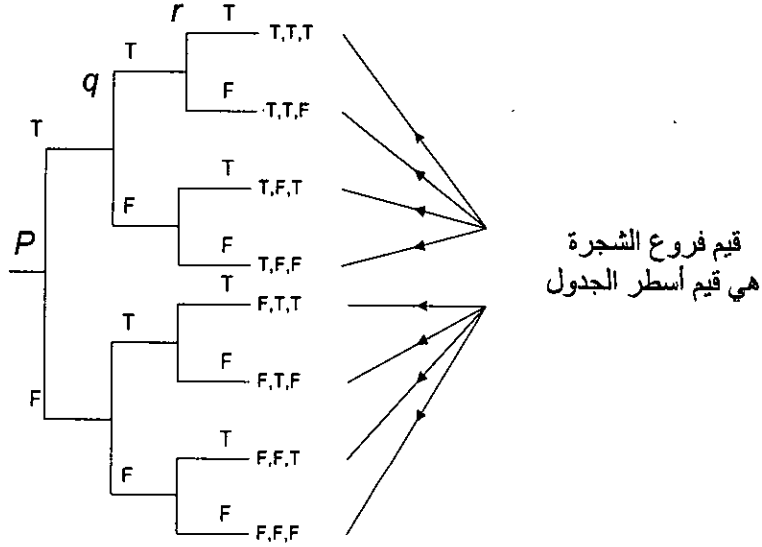
فرع من فروع الشجرة ابتداءً من نقطة البدء إلى آخر

العرق، هو مسار أي سطر في جدول الصدق.

ومجموع الفروع يشكل جدول الصدق للقضية المنطقية.

وعليه يمكن وضع الجدول للقضية على صورة الشجرة

التالية:



جدول الصدق للقضية

$$(p \wedge q) \wedge r$$

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \wedge r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

خصائص العطف Properties of Conjunction

من جدول الصدق للعطف نستنتج الخواص التالية مهما كانت القضايا p, q :

1. $p \wedge p \Leftrightarrow p$ وتسمى خاصية التماثل idempotent

2. $p \wedge \text{True} \Leftrightarrow p$

3. $p \wedge \text{False} \Leftrightarrow \text{False}$

$$(p \wedge (\sim P)) \Leftrightarrow \text{False} \quad 4.$$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p) \quad 5. \text{ وتسمى خاصية التبديل}$$

commutative

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \quad 6. \text{ وتسمى خاصية التجميع}$$

associative

تمارين (4): باستخدام الخواص أعلاه على حسب جدول الصدق لكل من القضايا التالية:

$$(r \wedge \text{False}) \wedge q \quad 1.$$

$$r \wedge (\text{False} \wedge q) \quad 2.$$

الاختيار Disjunction

لتكن p قضية و q قضية أخرى فإن القضية الجديدة " p أو q " ويرمز لها $p \vee q$ وتلفظ بالإنجليزية p or q . وتكون خاطئة فقط إذا كان كل من p أو q خاطئة معاً وإلا صواب للقيم الأخرى.

Let p and q be two propositions. The new proposition p or q denoted by $p \vee q$ is false only if both p and q are false and is true otherwise.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

جدول الصدق للاختيار

The truth table for Disjunction

مثال (1): لتكن القضية (p) = السماء تمطر والقضية (q) = الشوارع مبللة. فإن القضية الجديدة المركبة من اختيار " p أو q " هي $p \vee q$ = "السماء تمطر أو الشوارع مبللة".

مثال (2): أوجد قيمة الصدق للقضية $r = (8 < 8) \vee (5 < 6)$.

الحل : لتكن القضية $p = (5 < 6)$ فإن قيمة الصدق لها صواب ولتكن القضية $q = (8 < 8)$ فإن قيمة الصدق لها خاطئة وعليه فإن قيمة الصدق للقضية r هي صواب.

تمارين (1) : احسب قيمة الصدق للقضايا التالية.

1. $(11 < 10) \vee (10 < 11)$

2. $(11 \leq 11) \vee (10 < 11)$

3. $(15 < 10) \vee (15 < 14)$

تمارين (2) : احسب جدول الصدق للقضايا التالية:

1. $p \vee (\sim q)$

2. $p \vee (\text{True})$

3. $(\sim p) \vee (\sim q)$

4. $\sim (p \vee q)$

خصائص الاختيار *Properties of Disjunction*

من جدول الصدق للاختيار نستنتج الخواص التالية مهما كانت القضايا p, q :

1. $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ وتسمى خاصية التماثل idempotent

2. $(p \vee \text{True}) \Leftrightarrow \text{True}$

3. $(p \vee \text{False}) \Leftrightarrow p$

4. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ وتسمى خاصية التبديل commutative

5. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ وتسمى خاصية التجميع associative

خصائص أخرى للعطف و الاختيار والنفي

من جدول الصدق للاختيار و العطف والنفي نستنتج الخواص التالية مهما كانت

القضايا p, q, r :

1. قوانين دومورغان ⁴ De Morgan's Laws

1. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$

⁴ Augustus De Morgan ولد في الهند عام 1806م من أب كولونيل يعمل في الجيش الإنجليزي. درس في Trinity College, Cambridge وتخرج فيها عام 1827م. عمل في إحدى جامعات لندن University College. أهم مؤلفاته Mathematical Induction. كتب أكثر من ألف مقالة علمية واهتم بتاريخ الرياضيات وتوفي عام 1871م.

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q)) \quad \text{II}$$

$$\text{True} \Leftrightarrow ((p) \vee (\sim p)) \quad 2.$$

3. خاصية التوزيع distributive

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \text{I}$$

$$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad \text{II}$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{III}$$

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \quad \text{IV}$$

جدول الصدق لقوانين دومورغان

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T

تمارين (3): هل القضية (s) تكافئ (t) ؟

$$\text{True} \vee (\text{True} \wedge \text{False}) : (s) \quad 1.$$

$$(\text{True} \vee \text{True}) \wedge (\text{True} \vee \text{False}) : (t)$$

$$p \wedge q : (t)$$

$$p \wedge ((\sim p) \vee q) : (s) \quad 2.$$

$$(p \wedge q) \vee (\sim p) : (t)$$

$$q \vee (\sim p) : (s) \quad 3.$$

الاختيار المقصور⁵ Exclusive Or (XOR)

لتكن p قضية و q قضية أخرى فإن القضية الجديدة " p أو المقتصرة q " ويرمز لها $p \oplus q$ وتلفظ بالإنجليزية (p exclusive or q) تكون صائبة فقط إذا كانت أحدهما صائبة و إلا خاطئة للقيم الأخرى.

Let p and q be propositions. The exclusive or of p and q denoted by $p \oplus q$ is the proposition that is true only when one of p and q is true and is false otherwise.

⁵ قاموس المواكب إعداد الأستاذ ناصر الشوباصي. دمشق. دار الرضا للنشر 2000م.

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

جدول الصدق للاختيار المقصور (XOR)

التضمين⁶ Implication

لتكن p قضية و q قضية أخرى فإن القضية الجديدة (p تتضمن q) ويرمز لها ($p \rightarrow q$) وتلفظ بالإنجليزية (p implies q) تكون خاطئة فقط عندما تكون p صائبة و q خاطئة، وإلا صواباً للقيم الأخرى. في التضمين نسمي p فرضية (وأيضاً المقدمة أو المعطية) ونسمي q استنتاجاً (أو نتيجة).

نقول أن القضية (q تتضمن p) " $q \rightarrow p$ " هو معكوس القضية $p \rightarrow q$.

ونقول أيضاً أن القضية ($\sim q \rightarrow \sim p$) هي المعاكس الإيجابي⁷ *contrapositive* للقضية ($p \rightarrow q$)

Let p and q be propositions. The *implication* proposition of p and q denoted by ($p \rightarrow q$) is the proposition that is only *false* when p is *true* and q is *false* and *true* otherwise. In this *implication* p is called the *hypothesis* (or *antecedent* or *premise*) and q is called the *conclusion* (or *consequence*).

The proposition $q \rightarrow p$ is called the *converse* of $p \rightarrow q$.

The *contrapositive* of $p \rightarrow q$ is $\sim q \rightarrow \sim p$.

⁶ ا.د. أحمد سعيّدان. مشروع مجمع اللغة العربية الأردني للرموز العلمية. 1985م. إشارات المنطق الرياضي والتحليل العددي.

⁷ قاموس المواكب للأستاذ ناصر الشوباصي. دمشق. دار الرضا للنشر 2000م.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

جدول صدق التضمين

The truth table for Implication

الألفاظ الشائعة لقولنا " p تتضمن q " مبينة في الجدول التالي:

p implies q	p تتضمن q
If p , then q	إذا كان p فإن q
p only if q	p فقط إذا q
p is sufficient for q	p شرط كافٍ لتحقيق q
q whenever p	q كلما p
q is necessary for p	q شرط ضروري لتحقيق p
q follow logically from p	q تتبع منطقيًا من p

من الجدول السابق، يمكن تسمية التضمين بـ "المشروط"، حيث P مقدمة الشرط، و q جواب الشرط. ونسمي عبارة التضمين بقضية الشرط "إذا... فإن...".

مثال (1): لتكن $p =$ "السماء تمطر"، ولتكن $q =$ "الشوارع مبللة" اكتب صيغاً لـ " p تتضمن q "

- إذا السماء تمطر فإن الشوارع مبللة
- السماء تمطر تتضمن الشوارع مبللة
- السماء تمطر شرط كافٍ لتحقيق الشوارع مبللة

مثال (2):

The implication is

"if I have an exam today, then today is not Friday"

The converse is

"if today is not Friday, then I have an exam today"

The contrapositive is

"if today is Friday, then I do not have an exam today"

تمارين (1): اكتب جداول الصدق للقضايا التالية:

1. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
2. $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
3. $True \rightarrow (p \rightarrow (False \rightarrow p))$
4. $(p \wedge q) \rightarrow q$

تمارين (2): أثبت أن التضمين لا يحقق الخواص التالية:

1. التجميع association
2. التبديل commutative
3. التماثل idempotent

تمارين (3): قارن بين جدولي الصدق للتضمين $(p \rightarrow q)$ والقضية $(\sim p) \vee q$ أهما متساويان في قيم الصدق.

التكافؤ⁸ Equivalence

لتكن p قضية و q قضية أخرى، فإن القضية الجديدة $(p$ تكافئ $q)$ ، ويرمز لها بـ $(p \leftrightarrow q)$ ، وتلفظ بالإنجليزية $(p$ equivalent $q)$ ، تكون صائبة فقط عندما تكون p و q لهما معاً قيم الصدق نفسها، و خاطئة إذا اختلفا في قيم الصدق.

Let p and q be propositions. The **biconditional** (المشروط) proposition of p and q denoted by $(p \leftrightarrow q)$ is the proposition that is **true** when p and q is **true** and is **false** otherwise

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

جدول صدق التكافؤ

⁸ د. أحمد سعيدان. مشروع مجمع اللغة العربية الأردني للرموز العلمية. 1985م. إشارات المنطق الرياضي والتحليل العددي.

الألفاظ الشائعة لقولنا " p تكافئ q " مبينة في الجدول التالي:

p equivalent q ($p \leftrightarrow q$)	P تكافئ q
p if and only if q	p إذا وفقط إذا q
p is necessary and sufficient for q	p شرط ضروري وكاف لتحقيق q
If p then q , and conversely	إذا كان p فإن q ومعكوسها

من الجدول السابق، يمكن تسمية التكافؤ بـ "المشروط المزدوج"، لأنه مكون من قضيتي التضمين ($p \rightarrow q$) و ($q \rightarrow p$)، وقضية التكافؤ تكون صواباً فقط عندما يكون كلا التضمينين صواباً.

مثال (1): لتكن $p =$ " السماء تمطر " ولتكن $q =$ " الشوارع مبللة "

اكتب صيغاً لـ " p تكافئ q "

- السماء تمطر إذا وفقط إذا الشوارع مبللة
- السماء تمطر تكافئ الشوارع مبللة
- السماء تمطر شرط ضروري وكاف لتحقيق الشوارع مبللة

مثال (2): القضية ($5 \leq 6 \leftrightarrow 7 \leq 7$) هي صائبة، بينما القضية ($5 \leq 6 \leftrightarrow 7 < 7$) هي خاطئة

تمارين (1): حدد قيم الصدق للقضايا التالية:

1. إذا كانت السماء تمطر فإن الريح عاصف
2. إذا كان الريح عاصفاً فإن السماء تمطر
3. ليس صحيحاً أن الريح عاصف إذا وفقط إذا كانت السماء لا تمطر
4. $2+2=4$ if, and only if, Amman is the capital of Jordan
5. Jerusalem is the capital of Palestine if, and only if, $1+2=0$

تمارين (2): أثبت أن التكافؤ يحقق الخواص التالية:

1. التجميع association: $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$
2. التبديل commutative: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$
3. $(p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \text{True}$
4. $(p \leftrightarrow (\sim p)) \leftrightarrow \text{False}$
5. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

تمارين (3): حدد قيم الصدق للقضايا التالية:

1. $(p \leftrightarrow \text{True}) \leftrightarrow p$
2. $(p \leftrightarrow \text{False}) \leftrightarrow \sim p$
3. التكافؤ لا يحقق خاصية التماثل ($\leftrightarrow$ is not idempotent)
4. ليس صحيحاً أن الورد أصفر والياسمين أزرق.

تحصيل حاصل، تناقض⁹ ومصادفة

Contingency

القضية المنطقية التي قيم صدقها دائماً صواب تدعى تحصيل حاصل *tautology*، أي كانت قيم صدق مكوناتها من القضايا المنطقية البسيطة. والقضية المنطقية التي قيم صدقها دائماً خاطئة، تدعى تناقضاً *contradiction*. والقضية المنطقية التي ليست تحصيل حاصل ولا تناقض فيها تدعى مصادفة *contingency*.

نسمي قضية " تحصيل حاصل " نظرية. لأنها دائماً صواب.

A proposition that is always has its truth-values true is called a *tautology*.

A proposition that is always has its truth-values false is called a *contradiction*. Finally, a proposition that is neither a tautology nor a contradiction is called a *contingency*.

مثال (1): قضية منطقية تحصيل حاصل: $(\sim p \vee p)$ ، قيم صدقها دائماً

صواب أي كانت قيم الصدق لـ p و $\sim p$.

مثال (2): قضية منطقية تحصيل حاصل: $(q \vee q)$ ، قيم صدقها دائماً صواب

أي كانت قيم الصدق لـ q .

مثال (3): قضية منطقية تناقض: $(\sim p \wedge p)$ ، قيم صدقها دائماً خاطئة أي

كانت قيم الصدق لـ p و $\sim p$.

مثال (4): قضية تناقض: $(p \rightarrow p)$ ، قيم صدقها دائماً خاطئة أي كانت قيم

الصدق لـ p و $\sim p$.

⁹ مبادئ التحليل الرياضي. ترجمة الدكتور وليد ديب. منشورات مجمع اللغة العربية الأردني 1984م.

- مثال (5): قضية مصادفة: $(p \rightarrow q)$ ، قيم صدقها تارة صواب و أخرى خطأ وذلك على حسب قيم صدق p و q .
- مثال (6): قضية مصادفة: $(p \leftrightarrow q)$ ، قيم صدقها تارة صواب و تارة أخرى خطأ وذلك على حسب قيم صدق p و q .

تمارين (1): أي القضايا المنطقية التالية تحصيل حاصل أو تناقض أو مصادفة؟

1. $q \rightarrow (\sim q \rightarrow q)$
2. $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
3. $(q \wedge \sim q) \rightarrow (p \vee \sim p)$
4. $(p \vee \sim p) \rightarrow (q \wedge \sim q)$
5. $(p \wedge q) \wedge (\sim (p \vee q))$
6. $\sim p \leftrightarrow \sim q \wedge r \rightarrow s$
7. $p \wedge q \rightarrow r$
8. $\sim p \vee q$
9. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
10. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$
11. $\sim (p \rightarrow p) \wedge (\sim p \rightarrow \sim p)$
12. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

الأسبقية Precedence

لإحتساب قيمة تعبير حسابي بشكل صحيح، فإننا نستخدم الأقواس لإزالة أي غموض في الصيغة الكتابية لها، وكذلك نطبق حق أسبقية التنفيذ بين العوامل الحسابية، فنعطي الأفضلية أولاً لعملية القوة، ثم تأتي أسبقية عمليتي الضرب والقسمة، ثم أسبقية عمليتي الجمع والطرح.

فمثلاً قيمة التعبير الحسابي $5 \div ((3 - 2) * (3 + 2)) - ((2 * 3) - (8 \div 4))$ تساوي 15.

أما احتساب قيم الصدق للقضايا المنطقية المركبة من عدة قضايا منطقية بسيطة، فإننا نستخدم الأقواس لإزالة أي غموض في صيغتها، وكذلك نطبق حق أسبقية التنفيذ بين العوامل المنطقية، وقواعد أولوية التنفيذ هي:

أولاً: احتساب قيم المتغيرات المنطقية بين الأقواس الداخلية و على حسب الأولوية التالية:

ثانياً: أولوية العوامل المنطقية مرتبة تنازلياً:

1. النفي $\sim$ الأسبقية العليا في التنفيذ
2. العطف $\wedge$ الأسبقية التالية لعملية النفي

3. الاختيار	$\vee$	الأسبقية التالية لعملية العطف
4. التضمن	$\rightarrow$	الأسبقية التالية لعملية الاختيار
5. التكافؤ	$\leftrightarrow$	الأسبقية التالية لعملية التضمن

ثالثاً: في حالة وجود عاملين متتاليين لهما الأسبقية نفسها في التنفيذ، فإننا نعطي الأفضلية للعامل الأول الذي يعترضنا أثناء قراءة القضية من اليسار إلى اليمين.

مثال (1): اكتب القضية " $q \vee r \rightarrow p$ " بصيغة الأقواس.
القضية المقصودة هي $(q \vee r) \rightarrow p$ حيث إن الاختيار له أسبقية في التنفيذ على التضمن.

مثال (2): اكتب القضية " $\sim p \wedge q$ " بصيغة الأقواس.
القضية المقصودة هي $(\sim p) \wedge q$ حيث إن النفي له أسبقية في التنفيذ على العطف.

تمارين (1): اكتب القضايا التالية بصيغة الأقواس :

1. $\sim p \vee q$
2. $q \wedge p \rightarrow r$
3. $\sim p \leftrightarrow \sim q \wedge r \rightarrow s$
4. $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

التكافؤ المنطقي Logical Equivalence

لتكن p و q قضيتين منطقيتين، فإننا نقول أنهما متكافئتان منطقياً إذا كان لهما قيم الصدق نفسها في جميع الاحتمالات، أي أن القضية $(p \leftrightarrow q)$ هي تاصيل حاصل *tautology*. ويرمز لها بـ $(p \leftrightarrow q)$ وبالإنجليزية $(p \leftrightarrow q)$ (logically equivalent q).

The propositions p and q are called logically equivalent if the proposition $(p \leftrightarrow q)$ is tautology. The notation $(p \leftrightarrow q)$ denotes that p and q are *logically equivalent*.

مثال (1): أثبت أن القضايا التالية متكافئة منطقياً؟ (قوانين دومورغان)

أولاً: $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim (p \wedge q)$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$\Leftrightarrow$
T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

لاحظ أن طرفي التكافؤ لهما قيم الصدق نفسها. ولهذا فإنهما متكافئان منطقياً.

ثانياً: $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim (p \vee q)$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$	$\Leftrightarrow$
T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

لاحظ أن طرفي التكافؤ لهما قيم الصدق نفسه. ولهذا فإنهما متكافئان منطقياً.

تمارين (1): أثبت أن القضايا التالية متكافئة منطقياً؟

أولاً: $True \Leftrightarrow (p) \vee (\sim p)$

ثانياً: خاصية التوزيع distributive

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ -1

$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ -2

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ -3

$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ -4

ثالثاً: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (q \vee (\sim p))$

المنطق والعمليات الثنائية Logic and Bit Operations

يتم تمثيل البيانات في الحاسوب باستخدام الأرقام الثنائية $bits$. والرقم الثنائي معلوم له قيمتا صفر (0) و واحد (1). ويمكننا التعبير عن قيم الصدق

الصواب والخطأ باستخدام واحد (1) وصفر (0)، أي أن 1 يمثل صواباً *True* و 0 يمثل خطأ *False*.

نسمي متغير بولي *Boolean Variable* كل متغير منطقي يأخذ إحدى قيمتي الصواب أو الخطأ. والمتغير البولي يتم تمثيله باستخدام الأرقام الثنائية.

إن العمليات الثنائية العطف *AND* والاختيار *OR* والاختيار المقصور *XOR* تتطابق مع العمليات المنطقية عند استبدال صواب بـ 1 و خطأ بـ 0 في جدول قيم الصدق، والعمليات المنطقية وعلى التوالي هي: العطف $\wedge$ والاختيار $\vee$ والاختيار المقصور $\oplus$. والجدول التالي توضح هذه الطريقة.

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \oplus y$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0

جداول العمليات الثنائية للعطف وللإختيار والاختيار المقصور

Tables for the Bit Operations AND, OR, and XOR

يمكننا توسيع العمليات الثنائية لتشمل سلاسل¹⁰ الأرقام الثنائية *Bit Strings* ، التي تستخدم في تمثيل المعلومات بواسطة الحاسوب.

وهكذا يمكننا تعريف العمليات عطف البت ونظيره *bitwise AND* ، والاختيار بين البت ونظيره *bitwise OR* ، والاختيار المقصور على البت ونظيره *bitwise XOR* ، على زوج من سلاسل الأرقام الثنائية (سلاسل البتات) ونستخدم الرموز السابقة نفسها للعمليات الثنائية.

¹⁰ أول من استخدم هذه الصيغة على السلاسل هو John Wilder Tukey المولود سنة 1915م في مدينة New Bedford , Massachusetts. حصل على درجة الدكتوراه من جامعة Princeton عام 1939م. أسس دائرة الإحصاء عام 1966م في جامعة Princeton التي كان يعمل فيها منذ سنة 1945م. و معروف جيداً مع W. Cooley لاختراعهم Fast Fourier Transform.

¹¹ قاموس المواكب إعداد الأستاذ ناصر الشوباصي. دمشق. دار الرضا للنشر 2000م.

فمثلاً لتكن $x = 1000\ 1010$ ولتكن y السلسلة $y = 0011\ 0101$. الجدول التالي يوضح هذه الطريقة.

$1000\ 1010 = x$
$1011\ 1101 = y$
$1000\ 1000 = \text{Bitwise } x \text{ AND } y$
$1011\ 1111 = \text{Bitwise } x \text{ OR } y$
$0011\ 0111 = \text{Bitwise } x \text{ XOR } y$

جداول عمليات متمم العطف ومتمم الاختيار ومتمم الاختيار المقصور
Tables for the Bitwise AND, Bitwise OR, and Bitwise XOR

في السطر الثالث من الجدول، تم استخدام القواعد التالية:

$$1 \wedge 1 = 1, 1 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 0, 0 \wedge 0 = 0$$

وفي السطر الرابع من الجدول، تم استخدام القواعد التالية:

$$1 \vee 1 = 1, 1 \vee 0 = 1, 0 \vee 1 = 1, 0 \vee 0 = 0$$

وفي السطر الخامس من الجدول، تم استخدام القواعد التالية:

$$1 \text{ XOR } 1 = 0, 1 \text{ XOR } 0 = 1, 0 \text{ XOR } 1 = 1, 0 \text{ XOR } 0 = 0$$

الصيغة الطبيعية Normal Form

في الفقرات السابقة، كان لكل قضية منطقية بسيطة أو قضية منطقية مركبة جدول قيم صدق يمثلها. فإذا أعطينا جدولاً ما لقيم الصدق، فهل يمكن إيجاد قضية منطقية تمثلها؟ الجواب هو نعم. والخطوات التالية مع الجدول أدناه توضح كيفية إيجاد تلك القضية.

ليكن جدول قيم الصدق لـ n متغير قضية منطقية بسيطة، لإيجاد القضية المنطقية المركبة التي تمثل جدول قيم الصدق نتبع الخطوات التالية:

	p	q	r	Result
1	T	T	T	F
2	T	T	F	T
3	T	F	T	F
4	T	F	F	T
5	F	T	T	T
6	F	T	F	F
7	F	F	T	F
8	F	F	F	F

1. نحصر حالات الصواب (True) في عمود النتيجة (العمود الأخير). لجدول قيم الصدق المعطى لنا. وفي جدولنا المقابل هي موجودة في الأسطر 2، 4، 5.

2. نكتب التعبير المنطقي باستخدام قيم الصدق لحالات الصواب التي تم حصرها في الخطوة 1 ولكل حالة على انفراد. وعلى حسب جدولنا فإن قيم الصدق المكونة للسطر 2 يمثلها التعبير المنطقي TTF وقيم الصدق المكونة للسطر 4 يمثلها التعبير المنطقي TFF و للسطر 5 يمثلها التعبير FTT .

3. إدراج إشارة عامل العطف بين قيم الصدق في كل تعبير منطقي تم صياغته في الخطوة 2 ولكل سطر على انفراد. فمثلاً السطر 2 يصير تعبيره المنطقي $T \wedge T \wedge F$ والسطر 4 يصبح تعبيره المنطقي إلى $T \wedge F \wedge F$ والسطر 5 يصبح تعبيره المنطقي $F \wedge T \wedge T$

4. نستبدل قيم الصدق بأسماء متغيرات قضاياها في التعبير المنطقي الذي تم تشكيله في الخطوة 3. مع إضافة إشارة عامل النفي أمام اسم المتغير الذي كانت قيمة صدقه خاطئة. فالسطر 2 يمثلها الآن التعبير $p \wedge q \wedge \sim r$ والسطر 4 يمثلها التعبير $p \wedge \sim q \wedge \sim r$ والسطر 5 يمثلها التعبير $\sim p \wedge q \wedge r$.

5. إدراج إشارة عامل الاختيار بين جميع التعابير المنطقية التي تم صياغتها في الخطوة 4. وهذا التعبير المنطقي هو الصيغة الطبيعية للقضية المنطقية المركبة التسي تمثّل جدول قيم الصدق.

$$[(p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r)]$$

لاحظ أن التعبير المنطقي الموجود بالخطوات الخمس السابقة هو على الصيغة التالية $(\wedge_1^3 E_i)$ حيث E_i يمثل تعبير حالة الصواب للسطر i في جدول الصدق. هذه الصيغة تسمى الصيغة الطبيعية التخييرية *Disjunctive Normal Form*.

أما الصيغة $\wedge_1^3 (\vee_1^3 \sim E_i)$ فتدعى الصيغة الطبيعية للعطف *Conjunctive Normal Form*.

تمارين (1): مثل القضية المنطقية $X = (p \vee \sim q) \rightarrow r$ بالصيغة الطبيعية التخييرية و بالصيغة الطبيعية للعطف. إشارات للحل: أولاً نجد جدول قيم صدق القضية، ثم نطبق الخطوات الخمس السابقة لإيجاد الصيغة الطبيعية التخييرية. ثانياً نكون $\sim X$ بحيث ننفي عمود النتيجة لجدول قيم الصدق، ثم نطبق الخطوات الخمس السابقة لإيجاد الصيغة الطبيعية للعطف.

الجملة المفتوحة Predicate

كل جملة من الجمل التالية تحتمل الصواب والخطأ معاً، وغالباً ما تكون هذه الجمل من النوع الذي يحتوي على متغيرات مثل:

$$x + 1 = 2 \quad \bullet$$

$$5 < x \quad \bullet$$

$$x = 3 \quad \bullet$$

$$x + y = z \quad \bullet$$

$$x = y + 3 \quad \bullet$$

$$x > 5 \text{ and } x \leq 9 \quad \bullet$$

....

جميع الجمل السابقة لا تحتسب عبارات خبرية إلا إذا أعطينا قيمة للمتغير. **الجملة المفتوحة** هي الجملة التي تحتوي على متغير أو أكثر، وتصير قضية منطقية فقط عند إعطاء قيم للمتغيرات.

فإذا احتوت الجملة على متغير واحد نرسم لها $P(x)$

أما إذا احتوت على متغيرين نرسم لها $P(x, y)$

وفي حالة احتوائها على n متغيرات نرسم لها $P(x_1, x_2, x_3... x_n)$

Predicate: Statement that is neither true nor false when the values of the variables are not specified.

مجموعة التعويض Universe of Discourse

هي مجموعة تحتوي على جميع القيم التي يمكن أن تعطى للمتغيرات في الجملة المفتوحة. فمثلاً مجموعة التعويض في المثال: $(P(x): 5 < x)$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة.

مجموعة الحل Solution Set

هي مجموعة القيم من مجموعة التعويض التي تجعل الجملة المفتوحة قضية منطقية صواباً. فمثلاً مجموعة الحل في المثال: $(P(x): 5 < x)$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة وأكبر من خمسة أي $\{6, 7, 8, 9...\}$ ، لاحظ أن $P(6)$ قضية قيمة الصدق لها الصواب، بينما $P(4)$ قضية قيمة الصدق لها خاطئة. أوجد قيمة الصدق لـ $P(5)$.

مثال (1): أوجد مجموعة الحل للجملة المفتوحة $(P(x): x + 1 = 5)$ إذا علمت أن مجموعة التعويض $\{0, 1, 2, 3\}$ ؟

مجموعة الحل هي المجموعة الفارغة $\emptyset$ ، لعدم وجود أي عنصر من مجموعة التعويض يحقق $P(x)$ صواباً؟

مثال (2): أوجد مجموعة الحل للجملة المفتوحة $(P(x, y): x + y = 5)$ ، إذا علمت أن مجموعة التعويض $\{1, 2, 3, \dots\}$

الحل: هذه الجملة المفتوحة تحتوي على متغيرين هما x, y ، لذلك تحتوي مجموعة الحل على أزواج مرتبة حيث العنصر الأول يدل على x والعنصر الثاني يدل على y . مجموعة الحل التي تجعل $P(x, y)$

صواباً هي: $\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

تمارين (1): إذا علمت الجمل المفتوحة التالية

$$P(x) : 5 \in \mathbb{N} \quad \bullet$$

$$q(x) : x^2 = 1 \quad \bullet$$

$$r(x) : x \text{ عدد أولي} \quad \bullet$$

وإذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ فأوجد قيم الصدق للقضايا المنطقية التالية:

$$1. p(x) \wedge q(4)$$

$$2. p(x) \rightarrow r(-1)$$

$$3. q(2) \leftrightarrow r(5)$$

$$4. \sim q(2) \wedge r(2)$$

تمارين (2): إذا علمت الجملة المفتوحة $P(x, y) : x + y = 3$ وإذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ فأوجد قيم

الصدق للقضايا المنطقية التالية: $P(3, 0)$ ، $P(1, 2)$

تمارين (3): إذا علمت الجملة المفتوحة $P(x, y, z) : x + y = z$ وإذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ فأوجد قيم

الصدق للقضايا المنطقية التالية:

$$P(-5, -7, -12) , P(0, 0, 1) , P(1, 2, 3)$$

المسورات Quantifiers

لإيجاد جدول قيم الصدق لقضية منطقية مؤلفة من n متغير قضية منطقية بسيطة، فإننا نحتاج إلى جدول عدد أسطره 2^n ، علاوة على سطر الترويسة للجدول. فإذا كانت قيمة n صغيرة نسبياً، فطريقة الجدول مرضية وكافية. الحظ عندما تكون $n = 5$ فإن عدد أسطر الجدول هو 32 سطراً، وعليه فإن طريقة بناء جدول قيم الصدق لمعرفة صواب القضية المنطقية وخطأها فإنها

تصبح مرهقة ومزعجة عندما تكون $n \geq 5$. لذلك أصبح ضرورياً البحث عن طريقة جديدة، نستطيع من خلالها تحديد صواب الجملة المفتوحة أو خطأها دون تعويض قيم من مجموعة الحل. وهذه الطريقة هي باستخدام السور الكلي أو السور الجزئي للجملة المفتوحة.

السور الكلي $\forall$ Universal Quantification

نقول إن العبارة $P(x)$ مسورة تسويراً كلياً إذا كانت الجملة المفتوحة $P(x)$ صائبة لجميع قيم x في مجموعة التعويض. ونرمز لها بـ $\forall x P(x)$ ، ونلفظ بالعربية "لكل x $P(x)$ "، أو نلفظ "جميع x $P(x)$ ". الحظ أن مجموعة الحل هي نفسها مجموعة التعويض، إذ إننا قمنا بتعميم صواب العبارة $P(x)$ لجميع قيم x .

تدعى الإشارة $\forall$ بإشارة التعميم¹² أو السور الكلي¹³. وتكون العبارة $P(x)$ مسورة تسويراً كلياً.

The *Universal Quantification* of $P(x)$ is the proposition " $P(x)$ is true for all values of x in the universe of discourse". The notation $\forall x P(x)$ denotes the universal quantification of $P(x)$.

This sign $\forall$ is called the universal quantifier. The proposition $\forall x P(x)$ is also expressed as "*for all x $P(x)$* " or "*for every x $P(x)$* ".

من الجدير بالذكر أن السور الكلي هو عبارة عن تعميم لعامل العطف المنطقي. فمثلاً لو أردنا تمثيل العبارة "كل عدد طبيعي هو أكبر من أو يساوي صفراً" باستخدام إشارة التعميم فإننا نكتب $\forall n P(n)$ مع $P(n): n \geq 0$ ومجموعة التعويض هنا مجموعة الأعداد الطبيعية N .

أما العبارة المنطقية المكافئة لـ "كل عدد طبيعي هو أكبر من أو يساوي صفراً" فهي " $0 \geq 0 \wedge 1 \geq 0 \wedge 2 \geq 0 \wedge \dots$ " لاحظ أن العبارة المسورة $\forall n P(n)$ أبلغ من الصيغة باستخدام عامل العطف.

¹² ا. د. أحمد سعيدان. مشروع مجمع اللغة العربية الأردني للرموز العلمية. 1985م. إشارات المنطق الرياضي والتحليل العددي.

¹³ مبادئ التحليل الرياضي. ترجمة الدكتور وليد ديب. منشورات مجمع اللغة العربية الأردني 1984م.

خصائص السور الكلي

$$1. (\forall x p(x)) \vee (\forall x q(x)) \rightarrow \forall x (p(x) \vee q(x))$$

$$2. (\forall x (p(x) \wedge q(x))) \leftrightarrow (\forall x p(x)) \wedge (\forall x q(x))$$

مثال (1): عبر عن الجملة المفتوحة التالية باستخدام السور الكلي.
 "أي عددين طبيعيين m, n فإما $m < n$ أو $m = n$ أو $m > n$ "
 مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الطبيعية N والجملة
 المفتوحة $P(m, n) : m > n \vee m = n \vee m < n$
 والعبارة المسورة هي $\forall m, n P(m, n)$
 والصيغ التالية أيضاً صواب:
 $\forall n, \forall m P(m, n)$ و $\forall m, \forall n P(m, n)$.

مثال (2): اكتب العبارة التالية باستخدام السور الكلي.
 "Every student in this class has studied Discrete Structures"
 لتكن $P(x)$ تمثل الجملة المفتوحة
 " x has studied Discrete Structures"
 لتكن $q(x)$ تمثل الجملة المفتوحة " x is in this class"
 ولتكن مجموعة الطلبة هي مجموعة التعويض فإن العبارة المطلوبة
 هي $\forall x (q(x) \rightarrow p(x))$

تمارين (1): أوجد قيمة صدق العبارة المسورة $\forall x P(x)$ إذا علمت أن
 " $P(x) : x + 1 > x$ " ومجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد
 الحقيقية.

تمارين (2): أوجد قيمة صدق العبارات التالية:
 a- $\forall x P(x)$ إذا علمت أن " $P(x) : x^2 \geq 0$ " ومجموعة التعويض
 هي مجموعة الأعداد الصحيحة.
 b- $\forall x P(x)$ إذا علمت أن " $P(x) : x < 2$ " ومجموعة التعويض هي
 مجموعة الأعداد الحقيقية.
 c- $\forall x P(x)$ إذا علمت أن " $P(x) : x$ is even number"
 ومجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الصحيحة.

السور الجزئي $\exists$ Existential Quantification

نقول إن العبارة $P(x)$ مسورة تسويراً جزئياً¹⁴ إذا وجد عنصر واحد على الأقل x في مجموعة التعويض بحيث تكون الجملة المفتوحة $P(x)$ صائبة. ونرمز لها بـ $\exists xP(x)$ ، ونلفظ بالعربية "بعض x $P(x)$ "، أو نلفظ "يوجد على الأقل x $P(x)$ ".

الحظ أن مجموعة الحل هنا مجموعة جزئية فعلاً من مجموعة التعويض، إذ إننا قمنا بتخصيص صواب العبارة $P(x)$ لبعض قيم x تدعى الإشارة $\exists$ بإشارة التخصيص¹⁵، أو السور الجزئي. وتكون العبارة $P(x)$ مسورة تسويراً جزئياً.

The *Existential Quantification* of $P(x)$ is the proposition "there exists an element x in the universe of discourse such that $P(x)$ is true". We use the notation $\exists xP(x)$ for the existential quantification of $P(x)$.

This sign $\exists$ is called the existential quantifier.

The existential quantification of $P(x)$ $\exists xP(x)$ is also expressed as "there is an x such that $P(x)$ " or "there is at least one x such that $P(x)$ " or "for some x $P(x)$ ".

من الجدير ذكره هنا أن السور الجزئي، هو عبارة عن تعميم لعامل الاختيار المنطقي. فمثلاً لو أردنا تمثيل العبارة "بعض الأعداد طبيعية يقبل القسمة على 3" - وبدون باق- باستخدام إشارة التخصيص، فإننا نكتب $\exists nP(n)$ مع $P(n) : n \bmod 3 = 0$ ومجموعة التعويض هنا مجموعة الأعداد الطبيعية N . أما العبارة المنطقية المكافئة لـ "بعض الأعداد طبيعية يقبل القسمة على 3" فهي $\dots \vee (4 \div 3) \vee (2 \div 3) \vee (1 \div 3) \vee (3 \div 3)$ لاحظ أن العبارة المسورة $\exists nP(n)$ أبلغ من الصيغة باستخدام عامل العطف.

¹⁴ التحليل الرياضي. ترجمة الدكتور وليد ديب. منشورات مجمع اللغة العربية الأردني 1984م.

¹⁵ ا. د. أحمد سعيدان. مشروع مجمع اللغة العربية الأردني للرموز العلمية. 1985م. إشارات المنطق الرياضي والتحليل العددي.

$$(\exists x(p(x) \vee q(x))) \leftrightarrow (\exists x p(x) \vee \exists x q(x)) \quad -1$$

$$(\exists x(p(x) \wedge q(x))) \leftrightarrow (\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)) \quad -2$$

مثال (1): أوجد قيمة صدق العبارة المسورة $\exists x P(x)$ إذا علمت أن " $P(x)$: $x > 7$ " ومجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية.
الحل : عندما x تكون 8 فإن العبارة لبعض x $P(x)$ تكون صائبة.

تمارين (1): أوجد قيمة صدق العبارة المسورة $\exists x P(x)$ إذا علمت أن " $P(x)$: $x + 1 = x$ " ومجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

تمارين (2): أوجد قيمة صدق العبارات التالية :
إذا كانت مجموعة التعويض $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
1- " $P(x)$: $x^2 = 2$ " إذا علمت أن
2- " $P(x)$: $x^2 > 10$ " إذا علمت أن

تمارين (3): أوجد قيمة صدق العبارات التالية إذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الصحيحة

$$P(x): x \# 1 \wedge x+2=6 \quad -a$$

$$P(x): x = 1 \vee x^2=3 \quad -b$$

الجدول التالي يلخص معاني إشارات التسوير عندما تكون العبارة المسورة مكونة من متغير واحد x أو متغيرين x, y

Statement العبارة	When true عندما تكون صواباً	When false عندما تكون خطأ
$\forall x P(x)$	$P(x)$ is true for every x لجميع x صائبة $P(x)$ قيم	There is an x for which $P(x)$ is false يوجد على الأقل x خاطئة $P(x)$ خاطئة
$\exists x P(x)$	There is an x for which $P(x)$ is true يوجد x صائبة $P(x)$ على الأقل	$P(x)$ is false for every x لجميع قيم x خاطئة $P(x)$ خاطئة
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall y \forall x P(x, y)$	$P(x, y)$ is true for every pair x, y . لجميع قيم الأزواج x, y صائبة $P(x, y)$	There is a pair x, y for which $P(x, y)$ is false. يوجد على الأقل زوج x, y خاطئة $P(x, y)$
$\forall x \exists y P(x, y)$	For every x there is a y for which $P(x, y)$ is true لجميع قيم x يوجد y بحيث $P(x, y)$ صائبة	There is an x such that $P(x, y)$ is false for every y . يوجد على الأقل x بحيث $P(x, y)$ خاطئة لكل قيم y
$\exists x \forall y P(x, y)$	There is an x for which $P(x, y)$ is true For every y يوجد على الأقل x بحيث $P(x, y)$ صائبة لجميع قيم y	For every x there is a y such that $P(x, y)$ is false لجميع قيم x يوجد على الأقل y بحيث $P(x, y)$ خاطئة
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists y \exists x P(x, y)$	There is a pair x, y for which $P(x, y)$ is true يوجد على الأقل زوج x, y صائبة $P(x, y)$	$P(x, y)$ is false for every pair x, y لجميع قيم الأزواج x, y خاطئة $P(x, y)$

تمارين (4): أوجد قيمة صدق العبارات التالية إذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية

-a $\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$ إذا علمت أن " $P(x, y, z): x + y = z$ "

-b $\exists z \forall x \forall y P(x, y, z)$ إذا علمت أن " $P(x, y, z): x + y = z$ "

نفي العبارة المسورة The Negation of a Quantified expression

لتكن العبارة "كل طالب في الصف قد درس مهارات الحاسوب (1)" هذه العبارة مسورة تسويراً كلياً $\forall xP(x)$ بحيث $P(x)$ هي الجملة المفتوحة " x درس مهارات الحاسوب (1)".

نفي العبارة "كل طالب في الصف قد درس مهارات الحاسوب (1)" هو "ليس صحيحاً أن كل طالب في الصف قد درس مهارات الحاسوب (1)" وهذا يفيد أنه "يوجد على الأقل طالب واحد في الصف لم يدرس مهارات الحاسوب (1)" وذلك لأسباب عدة منها تحصيله شهادة سيطرة الحاسوب الدولية أو نجاحه في امتحان الحاسوب لتحديد مستوى مهاراته. وعليه فإن عبارة النفي "يوجد على الأقل طالب واحد في الصف لم يدرس مهارات الحاسوب (1)" هي العبارة المسورة تسويراً جزئياً $\exists x \sim P(x)$.

وهذا المثال يعطينا التكافؤ المنطقي التالي: $\sim \forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x \sim P(x)$

افترض الآن أننا نريد أن ننفي العبارة "يوجد على الأقل طالب واحد في الصف قد درس مهارات الحاسوب (1)" وهي عبارة مسورة تسويراً جزئياً $\exists xQ(x)$ بحيث $Q(x)$ هي الجملة المفتوحة " x درس مهارات الحاسوب (1)". فنفي العبارة "يوجد على الأقل طالب واحد في الصف قد درس مهارات الحاسوب (1)" هو "ليس صحيحاً وجود طالب واحد في الصف لم يدرس مهارات الحاسوب (1)" وهذا يفيد أنه "كل طالب في الصف لم يدرس مهارات الحاسوب (1)". وعليه فإن عبارة النفي "كل طالب في الصف لم يدرس مهارات الحاسوب (1)" هي عبارة مسورة تسويراً كلياً $\forall x \sim Q(x)$.

والمثال الأخير يعطينا التكافؤ المنطقي التالي: $\sim \exists xQ(x) \Leftrightarrow \forall x \sim Q(x)$

الجدول التالي يلخص نفي إشارات التسوير عندما تكون العبارة المسورة مكونة من متغير واحد x .

Negation نفي	Equivalence Statement عبارة مكافئة	When is negation true عندما يكون النفي صواباً	When false عندما يكون النفي خطأً
$\sim \exists x P(x)$	$\forall x \sim P(x)$	$P(x)$ is false for every x خاطئة لـ $P(x)$ جميع قيم x	There is an x for which $P(x)$ is true يوجد على الأقل x صانبة $P(x)$
$\sim \forall x P(x)$	$\exists x \sim P(x)$	There is an x for which $P(x)$ is false يوجد على الأقل خاطئة $P(x)$ x	$P(x)$ is true for every x $P(x)$ صانبة لجميع قيم x

مثال (1): انف العبارة التالية: $\forall x P(x)$ إذا علمت أن " $P(x): x^2=1$ "

الحل: $\forall x P(x) \sim$ تكافيء $\exists x \sim P(x)$ أي أن $\sim P(x): x^2 \neq 1$

تمارين (1): انف العبارات التالية:

a- $\exists x P(x)$ إذا علمت أن " $P(x): x^2 > 0$ "

b- $\forall x P(x)$ إذا علمت أن " $P(x): x \neq 2 \wedge x > 1$ "

ملخص جدول خصائص العوامل المنطقية:

لقد وجدنا ضروريا تلخيص خصائص العوامل المنطقية في جدول خاص بتلك العوامل، وذلك قبل الشروع في إعطاء مسائل محلولة. لاحظ الشبه التام، بين خصائص العوامل المنطقية وخصائص العوامل على المجموعات التي سندرسها في الفصل الثاني.

جدول خصائص العوامل المنطقية

Name	Property الخاصة	الاسم	م
Identity	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$	الذات	L1
Domination of Truth Values	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$	هيمنة قيم الصدق	L2
Idem potent	$P \wedge P \Leftrightarrow P$ $P \vee P \Leftrightarrow P$	التماثل	L3
Commutative	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	التبديل	L4
Associative	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	التجميع	L5
Distributive	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	التوزيع	L6
Double Negation	$\sim(\sim P) \Leftrightarrow P$	نفي النفي	L7
De Morgan's Laws	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$ $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$	قوانين دو مورغان	L8

تحصيل حاصل Tautologies	
$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\sim P) \vee Q)$	L9
$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$	L10
$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$	L11
$\sim(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \sim Q$	L12
$\sim(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)]$	L13

مسائل محلولة Solved problems

1- بسط العبارة التالية: $\sim(\sim P \wedge \sim Q)$

الحل: تطبيق لقانون دومورغان

$$\sim(\sim P \wedge \sim Q) \Leftrightarrow \sim[\sim(P \vee Q)] \Leftrightarrow P \vee Q$$

2- أثبت أن $\sim(\sim P \vee Q) \Leftrightarrow P \wedge \sim Q$

الحل: تطبيق مباشر لقانون دومورغان

$$\sim(\sim P \vee Q) \Leftrightarrow \sim(\sim P) \wedge \sim Q \Leftrightarrow P \wedge \sim Q$$

3- أثبت أن $[P \rightarrow \sim(P \vee Q)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \rightarrow \sim P]$

الحل: تطبيق القانون L9 ، ثم القانون L4 ، ثم عكس القانون L9

$$[P \rightarrow \sim(P \vee Q)] \Leftrightarrow \sim P \vee \sim(P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow \sim(P \vee Q) \vee \sim P$$

$$\Leftrightarrow [(P \vee Q) \rightarrow \sim P]$$

4- أثبت أن $[(P \wedge Q) \rightarrow \sim R] \Leftrightarrow [P \rightarrow \sim(Q \wedge R)]$

الحل: تطبيق القانون L9 ، ثم القانون L8 ، ثم القانون L5 ، ثم عكس القانون L8 ، ثم عكس القانون L9

$$[(P \wedge Q) \rightarrow \sim R] \Leftrightarrow \sim(P \wedge Q) \vee \sim R$$

$$\Leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q) \vee \sim R$$

$$\Leftrightarrow \sim P \vee (\sim Q \vee \sim R)$$

$$\Leftrightarrow \sim P \vee \sim(Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow [P \rightarrow \sim(Q \wedge R)]$$

5- أثبت أن $\sim[P \vee (\sim P \wedge Q)] \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$

الحل: تطبيق القانون L8 ، ثم القانون L8 ، ثم القانون L7 ، ثم القانون L6 ،

ثم $\sim P \wedge P \leftrightarrow F$ ، ثم القانون L1

$$\begin{aligned}
 & \sim [P \vee (\sim P \wedge Q)] \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim (\sim P \wedge Q) \\
 & \Leftrightarrow \sim P \wedge (\sim \sim P \wedge \sim Q) \\
 & \Leftrightarrow \sim P \wedge (P \vee \sim Q) \\
 & \Leftrightarrow (\sim P \wedge P) \vee (\sim P \wedge \sim Q) \\
 & \Leftrightarrow (F) \vee (\sim P \wedge \sim Q) \\
 & \Leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q)
 \end{aligned}$$

6- أثبت أن العبارة التالية $P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$ هي تحصيل حاصل

الحل: تطبيق القانون L9، ثم القانون L8، ثم القانون L5، ثم القانون L4
ثم القانون L2

$$\begin{aligned}
 & (P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q) \Leftrightarrow \sim (P \wedge Q) \vee (P \vee Q) \\
 & \Leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q) \vee (P \vee Q) \\
 & \Leftrightarrow (\sim P \vee P) \vee (\sim Q \vee Q) \\
 & \Leftrightarrow (T) \vee (T) \\
 & \Leftrightarrow T
 \end{aligned}$$

7- أثبت أن قانون القياس الافتراضي $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ هو تحصيل حاصل

الحل: ببناء جدول الصدق لعبارة قانون القياس الافتراضي

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$	النتيجة
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

من جدول الصدق لقانون القياس الافتراضي نجد أن عمود النتيجة هو تحصيل حاصل

8- أوجد جدول الصدق للتعبير التالية: $\sim q, P \rightarrow \sim q, \sim (p \rightarrow \sim q)$

الحل: جدول الصدق المطلوب

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim (p \rightarrow \sim q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F

9- أوجد جدول الصدق للتعبير التالية: $p \vee (q \wedge r)$, $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

الحل: جدول الصدق المطلوب

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

10- أوجد جدول الصدق للتعبير التالي: $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow p$ واستنتج أنه
تحصيل حاصل؟

الحل: جدول الصدق المطلوب

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim (p \rightarrow q)$	$\sim (p \rightarrow q) \rightarrow p$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

القضية $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow p$ هي نظرية لأنها تحصيل حاصل

11- إذا علمت أن p, r ذات قيم صائبة T و أن قيمة q خاطئة F أوجد قيم الصدق للتعبير التالية:

$$1. \sim p \wedge \sim q$$

$$2. (\sim p \vee q) \wedge r$$

$$3. \sim (p \vee q) \wedge r$$

$$4. (r \wedge \sim q) \vee (p \vee r)$$

الحل: بتعويض قيمة الصدق لكل متغير قضية في التعبير السابقة نجد الإجابات التالية:

$$1. \text{ False}$$

$$2. \text{ False}$$

$$3. \text{ False}$$

$$4. \text{ True}$$

12- أوجد قيم الصدق للتعبير التالية:

$$2 < 3 \text{ and } 3 \text{ is a real number (a)}$$

$$2 \geq 3 \text{ and } 3 \text{ is a positive integer (b)}$$

$$2 < 3 \text{ and } 3 \text{ is not a positive integer (c)}$$

$$2 < 3 \text{ or } 3 \text{ is not a positive integer (d)}$$

الحل:

$$\text{False (a)}$$

$$\text{False (b)}$$

$$\text{False (c)}$$

$$\text{True (d)}$$

تمارين غير محلولة *Unsolved Exercises*

1- أوجد جدول قيم الصدق لكل من للتعبير التالية:

$$(p \vee \sim q) \rightarrow q \quad (a)$$

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \quad (b)$$

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p) \quad (c)$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p) \quad (d)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow q) \quad (e)$$

$$(\sim p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \quad (f)$$

$$(\sim p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow (q \rightarrow r) \quad (g)$$

2- بين أيًا من القضايا التالية هي *Tautology* تحصيل حاصل أو تناقض

Contradiction أو مصادفة *Contingency*.

$$[\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q \quad (a)$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) \quad (b)$$

$$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q \quad (c)$$

$$[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r \quad (d)$$

المصطلحات العلمية *Terminology*

المصطلح العربي	English Term
المنطق الرياضي	Mathematical Logic
القضايا المنطقية البسيطة	Atomic Logical Propositions
قيم الصدق	Truth Values
صواب (صحيح)	True (T)
خطأ	False (F)
العوامل المنطقية	Logical Operators
القضايا المنطقية المركبة	Compound Logical Propositions
النفي (ليس)	Negation ~ (NOT)
جدول الصدق	Truth Table
معامل أحادي	Unary Operator
عملية أحادية	Unary operation
عوامل ثنائية	Binary Operators
العطف (و)	Conjunction (AND) $\wedge$
خصائص	Properties
خاصية التماثل	Idempotent
خاصية التبديل	Commutative
خاصية التجميع	Associative
الاختيار	Disjunction-(OR) $\vee$
قوانين دومورغان	De Morgan's Laws
خاصية التوزيع	Distributive
الاختيار المقصور (أو المقتصرة)	Exclusive Or (XOR) $\oplus$
التضمين	Implication
فرضية	Hypothesis

المصطلح العربي	English Term
المقدمة	Antecedent
المعطية أو المعطى	Premise
استنتاجاً	Conclusion
نتيجة	Consequence
المعكوس الإيجابي للقضية	Contrapositive propositions
معكوس القضية	Converse propositions
إذا كان p فإن q	If p , then q
p فقط إذا q	p only if q
p شرط كافٍ لتحقيق q	p is sufficient for q
q كلما p	q whenever p
q شرط ضروري لتحقيق p	q is necessary for p
q تتبع منطقياً من p	q follow logically from p
التكافؤ	Equivalence
المشروط المزدوج	Biconditional proposition
P إذا وفقط إذا q	p if and only if q
P شرط ضروري وكافٍ لتحقيق q	p is necessary and sufficient for q
إذا كان p فإن q و معكوسها	If p then q , and conversely
تحصيل حاصل	Tautology
تناقضاً	Contradiction
مصادفة	Contingency
نظرية	Theory
الأسبقية	Precedence
التكافؤ المنطقي	Logical Equivalence $\Leftrightarrow$

المصطلح العربي	English Term
المنطق والعمليات الثنائية	Logic and Bit Operation
متغير بولي	Boolean Variable
سلاسل الأرقام الثنائية	Bit Strings
عطف البت ونظيره	Bitwise AND
الاختيار بين البت ونظيره	Bitwise OR
الاختيار المقصور على البت ونظيره	Bitwise XOR
الصيغة الطبيعية	Normal Form
الصيغة الطبيعية التخييرية	Disjunctive Normal Form
الصيغة الطبيعية للعطف	Conjunctive Normal Form
الجملة المفتوحة	Predicate
مجموعة التعويض	Universe of Discourse
مجموعة الحل	Solution Set
المسورات	Quantifiers
السور الكلي ، إشارة التعميم $\forall$	Universal Quantification $\forall$
السور الجزئي ، إشارة التخصيص $\exists$	Existential Quantification $\exists$
نفي العبارة المسورة	The Negation of a Quantified expression
الذات	Identity
هيمنة قيم الصدق	Domination of Truth Values
نفي النفي	Double Negation

الفصل الثاني

نظرية المجموعات

Sets Theory

40	الفصل الثاني
40	نظرية المجموعات
40	Sets Theory
42	المجموعات The Sets
42	المجموعة The Set
43	المجموعة الأحادية العنصر Singleton Set
44	المجموعة الخالية من العناصر The Empty Set
44	عضوية المجموعة Set Membership
45	وصف المجموعات Describing Sets
47	مجموعات الأعداد The Sets of Numbers
47	مجموعة الأعداد الطبيعية ط N The Set of Natural Numbers
47	مجموعة الأعداد الصحيحة ص Z The Set of Integers
47	مجموعة الأعداد النسبية ك Q The Set of Rational Numbers
48	مجموعة الأعداد الحقيقية ح R The Set of Real Numbers
49	عدد أساس المجموعة Set Cardinality
50	مجموعات جزئية Subsets
50	من خصائص الاحتواء
51	مجموعة القوة The Power Set
53	مجموعات متساوية Sets Equality
54	مجموعات منتهية وغير منتهية Finite and Infinite Sets
56	المجموعة الشاملة وأشكال فن The Universal Set and Venn Diagrams
57	العمليات على المجموعات Operations on Sets
58	إتحاد المجموعات Sets Union
58	من خصائص الاتحاد:
59	تقاطع المجموعات Sets Intersection
60	خصائص التقاطع
60	قاعدة الجمع Addition Principle
61	فرق المجموعات Sets Difference
62	خصائص فرق المجموعات:
63	فرق التناظر Symmetric Difference
	خصائص جبرية للعمليات على المجموعات Algebraic properties of Set
64	العمليات Operations
66	الإتحاد والتقاطع المعمم Generalized Unions and Intersections
69	تمثيل المجموعات في الحاسوب Computer Representation of Sets
70	مسائل محلولة Solved Problems
74	تمارين غير محلولة Unsolved Exercises
76	المصطلحات العلمية Terminology

للمجموعات أهمية كبيرة في علم الحاسوب. هناك الكثير من مواضيع التراكيب المتقطعة والتي نستخدم في بنائها نظرية المجموعات، منها على سبيل المثال: العلاقات التي تتكون من مجموعة الأزواج المرتبة. والتباديل من مجموعات من العناصر المرتبة. والمخططات البيانية التي تتكون من مجموعة من القمم، والخطوط الرابطة بين القمم. الاقتترانات وخواص الدوائر الكهربائية المنطقية.

المجموعات The Sets

نحتاج في علم الحاسوب كثيراً إلى تحديد البيانات أو ترتيبها أو تخزينها وفقاً لصفات معينة. هذه البيانات تكون أعداداً في بعض الأحيان أو تكون رموزاً أو أي شيء آخر يمكن تخزينه بواسطة الحاسوب الذي يخزن فيه الصور والموسيقى والأفلام والخرائط وبرمجيات نظم التشغيل وبرامج معالجة النص أو غير ذلك وتسمى هذه الأشياء معاً بالمجموعة وتسمى محتوياتها بالعناصر.

المجموعة¹ The Set

المجموعة هي أي جمع غير مرتب من الأشياء المختلفة وهذه الأشياء تسمى عناصر أو أعضاء في المجموعة.

A set is an unordered collection of distinct objects called the elements or members of the set².

يرمز لأسماء المجموعات عادة بحروف لاتينية كبيرة مثل: A, B, C, Y... وتكون المجموعة معرفة جيداً إذا حددت عناصرها، والتي يرمز لها عادة بحروف لاتينية صغيرة مثل: a, b, z... وتوضع عناصر المجموعة بين أقواس حاصرة مثل { } ، و يفصل بين العناصر بفاصلة.

مثال (1): مجموعة دول مجلس التعاون الخليجي هي:

{ السعودية، عُمان، الإمارات، الكويت، قطر، البحرين }

مثال (2): مجموعة فصول السنة هي : { الربيع، الصيف، الخريف، الشتاء }

مثال (3): لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة التي تبدأ بخمسة وتنتهي

بعشرة وهي: $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

مثال (4): مجموعة الأعداد الفردية (odd numbers) بين خمسة و عشرة

هي: $O = \{5, 7, 9\}$

¹ مبتكر نظرية المجموعات الدكتور Georg Cantor المولود في مدينة بيترس برغ الروسية عام 1845 م حيث كان يعمل والده بالتجارة. بدأ دراسته الجامعية في مدينة زيورخ الألمانية عام 1862 م وحصل شهادة الدكتوراه من جامعة برلين عام 1867 م. عمل في جامعة Halle حتى وفاته عام 1918 م.

² نستخدم نظرية Cantor للمجموعة والمسماة Naive Set Theory

مثال (5): مجموعة الأعداد الزوجية (even numbers) بين خمسة و عشرة
هي: $E = \{6, 8, 10\}$

مثال (6): مجموعة الأعداد الأولية (prime numbers) بين خمسة و عشرة
هي: $P = \{7\}$

مثال (7): $X = \{a, 2, 3, z\} = \{2, a, 3, z\} = \{z, 3, a, 2\}$ وفقاً
للتعريف جمع غير مرتب

تمرين (1): اكتب مجموعة الدول الدائمة العضوية في مجلس الأمن في هيئة
الأمم المتحدة

تمرين (2): اكتب مجموعة الدول التي فازت بكأس العالم لكرة القدم

تمرين (3): اكتب مجموعة مكونة من ثلاثة نظم تشغيل أنتجتها شركة
مايكروسوفت الأمريكية

تمرين (4): اكتب مجموعة الأعداد الصحيحة التي تبدأ بالعدد 24 وتنتهي
بالعدد 30

تمرين (5): اكتب مجموعة الأعداد الفردية بين 24 و 30

تمرين (6): اكتب مجموعة الأعداد الزوجية بين 24 و 30

تمرين (7): اكتب مجموعة الأعداد الأولية بين 24 و 30

تمرين (8): اكتب مجموعة الأحرف المكونة لمصطلح "تراكيب متقطعة"

المجموعة الأحادية العنصر Singleton Set

إذا كانت المجموعة مكونة من عنصر واحد فإننا نطلق عليها المجموعة
الأحادية. فمثلاً، المجموعة $\{1\}$ هي أحادية بينما المجموعة $\{1, 2\}$ ليست أحادية

مثال (1): مجموعة الأعداد الأولية بين 24 و 30 هي المجموعة الأحادية $\{29\}$

مثال (2): مجموعة الأعداد التي تقسم 29 غير العدد نفسه هي أيضاً
المجموعة الأحادية $\{1\}$

مثال (3): مجموعة الأعداد التي تقسم 29، ليست مجموعة أحادية لأنها
تحتوي على عنصرين هما 1، 29.

تمرين (1): أي من المجموعات التالية مجموعة أحادية

(a) مجموعة الدول العربية التي عدد سكانها يزيد على 65
مليون نسمة

(b) مجموعة الأعداد التي تقسم 9 غير 1 و 9.

(c) مجموعة الأعداد التي تقسم 6 غير 1 و 6.

المجموعة الخالية من العناصر The Empty Set

إذا كانت المجموعة لا تحتوي على عناصر، فتدعى المجموعة الخالية من العناصر Empty Set ويرمز لها $\{\}$ أو ϕ . فعلى سبيل المثال، مجموعة الدول العربية الدائمة العضوية في مجلس الأمن، هي مجموعة خالية ϕ تماماً، وكذلك مجموعة الأعداد التي تقسم 7 غير 1 و 7 هي ϕ

مثال (1): مجموعة الأعداد الأولية بين 24 و 28 هي مجموعة خالية

مثال (2): مجموعة الأعداد الأولية الزوجية أكبر من 2 هي مجموعة خالية أيضاً.

تمرين (1): عدد مجموعة حروف اللغة العربية التي تتبع حرف الياء.

تمرين (2): ما مجموعة الدول التي لا تنتمي لهيئة الأمم المتحدة.

تمرين (3): اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية التي لا يوجد لها عدد سابق.

تمرين (4): اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية التي لا يوجد لها عدد لاحق.

عضوية المجموعة Set Membership

يستعمل الرمز $\in$ (an element of or belongs to) للدلالة على عضوية العنصر للمجموعة. لنكن A مجموعة ما، وليكن a عنصراً ما منها. فإننا نقول، العنصر a ينتمي إلى المجموعة A ، ونعبر عن ذلك بالشكل $a \in A$. أما إذا لم يكن العنصر b من عناصر المجموعة A ، فإننا نقول، العنصر b لا ينتمي³ للمجموعة A ونكتب $b \notin A$.

لدراسة أي مجموعة؛ يجب التأكد من أنها معرفة تماماً، وذلك بتحديد عناصرها. فإذا أعطينا عنصراً ما، فإنه سيكون بمقدورنا معرفة إذا كان هذا العنصر عضواً في المجموعة أو غير منتمٍ إليها.

قاعدة (1): أياً كانت المجموعة X ، و x أي عنصر في X ، فالقاعدة التالية

$$\sim (x \in X) \Leftrightarrow (x \notin X) \text{ صواب}$$

قاعدة (2): $x \in \phi \Leftrightarrow \text{False}$

³ الدكتور أحمد سعيدان مقرر لجنة الرموز العلمية والعربية في مشروع مجمع اللغة العربية الأردني للرموز العلمية والعربية (1985) يسمى الرمز $\notin$ نفي الانتماء. إشارات نظرية المجموعات
صفحة 26

مثال (1): فرنسا عضو في حلف الأطلسي. فرنسا تنتمي لمجموعة حلف الأطلسي.

مثال (2): الحبشة ليست عضواً في جامعة الدول العربية

مثال (3): س ليست حرفاً من مجموعة حروف الإدغام التي هي:

{ي، ر، م، ل، و، ن}

مثال (4): $x \notin \phi$

مثال (5): لتكن $A = \{1, 2, 3\}$ فإن $3 \in A$ بينما $5 \notin A$

مثال (6): لتكن المجموعة $X = \{x, y, z, v, w, u\}$ فإن $v \in X$ بينما $a \notin X$

تمرين (1): لتكن **Primes** مجموعة جميع الأعداد الأولية، ولتكن **Odds** مجموعة كل الأعداد الفردية، و **Evens** مجموعة كل الأعداد الزوجية، و **Chars** مجموعة حروف اللغة الإنجليزية. أي من العبارات التالية صحيحة وأيتها خاطئة ؟

1. $10 \in \text{Primes}$
2. $10 \notin \text{Odds}$
3. $10 \notin \text{Evens}$
4. $10 \in \text{Chars}$
5. $\{10\} \in \text{Chars}$
6. $\{10\} \in \text{Odds}$
7. $\{10\} \notin \emptyset$
8. $\alpha \in \text{Chars}$
9. $\{\alpha\} \in \text{Chars}$
10. $\phi \in \text{Primes}$

وصف المجموعات Describing Sets

هناك صيغتان لوصف المجموعات هما:

الصيغة الأولى: طريقة القائمة Menu or Roster Method

ويتم ذلك بسرد جميع عناصر المجموعة على شكل قائمة بين القوسين الحاصرين $\{ \}$ curly braces. ومن الأفضل ترتيب العناصر بطريقة طبيعية منتظمة مثل $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots\}$ ، أو مثل $B = \{-1, -2, -3, \dots\}$. والمجموعة B بهذا الشكل توضح حالة عدم تمكننا من

حصر جميع العناصر في القائمة، فنستخدم علامة الحذف في الكتابة "...
"Ellipses" لتدل على أن قانون تكوين باقي العناصر معروف.

لذا يمكن كتابة المجموعة C ، مجموعة الأعداد الموجبة من خمسة إلى خمسين
هكذا $C = \{5, 6, 7 \dots 50\}$.

فمثلاً: لتكن D_6 مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة وتقسم العدد 6.
بطريقة القائمة نكتب المجموعة بالشكل $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

الصيغة الثانية: طريقة قانون تكوين العناصر Rule Method or Set Builder
ويتم ذلك بإعلان الصفة المميزة للعنصر المنتمي للمجموعة بوساطة قانون
تكوين العناصر. يعمل القانون كمصفاة للعناصر، فالعناصر التي تحقق الصفة
المميزة تنتمي للمجموعة، أي تمر من المصفاة أما العناصر التي لا تحقق
الصفات المميزة لا تنتمي للمجموعة، ولا تمر من المصفاة. وهذه الصيغة
تكتب فيها المجموعة X بالشكل $X = \{x | P(x)\}$.
و الصفة المميزة $P(x)$ تدعى أيضاً **الجملة المفتوحة Predicate**. أنظر
إلى المثال التالي:

مثال: لتكن D_6 مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة وتقسم العدد 6.
بطريقة قانون تكوين العناصر نكتب المجموعة D_6 بالشكل
 $D_6 = \{n | n \text{ divides } 6\}$ ويقرأ الخط الرأسي " | " على أن **Such that**.

الجملة المفتوحة " n تقسم العدد 6 ، $P(n) : n \text{ divides } 6$ " هي قانون تكوين
العناصر، وهي الصفة المميزة لعناصر D_6 . فمثلاً العدد 4 لا ينتمي
للمجموعة D_6 ، والسبب أن العدد 4 لا يقسم العدد 6، حيث $P(4)$ خاطئة،
بينما $P(1)$ صائبة وكذلك $P(6)$ و $P(3)$ و $P(2)$ جميعها صواب فهي قواسم
العدد 6 أي أئمة⁴ العدد.

⁴ يستعمل العالم الرياضي الفلكي ابن البناء " أئمة العدد قواسمه وإمام الكسر مقامه وأئمة عوامل
مقامه و الإمام والمقام درجا في المغرب العربي وأما المشرق فكان يقول: المخرج ". الدكتور أحمد
سعيدان قاموس مصطلحات الرياضيات الابتدائية منشورات مجمع اللغة العربية الأردني (1987)
صفحة 17 بند 17

مجموعات الأعداد *The Sets of Numbers*

يتم حصر الأعداد عادة في عدة مجموعات مختلفة، سنعرف منها المجموعات التالية لكثرة استعمالها في الرياضيات مثل: مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الصحيحة و مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد الحقيقية.

مجموعة الأعداد الطبيعية *The Set of Natural Numbers* N

يرمز لهذه المجموعة بالرمز N وباللغة الإنجليزية N . تحتوي N على جميع الأعداد الصحيحة الموجبة زيادة على الصفر أي أن $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ، وهي نفسها $N = \{x | x \text{ is a natural number}\}$

مثال: مجموعة الأعداد الطبيعية أكبر من 4 وأقل من 9 هي $\{5, 6, 7, 8\}$

مجموعة الأعداد الصحيحة *The Set of Integers* Z

يرمز لهذه المجموعة بالرمز Z وباللغة الإنجليزية Z . تحتوي Z على جميع الأعداد الصحيحة الموجبة زيادة على الصفر و الأعداد الصحيحة السالبة أيضاً أي أن $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ، وهي نفسها $Z = \{x | x \text{ is an integer}\}$.

مثال (1): مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة Z^+

مجموعة الأعداد الطبيعية دون الصفر $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ تدعى Z^+ ، وهي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. وهي $Z^+ = \{x | x \text{ is a positive integer}\}$

مثال (2): مجموعة الأعداد الصحيحة أكبر من 4 وأقل من 9 هي:

$\{5, 6, 7, 8\}$

مثال (3): مجموعة الأعداد الصحيحة أكبر من -4 وأقل من 1 هي:

$\{-3, -2, -1, 0\}$

مجموعة الأعداد النسبية *The Set of Rational Numbers* Q

يرمز لهذه المجموعة بالرمز Q وباللغة الإنجليزية Q . تحتوي Q على جميع الأعداد التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث إن a و b عددان

صحيحان و $b \neq 0$. وهي نفسها $Q = \{x | x \text{ is a rational number}\}$ أي
 $Q = \{\frac{a}{b} | a \in Z \text{ and } b \in Z \text{ with } b \neq 0\}$

مثال (4): $1/2, 5/3$

مجموعة الأعداد الحقيقية R The Set of Real Numbers

وهي مجموعة الأعداد التي تكتب باستخدام الفاصلة العشرية مثلاً:

$1.5, -2.05, 3.0$

$$R = \{x | x \text{ is a real number}\} =]-\infty, \infty[$$

أمثلة متنوعة:

$$1/2 \in Q, 0.0 \in R, 0.5 \in R, -1 \in Z,$$

$$1/2 \notin Z, -1 \notin N, 0.0 \notin Z, 1.5 \notin Q,$$

ملحوظة: إذا تم استثناء الصفر من أي مجموعة من مجموعات الأعداد فإنه
 يتم وضع النجمة * على رمز المجموعة. فمثلاً المجموعة N^* هي
 مجموعة الأعداد الطبيعية دون الصفر. $Z^* = N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

تمرين (1): أي العبارات التالية صحيحة وأيتها خاطئة

a) $5 \in \{1, 2, 3, \dots\}$

b) $\{2\} \in Z$

c) $5 \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

e) $\sqrt{5} \in R$

f) $\sqrt{5} \in Q$

تمرين (2): اكتب بصيغة القانون كل من المجموعات التي تمثلها الفرضيات
 أدناه:

1. مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة حيث إن:
 x عدد صحيح أكبر من 5 وأقل من أو يساوي 12
2. مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة حيث إن:
 x عدد صحيح و $x^2 \leq 25$
3. مجموعة الأعداد الصحيحة حيث إن:

$x^2 - 1 = 0$ عدد صحيح و

4. مجموعة الأعداد الحقيقية حيث إن $x = x+1$ عدد حقيقي و

تمرين (3): اكتب بصيغة الجمل المفتوحة $\{x \mid p(x)\}$ كل من المجموعات التالية :

- a) $\{2,4,6,8,10\}$
- b) $\{2, 4, 6...\}$
- c) $\{a, e, i, o, u\}$
- d) $\{1, 8, 27...\}$
- e) $\{1, 8, 27, 64, 125\}$
- f) $\{-3, -2, -1, 0\}$
- g) $\{..., -2, -1\}$
- h) $\{3, 6, 9, ..., 21\}$

عدد أساس المجموعة Set Cardinality

لكل مجموعة A حجم أو عدد أساس يشير إلى عدد العناصر التي تحتوي عليها المجموعة A .

The size, or cardinality, of a set A refers to the number of elements contained in A

فمثلاً عدد أساس المجموعة الخالية هو العدد صفر 0

و عدد أساس المجموعة $\{\emptyset\}$ هو العدد واحد 1

و عدد أساس المجموعة $\{a\}$ هو العدد واحد 1

و عدد أساس المجموعة $\{0, 1\}$ هو العدد اثنان 2

و عدد أساس المجموعة $\{0, 1, 2\}$ هو العدد ثلاثة 3

هناك طريقتان لتدوين عدد أساس المجموعة:

الأولى شائعة الاستعمال وهي $|A| = n$ و n عدد صحيح موجب ينتمي

للمجموعة Z^+

والثانية هي $\#A = n$. و n عدد صحيح موجب ينتمي للمجموعة Z^+

وسنستخدم هنا الصيغة الأولى الأكثر شيوعاً. فمثلاً $| \emptyset | = 0$ و أيضاً

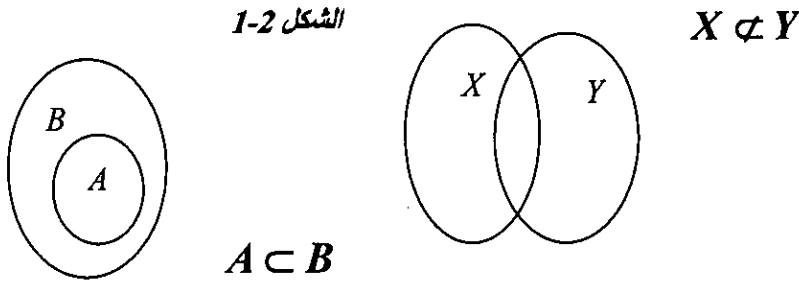
$$| \{0, 1, 2, 3\} | = 4$$

مجموعات جزئية Subsets

إذا كانت A و B مجموعتين، نقول إن A مجموعة جزئية من B ، إذا كان كل عنصر في A موجوداً في B . ونرمز لها $A \subset B$ وتلفظ باللغة الإنجليزية (A is contained in B) وتقرأ بالعربية A محتواة في B أو B تحتوي A . أما إذا كانت X ليست مجموعة جزئية من Y فتكتب باستخدام إشارة نفي الاحتواء $\not\subset$ وبالشكل $X \not\subset Y$ وبالعبارة المسورة نكتب $A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.

Given two sets, A and B , if every element of A is also an element of B , we say that A is a subset of B and write $A \subset B$. That is, whenever $x \in A$ then $x \in B$.

وباستخدام أشكال فن ($Venn^5$ Diagrams) فيكون تمثيل المجموعات الجزئية على النحو المبين في الشكل 1-2



من خصائص الاحتواء

1. المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية لأي مجموعة $\emptyset \subset A$
بينما $\emptyset \in \{\emptyset\}$
2. أي مجموعة A هي مجموعة جزئية محتواة في نفسها $A \subseteq A$
3. أي مجموعة جزئية غير الخالية والمجموعة نفسها تسمى مجموعة جزئية فعلاً $proper\ subset$

⁵ John Venn ولد في لندن عام 1834م وتوفي عام 1923م. تخرج في جامعة كامبريدج عام 1857م له كتاب Symbolic Logic الذي قدم له العالم Boole وفي هذا الكتاب ظهرت الأشكال الهندسية المسماة باسمه لتوضح العلاقات بين المجموعات. له أيضا مساهمات في نظرية الاحتمالات وضعت في كتاب شائع الاستخدام من قبل المهتمين. ترهبين في شبابه قبل العودة للتدريس في كامبريدج حيث حصل على Holy order عام 1859م.

4. نستخدم كلا الرمز $\subset$ ، $\subseteq$ دون تفضيل رمز على الآخر للدلالة على الاحتواء⁶.

$$5. \sim(A \subset B) \Leftrightarrow A \not\subset B$$

$$6. (S \subset \emptyset) \rightarrow (S = \emptyset)$$

$$7. A \subset B \Leftrightarrow (A \subset B \vee A = B)$$

مثال (1): $R \subset Q \subset Z \subset Z^*$ ، $Z \subset N \subset N^*$

مثال (2): $\{3, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

مثال (3): $\{3, 6\} \not\subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

مثال (4): المجموعات الجزئية فعلاً من المجموعة $\{a, b\}$ هي $\{a\}$ ، $\{b\}$ أما المجموعات الجزئية غير الفعلية فهي $\emptyset$ و $\{a, b\}$

مثال (5): لتكن المجموعات A و B و C معرفة على النحو التالي:

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\} , B = \{2, 4, 5\} , A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\text{إذن } A \not\subset B, A \not\subset C, C \not\subset B \quad C \subset A, B \subset C, B \subset A$$

تمرين (1): اكتب كل المجموعات الجزئية للمجموعة $A = \{1, 2, 3\}$

تمرين (2): أوجد عناصر المجموعة $B = \{x \mid x \text{ is a positive integer and } x^2 < 12\}$ ثم اكتب مجموعاتها الجزئية.

تمرين (3): اكتب المجموعات الجزئية للمجموعة الخالية

تمرين (4): اكتب المجموعات الجزئية لمجموعة ذات عنصر واحد مثل $\{a\}$

تمرين (5): اكتب المجموعات الجزئية لمجموعة ذات عنصرين مثل $\{a, b\}$

تمرين (6): اكتب المجموعات الجزئية لمجموعة ذات ثلاثة عناصر مثل

$\{a, b, c\}$

تمرين (7): اكتب المجموعات الجزئية للمجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$

مجموعة القوة The Power Set

هناك مسائل عديدة تتطلب اختبار جميع المجموعات المختلفة الممكن تكوينها من كل عناصر مجموعة ما للتأكد من تحقيقها لبعض الصفات. يؤخذ في الاعتبار هذه التوافقيات من كل عناصر المجموعة A ، فإننا نبني مجموعة جديدة جميع عناصرها تتكون من كل المجموعات الجزئية للمجموعة A .

⁶ المجموعة A تدعى مجموعة أعظم (Superset) أو مجموعة أكبر من أي مجموعة جزئية منها ونكتب $A \supset B$ فمثلاً المجموعة $\{1, 2\}$ هي مجموعة أكبر من $\{1\}$ أو $\{2\}$ ونكتب

$$\{1, 2\} \supset \{1\} \text{ أو } \{1, 2\} \supset \{2\}$$

إذا كانت A مجموعة، فإن مجموعة القوة لها $The power set of A$ هي مجموعة جميع المجموعات الجزئية من المجموعة A ويرمز لها $P(A)$. وبكلام آخر $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$ أي أن $X \in P(A) \Leftrightarrow X \subset A$.

Given a set A , the power set of A is the set of all subsets of the set A . The power set of A is denoted by $P(A)$.

يمكن تعداد جميع المجموعات الجزئية لمجموعة ما عدد عناصرها n على النحو التالي:

نبدأ بإيجاد المجموعات الجزئية التي عدد أساسها صفر، ثم نثنى بالمجموعات الجزئية التي عدد أساسها 1، ثم التي عدد أساسها 2، ونستمر على هذا المنوال بزيادة عنصر واحد على المجموعة الجزئية، حتى نتوقف عند المجموعة الجزئية التي عدد أساسها n وهي المجموعة نفسها. وذلك كما في المثال التالي:

مثال (1): اكتب مجموعة القوة للمجموعة $A = \{0, 1, 2, 3\}$

- المجموعات الجزئية التي عدد أساسها 0: $\emptyset$
 - المجموعات الجزئية التي عدد أساسها 1: $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$
 - المجموعات الجزئية التي عدد أساسها 2: $\{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$
 - المجموعات الجزئية التي عدد أساسها 3: $\{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}$
 - المجموعات الجزئية التي عدد أساسها 4: $\{0,1,2,3\}$
- إذن مجموعة القوة للمجموعة $A = \{0, 1, 2, 3\}$ هي:

$$P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}, \{0, 1, 2, 3\}\}$$

خصائص مجموعة القوة:

$$1. |P(A)| = 2^{|A|}$$

$$2. P(\emptyset) = \{\emptyset\} = \{\{\}\}$$

$$3. X \in P(A) \Leftrightarrow X \subset A$$

$$4. P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$5. \phi \in P(A)$$

$$6. A \in P(A)$$

$$7. P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$$

$$8. P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$$

$$9. A \subset B \rightarrow P(A) \subset P(B)$$

تمرين (1): اكتب مجموعة القوة لكل من المجموعات التالية:

- a) $\{x\}$
- b) $\{x, y\}$
- c) $\{0, 1\}$
- d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

تمرين (2): أوجد عدد الأساس لكل من المجموعات التالية:

- a) $P(\{x\})$
- b) $P(\{x, y\})$
- c) $P(\{0, 1, a\})$
- d) $P(P(\{a, \{b\}\}))$

تمرين (3): حدد أي من المجموعات التالية هي مجموعة قوة لمجموعة ما:

- a) $\emptyset$
- b) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- c) $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{1, 2\}\}$
- d) $(\{\emptyset, \{\emptyset, x\}, \{\{b\}\})$

مجموعات متساوية Sets Equality

المجموعتان A و B متساويتان إذا احتوتا على نفس العناصر، ونكتب $A=B$.

We Say two sets A and B are equal if and only if they have the same elements, and we write $A=B$.

إذا كانت المجموعتان A و B متساويتين فهذا يؤدي إلى أن $A \subset B$ و $B \subset A$ أي أن المجموعتين تحتوي كل منهما على الأخرى وهذا تعريف آخر للمساواة بين مجموعتين.

مثال (1): إذا كانت $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

وإذا كانت $B = \{x \mid x \text{ is an integer and } x^2 < 12\}$

فإن $A = B$

مثال (2): $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 1, 2, 3\}$ مجموعتان متساويتان لأن الترتيب داخل المجموعات غير مهم.

تمرين (1): لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ أي المجموعات التالية تساوي A ؟

- $\{4, 1, 5, 3, 2\}$
- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\{x \mid x \text{ is an integer and } x^2 < 12\}$
- $\{x \mid x \text{ is an integer and } x < 6\}$
- $\{x \mid x \text{ is a positive integer and } x < 6\}$
- $\{x \mid x \text{ is a positive integer and } x^2 \leq 25\}$

تمرين (2): أي المجموعات التالية متساوية مع $\emptyset$ المجموعة الخالية؟

- $\{x \mid x \text{ is a real number and } x = x + 1\}$
- $\{x \mid x \text{ is a real number and } x = 2x + 1\}$
- $\{x \mid x \text{ is an integer and } x^2 < 12\}$
- $\{x \mid x \text{ is an integer and } x < 6\}$
- $\{x \mid x \text{ is a real number and } x^2 = -10\}$
- $\{x \mid x \text{ is a positive integer and } x^2 - 1 = 0\}$
- $\{x \mid x \text{ is a positive integer and } x^2 + 1 = 0\}$

مجموعات منتهية وغير منتهية Finite and Infinite Sets

المجموعة A مجموعة منتهية *finite*، إذا أمكن إحصاء عناصرها. أي أنه من المؤكد أن عملية تعداد عناصر A يمكن أن تتوقف ولو بعد حين. أما إذا كانت عملية تعداد عناصر A تستمر أبداً، فإننا نقول إن المجموعة A غير منتهية *infinite*. رياضياً نعرفها هكذا:

المجموعة A هي مجموعة منتهية إذا احتوت على n من العناصر المختلفة، بحيث إن n عدد طبيعي (عدد صحيح موجب و العدد n هو ما أسميناه عدد أساس المجموعة A : $|A| = n$).

وأي مجموعة أخرى ليست منتهية فإنها تدعى غير منتهية.

A set A is called finite if it has n distinct elements, where $n \in \mathbb{N}$. A set that is not finite is called infinite.

(Remember that n was called the cardinality of A and was denoted $|A| = n$).

مثال (1): مجموعات منتهية مثل:

- أ- المجموعة الخالية
- ب- $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- ت- مجموعة أحرف الهجاء
- ث- مجموعة الكلمات المكونة من خمسة حروف
- ج- مجموعة القوة لمجموعة عدد أساسها عدد صحيح موجب هو 100

مثال (2): مجموعات منتهية

1. $\{0, 2, 4, 6\}$
2. $\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 100 \text{ and } x \text{ is even}\}$
3. $\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < x < 100 \text{ and } x \text{ is odd}\}$

مثال (3): مجموعات غير منتهية

- أ- مجموعة الأعداد الطبيعية
- ب- مجموعة الأعداد الصحيحة
- ت- مجموعة الأعداد الحقيقية
- ث- مجموعة الأعداد الصحيحة الأولية

مثال (4): مجموعات غير منتهية

- a) $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$
- b) $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ is even}\}$
- c) $Y = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ is odd}\}$

تمرين (1): أي من المجموعات الآتية منتهية وأيها غير منتهية؟

- أ- مجموعة الأعداد النسبية
- ب- مجموعة الأعداد الحقيقية بين 5 و 10
- ت- مجموعة الأعداد الصحيحة بين 5 و 10
- ث- مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة
- ج- مجموعة الكلمات المكونة من أحرف الهجاء
- ح- مجموعة الناس الذين لم يعيشوا أبداً على الأرض

المجموعة الشاملة وأشكال فن The Universal Set and Venn Diagrams

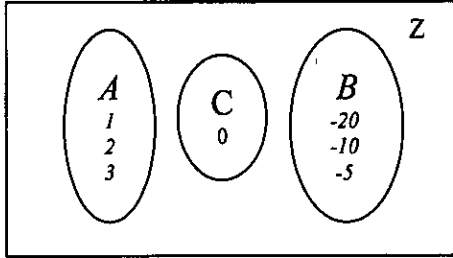
في تطبيقات نظرية المجموعات نسمي المجموعة الشاملة أو الكلية؛ المجموعة الكبيرة التي تحتوي على عناصر جميع المجموعات قيد الدراسة. وبأشكال فن الهندسية هي مستطيل، ويرمز لها عادة بـ U . وفي داخل المجموعة الشاملة U نرسم مجموعات الجزئية بأشكال فن الهندسية غالباً بدوائر أو بأشكال أخرى. نستخدم النقط • أو إشارة $\times$ لتمثيل عناصر المجموعات داخل الدوائر أو المجموعة الشاملة U نفسها.

The Universal set U , which contains all the sets under consideration and In Venn diagrams the set U is represented by a rectangle. Inside this rectangle, circles or other geometrical figures are used to represent sets.

مثال (1): ما المجموعة الشاملة التي تحتوي على المجموعات A و B و C ؟
ارسمها باستخدام أشكال فن الهندسية إذا علمت أن

$$C = \{0\} \text{ و } B = \{-20, -10, -5\} \text{ و } A = \{1, 2, 3\}$$

الحل: المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الصحيحة Z ، لاحتوائها على جميع المجموعات التي هي موضوع الحديث. انظر الشكل 2-2



الشكل 2-2

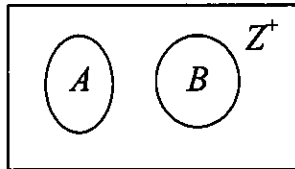
مثال (2): ما المجموعة الشاملة التي تحتوي على المجموعتين التاليتين

$$A = \{1, 3, 5, \dots\} \text{ و } B = \{2, 4, 6, \dots\}$$

بإستخدام أشكال فن الهندسية ؟

الحل: المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة:

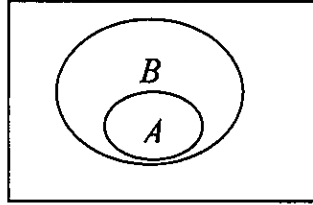
$$Z^+ = \{z \mid z \text{ is a positive integer}\}$$



الشكل 3-2

مثال (3): ارسم باستخدام أشكال فن الهندسية علاقة الاحتواء التالية:
 $A \subset B \subset U$ ؟

الحل:



الشكل 4-2

تمرين (1): أي من المجموعات N, Z^+, Z, R, Q تعد المجموعة الشاملة للمجموعات التالية ؟

a) $X = \{ x \mid x \text{ is a real number and } x^2 \leq 25 \}$,

$Y = \{ y \mid y \text{ is an integer and } x = 2x+1 \}$

b) $X = \{ x \mid x \text{ is a positive integer and } x^2 \leq 25 \}$,

$Y = \{ y \mid y \text{ is an integer and } 2x = x+1 \}$

c) $X = \{ x \mid x \text{ is a negative integer and } x^2 \leq 25 \}$,

$Y = \{ y \mid y \text{ is an integer and } x = 2x+1 \}$

العمليات على المجموعات Operations on Sets

لقد درسنا في الفقرات السابقة عدة طرق لإثبات صحة العلاقة بين مجموعة ما محتواة داخل مجموعة أخرى، أو لإثبات صحة علاقة انتماء عنصر لمجموعة ما. وسندرس في هذه الفقرة عدة عمليات تنفذ على المجموعات، تؤدي نتائجها إلى تكوين مجموعات جديدة. هذه العمليات على المجموعات، تشبه مثيلاتها من العمليات التي تنفذ على الأعداد الحقيقية مثل: الضرب (Multiplication) والجمع (Addition) والطرح (Subtraction) والقسمة (Division). أما العمليات التي هي موضوع حديثنا على المجموعات فهي الاتحاد (Union) والتقاطع (Intersection) والفرق (Difference) والمتمم (Complement).

اتحاد المجموعات Sets Union

إن عملية اتحاد مجموعتين تقضي باتخاذ مجموعتين ما مثل X و Y ثم دمجهما معاً لتكوين مجموعة جديدة V أكبر وتحتوي على عناصر كلتا المجموعتين. أي عنصر في مجموعة الاتحاد V ، يتكرر فقط على الأكثر مرة واحدة بينما هو موجود في المجموعتين X أو Y .

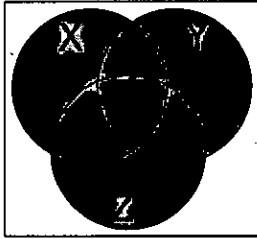
لتكن X و Y مجموعتين فإن إتحادهما يرمز له $X \cup Y$ وهو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى X أو إلى Y أو إلى كليهما.

Let X and Y are any two sets. The **union** of the sets X and Y , denoted by $X \cup Y$, is the set that contains those elements that either in X or in Y , or in both.

واصطلاحاً نكتب اتحاد مجموعتين بصيغة قانون تكوين المجموعات على النحو التالي:

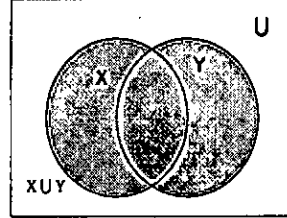
$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ or } z \in Y\} , z \in X \cup Y \Leftrightarrow (z \in X \vee z \in Y)$$

وباستخدام أشكال فن الهندسية نمثل اتحاد المجموعتين $X \cup Y$ بالشكل المظلل التالي:



$X \cup Y \cup Z$

الشكل 5-2



من خصائص الاتحاد:

مهما تكن المجموعات X, Y, Z

$$1. X \cup \phi = X$$

$$2. X \cup X = X$$

$$3. X \cup Y = Y \cup X$$

$$4. X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$$

$$5. X \subset Y \cup X$$

مثال (1): لتكن المجموعات التالية:

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ و } B = \{-20, -10, -5\} \text{ و } C = \{0\}$$

- أوجد اتحاد المجموعات الآتية: $A \cup B, B \cup C, B \cup A$ ؟
- $A \cup B = \{-20, -10, -5, 1, 2, 3\}$ ترتيب العناصر غير مهم
- $A \cup C = \{0, 1, 2, 3\}$
- $B \cup C = \{-20, -10, -5, 0\}$
- $B \cup A = \{-20, -10, -5, 1, 2, 3\}$
- تمرين (1): أوجد اتحاد المجموعات الآتية؟
- (a) $A \cup \phi$ ، مهما كانت المجموعة A
- (b) $A \cup A$ ، مهما كانت المجموعة A
- (c) $A \cup U$ وذلك، أيا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U
- (d) من المثال السابق $A \cup B \cup C$

تقاطع المجموعات Sets Intersection

كثيرا ما نهتم بالعناصر التي تنتمي لمجموعتين مختلفتين. لנأخذ مثلا مجموعة الناس الذين يسكنون في مدينتين في دائرتين انتخابيتين. هؤلاء الناس يسمح لهم يوم الاقتراع بالتصويت فقط مرة واحدة في إحدى الدائرتين. مثال آخر على تقاطع مجموعتين، أننا حينما لا نريد حدوث تضارب في الامتحانات النهائية لطلبة مادتين مختلفتين نقرر عقد امتحاناتهما معا في الوقت نفسه.

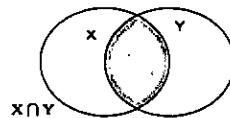
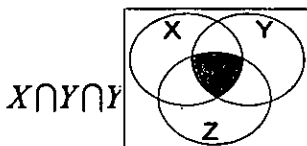
لتكن X و Y مجموعتين، فإن تقاطعهما يرمز لهما $X \cap Y$ وهو مجموعة العناصر المشتركة بين X و Y . (مجموعة العناصر التي تنتمي إلى كل من المجموعتين X و Y).

Let X and Y are two sets. The intersection of the sets X and Y , denoted by $X \cap Y$, is the set containing those elements in both X and Y .

واصطلاحا نكتب تقاطع المجموعتين بصيغة قانون تكوين المجموعات على النحو التالي: $X \cap Y = \{z | z \in X \text{ and } z \in Y\}$ وبصيغة العبارات المنطقية

$$z \in X \cap Y \Leftrightarrow (z \in X \wedge z \in Y)$$

وباستخدام أشكال فن الهندسية نمثل تقاطع المجموعتين بالشكل المظلل التالي:



مثال (1): لتكن المجموعات A, B, C معرفة كما يلي: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, -10, -5\}$, $C = \{0, 3\}$. أوجد تقاطع المجموعات الآتية:
 $A \cap B, A \cap C, B \cap C$ ؟

$$1. \{1\} = A \cap B$$

$$2. \{3\} = A \cap C$$

$$3. \emptyset = B \cap C$$

$$4. \{1\} = B \cap A$$

تسمى مجموعات منفصلة (*Disjoint Sets*) أي مجموعتين إذا كان تقاطعهما المجموعة الخالية. مثل $\emptyset = B \cap C$ فالمجموعتان B, C منفصلتان.

خصائص التقاطع

مهما تكن المجموعات X, Y, T

$$1. X \cap \emptyset = \emptyset$$

$$2. X \cap X = X$$

$$3. X \cap Y = Y \cap X$$

$$4. X \cap (Y \cap T) = (X \cap Y) \cap T$$

$$5. X \cap (Y \cup T) = (X \cap Y) \cup (X \cap T)$$

$$6. X \cup (Y \cap T) = (X \cup Y) \cap (X \cup T)$$

قاعدة الجمع Addition Principle

1. لتكن X, Y مجموعتين فإن عدد أساس اتحاد المجموعتين هو:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

2. لتكن X, Y, T ثلاث مجموعات فإن عدد أساس اتحادهن هو:

$$|X \cup Y \cup T| = |X| + |Y| + |T| - |X \cap Y| - |X \cap T| - |Y \cap T| + |X \cap Y \cap T|$$

تمرين (1): لتكن U المجموعة الشاملة. و A المجموعة الجزئية من U . أوجد المجموعات الآتية: $A \cap A$, $A \cap \emptyset$, $A \cap U$ ؟

تمرين (2): لتكن المجموعات X, Y, T معرفة كما يلي: $X = \{1, 2, 3\}$,

$Y = \{1, -10, -5\}$, $T = \{0, 3\}$ أوجد ما يلي:

$$1. X \cup Y \cup T, X \cup Y, Y \cap T, X \cap T, X \cap Y, X \cap Y \cap T$$

$$2. |Y \cap T|, |X \cap T|, |X \cup Y|, |X \cap Y|, |T|, |Y|, |X|, |X \cup Y \cup T|, |X \cap Y \cap T|$$

فرق⁷ المجموعات Sets Difference

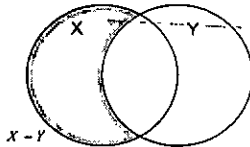
فرق المجموعات يسمح لنا بالاهتمام بمجموعة العناصر التي تظهر في مجموعة ما ولا تظهر في المجموعة الأخرى. مثلاً ما مجموعة طلاب علم الحاسوب المسجلين في متطلب اختياري لهم وهو متطلب إجباري لطلبة قسم نظم المعلومات (مثلاً مساق نظم قواعد البيانات 2).

لتكن X و Y مجموعتين فإن الفرق بين X و Y يرمز له $X - Y$ وهو مجموعة العناصر التي تنتمي فقط إلى المجموعة X ولا تنتمي إلى المجموعة Y . ويسمى أيضاً متمم Y أو مكمل Y فيما يتعلق بـ X ويرمز له $\bar{Y} = \{y \mid y \notin Y\}$.

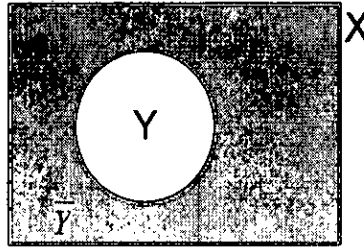
Let X and Y are two sets. The difference of the sets X and Y , denoted by $X - Y$, is the set containing those elements that are in X but not in Y . The difference of X and Y is called the complement of Y with respect to X and denoted by $\bar{Y}$.

واصطلاحاً ندون فرق المجموعتين بـ $X - Y = \{z \in X \text{ and } z \notin Y\} = \bar{Y}$. وبصيغة العبارات المنطقية ندون بـ $z \in (X - Y) \Leftrightarrow (z \in X \wedge z \notin Y)$

وباستخدام أشكال فن الهندسية نمثل فروق المجموعات بالشكل المظلل التالي:



⁷ اختلفنا مع لجنة الرموز في مشروع مجمع اللغة العربية الأردني للرموز العلمية والعربية لأنها ترجمت المصطلح الإنجليزي Sets Difference بطرح المجموعات ولو أصابت لكان المصطلح أصلاً Sets Subtraction. د. أحمد سعيدان. 1985م.



الشكل 7-2

مثال (1): لتكن المجموعات: $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, -10, -5\}$ و $C = \{0, 3\}$ أوجد فرق المجموعات الآتية: $A - B, A - C, B - C, B - A$ ؟
الحل:

$$\begin{aligned} \text{أ- } A - B &= \{2, 3\} \\ \text{ب- } A - C &= \{1, 2\} \\ \text{ت- } B - C &= \{1, -10, -5\} \\ \text{ث- } B - A &= \{-10, -5\} \end{aligned}$$

خصائص فرق المجموعات:

لتكن المجموعة U المجموعة الشاملة و A و B مجموعات جزئية منها.

1. $A - \phi = A$
2. $A - A = \phi$
3. $U - A = \bar{A}$
4. $\phi - A = \phi$
5. $A - B \subset A$
6. $|A \cap B| = |A| - |A - B|$
7. $|A - B| = |A| - |A \cap B|$
8. لتكن X, Y, T ثلاث مجموعات:
 - i. $X - (Y \cup T) = (X - Y) \cap (X - T)$
 - ii. $X - (Y \cap T) = (X - Y) \cup (X - T)$

تمرين (1): لتكن المجموعات $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, -10, -5\}$ و $C = \{0, 3\}$ أوجد المجموعات الآتية؟
أ- $((A - B) - C)$
ب- $(A - B) \cup (B - A)$

$$(A \cup B) - (A \cap B)$$

ث- لتكن Y, U, X ثلاث مجموعات معرفة على النحو التالي:

$$X = \{a, e, f, i, h\}, Y = \{e, g, i, l\}$$

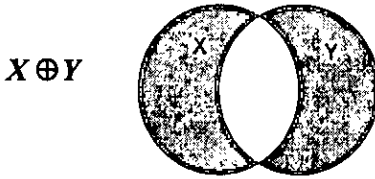
$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, l, h, i\}$$

أوجد ما يلي: $U - Y, X - Y, \overline{X - Y}, \overline{Y}, \overline{X}$

فرق التناظر Symmetric Difference

فرق التناظر لمجموعتين X و Y ويرمز له $X \oplus Y$ وكما هو مبين في الشكل التالي هو فرق مجموعتي الاتحاد والتقاطع لهما وهو نفس مجموعة اتحاد المجموعة $X - Y$ و المجموعة $Y - X$.

$$\begin{aligned} X \oplus Y &= (X - Y) \cup (Y - X) \\ &= (X \cup Y) - (X \cap Y) \end{aligned}$$



الشكل 8-2

خصائص جبرية للعمليات على المجموعات Algebraic properties of Set Operations

عمليات الاتحاد والتقاطع والفرق التي قمنا بتعريفها على المجموعات في الفقرات السابقة، تتمتع بعدة خواص جبرية، بعضها يشبه خواص العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية. الخصائص الجبرية المذكورة في الجدول التالي يمكن إثباتها رياضياً وبسهولة، وعليه سوف نثبت بعضها، ويترك الباقي كتمرين للطالب. والطريقة الأخرى لإثبات صحة الخواص هي باستخدام أشكال فن الهندسية، أو قواعد المنطق التي درسناها سابقاً.

جدول الخصائص الجبرية للعمليات على المجموعات

م	الاسم	الخاصية Property	Name
1	التبديل	$X \cup Y = Y \cup X$ $X \cap Y = Y \cap X$	Commutative
2	التجميع	$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap Z$ $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup Z$	Associative
3	التوزيع	$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$	Distributive
4	الذات	$X \cup \phi = X$ $X \cap U = X$	Identity
5	التماثل	$X \cup X = X$ $X \cap X = X$	Idem potent
6	التكميل	$\overline{(\overline{X})} = X$ $\overline{\phi} = U$ $\overline{U} = \phi$	Complement
7	هيمنة المجموعة الشاملة و المجموعة الخالية	$U \cup X = U$ $\overline{X} \cup X = U$ $\phi \cap X = \phi$ $\overline{X} \cap X = \phi$	Domination of Universal and Empty Sets
8	قوانين دو مورغان	1- $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ 2- $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$	De Morgan's Laws

مثال (1): أثبت صحة قانون دو مورغان $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$
الحل : لإثبات صحة المساواة سوف نثبت أن كل طرف للمساواة هو مجموعة جزئية من الطرف الآخر

أولاً : الطرف الأيسر مجموعة جزئية من الطرف الأيمن $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cup \overline{Y}$
ليكن z عنصراً من مكمل تقاطع X و Y أي أن $z \in \overline{X \cap Y}$
وعليه فإن z لا ينتمي لتقاطع X و Y $z \notin X \cap Y$
ومنه z لا ينتمي إما لـ X أو لا ينتمي لـ Y $z \notin X$ or $z \notin Y$
إذن العنصر z ينتمي لمكمل X أو لمكمل Y $z \in \overline{X}$ or $z \in \overline{Y}$ أي $z \in \overline{X} \cup \overline{Y}$

ثانياً : الطرف الأيمن مجموعة جزئية من الطرف الأيسر

$\overline{X} \cup \overline{Y} \subset \overline{X \cap Y}$
لتكن z عنصراً من اتحاد مكمل X ومكمل Y أي أن $z \in \overline{X} \cup \overline{Y}$
وعليه فإن z تنتمي إما لمكمل X أو لمكمل Y $z \in \overline{X}$ or $z \in \overline{Y}$
ومنه z لا تنتمي لـ X ولا تنتمي لـ Y $z \notin X$ and $z \notin Y$
 $z \notin X \cap Y$
إذن العنصر z ينتمي لمكمل تقاطع X و Y $z \in \overline{X \cap Y}$

مثال (2): أثبت صحة خاصية التوزيع

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

يمكن استخدام ما يسمى بجداول الانتماء بحيث نضع 1 في حالة انتماء العنصر للمجموعة وصفر في حالة عدم الانتماء.

X	Y	Z	$Y \cup Z$	$X \cap (Y \cup Z)$	$X \cap Y$	$X \cap Z$	$(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

مثال (3): أثبت صحة $\overline{X \cup (Y \cap Z)} = (\overline{Z} \cup \overline{Y}) \cap \overline{X}$

البرهان : باستخدام قانون دومورغان الأول

$$\overline{X \cup (Y \cap Z)} = \overline{X} \cap \overline{(Y \cap Z)}$$

باستخدام قانون دومورغان الثاني

$$= \overline{X} \cap (\overline{Y} \cup \overline{Z})$$

$$= (\overline{Y} \cup \overline{Z}) \cap \overline{X}$$

$$= (\overline{Z} \cup \overline{Y}) \cap \overline{X}$$

تمرين (1): أثبت صحة ما يلي ؟

1. إذا كانت A محتواه في C وإذا كانت B محتواه في C فإن

$$A \cup B \subset C$$

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

3. اشرح متى يكون $A - B = B - A$

$$A - (A - B) \subset B$$

5. إذا كان $A \oplus B = A \oplus C$ فهل يؤدي إجبارياً إلى أن $A = C$

علل إجابتك

تمرين (2): انظر إلى شكل فن الهندسي التالي ثم أوجد المجموعات التالية ؟

$$1. Z \cap Y, X \cap Z, X \cap Y$$

$$2. X \cap Y \cap Z$$

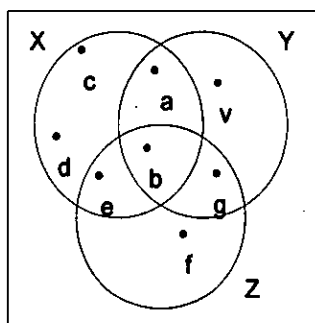
$$3. Y \cup Z, X \cup Z, X \cup Y$$

$$4. X \cup Y \cup Z$$

$$5. X - Z, Z - Y, X - Y$$

$$6. X \oplus Z, Y \oplus Z, X \oplus Y$$

$$7. X \oplus Y \oplus Z$$



الإتحاد والتقاطع المعمم Generalized Unions and Intersections

لنكن X_1 و X_2 و X_3 إلى X_n مجموعات عددها n . لقد رأينا كيفية تعريف اتحاد للمجموعتين $X_1 \cup X_2$ وكذلك تعريفا لتقاطع لمجموعتين $X_1 \cap X_2$. علاوة على ذلك، فإن عامل⁸ الاتحاد وعامل التقاطع يحققان خاصية التجميع، وعليه فإن المجموعتين $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ و $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ معرفتان تماماً. لأن المجموعة المركبة من اتحاد المجموعات الثلاث تحتوي على الأقل على العناصر الموجودة في إحدى المجموعات، والمجموعة المركبة من تقاطع المجموعات الثلاث تحتوي على العناصر المشتركة الموجودة في ثلاث

⁸ نستخدم لفظة عامل operator كترديد لكلمة عملية Operation

المجموعات. وهكذا نستطيع المضي قدما في تعريف اتحاد n مجموعات منتهية أو تقاطع n مجموعة. إلا أن طريقة الكتابة السابقة بهذا الشكل تصبح مرهقة وثقيلة على الكاتب خاصة عندما تكون قيمة n كبيرة نوعاً ما.

إن إشارة الاتحاد⁹ المعمم $\bigcup_{i=1}^n X_i$ وإشارة التقاطع المعمم $\bigcap_{i=1}^n X_i$ لعدد منتهٍ من المجموعات، يزوداننا بطريقة أنيقة وممتازة لتمثيل اتحاد مجموعات عددها n أو تقاطع مجموعات عددها n . انظر جدولي الاتحاد المعمم و التقاطع المعمم في كيفية استخدام هذه الإشارات.

جدول الاتحاد المعمم

المجموعات	اتحاد معمم	الطريقة التقليدية
X_2 , X_1	$\bigcup_{i=1}^2 X_i$	$X_1 \cup X_2 =$
X_3 , X_2 , X_1	$\bigcup_{i=1}^3 X_i$	$X_1 \cup X_2 \cup X_3 =$
X_4 , X_3 , X_2 , X_1	$\bigcup_{i=1}^4 X_i$	$X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 =$
....		
$X_n \dots X_3 , X_2 , X_1$	$\bigcup_{i=1}^n X_i$	$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n =$

جدول التقاطع المعمم

المجموعات	تقاطع معمم	الطريقة التقليدية
X_2 , X_1	$\bigcap_{i=1}^2 X_i$	$X_1 \cap X_2 =$
X_3 , X_2 , X_1	$\bigcap_{i=1}^3 X_i$	$X_1 \cap X_2 \cap X_3 =$
X_4 , X_3 , X_2 , X_1	$\bigcap_{i=1}^4 X_i$	$X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4 =$

⁹ الدكتور أحمد سعيّدان مقرر لجنة الرموز العلمية والعربية في مشروع مجمع اللغة العربية الأردني للرموز

العلمية والعربية (1985) يسمى الرمز $\bigcup_{i=1}^n X_i$ إشارة اتحاد مجموعات عددها n و $\bigcap_{i=1}^n X_i$ إشارة

تقاطع مجموعات عددها n انظر إشارات نظرية المجموعات صفحة 25

....		
$X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n =$	$\bigcap_{i=1}^{i=n} X_i$	$X_n \dots X_3 , X_2 , X_1$

الإتحاد المعمم هو اتحاد جمع من المجموعات وهو المجموعة التي تحتوي على أولئك العناصر التي هي أعضاء على الأقل في إحدى مجموعات الجمع.

The union of a collection of sets is the set that contains those elements that are members of at least one set in the collection.

التقاطع المعمم هو تقاطع جمع من المجموعات وهو المجموعة التي تحتوي على أولئك العناصر التي هي أعضاء في جميع مجموعات الجمع.

The intersection of a collection of sets is the set that contains those elements that are members of all the sets in the collection.

تمثيل المجموعات في الحاسوب Computer Representation of Sets

لتكن A مجموعة جزئية، من المجموعة الشاملة المنتهية U ، والتي عدد عناصرها n ومعرفة على النحو التالي $U = \{u_1, u_2, u_3 \dots u_i \dots u_n\}$. فإنه يمكن تمثيل A داخل الحاسوب بواسطة سلسلة من الأرقام الثنائية (bit string) طول السلسلة n ، وقيمة الرقم الثنائي i في السلسلة 1 إذا كان العنصر u_i ينتمي لـ A وإذا كان العنصر u_i لا ينتمي لـ A . انظر الأمثلة الآتية لتوضيح الطريقة:

مثال (1): لتكن المجموعة الشاملة $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ والمجموعات الجزئية منها $A = \{1, 2\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ و $C = \{4, 5, 6\}$ أوجد سلاسل الأرقام الثنائية التي تمثل المجموعات A, B, C وتقاطعهن واتحادهن والفرق بينهن وفرق تناظرهن؟

الحل:

المجموعة الشاملة: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1 1 0 0 0 0	$A = \{1, 2\}$ سلسلة بتات تمثيل
0 1 0 1 0 1	$B = \{2, 4, 6\}$ سلسلة بتات تمثيل
0 0 0 1 1 1	$C = \{4, 5, 6\}$ سلسلة بتات تمثيل
1 1 1 1 1 1	$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ سلسلة بتات تمثيل
0 0 0 0 0 0	$\emptyset$ سلسلة بتات تمثيل
0 0 1 1 1 1	A سلسلة بتات تمثيل مكمل
1 1 0 1 0 1	$A \cup B$ سلسلة بتات تمثيل
0 1 0 0 0 0	$A \cap B$ سلسلة بتات تمثيل
1 0 0 0 0 0	$A - B$ سلسلة بتات تمثيل
1 0 0 1 0 1	$A \oplus B$ سلسلة بتات تمثيل

مسائل محلولة Solved Problems

1- لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، بين أي من المجموعات التالية مساوية للمجموعة A:

$$B = \{4, 2, 3, 1, 5\} \quad (a)$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad (b)$$

$$D = \{x \mid x^2 \leq 25 \text{ and } x \text{ is an integer}\} \quad (c)$$

$$D = \{x \mid x \leq 5 \text{ and } x \text{ is a positive integer}\} \quad (d)$$

(الحل: الجواب (a) و (d))

2- لتكن $U = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

(a) إذا كانت A, B مجموعتين جزئيتين من U وكان

$$A \cap B \text{ أوجد } \overline{A \cup B} = \{6, 9, 10, 11, 12\}$$

(b) إذا كانت E, D, C مجموعات جزئية من U وكان لدينا المجموعات

$$C \cup E = \{7, 8, 9, 11, 14\}, C \cap D = \{7, 8, 14\}$$

$$D \cup E = \{7, 8, 11, 12, 14\} \text{ أوجد } \overline{(C \cap D) \cup E} ?$$

(الحل:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap B = \{7, 8, 10, 13, 14, 15\} \quad (a)$$

$$(C \cap D) \cup E = (C \cup E) \cap (D \cup E) = \{7, 8, 11, 14\} \quad (b)$$

$$\overline{(C \cap D) \cup E} = \overline{(C \cup E) \cap (D \cup E)} = \{6, 9, 10, 12, 13, 15\} \text{ ومنه}$$

3- أوجد ناتج مايلي:

$$\{a, b, c\} \oplus (\{a, b\} \oplus \{c\}) \quad (a)$$

$$\{\phi\} - \phi \quad (b)$$

$$\{a, b, c\} \cap (\{a, b\} \cup \{c\}) \quad (c)$$

(الحل:

$$\phi \quad (a)$$

$$\{\phi\} \quad (b)$$

$$\{a, b, c\} \quad (c)$$

4- لتكن لدينا المجموعات التالية:

$$A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{c, e, f, h, k, m\}, C = \{b, l, n, m\},$$

$$U = A \cup B \cup C$$

أوجد ناتج ما يلي:

$$|A \cup B \cup C| \quad (a)$$

$$\overline{(A \cap B) \cup C} \quad (b)$$

$$A \oplus B \oplus C \quad (c)$$

الحل:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= \\ |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| &= \quad (a) \\ 5 + 6 + 4 - 2 - 1 - 1 + 0 &= 11 \end{aligned}$$

$$(A \cap B) \cup C = \{c, e, b, l, n, m\}, \quad A \cap B = \{c, e\} \quad (b)$$

$$(A \cap B) \cup C = \{a, d, f, h, k\}$$

$$A \oplus B \oplus C = \{a, d, f, h, k, l, n\} \quad (c)$$

$$A \cap \bar{B} = A - B \quad \text{5- برهن على صحة ما يلي:}$$

البرهان:

$$x \in A \cap \bar{B} \Rightarrow x \in A \text{ and } x \in \bar{B} \Rightarrow x \in A \text{ and } x \notin B \Rightarrow x \in A - B \Rightarrow A \cap \bar{B} \subset A - B \quad (a)$$

$$x \in A - B \Rightarrow x \in A \text{ and } x \notin B \Rightarrow x \in A \text{ and } x \in \bar{B} \Rightarrow x \in A \cap \bar{B} \Rightarrow A - B \subset A \cap \bar{B} \quad (b)$$

6- لتكن لدينا المجموعتان:

$$A = \{1, 2, -1, -2, \phi\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ is a real number and } (x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0\}$$

بين أي من العبارات التالية صائبة وأيها خاطئة:

$$B \subset A \quad (a)$$

$$\phi \in B \quad (b)$$

$$A - B \neq \{\phi\} \quad (c)$$

$$\{\phi\} \subset P(A) \quad (d)$$

$$A \cap B = \{1\} \quad (e)$$

$$B \oplus A \neq \{2\} \quad (f)$$

الحل:

(a) صائبة

(b) خاطئة

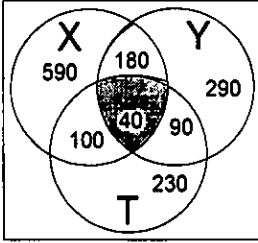
(c) صائبة

(d) خاطئة

(e) خاطئة

(f) صائبة

7- لدى دراسة عينة من مشاهدي التلفزيون مؤلفة من 860 شخصاً تبين ما يلي:



- 570 شخصاً يشاهدون لعبة كرة القدم
 - 290 شخصاً يشاهدون لعبة الهوكي
 - 230 شخصاً يشاهدون لعبة كرة السلة
 - 290 شخصاً يشاهدون لعبة كرة السلة وكرة القدم
 - 180 شخصاً يشاهدون لعبة كرة القدم والهوكي
 - 100 شخص يشاهدون لعبة كرة السلة والهوكي
 - 100 شخص لا يشاهدون أي لعبة من الألعاب السابقة
- المطلوب إيجاد

- 1- عدد المشاهدين الذين يشاهدون الألعاب الثلاثة معاً؟
- 2- عدد المشاهدين الذين يشاهدون فقط لعبة كرة القدم؟
- 3- عدد المشاهدين الذين يشاهدون فقط لعبة الهوكي؟
- 4- عدد المشاهدين الذين يشاهدون فقط لعبة كرة السلة؟
- 5- عدد المشاهدين الذين يشاهدون إحدى الألعاب الثلاث؟

الحل : لنعتبر عن مجموعة مشاهدي كرة القدم بالمجموعة X و مشاهدي كرة الهوكي بالمجموعة Y مشاهدي كرة السلة بالمجموعة T وكما هو مبين بمخطط فن الهندسي المقابل نلاحظ أن عدد مجموعة مشاهدي التلفاز = $860 - 100 = 760$ شخصاً

أولاً: بتطبيق مبدأ قاعدة الجمع التالية:

$$|X \cup Y \cup T| = |X| + |Y| + |T| - |X \cap Y| - |X \cap T| - |Y \cap T| + |X \cap Y \cap T|$$

نحصل على المساواة

$$\begin{aligned} |X \cup Y \cup T| &= 760 = \\ |X| + |Y| + |T| - |X \cap Y| - |X \cap T| - |Y \cap T| + |X \cap Y \cap T| &= \\ 570 + 290 + 230 - 290 - 180 - 100 + |X \cap Y \cap T| &= 760 \\ 40 &= |X \cap Y \cap T| \end{aligned}$$

ومنه أن عدد مشاهدي الألعاب الثلاث معاً هو 40 شخصاً.

ثانياً: عدد المشاهدين الذين يشاهدون فقط لعبة كرة القدم

$$340 = 40 + 90 - 180 - 570 =$$

ثالثاً: عدد المشاهدين الذين يشاهدون فقط لعبة الهوكي

$$50 = 40 + 100 - 180 - 290 =$$

رابعاً: عدد المشاهدين الذين يشاهدون فقط لعبة كرة السلة

$$80 = 40 + 100 - 90 - 230 =$$

خامساً: عدد المشاهدين الذين يشاهدون إحدى الألعاب الثلاث

$$470=80+50+240=$$

8- لتكن المجموعتان $B=\{x | x \text{ is a positive integer and } x^2+1=0\}$

$$G = \{y | y \text{ is a positive integer and } y+1=y\}$$

أوجد ما يلي:

$$B \cup (\overline{G \oplus B}) \quad (a)$$

$$G \oplus (\overline{B \cap G}) \quad (b)$$

$$\overline{B \oplus G} \quad (c)$$

الحل: مجموعة التعويض هنا، هي المجموعة الشاملة للمجموعتين B, G وهي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ وعليه فإن مجموعة الحل للمجموعتين B و G هي الخالية. إذن $B = G = \phi$. نستنتج أن $B = \phi \Rightarrow \overline{B} = Z^+, G = \phi \Rightarrow \overline{G} = Z^+$ ثم نقوم بحساب المطلوب ونحصل النتائج النهائية التالية:

$$B \cup (\overline{G \oplus B}) = \phi \quad (a)$$

$$G \oplus (\overline{B \cap G}) = \phi \quad (b)$$

$$\overline{B \oplus G} = \phi \quad (c)$$

9- لتكن المجموعة T معرفة على النحو التالي:

$$T = \{x | x \text{ is an integer and } x^2+8=1\}$$

أوجد مجموعة القوة لـ T ؟

الحل: مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الصحيحة والمجموعة T هي المجموعة الخالية وهي نفسها مجموعة الحل.

$$T = \phi \Rightarrow P(T) = P(\phi) = \{\phi\} \quad \text{وعليه فإن}$$

10- لتكن المجموعة T معرفة على النحو التالي:

$$T = \{x | x \text{ is an integer and } x^2=x+2\}$$

أوجد مجموعة القوة لـ T ؟

الحل: مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الصحيحة والمجموعة - $T = \{1, 2\}$ وهي نفسها مجموعة الحل. وعليه فإن مجموعة القوة

$$T = \{-1, 2\} \Rightarrow P(T) = P(\{-1, 2\}) = \{\phi, \{-1\}, \{2\}, \{-1, 2\}\}$$

تمارين غير محلولة Unsolved Exercises

1- برهن على صحة ما يلي: $A \oplus B = B \oplus A$

2- لتكن $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$ والمجموعات A, B, C, D معرفة على النحو التالي:

$$B = \{d, e, f, g\} \quad C = \{a, c, f\} \quad D = \{f, h, k\} \\ A = \{a, b, c, g\}$$

والمطلوب إيجاد المجموعات التالية:

$$A - B \quad -1$$

$$\overline{A} \quad -2$$

$$A \oplus C \quad -3$$

$$\overline{A \cup B} \quad -4$$

$$\overline{C \cap D} \quad -5$$

3- لتكن المجموعة الشاملة U هي مجموعة الأعداد الحقيقية وليكن لدينا المجموعتان A, B معرفتين كما يلي: $B = \{-1, 4\}$

$$A = \{x \mid x \text{ is a solution of } x^2 - 1 = 0\}$$

أوجد ناتج مايلي:

$$\overline{A} \quad -1$$

$$\overline{B} \quad -2$$

$$\overline{A \cup B} \quad -3$$

$$\overline{A \cap B} \quad -4$$

4- عند دراسة عينة مؤلفة من 500 شخص من مشاهدي التلفزيون تبين ما يلي:

- 285 شخصاً يشاهدون لعبة كرة القدم

- 195 شخصاً يشاهدون لعبة الهوكي

- 115 شخصاً يشاهدون لعبة كرة السلة

- 45 شخصاً يشاهدون لعبة كرة السلة وكرة القدم

- 70 شخصاً يشاهدون لعبة كرة القدم والهوكي

- 50 شخصاً يشاهدون لعبة كرة السلة والهوكي

- 50 شخصاً لا يشاهدون أي لعبة من الألعاب الثلاث المذكورة.

المطلوب إيجاد عدد الأشخاص الذين يشاهدون الألعاب الثلاث معاً؟

5- كم مجموعة جزئية يمكن تشكيلها من مجموعة عناصر مؤلفة من أربعة

عناصر؟

6- كم مجموعة جزئية يمكن تشكيلها من مجموعة عناصر مؤلفة من n

عنصر؟

7- برهن على ما يلي : $A - (A - B) \subset B$ ؟

8- برهن على ما يلي : إذا كان $A \subset B$ و $C \subset D$ عندئذٍ $A \cup C \subset B \cup D$ و

$$A \cap C \subset B \cap D$$

9- إذا كانت A, B مجموعتين جزئيتين من المجموعة الشاملة U

برهن على ما يلي: تكون $A \subset B$ إذا وفقط إذا كانت

$$\bar{B} \subset \bar{A}$$

10- برهن على ما يلي :

$$A \cup B = B \text{ إذا وفقط إذا كانت } A \subset B \quad (a)$$

$$A \cup B = A \text{ إذا وفقط إذا كانت } A \subset B \quad (b)$$

11- بين المجموعة الخالية من المجموعات الآتية:

$$a) A = \{x | x \text{ is a real number and } x^2 - 1 = 0\}$$

$$b) B = \{x | x \text{ is a real number and } x = 2x + 4\}$$

$$c) C = \{x | x \text{ is a positive integer and } x \leq 5\}$$

المصطلحات العلمية Terminology

المصطلح العربي	English Term
المجموعة	Set
شيء	Object
عنصر	Element
الأعداد الفردية	Odd Numbers
الأعداد الزوجية	Even Numbers
الأعداد الأولية	Prime Numbers
مجموعة أحادية	Singleton Set
المجموعة الخالية	Empty Set
عضوية المجموعة ، إشارة الانتماء	Set Membership, $\in$
ينتمي إلى أو عنصر في	belongs to or an element of
وصف المجموعات	Describing Sets
طريقة القائمة	Menu or Roster Method
القوسين الحاصرين	Curly Braces
طريقة قانون تكوين العناصر	Rule Method or Set Builder
على أن، بحيث إن	<i>Such that</i> " "
مجموعات الأعداد	The Sets of Numbers
مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$	The Set of Natural Numbers $\mathbb{N}$
مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$	The Set of Integers $\mathbb{Z}$
مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+$	$\mathbb{Z}^+$
مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$	The Set of Rational Numbers $\mathbb{Q}$
مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$	The Set of Real Numbers $\mathbb{R}$

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
عدد أساس المجموعة	Set Cardinality
مجموعات جزئية	Subsets
A محتواه في B	A is contained in B
مجموعة جزئية فعلاً	Proper Subset
مجموعة القوة	The Power Set
مجموعات متساوية	Sets Equality
مجموعة منتهية	Finite Set
مجموعة غير منتهية	Infinite Set
المجموعة الشاملة أو الكلية	The Universal set
أشكال فن	Venn Diagrams
العمليات على المجموعات	Operations on Sets
اتحاد المجموعات	Sets Union
تقاطع المجموعات	Sets Intersection
مجموعات منفصلة	Disjoint Sets
قاعدة الجمع	Addition Principle
فرق المجموعات	Sets Difference
متمم المجموعات	Sets Complement
فرق التناظر	Symmetric Difference
التبديل للمجموعات	Commutative
التجميع للمجموعات	Associative
التوزيع للمجموعات	Distributive
الذات للمجموعات	Identity
التمائل للمجموعات	Idem potent

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
التكميل للمجموعات	Complement
هيمنة المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية	Domination of Universal and Empty Sets
قوانين دو مورغان للمجموعات	De Morgan's Laws
الإتحاد المعمم	Generalized Unions
التقاطع المعمم	Generalized Intersections
تمثيل المجموعات في الحاسوب	Computer Representation of Sets

الفصل الثالث

الإقرانات

Functions

79	الفصل الثالث
79	الاقترانات
79	Functions
82	الضرب الديكارتي Cartesian Product
83	خصائص الضرب الديكارتي
85	الاقتران Function
86	الاقتران
	تعيين النطاق والمدى للاقتران The Domain and the Range of the Function
88	
89	الصفات المميزة للاقترانات Properties of Functions
89	اقتران واحد- لواحد One-to-one (injective)
90	الاقتران الشامل Onto (surjective)
92	الاقتران في كل مكان Everywhere Defined
93	اقتران تقابل One-to-one Correspondence (bijective)
95	معكوس الاقتران Function Inverse
96	الاقتران المركب Composition
98	معكوس الاقتران المركب
98	الاقتران لقوة n:
98	الاقترانات المتساوية
98	نظرية 1:
99	نظرية 2:
99	نظرية 3
101	اقتران التجاهل Overriding
102	اقتران المعاودة Recursive
104	اقتران حافظ الصفة Isomorphism
104	اقتران التباديل Permutations
106	تبديل دوري Cyclic Permutation

107	تجزئة التبديل إلى عدة دورات
107	تحديد الدورات:
108	التباديل الزوجية والفردية Even and Odd Permutations
109	اقتران الحاسوب Computer Function
109	الانتماء Characteristic
110	اقترانا أكبر وأصغر عددا صحيحين The Ceiling and Floor functions
110	اقتران أكبر عدد صحيح The Ceiling function
111	اقتران أصغر عدد صحيح The Floor function
112	مسائل محلولة Solved Problems
120	تمارين غير محلولة Unsolved Exercises
123	المصطلحات العلمية Terminology

الضرب الديكارتي Cartesian Product

لقد عرفنا في فصل نظرية المجموعات عدة عمليات على المجموعات مثل الاتحاد والتقاطع والطرح. وفي هذه الفقرة، سوف نعرف عاملاً جديداً من عوامل المجموعات، يسمى عامل الضرب الديكارتي نسبة للعالم الفرنسي رينيه¹ ديكارت.

لتكن A و B مجموعتين، نرمز للضرب الديكارتي لهما بـ $A \times B$ ونعرفه بمجموعة كل الأزواج المرتبة (a, b) ،

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

حيث $a \in A$ و $b \in B$ ودونيه بـ

Given two sets, A and B , the Cartesian product of A and B , denoted by $A \times B$, is the set of all ordered pairs (a, b) where $a \in A$ and $b \in B$. Hence, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

الضرب الديكارتي يأخذ جميع عناصر A و B ويشكل مجموعة تحتوي على كل زوج مرتب ممكن تكوينه من عناصرهما.

مثال (1): لتكن $A = \{0, 1\}$ ولتكن $B = \{yes, no\}$ أوجد الضرب الديكارتي $A \times B$ لهما؟

الحل: تحتوي A على عنصرين هما 0 و 1 وتحتوي B أيضاً على عنصرين هما yes و no إذن الضرب الديكارتي لهما هو: $A \times B = \{(0, yes), (0, no), (1, yes), (1, no)\}$

الحظ أن الضرب الديكارتي $B \times A$ هو $B \times A = \{(yes, 0), (yes, 1), (no, 0), (no, 1)\}$ وهذا مختلف تماماً عن $A \times B$.

الحظ صحة انتماء الأزواج المرتبة: $(a, b) \in A \times B; (0, yes) \in A \times B$ بينما $(a, b) \notin B \times A; (0, yes) \notin B \times A$ ولكن $(b, a) \in B \times A$

¹ Rene Descartes ولد في مدينة Tours في فرنسا عام 1596م. ينحدر من عائلة نبيلة وكان والده قاضياً. له عدة مؤلفات أشهرها Discours حيث كتب فيه مساهمته في الهندسة التحليلية. زار السويد سنة 1649م بناء على دعوة الملكة كريستينا ليحاضر لها في الفلسفة وتوفي هناك سنة 1650م.

مثال (2): أوجد الضرب الديكارتي $A \times B$ إذا علمت أن $A = \{a, b\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ ؟

الحل: $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

تعميم الضرب الديكارتي لأكثر من مجموعتين:

لنفرض أن $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ مجموعات، نرمز للضرب الديكارتي لهن بـ $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ ونعرفه بمجموعة كل النويات²

المرتبة n *ordered n-tuples* $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$

حيث $a_i \in A_i$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$ وندونه بـ

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ for } i = 1, 2, \dots, n\}$$

خصائص الضرب الديكارتي

(1) لتكن A و B مجموعتين منتهيتين، فإن $|A \times B| = |A| \times |B|$ عدد أساس مجموعة الضرب الديكارتي $|A \times B|$ يساوي ناتج ضرب عدد أساسيهما $|A| \times |B|$

في مثال (2) السابق $|A \times B| = 2 \times 3 = 6$ إذن عدد أساس مجموعة الضرب الديكارتي

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times |A_3| \times \dots \times |A_n| \quad (2)$$

(3) الزوجان (x, y) و (a, b) متساويان $(a, b) = (x, y)$ إذا فقط إذا $a = x$ و $b = y$

(4) الرائيتان $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ و $(y_1, y_2, \dots, y_r)$ متساويتان يعني

$$(y_1, y_2, \dots, y_r) = (x_1, x_2, \dots, x_r) \text{ إذا فقط إذا } y_i = x_i$$

لكل $i = 1, 2, \dots, r$

مثال (3): أوجد الضرب الديكارتي $A \times B \times C$ إذا علمت أن $A = \{a, b\}$ و $B = \{1, 2\}$ و $C = \{0, 1, 2\}$ ؟

الحل: يتكون الضرب الديكارتي من الثلاثية المرتبة (x, y, z) بحيث $x \in A$ و $y \in B$ و $z \in C$. إذن

² مبادئ التحليل الرياضي ترجمة د. وليد ديب. منشورات مجمع اللغة العربية الأردني. 1984م.

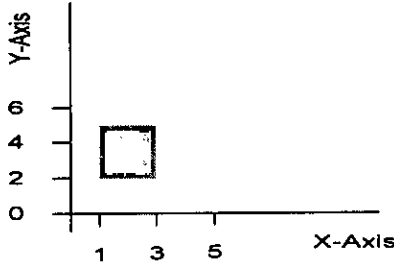
$$A \times B \times C = \{(a,1,0), (a,1,1), (a,1,2), (a,2,0), (a,2,1), (a,2,2), \\ (b,1,0), (b,1,1), (b,1,2), (b,2,0), (b,2,1), (b,2,2)\}$$

$$|A \times B \times C| = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

مثال (4): إذا كانت R مجموعة الأعداد الحقيقية فما المقصود بـ
 $R \times R = R^2$ ؟

الحل: $R \times R$ مجموعة نقاط المستوى البياني (الديكارتي) كافة

مثال (5): مثل المجموعة $A = \{1,3\} \times \{2,5\}$ على المستوى الديكارتي؟
 الحل : هي مجموعة النقاط في المستطيل المظلل في الرسم البياني التالي:



تمارين (1): أوجد مجموعات الضرب الديكارتي التالية واحسب عدد عناصرها؟

(a) $(\{0,1,2\} \cap \{1,2,3\}) \times \{2,3\}$

(b) $(\{0,1,2\} \cup \{1,2,3\}) \times \{2,3\}$

(c) $(\{0,1,2\} - \{1,2,3\}) \times \{2,3\}$

(d) $\{a,b\} \times \{1,2\} \times \{x,y\}$

(e) $\{4,6,9\} \times \{1,2\} \times \{7,8\}$

تمارين (2): مثل المجموعات التالية على المستوى الديكارتي؟

1. $A = \{1,2\} \times \{2,5\}$

2. $B = \{2,4\} \times R$

3. $C = \{(x,y) | x = y \text{ and } x \in R\}$

الاقتران Function

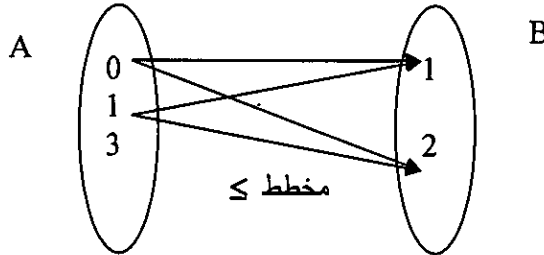
المجموعات الجزئية من مجموعة الضرب الديكارتي، تسمى علاقات. سوف ندرسها بالتفصيل في الفصول القادمة. وهناك علاقات خاصة، ذات صفات مميزة منها على سبيل المثال: علاقة التكافؤ، والاقتران موضوع هذا الفصل. لتكن $B = \{1, 2\}$ و $A = \{0, 1, 3\}$ مجموعتين. فإن الضرب الديكارتي لهما هو: $A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

لنأخذ مجموعات جزئية مميزة من الضرب الديكارتي $A \times B$ تمثل علاقة "أقل من أو يساوي" ثم علاقة "المساواة". وكلاهما شائع الاستعمال: أولاً: لنأخذ علاقة التباين $\leq$ أقل من أو يساوي بحيث $a \leq b$ فنحصل المجموعة الجزئية التالية:

$$\text{"Less Than or Equal"} \leq = \{(a, b) \mid a \leq b\}$$

$$= \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\} \subset A \times B$$

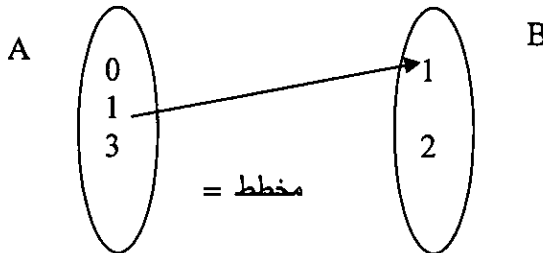
الحظ أن العنصر 3 من المجموعة A ليس له أي علاقة مع أي عنصر من عناصر المجموعة B . الحظ أن 0 له علاقة $\leq$ مع عنصرين، وكذلك 1 له علاقة $\leq$ لعنصرين، $\leq$ ليست اقتراناً.



ثانياً: لنأخذ علاقة المساواة $=$ بحيث $a = b$ فنحصل المجموعة الجزئية

$$\text{"Equal"} = = \{(a, b) \mid a = b\} = \{(1, 1)\} \subset A \times B$$

من الجدير ملاحظته أن العنصر 3 من المجموعة A والعنصر 2 من عناصر المجموعة B ليس لهما أي علاقة مساواة مع العناصر الأخرى. الحظ أن في علاقة المساواة، كل عنصر له علاقة واحدة فقط مع نفسه، مثل $1=1$. المساواة = اقتران من المجموعة A إلى المجموعة A .



الاقتران³: لنفرض أن A و B مجموعتان. الاقتران f من المجموعة A إلى المجموعة B هو مجموعة جزئية مميزة من الضرب الديكارتي $A \times B$ بحيث يحدد الاقتران f بالضبط عنصراً واحداً b من عناصر B لكل عنصر a في A ، ونكتب $f(a) = b$.

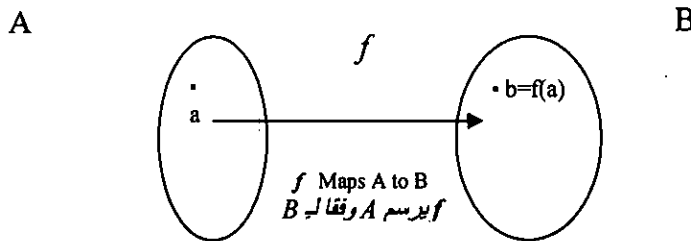
ونرمز للاقتران f بـ $f: A \rightarrow B$ أو $A \xrightarrow{f} B$. ونلفظ بالعربية " f اقتران من A إلى B أو f يخطط A وفقاً لـ B ". نعرف الاقتران f كمجموعة جزئية مرتبة

$$f = \{(a, f(a)) \mid a \in A \wedge f(a) \in B\}$$

$$\text{ومنه } (a, b) \in f \Leftrightarrow b = f(a).$$

Function: Let A and B be sets. A *function* f from A to B is a special subset of the Cartesian product $A \times B$ and f is an assignment of exactly one element of B to each element of A . We write $f(a) = b$ if b is the unique element of B assigned by the function f to the element a of A . If f is a function from A to B , we write $f: A \rightarrow B$.

وإذا كان الاقتران f من A إلى A فنقول إن f اقتراناً على المجموعة A . ونسمي المجموعة A **المجال Domain** للاقتران f . ونسمي المجموعة B **المجال المقابل Range** للاقتران f . ونسمي b قيمة f عند a ، أو نسمي b صورة a تحت تأثير f . وهناك أسماء⁴ أخرى تستعمل لتدل على الاقتران: مثل دالة، تابع، مؤثر، تحويل وتطبيق.



³ أ.د. عبد المجيد نصير يعرف الاقتران "علاقة ليس فيها زوجان مرتبان لهما العنصر الأول نفسه". كتاب الشامل في الرياضيات العامة. أريد 1985م. ويسمي a متغير مستقل ويسمي b متغير تابع.
⁴ التحليل الرياضي ترجمة د. وليد ديب. منشورات مجمع اللغة العربية الأردني. 1984م.

مثال (1): إذا علمت أن $A = B = \{1, 2, 3\}$ فأبي العلاقات الآتية تمثل اقترانا؟
1- $\emptyset$ ؟

2- $\{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ ؟

3- $\{(1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$ ؟

الحل:

1- اقتران

2- اقتران

3- لا تمثل اقترانا لأن 1 موجود عنصراً أول في الزوجين $(1, 2), (1, 3)$
مثال (2): أبي العلاقات الآتية تمثل اقترانا إذا علمت أن $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{w, x, y, z\}$

1. $f = \{(1, w), (2, x), (3, y)\}$ ؟

2. $g = \{(1, w), (2, w), (3, z), (2, x)\}$ ؟

3. $h = \{(1, w), (2, x), (3, x)\}$ ؟

الحل:

1- اقتران لأن $f(1) = w, f(2) = x, f(3) = y$

2- لا تمثل اقترانا بسبب $g(2) = w, g(2) = x$

3- اقتران لأن $h(1) = w, h(2) = x, h(3) = x$

مثال (3): لتكن f اقترانا من $A = \{a, b, c, d, e\}$ إلى $B = \{1, 2, 3, 4\}$
بحيث إن

$$f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4, f(d) = 1, f(e) = 1$$

ولتكن $X = \{b, c, d\}$ مجموعة جزئية من A فما

$$f(X) = \{f(x) | x \in X\}$$

الحل: $f(X) = \{1, 4\}$

تمارين (1): اكتب جميع الإقترانات التي يمكن تكوينها من $A = \{1, 2\}$ إلى $B = \{w, x\}$

تمارين (2): هل المجموعة الجزئية لاقتران تكون اقترانا؟

تمارين (3): هل معكوس الاقتران يشكل اقترانا؟

تمارين (4): إذا كانت f و g اقترانان فهل اتحادهما، وتقاطعها والفرق تشكل اقترانا؟

تمارين (5): ليكن الاقتران $f: A \rightarrow B; x \rightarrow f(x) = x^2$ معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة. حدد مجالها المقابل؟

تمارين (6): ليكن الإقتربان f_1 و f_2 و $f_1 : A \rightarrow R; x \rightarrow f_1(x) = x^2$ و $f_2 : A \rightarrow R; x \rightarrow f_2(x) = x - x^2$

$$f_2 : A \rightarrow R; x \rightarrow f_2(x) = x - x^2$$

احسب الإقتربات $f_1 + f_2$ و $f_1 f_2$ حيث إن

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) \text{ و } ?$$

تعيين النطاق والمدى للإقتربان *The Domain and the Range of the Function*

ليكن الإقتربان f من A إلى B . $f : A \rightarrow B$ ، $f = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$.

فما نطاق f ؟ و ما مدى f ؟

النطاق: نسمي مجموعة العناصر الأولى من الأزواج المرتبة للإقتربان f ، بنطاق f ونرمز له $Dom(f)$ ويسمى أيضاً المسقط الأول للإقتربان f .

إذا كانت $f = \{(0, a), (1, b), (2, c)\}$ فإن النطاق للإقتربان f هو

$Dom(f) = \{0, 1, 2\}$. الحظ أن نطاق f هو "مجموعة عناصر A التي لها

صورة في B ". وبكلام آخر $Dom(f) = \{a \in A | f(a) \in B\}$. وأن نطاق f

مجموعة جزئية من A $Dom(f) \subset A$.

المدى: نسمي مجموعة العناصر الثانية من الأزواج المرتبة للإقتربان f ، بمدى

f ونرمز له $Ran(f)$ ويسمى أيضاً المسقط الثاني للإقتربان f .

إذا كانت $f = \{(0, a), (1, b), (2, c)\}$ فإن المدى للإقتربان f

هو $Ran(f) = \{a, b, c\}$. الحظ أن مدى f هو "مجموعة عناصر B التي هي

صور لعناصر A ". وبكلام آخر $Ran(f) = \{b \in B | a \in A, f(a) = b\}$.

وأن مدى f مجموعة جزئية من B $Ran(f) \subset B$.

مثال (1): لتكن f إقترباناً من $A = \{a, b, c, d, e\}$ إلى $B = \{1, 2, 3, 4\}$

بحيث $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4, f(d) = 1, f(e) = 4$ حدد

النطاق والمدى لـ f ؟

الحل: النطاق $Dom(f) = \{a, b, c, d, e\} = A$ ، أما المدى

$Ran(f) = \{1, 2, 4\}$ فهو مجموعة جزئية فعلية من B .

مثال (2): حدد النطاق والمدى للإقتربان f المعروف بـ:

$$f : Z \rightarrow Z ; x \rightarrow f(x) = x^2$$

الحل: النطاق $Dom(f) = N$ مجموعة جزئية فعلية من Z ، أما

المدى $Ran(f) = Z$ فهو يساوي المجموعة Z بالكامل.

الصفات المميزة للاقترانات *Properties of Functions*

عرفنا الاقتران بأنه علاقة خاصة، لذلك يمكننا تعريف اقتراناً من نوع خاص يمتلك صفة مميزة منها على سبيل المثال:

1. الاقتران واحد-لواحد (One-to-one (injective)
 2. الاقتران الشامل (Onto (surjective)
 3. الاقتران في كل مكان Everywhere defined
 4. اقتران تقابل (One to one Correspondence(bijjective)
 5. معكوس الاقتران Inverse
 6. اقتران مركب Composition
 7. اقتران التجاهل Overriding
 8. اقتران المعاودة Recursive
 9. اقتران حافظ الصفة Isomorphism
 10. اقتران التباديل Permutations
 11. اقترانات الحاسوب Computer Functions
 - i. اقتران الانتماء Characteristic
 - ii. اقتران أكبر عدد صحيح Ceiling
 - iii. اقتران أصغر عدد صحيح Floor
- واليك تعريف كل منها وموضحاً بالأمثلة إن شاء الله.

اقتران واحد-لواحد (One-to-one (injective

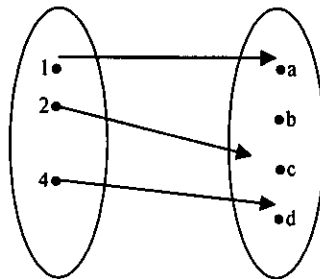
إذا كان f اقتراناً، فيسمى f اقتران واحد-لواحد إذا تحقق التضمين

$$\forall x, y \in \text{Dom}(f), f(x) = f(y) \rightarrow x = y$$

التالي: أو إذا تحقق المعاكس الايجابي له

$$\forall x, y \in \text{Dom}(f) \ x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$$

A function f is said to be one-to-one, or injective, if and only if $f(x) = f(y)$ implies that $x=y$ for all x and y in the domain of f . The contrapositive of the implication is " A function f is one-to-one if $f(x) \neq f(y)$ whenever $x \neq y$.



اقتران واحد-لواحد

مثال (1): الاقتران f المعروف على النحو الآتي هو اقتران واحد- لواحد، من $A = \{a, b, c, d\}$ إلى $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مع $f(a) = 4, f(b) = 5, f(c) = 1, f(d) = 3$

مثال (2): الاقتران f المعروف على النحو الآتي $f: Z \rightarrow Z; f(x) = x^2$ ليس اقتران واحد- لواحد ، بسبب $f(-2) = f(2) = 4$

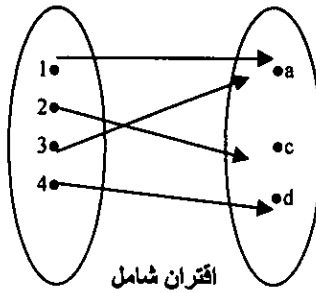
مثال (3): أثبت أن الاقتران f المعروف على مجموعة الأعداد الصحيحة الآتي هو اقتران واحد- لواحد: $f: Z \rightarrow Z; f(x) = x+1$
الحل: انظر إلى أن $8 \neq 5+1$ يعطينا $5+1 \neq 8+1$ أي أن $x+1 \neq y+1$ عندما تكون $x \neq y$

تمارين (1): حدد إذا كان الاقتران f المعروف على مجموعة الأعداد الصحيحة بـ $f(x) = 2x$ هو اقتران واحد- لواحد ؟
تمارين (2): أي الاقترانات الآتية هو واحد- لواحد:
1- $f = \{(1, a), (2, c), (3, d)\}$ ؟
2- $g = \{(1, a), (2, c), (3, c)\}$ ؟

الاقتران الشامل (Onto (surjective)

يسمى f اقترانا شاملاً من A إلى B إذا وفقط إذا $Ran(f) = B$.
و يكافئ $\forall b \in B, \exists a \in Dom(f); b = f(a)$.
يعني مدى الاقتران f هو المجال المقابل كاملاً.

A function f from A to B is called onto, or surjective, if and only if for every element $b \in B$ there is an element $a \in A$ with $f(a) = b$ ($\forall b \in B, \exists a \in Dom(f); b = f(a)$ which is equivalent to $Ran(f) = B$).



مثال (1): الاقتران f المعرفة على النحو الآتي هو اقتران شامل من

$A = \{a, b, c, d\}$ إلى $B = \{1, 3, 4, 5\}$ مع

$Ran(f) = B$ ومنه $f(a) = 4, f(b) = 5, f(c) = 1, f(d) = 3$

مثال (2): الاقتران f المعرفة على النحو الآتي $f: Z \rightarrow Z; f(x) = x^2$ ليس اقتراناً

شاملاً حيث إن العدد الصحيح 2 ليس صورة لأي عدد

صحيح: $2 = f(x) = x^2, x = \sqrt{2} \notin Z$

مثال (3): أثبت أن الاقتران f المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة، هو

اقتران شامل: $f: Z \rightarrow Z; f(x) = x + 1$

الحل: f اقتران شامل لأن كل عدد صحيح y يوجد له عدد صحيح x بحيث

$f(x) = y$ وهذا يكافئ $x + 1 = y$ وهذه المساواة صحيحة إذا

و فقط إذا $x = y - 1$. ويعلم كل طالب، حقيقة أن كل عدد صحيح (n)

له عدد صحيح سابق ($n-1$) *predecessor* وكذلك عدد صحيح

تالي ($n+1$) *successor* أو تابع.

تمارين (1): حدد إذا كان الاقتران f المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة

بـ $f(x) = 2x$ اقتران شاملاً ؟

تمارين (2): أي الإقرانات الآتية اقتران شامل:

$f = \{(1, a), (2, c), (3, d)\}$ -1

$g = \{(1, a), (2, c), (3, c)\}$ -2

تمارين (3): إذا علمت أن f و g و h هي اقتران من $A = \{a, b, c, d\}$ إلى

$B = \{x, y, z\}$. فأي الإقرانات الآتية اقتران شامل؟

$$f = \{(a, z), (b, y), (c, x), (d, y)\} \quad -1$$

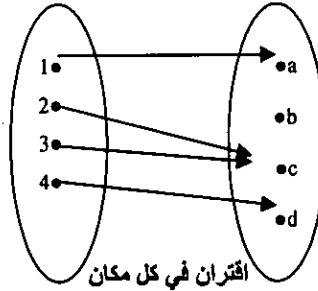
$$g = \{(a, x), (b, x), (c, y), (d, z)\} \quad -2$$

$$h = \{(a, x), (b, x), (c, y), (d, y)\} \quad -3$$

الاقتران في كل مكان Everywhere Defined

يسمى الاقتران f بحيث $f: A \rightarrow B$ اقترانا معرفاً في كل مكان من المجال A إذا كان نطاق f يساوي مجالها لـ f . أي أن $Dom(f) = A$. يعني نطاق الاقتران f هو المجموعة A كلها.

A function f from A to B is called everywhere defined if $Dom(f) = A$.



مثال(1): الاقتران f المعروف على النحو الآتي هو اقتران في كل مكان من

$$A = \{a, b, c, d\} \text{ إلى } B = \{1, 3, 4, 5\} \text{ مع}$$

$$f(a) = 4, f(b) = 5, f(c) = 1, f(d) = 3 \text{ . الحظ أن}$$

$$Dom(f) = A = \{a, b, c, d\}$$

مثال(2): الاقتران f المعروف بـ $f: Z \rightarrow Z; f(x) = x^2$ هو اقتران في كل مكان.

$$Dom(f) = Z$$

مثال(3): أثبت أن الاقتران f المعروف على Z هو اقتران في كل مكان

$$f: Z \rightarrow Z; f(x) = x + 1$$

الحل: f اقتران في كل مكان لأن كل عدد صحيح y يوجد له عدد صحيح

$$x \text{ تال } y + 1.$$

تمارين(1): حدد إذا كان الاقتران f المعروف على مجموعة الأعداد الصحيحة

$$f(x) = 2x \text{ اقتران في كل مكان؟}$$

تمارين(2): أي الاقترانات الآتية اقتران في كل مكان:

$$f = \{(1, a), (2, c), (3, d)\} \quad -1$$

$$g = \{(1, a), (2, c), (3, c)\} \quad -2$$

تمارين (3): إذا علمت أن f و g و h هن إقتارات من $A = \{a, b, c, d\}$ إلى $B = \{x, y, z\}$ فأي الإقتارات الآتية هي إقتار في كل مكان؟

$$f = \{(a, z), (b, y), (d, y), (c, z)\} \quad 1.$$

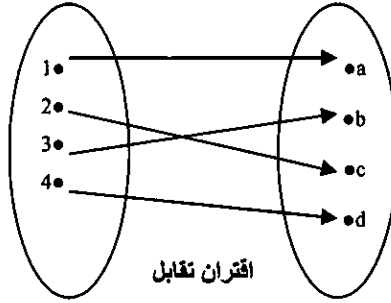
$$g = \{(a, x), (b, x), (c, y), (d, z)\} \quad 2.$$

$$h = \{(a, x), (b, x), (c, y), (d, y)\} \quad 3.$$

إقتار تقابل (bijective) One-to-one Correspondence

نسمي الإقتار f المعروف بـ $f: A \rightarrow B$ إقتار تقابل (أو تناظر⁵) إذا كان f إقتاراً في كل مكان وإقتاراً شاملاً وإقتاراً واحداً-لواحد.

A function f from A to B is called One-to-one Correspondence (or bijective) if the function is everywhere defined, onto and one-to-one.



مثال (1): هل إقتار المساواة I_A (الذاتي⁶ Identity) المعروف على A بـ

$$I_A: A \rightarrow A; I_A(x) = x$$

هو إقتار تقابل؟

الحل: I_A في كل مكان وذلك

$$Dom(I_A) = A \quad \blacksquare$$

$$Ran(I_A) = B \quad \blacksquare$$

⁵ أ.د. محمود محمد كنتك. يعرفه إقتار "تناظر". نظرية المجموعات. دار الفرقان للنشر والتوزيع. عمان.

1982م

⁶ كثير من المؤلفين يستخدمون مصطلح حياد أو محايد لترجمة identity لكننا نفضل استخدام مصطلح الذات الذاتي.

■ I_A واحد لواحد $x \neq y \rightarrow I_A(x) \neq I_A(y)$

إذن I_A تقابل. لاحظ أن الاقتران ومعكوسه متساويان $I_A = I_A^{-1}$.

مثال (2): هل الاقتران f المعروف على النحو الآتي هو اقتران تقابل من

$A = \{a, b, c, d\}$ إلى $B = \{1, 3, 4, 5\}$ مع

$f(a) = 4, f(b) = 5, f(c) = 1, f(d) = 3$ ؟

الحل: f في كل مكان لأن $Dom(f) = A$ و f شامل لأن $Ran(f) = B$ و f واحد-لواحد. إذن f تقابل.

مثال (3): الاقتران f المعروف على النحو الآتي $f: Z \rightarrow Z; f(x) = x^2$ ليس اقتران تقابل.

الحل: لأن f ليس اقتراناً واحد-لواحد.

مثال (4): أثبت أن الاقتران f المعروف على Z هو اقتران تقابل:

$f: Z \rightarrow Z; f(x) = x + 1$ ؟

الحل: f في كل مكان $Dom(f) = A$ لأن كل عدد صحيح x يوجد له عدد صحيح $x + 1$ و f شامل $Ran(f) = B$ لأن كل عدد صحيح y يوجد له عدد صحيح سابق وحيد هو $y - 1$ و f واحد-لواحد. إذن f تقابل.

تمارين (1): حدد إذا الاقتران f المعروف على مجموعة الأعداد الصحيحة بـ

$f(x) = 2x$ أهو اقتران تقابل؟

تمارين (2): أي الاقترانات الآتية اقتران تقابل:

1- $f = \{(1, a), (2, c), (3, d)\}$

2- $g = \{(1, a), (2, c), (3, c)\}$

تمارين (3): إذا علمت أن f و g و h هي اقتران من $A = \{a, b, c, d\}$ إلى

$B = \{x, y, z\}$ فأي الاقترانات الآتية اقتران تقابل؟

1- $f = \{(a, z), (b, y), (d, y), (c, z)\}$

2- $g = \{(a, x), (b, x), (c, y), (d, z)\}$

3- $h = \{(a, x), (b, x), (c, y), (d, y)\}$

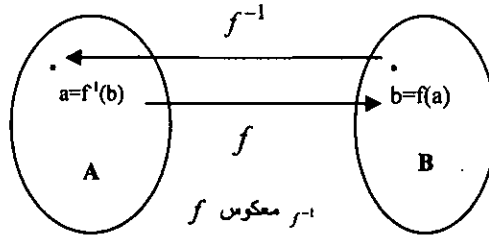
معكوس الاقتران Function Inverse

عرفنا الاقتران $f: A \rightarrow B$ كمجموعة جزئية مميزة من الضرب الديكارتي $A \times B$ بحيث يحدد الاقتران f بالضبط عنصراً واحداً b من عناصر B لكل عنصر a في A . f كمجموعة جزئية مرتبة كتبت $f = \{(a, f(a)) \mid a \in A \wedge f(a) \in B\}$. ماذا لو عكسنا ترتيب الأزواج المرتبة وحصلنا المجموعة $f^{-1}: B \rightarrow A$ حيث $f^{-1} = \{(f(a), a) \mid f(a) \in B \wedge a \in A\}$

إن المجموعة الجديدة f^{-1} علاقة وتسمى معكوس العلاقة f (أو نظير العلاقة) وإذا أردنا أن تكون f^{-1} معكوس الاقتران f يجب أن تحقق أزواج f^{-1} شرط الاقتران بحيث لا يكون فيها زوجان مرتبان لهما العنصر الأول نفسه.

وعليه فإن معكوس الاقتران ليس دائماً اقتراناً.
إذن متى يكون معكوس الاقتران دائماً اقتراناً؟
يكون معكوس الاقتران دائماً اقتراناً في الحالات الآتية:-

1. عندما يكون الاقتران f واحداً- لواحد فإن معكوسه f^{-1} هو أيضاً، واحد- لواحد.
2. وأيضاً عندما يكون f اقتران تقابل، فإن معكوسه f^{-1} هو أيضاً، اقتران تقابل.



مثال (1): إذا كان f معرفاً بـ

$$f: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}; f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 1$$

أوجد معكوسه f^{-1} ؟

الحل: الاقتران f هو اقتران تقابل إذن f^{-1} معكوس الاقتران هو الاقتران التالي:

$$f^{-1} : \{1,2,3\} \rightarrow \{a,b,c\}; f^{-1}(1)=c, f^{-1}(2)=a, f^{-1}(3)=b$$

مثال (2): الاقتران f المعروف بـ $f(x) = x^2$ ، $f : Z \rightarrow Z$ ، ليس اقتراناً له معكوس. f ليس اقتران واحد- لواحد.

مثال (3): ما هو معكوس الاقتران f المعروف على مجموعة الأعداد الصحيحة

$$f : Z \rightarrow Z; f(x) = x + 1$$

الحل: f اقتران تقابل وعليه إذا كان $f(x) = y$ إذن $x + 1 = y$ ومنه $x = y - 1$.

$$f^{-1}(y) = y - 1$$

تمارين (1): حدد إذا كان الاقتران f المعروف على مجموعة الأعداد الصحيحة

$$f(x) = 2x \text{ له اقتران معكوس؟}$$

تمارين (2): أي الاقترانات الآتية له اقتران معكوس:

$$f = \{(1,a), (2,c), (3,d)\} \quad -1$$

$$g = \{(1,a), (2,c), (3,c)\} \quad -2$$

تمارين (3): إذا علمت أن f و g و h هي اقترانات من $A = \{a, b, c, d\}$ إلى

$$B = \{x, y, z\} \text{ فأى الاقترانات التالية له اقتران معكوس؟}$$

$$f = \{(a,z), (b,y), (d,y), (c,z)\} \quad -1$$

$$g = \{(a,x), (b,x), (c,y), (d,z)\} \quad -2$$

$$h = \{(a,x), (b,x), (c,y), (d,y)\} \quad -3$$

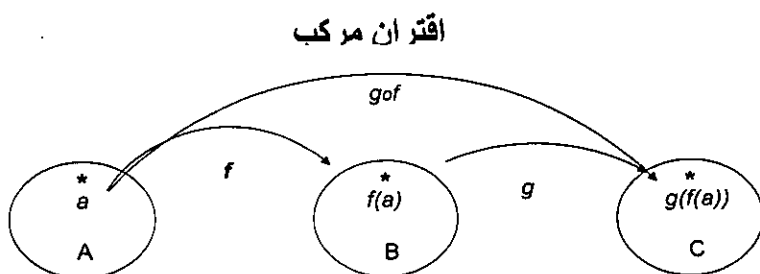
الاقتران المركب Composition

ليكن f, g اقترانا $f : A \rightarrow B; g : B \rightarrow C$ ، فإن الاقتران المركب منهما نرمز له $g \circ f$ ، ويعرف بـ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. ويلفظ بالعربية g بعد f . والاقتران المركب $(g \circ f)$ يأخذ عنصراً a من A ويحدد له صورة g للعنصر $f(a)$. الاقتران $g \circ f$ ليس معرفاً إلا أن يكون نطاق g محتوياً على مدى f أي $Rang(f) \subset Dom(g)$. المخطط البياني أدناه، يوضح الاقتران المركب $g \circ f$ من A إلى C .

Let f be a function from the set A to the set B , and let g be a function from the set B to the set C . The **composition** of the functions g and f , denoted by $g \circ f$, and is defined by $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Note: -The function $g \circ f$ assigns the element $a \in A$, the element that assigned by g to the $f(a)$.

- The function $g \circ f$ can not be defined unless $\text{Ran}(f)$ is a subset of $\text{Dom}(g)$.



مثال (1): إذا كان $f: \{a, b, c\} \rightarrow \{a, b, c\}; f(a)=b, f(b)=c, f(c)=a$ اقترانا على

المجموعة A ، و $g: \{a, b, c\} \rightarrow C = \{1, 2, 3\}; g(a)=2, g(b)=3, g(c)=1$

اقترانا من A إلى C . فما الاقتران المركب $g \circ f$ ؟

الحل: الاقتران $g \circ f$ هو معرف بـ: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ إذن

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = 3;$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(c) = 1;$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(a) = 2$$

تمرين (1): احسب الاقتران $f \circ g: C \rightarrow A \rightarrow A$

مثال (2): الاقترانان f و g معرفان على النحو الآتي:

$$g: Z \rightarrow Z; g(x) = 3x + 2 \text{ و } f: Z \rightarrow Z; f(x) = 2x + 3$$

1- فما الاقتران المركب $g \circ f$ ؟

2- وما الاقتران المركب $f \circ g$ ؟

الحل: -

1- الاقتران المركب $g \circ f$ هو:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g((2x+3)) = 3(2x+3) + 2 = 6x + 11$$

2- الاقتران المركب $f \circ g$ هو:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((3x+2)) = 2(3x+2) + 3 = 6x + 7$$

لاحظ أن $f \circ g \neq g \circ f$ لماذا؟ لأن معكوس f ومعكوس g غير معرف على Z .

معكوس الاقتران المركب

معكوس الاقتران المركب $g \circ f$ هو الاقتران $(g \circ f)^{-1}$ المعروف بـ:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

الاقتران لقوة n :

لنفرض أن $f^0(x) = x$, $f^1 = f$, إذن $f^2 = (f \circ f)$ ومنه لكل

$$f^{n+1} = f^1 \circ f^n \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

الإقترانات المتساوية

إذا كان الاقترانان f, g من A إلى B فإن الاقترانين متساويان على حسب

$$\forall x \in A; f(x) = g(x) \Leftrightarrow f = g \quad \text{التكافؤ التالي:}$$

نظرية 1: ليكن $g \circ f$ اقتران مركب

1. إذا كان f و g اقترانا شاملا فإن الاقتران المركب $g \circ f$ هو شامل أيضاً

2. إذا كان f و g اقترانا واحدا لواحد فإن الاقتران المركب $g \circ f$ هو واحد- لواحد أيضاً

3. إذا كان f و g اقتران تقابل فإن الاقتران المركب $g \circ f$ هو تقابل أيضاً

يتترك البرهان كتمرين للطالب. وليستعين الطالب بالاقترانات التالية:

$$g: \mathbb{Z}^- \rightarrow \mathbb{N}^+; z \rightarrow g(z) = -z$$

$$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}; x \rightarrow f(x) = x - 1$$

نظرية 2: ليكن $g \circ f$ إقتراناً مركباً

1. إذا كان $g \circ f$ إقتراناً شاملاً فإن الإقتران f هو شامل أيضاً.
2. إذا كان $g \circ f$ إقتراناً واحداً- لواحد فإن الإقتران g هو واحد- لواحد أيضاً.
3. إذا كان $g \circ f$ إقتراناً تقابل فإن الإقتران f هو شامل والإقتران g هو واحد- لواحد.

يترك البرهان كتمرين للطالب. وليستعين الطالب بالإقترانات التالية:

$$g : \mathbb{Z}^- \rightarrow \mathbb{N}^+ ; z \rightarrow g(z) = -z$$

$$f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N} ; x \rightarrow f(x) = x - 1$$

نظرية 3: إذا كان f إقتران تقابل من A إلى B . فإن معكوسه f^{-1} هو إقتران تقابل من B إلى A

وعليه نستنتج ما يلي وذلك بعد الأخذ بعين الاعتبار أن

$$\text{if } b = f(a) \text{ then } a = f^{-1}(b)$$

$$1. f^{-1} \circ f = I_A \text{ لأن}$$

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a = I_A(a)$$

$$2. f \circ f^{-1} = I_B \text{ لأن}$$

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b = I_B(b)$$

مثال (3): الإقترانان f و g معرفان بـ: $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} ; f(x) = x + 1$

$$\text{و } g : \mathbb{Z} \rightarrow \{\text{Even Integers}\} ; g(y) = 2y$$

فما الإقترانات المركبة التالية:

$$1. g \circ f ?$$

$$2. f \circ g ?$$

$$3. f \circ f = f^2 ?$$

$$4. f^{-1} \circ g^{-1} ?$$

$$5. (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) ?$$

الحل:

1. الإقتران المركب $g \circ f$ هو:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2$$

وهو إقتران تقابل

2. الاقتران المركب $f \circ g$ هو:

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f((2y)) = 2(2y) + 1 = 4y + 1$$

وهو اقتران تقابل

3. الاقتران المركب $f \circ f = f^2$ هو:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f((x+1)) = (x+1) + 1, f^2(x) = x + 2$$

ومنه يكون $f^n(x) = x + n$

4. - الاقتران المركب $f^{-1} \circ g^{-1}$ هو معكوس $g \circ f$ وهو اقتران تقابل

ويعرف بـ

$$f^{-1} \circ g^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(y)) = f^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{y}{2} - 1$$

و حيث أن $g^{-1}(c) = \left(\frac{c}{2}\right)$ على حسب الفرض c عدد زوجي

$$f^{-1}(y) = y - 1$$

احسب الآن الاقترانات $(f^{-1} \circ f); (g^{-1} \circ g); g^n(x);$ ؟

5. الاقتران المركب $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)$ هو الاقتران الذاتي على A

والمعرف بـ $I_A(x) = x$ وإليك حسابها

$$\begin{aligned} ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f))(x) &= \\ ((g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f))(x) &= \\ (g \circ f)^{-1}((g \circ f)(x)) &= \\ I_A(x) &= x \end{aligned}$$

تمارين(1): إذا كان $g : \{0,1,2\} \rightarrow N; g(x) = x$ و

$f : N \rightarrow N; f(x) = x$ هل الاقتران $g \circ f$ معرف؟

تمارين(2): إذا كان $g : N \rightarrow N; g(x) = 2x$ و

$$f : N \rightarrow N; f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{if } x \text{ is even} \\ f(x) = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$ ؟

تمارين(3): أثبت أن تركيب الاقترانات لهما خاصية التجميع:

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$$

اقتران التجاهل *Overriding*

يستخدم هذا الاقتران في تحديث قواعد البيانات. ليكن لدينا مثلاً f اقتران الأجور السنوية معرفاً بـ:

$$f = \{(Ahmad, 30000), (Hassan, 19000), (Ali, 18500), (zaid, 27000)\}$$

وليكن لدينا زيادة سنوية للموظف علي مقدارها 400. فما السبيل لتحديث f دون إعادة كتابتها من جديد. يتم ذلك باستخدام عامل اقتران التجاهل $\oplus$ حيث نعرف الزيادة السنوية بـ $g = \{(Ali, 18900)\}$ ثم نعرف اقتران التجاهل من f و g بـ: $f \oplus g$ وهذا الاقتران يعطينا الأجور السنوية المحدثة:

$$f \oplus g = \{(Ahmad, 30000), (Hassan, 19000), (Ali, 18500), (zaid, 27000)\} \oplus \{(Ali, 18900)\}$$

$$f \oplus g = \{(Ahmad, 30000), (Hassan, 19000), (Ali, 18900), (zaid, 27000)\}$$

ليكن $f : A \rightarrow B$ و $g : C \rightarrow D$ اقترانين فإن اقتران التجاهل منهما ندونه بـ

$f \oplus g$ ونعرفه على النحو الآتي:

$$f \oplus g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } (x \in \text{Dom}(f) \wedge x \notin \text{Dom}(g)) \\ g(x) & \text{if } (x \in \text{Dom}(f) \wedge x \in \text{Dom}(g)) \\ g(x) & \text{if } (x \in \text{Dom}(g) \wedge x \notin \text{Dom}(f)) \end{cases}$$

الحظ أن الاقتران $f \oplus g$ يتجاهل قيم f للعناصر التي ليست في مجال f ويتجاهل قيم g للعناصر التي ليست في مجال g ويعطي قيم g للعناصر المشتركة في تقاطع مجالها.

مثال (1): الاقترانان f و g معرفان بـ: $f = \{(0,0), (1,1)\}$

و $g = \{(0,1), (2,3)\}$ فما هي قيم اقتران التجاهل $f \oplus g$ ؟

الحل: $f \oplus g(0) = 1$ و $f \oplus g(1) = 1$ و $f \oplus g(2) = 3$ إذن

$$f \oplus g = \{(0,1), (1,1), (2,3)\}$$

تمارين (1): لنفرض الاقترانين f و g و h معرفة بـ: $f = \{(0,0), (1,1)\}$

و $g = \{(0,1), (2,3)\}$ و $h = \{(2,1), (4,7)\}$.

فما قيم الاقترانات التالية؟

$$1. \quad g \oplus f$$

$$2. \quad f \oplus g$$

$$3. \quad g \oplus h$$

$$(f \oplus g) \oplus h .4$$

$$f \oplus (g \oplus h) .5$$

تمارين (2): أثبت صحة ما يلي:

$$f \oplus f = f -1$$

$$f \oplus \phi = f -2$$

$$\phi \oplus f = f -3$$

اقتران المعاودة⁷ Recursive

نقول إن f اقتران معاودة ومحدد تماما إذا امتلك هاتين الخاصتين:

1- خاصية الافتتاح: يوجد قيمة (أو أكثر) استهلاكية بحيث لا يشير فيها الاقتران إلى نفسه.

2- خاصية المعاودة: في كل مرة يشير فيها الاقتران إلى نفسه، تكون قيمة المتغير فيها أقرب إلى القيمة الاستهلاكية.

مثال (1): اكتب اقتران المعاودة لحساب اقتران القوة a^n بحيث

$$f : R^+ \rightarrow R, f(a) = a^n, n \in N$$

الحل: خاصية الافتتاح: القيمة الاستهلاكية عندما تكون $n=0$ هي

$$power(a,0) = 1$$

خاصية المعاودة: نستخدم قانون الأس $a^n = a^{n-1} \cdot a$ ومنه

$$power(a,n) = a * power(a,n-1)$$

مثال (2): لنفرض أن f اقتران المعاودة معرف كالتالي:

$$f(0) = 3 \text{ هي } n=0 \text{ القيمة الاستهلاكية عندما تكون}$$

$$f(n+1) = 2f(n) + 3 \text{ هي خاصية المعاودة}$$

أوجد القيم التالية: $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$ ، $f(4)$ ؟

⁷ قاموس المواكب. الأستاذ ناصر الشوباصي. سلسلة الرضا للمعلومات.. دار الرضا للنشر. دمشق. 2000م.

$$\begin{aligned} f(1) &= 2f(0) + 3 = 2.3 + 3 = 9; \\ f(2) &= 2f(1) + 3 = 2.9 + 3 = 21; \\ f(3) &= 2f(2) + 3 = 2.21 + 3 = 45; \\ f(4) &= 2f(3) + 3 = 2.45 + 3 = 93. \end{aligned}$$

الحل:

لاحظ طريقة الحساب بالمعادلة في جهاز الحاسوب لـ $f(4)$

$$\begin{aligned} f(4) &= 2f(3) + 3 = \\ 2[2f(2) + 3] + 3 &= \\ 2[2[2f(1) + 3] + 3] + 3 &= \\ 2[2[2[2f(0) + 3] + 3] + 3] + 3 &= 93 \end{aligned}$$

مثال (3): اكتب اقتران المعادلة لحساب مضروب n بحيث

$$n \in \mathbb{N}; n! = 1 * 2 * 3 * \dots * (n-1) * n$$

الحل: خاصية الافتتاح: القيمة الاستهلاكية عندما تكون $n=0$ أو $n=1$ هي

$$factorial(1) = 1, factorial(0) = 1$$

خاصية المعادلة: نستخدم تعريف المضروب $n! = n * (n-1)!$

$$factorial(n) = n * factorial(n-1) \text{ ومنه}$$

مثال (4): اكتب اقتران المعادلة لحساب عدد الأرقام التي تكون عدداً صحيحاً ما؟

مثلاً يتكون العدد 375 من ثلاثة أرقام.

الحل: خاصية الافتتاح: القيمة الاستهلاكية عندما يكون العدد أقل من عشرة فهو

$$digits(n) = 1 \text{ for } n < 10 \text{ مكون من رقم واحد،}$$

خاصية المعادلة: كل مرة نقسم فيها العدد على عشرة نضيف 1 لعدد

$$digits(n) = 1 + digits(n \text{ divides } 10)$$

$$digits(375) = 1 + digits(37)$$

$$= 1 + (1 + digits(3)) = 1 + (1 + 1) = 3$$

تمارين (1): إذا علمت أن اقتران المعادلة لـ Ackermann معرف بما يلي:

$$Ackermann \begin{cases} A(0, n) = n + 1 \\ A(m, 0) = A(m-1, 1) & \text{if } m > 0 \\ A(m, n) = A(m-1, A(m, n-1)) & \text{if } m > 0 \text{ and } n > 0 \end{cases}$$

أحسب ما يلي:

$$A(0, 2) \text{ (a)}$$

$A(2,0)$ (b)

$A(2,2)$ (c)

تمارين (2): لماذا لا تُعد الاقترانات التالية اقترانات معاودة ؟

1.
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n) = f(n+1) + 1 \quad \text{if } n > 0 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n) = f(n-2) + 1 \quad \text{if } n > 1 \end{cases}$$

تمارين (3): اكتب اقتران المعاودة لحساب عدد الأصفار (Zeroes) التي تظهر في عدد صحيح ما.

تمارين (4): اكتب اقتران المعاودة لحساب $\sum_{k=0}^n a^k$

تمارين (5): لنفرض أن $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ قيم أرقام Fibonacci المعرفة بالمعادلات الآتية:

القيم الاستهلالية: $f_0 = 1 ; f_1 = 1$ ، و

خاصية المعاودة هي $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ لقيم $n = 2, 3, 4, \dots$.

أوجد قيم أرقام Fibonacci f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 ؟

اقتران حافظ الصفة Isomorphism

يدعى الاقتران $f : N \rightarrow N$ حافظاً لصفة الترتيب إذا حقق الشرط التالي:

$$\forall x, y \in N, x < y \rightarrow f(x) < f(y)$$

وسوف نرى أمثلة كثيرة في الفصول القادمة إن شاء الله. وقد تم ذكره هنا ليتعود الطالب على الاقتران بهذا المصطلح.

اقتران التباديل Permutations

نسمي اقتران التقابل p على المجموعة نفسها $p : A \rightarrow A$ اقتران التباديل.

لتكن المجموعة المنتهية $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. وليكن p اقتران تقابل معرفاً على A .

نرمز لصور عناصر A بـ: $p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_n)$. وترتب على الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p(a_1) & p(a_2) & \dots & p(a_n) \end{pmatrix}$$

إن إعادة ترتيب القيم $p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_n)$ يسمى تبديل على المجموعة

A

مثال (1): لتكن $A = \{a, b, c\}$ ، عندئذ يمكن كتابة جميع التبديلات الممكنة من عناصر A على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} I_A &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} \\ p_3 &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, p_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

مثال (2): استخدم المثال السابق لحساب التبديلات الآتية:

$$\begin{aligned} p_4^{-1} - 1 \\ p_3 \circ p_2 - 2 \end{aligned}$$

الحل:

$$\begin{aligned} p_4 &= \{(a, c), (b, a), (c, b)\} - 1 \text{ ومنه} \\ p_4^{-1} &= \{(c, a), (a, b), (b, c)\} = p_3 \\ p_4^{-1} &= p_3 \text{ إذن} \end{aligned}$$

$$p_3 \circ p_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = p_5 - 2$$

فعلاً حصلنا تلك النتيجة بالطريقة التالية:

نبدأ بعناصر p_2 حيث العنصر a يأخذ العنصر b صورة له، ثم ننقل إلى p_3 حيث العنصر b يأخذ العنصر c صورة له. والعنصر c هو صورة a في التبديل الجديد $p_3 \circ p_2$.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow (p_3 \circ p_2)(a) = c \text{ وبلغة اقتران التبديلات المركبة}$$

و نكرر ذلك للعناصر b و c من A فنحصل

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow (p_3 \circ p_2)(b) = b$$

$$\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix} \Leftrightarrow (p_3 \circ p_2)(c) = a$$

ومنه نجد أن $p_3 \circ p_2 = p_5$ وهذا يثبت لنا أن مركب التباديل ينتج عنه تبديل آخر.

نسمي اقتران مركب التباديل $p_3 \circ p_2$ باقتران "ضرب التباديل" ونلفظ هكذا: p_2 ضرب p_3 .

تبديل دوري Cyclic Permutation

نسمي p تبديلاً دورياً على المجموعة المنتهية $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ إذا عرف

$$\begin{aligned} p(a_1) &= a_2 \\ p(a_2) &= a_3 \\ &\dots \\ p(a_{n-1}) &= a_n \\ p(a_n) &= a_1 \end{aligned}$$

ونقول إن p عرف الدورة $cycle = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

مثال (1): لتكن $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، فالدورة $cycle = (a, c, e)$ تعطي التبديل

$$cycle = (a, c, e) = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & b & e & d & a \end{pmatrix}$$

لاحظ، أن العناصر غير مذكورة في الدورة مثل b و d بقيت صورها نفسها في الدورة.

مثال (2): لتكن $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. أوجد الدورات التالية:

$$(d, a, c, e) \circ (e, f, c) \quad (a)$$

- (b) $(e, f, c) \circ (d, a, c, e)$
 (c) هل الدورة $(d, a, c, e) \circ (e, f, c)$ تساوي الدورة $(e, f, c) \circ (d, a, c, e)$ أم لا تساويها؟

الحل:

$$\begin{aligned} & (d, a, c, e) \circ (e, f, c) \\ &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & b & e & a & d & f \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & e & d & f & c \end{pmatrix} \quad (a) \\ &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & b & d & a & f & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (e, f, c) \circ (d, a, c, e) \\ &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & e & d & f & c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & b & e & a & d & f \end{pmatrix} \quad (b) \\ &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ e & b & f & a & d & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) وفقاً لما أثبتناه في a و b الدورتان غير متساويتين،
 $(e, f, c) \circ (d, a, c, e) \neq (d, a, c, e) \circ (e, f, c)$
 نأخذ منه أن ضرب الدورات لا يعطي دائماً دورة أخرى.

تجزئة التبديل إلى عدة دورات

يمكن تجزئة أي تبديل إلى عدة دورات مضروبة في بعضها بعض. والمثال التالي يوضح هذه الطريقة.

لنكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ وليكن التبديل p المعروف على A بـ

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 2 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

تحديد الدورات:

الدورة هي الانطلاق من عنصر ما ثم العودة في النهاية إلى العنصر نفسه.

- نلاحظ أن $p(1) = 3, p(3) = 6, p(6) = 1$ وهذه هي الدورة الأولى $(1, 3, 6)$ حيث انطلقنا من العنصر 1 وانتهينا عند العنصر نفسه.
 $(6, 1, 3) = (1, 3, 6) = (3, 6, 1)$
- نلاحظ أن $p(2) = 4, p(4) = 5, p(5) = 2$ وهذه هي الدورة الثانية $(2, 4, 5)$ حيث انطلقنا من العنصر 2 وانتهينا عند العنصر نفسه.
 $(2, 4, 5) = (4, 5, 2) = (5, 2, 4)$
- نلاحظ أيضاً أن العناصر المتبقية 7 و 8 فقط تشكل دورة هي $(7, 8)$ حيث $p(7) = 8, p(8) = 7$ وانطلقنا من العنصر 7 وانتهينا عند العنصر نفسه.

و بالتالي يمكننا كتابة التبديل السابق p على شكل مضروب دورات $p = (7, 8) \circ (2, 4, 5) \circ (1, 3, 6)$ اعلم أنه لو أردنا تحويل هذه الدورات إلى تباديل ثم ضربناها ببعضاً ببعض نحصل التبديل السابق نفسه.

التباديل الزوجية والفردية Even and Odd Permutations

يمكننا كتابة كل دورة مؤلفة من n عنصر على الشكل التالي

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_n) \circ (a_2, a_{n-1}) \circ \dots \circ (a_1, a_3) \circ (a_1, a_2)$$

نسمي الدورات المؤلفة للدورة الأم بدورات منفصلة Disjoint Cycles.

مثال (3): لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ وليكن لدينا التبديل p المعروف على

$$p = (7, 8) \circ (2, 4, 5) \circ (1, 3, 6)$$

وعليه يمكن كتابة كل دورة على النحو الآتي:

$(7, 8) = (7, 8)$ $(2, 4, 5) = (2, 5) \circ (2, 4)$ $(1, 3, 6) = (1, 6) \circ (1, 3)$

ومنه نحصل

$$p = (7, 8) \circ (2, 5) \circ (2, 4) \circ (1, 6) \circ (1, 3)$$

إذا كان عدد الدورات المنفصلة فردياً نقول بأن التبديل فردي وإذا كان عدد الدورات المنفصلة زوجياً سمي التبديل تبديلاً زوجياً. ففي مثالنا السابق عدد الدورات المنفصلة (7) سبع دورات، إذن p هو تبديل فردي.

اقتران الحاسوب Computer Function

الاقترانات التالية هامة في تراكيب الرياضيات المتقطعة وهي: اقتران الانتماء *Characteristic*، و اقتران أكبر عدد صحيح *Ceiling*، و اقتران أصغر عدد صحيح *Floor*، وإليك تعريفها:

الانتماء *Characteristic*

إذا كانت X مجموعة وكانت $A \subset X$ ، فإنه يوجد اقتران يميز انتماء عناصر X للمجموعة الجزئية A يرمز له f_A ويعرف بما يلي:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases} \quad \text{حيث إن } \begin{cases} f_A : X \rightarrow \{0,1\} \\ x \rightarrow f_A(x) \end{cases}$$

مثال (1): إذا كانت $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ وكانت $A = \{1,3,6\}$ و $B = \{2,4\}$ و $C = \{3,5\}$.

أوجد القيم التالية: f_A ، f_B ، f_C ، $f_{\bar{A}}$ ، $f_{A \cap C}$ ، $f_{A \cap B}$ ، $f_{A \cup B}$ ؟

على الطالب مراجعة تمثيل المجموعات بالحاسوب.

	$X =$	1, 2, 3, 4, 5, 6
	$f_X =$	1, 1, 1, 1, 1, 1
$A = \{1,3,6\}$	$f_A =$	1, 0, 1, 0, 0, 1
$B = \{2,4\}$	$f_B =$	0, 1, 0, 1, 0, 0
$C = \{3,5\}$	$f_C =$	0, 0, 1, 0, 1, 0
$\bar{A} = \{2,4,5\}$	$f_{\bar{A}} =$	0, 1, 0, 1, 1, 0
$A \cap C = \{3\}$	$f_{A \cap C} =$	0, 0, 1, 0, 0, 0
$A \cap B = \emptyset$	$f_{A \cap B} =$	0, 0, 0, 0, 0, 0
$A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$	$f_{A \cup B} =$	1, 1, 1, 1, 0, 1

تمارين (1): إذا كانت $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ وكانت $A = \{1,3,6\}$ و $B = \{2,4\}$ و $C = \{3,5\}$. أثبت صحة المتساويات التالية:

$$f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B \quad (1)$$

$$f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A \cdot f_B \quad (2)$$

$$f_{A \oplus B} = f_A + f_B - 2f_A f_B \quad (3)$$

The Ceiling and Floor functions اقترانا أكبر وأصغر عددا صحيحين

The Ceiling function اقتران أكبر عدد صحيح

أكبر عدد صحيح في العدد الحقيقي x ورمزه $\lceil x \rceil$ هو أصغر عدد صحيح أكبر من x أو يساويه.
يسمى هذا الاقتران باقتران الدرج عند x لأن مخططة البياني يمثل درجا.

The **Ceiling function** assigns to the real number x the smallest integer that is greater than or equal to x . The value of the ceiling function at x is denoted by $\lceil x \rceil$.

مثال (1): أوجد قيم:

$$\begin{array}{ll} \lceil -\frac{1}{2} \rceil & , \lceil \frac{1}{2} \rceil - 1 \\ \lceil 8 \rceil & , \lceil 3.5 \rceil - 2 \\ \lceil 5.8 \rceil & , \lceil 5.1 \rceil - 3 \\ \lceil -4.25 \rceil & , \lceil -4.6 \rceil - 4 \end{array}$$

الحل:

$$\begin{array}{ll} \lceil -\frac{1}{2} \rceil = 0 & , \lceil \frac{1}{2} \rceil = 1 - 1 \\ \lceil 8 \rceil = 8 & , \lceil 3.5 \rceil = 4 - 2 \\ \lceil 5.8 \rceil = 6 & , \lceil 5.1 \rceil = 6 - 3 \\ \lceil -4.25 \rceil = -4 & , \lceil -4.6 \rceil = -4 - 4 \end{array}$$

اقتران أصغر عدد صحيح *The Floor function*

أصغر عدد صحيح في العدد الحقيقي x ورمزه $\lfloor x \rfloor$ هو أكبر عدد صحيح أقل من x أو يساويه. يسمى هذا الاقتران باقتران الدرج عند x لأن مخططه البياني يمثل درجاً..

The *Floor function* assigns to the real number x the largest integer that is less than or equal to x . The value of the floor function at x is denoted by $\lfloor x \rfloor$.

مثال (1): أوجد قيم:

$$\begin{array}{ll} \lfloor -\frac{1}{2} \rfloor & , \lfloor \frac{1}{2} \rfloor -1 \\ \lfloor 8 \rfloor & , \lfloor 3.5 \rfloor -2 \\ \lfloor 5.8 \rfloor & , \lfloor 5.3 \rfloor -3 \\ \lfloor -4.35 \rfloor & , \lfloor -4.7 \rfloor -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1 & , \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0 -1 \\ \lfloor 8 \rfloor = 8 & , \lfloor 3.5 \rfloor = 3 -2 \\ \lfloor 5.8 \rfloor = 5 & , \lfloor 5.3 \rfloor = 5 -3 \\ \lfloor -4.35 \rfloor = -5 & , \lfloor -4.7 \rfloor = -5 -4 \end{array}$$

مسائل محلولة Solved Problems

(1) لتكن $A = B = Z$ ولتكن $f : A \rightarrow B$ اقتراناً معرفاً بـ: $f(a) = a + 1$.
بين إن كانت f واحد- لواحد أو معرفاً في كل مكان (شامل).
الجواب:-

- لنثبت أن f معرف في كل مكان: أي أن $Dom(f) = A = Z$ ، وهذا
المساواة صواب بسبب حقيقة أن كل عدد صحيح a له عدد صحيح
تالي هو $a + 1$. وهذا يساوي $f(a)$ على حسب فرضية تعريف
الاقتران f .

- لنثبت أن f شامل: أي أن $Ran(f) = B = Z$ ، وللبرهنة على
المساواة لا بد من حساب العنصر $b \in B$ بدلالة a آخذين بالاعتبار أن
 $b = f(a)$. من تعريف f نلاحظ أن $b = a + 1$. أي أن
 $b - 1 = a$ وهذه صواب إذ إن أي عدد صحيح له عدد سابق صحيح.
وهو المطلوب

- لنثبت أن f واحد- لواحد: أي أن $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$

لننتقل من $f(x) = f(y)$ فنحصل

$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ x + 1 &= y + 1 \\ x &= y \end{aligned}$

وهو المطلوب.

(2) لتكن المجموعات التالية: $A = \{a1, a2, a3\}$ و $B = \{b1, b2, b3\}$
و $C = \{c1, c2, c3\}$ و $D = \{d1, d2, d3, d4\}$ وليكن لدينا الاقترانات
التالية:

$$\begin{aligned} f1 &= \{(a1, b2), (a2, b3), (a3, b1)\} - \\ f2 &= \{(a1, d2), (a2, d1), (a3, d4)\} - \\ f3 &= \{(b1, c2), (b2, c2), (b3, c1)\} - \\ f4 &= \{(d1, b1), (d2, b2), (d3, b1)\} - \end{aligned}$$

بين خصائص الاقترانات $f1, f2, f3, f4$ ؟
الجواب:-

- $f1$ اقتران تقابل بسبب أن $Dom(f1) = \{a1, a2, a3\} = A$ ، ثم
 $Ran(f1) = \{b2, b3, b1\} = B$

ولدينا $ai \neq aj \rightarrow f1(ai) \neq f1(aj)$ إذن $f1$ معرف في كل مكان وشامل وواحد- لواحد إذن $f1$ تقابل.

- $f2$ معرف في كل مكان، و $f2$ واحد- لواحد، $f2$ ليس شاملاً

$$d3 \notin \text{Ran}(f2) = \{d2, d1, d4\} \subset D$$

- $f3$ معرف في كل مكان، وشامل و ليس الاقتران $f3$ واحد-

$$\text{لواحد، } f3(b1) = f3(b2) \text{ with } b1 \neq b2$$

- $f4$ غير معرف في كل مكان

$$d4 \notin \text{Dom}(f4) = \{d1, d2, d3\} \subset D$$

$f4$ ليس واحد- لواحد، و ليس شاملاً . $b1$ صورة للعنصرين

$d1$ و $d3$ وكذلك $b3$ ليست صورة لأي عنصر من D .

(3) ليكن $A = B = Z$ ولتكن $f : A \rightarrow B$ اقتراناً معرفاً بـ: $f(a) = a^2$.

بين إن كانت f اقتران من A إلى B .

الجواب:-

كل عنصر من A له صورة واحدة في B . مثلاً $f(0) = 0$ ،

$$f(1) = 1 ، f(3) = 9 ، f(-5) = 25 ، f(5) = 25$$

(4) لتكن $A = B = C = R$ وليكن الاقترانان $f : A \rightarrow B$ و $g : B \rightarrow C$

المعرفان بـ $f(a) = a - 1$ و $g(b) = b^2$. أوجد قيم ما يلي:

$$1- g \circ f(x) ، \text{ ثم } g \circ f(2) ?$$

$$2- f \circ g(x) ، \text{ ثم } f \circ g(2) ?$$

$$3- f \circ f(x) ، \text{ ثم } f \circ f(2) ?$$

$$4- g \circ g(y) ، \text{ ثم } g \circ g(2) ?$$

الجواب:-

$$1- g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2$$

$$\text{ومنه } g \circ f(2) = (2 - 1)^2 = 1$$

$$2- f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 - 1$$

$$\text{ومنه } f \circ g(2) = 2^2 - 1 = 3$$

$$3- f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x - 1) = ((x - 1) - 1) = x - 2$$

$$\text{ومنه } f \circ f(2) = 2 - 2 = 0$$

$$4- g \circ g(y) = g(g(y)) = g(y^2) = (y^2)^2 = y^4$$

$$\text{ومنه } g \circ g(2) = 2^4 = 16$$

(5) لتكن $A = B = C = R$ وليكن الاقترانان $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$

المعرفان به $f(a) = a + 1$ و $g(b) = b^2 + 2$ أوجد قيم ما يلي:

$$1- g \circ f(x), \text{ ثم } f \circ g(-2) ?$$

$$2- f \circ g(x), \text{ ثم } f \circ g(-2) ?$$

$$3- f \circ f(x), \text{ ثم } f \circ f(-2) ?$$

$$4- g \circ g(y), \text{ ثم } g \circ g(-2) ?$$

الجواب:-

$$1- g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 + 2$$

$$\text{ومنه } g \circ f(-2) = ((-2) + 1)^2 + 2 = 3$$

$$2- f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = (x^2 + 2) + 1 = x^2 + 3$$

$$\text{ومنه } f \circ g(-2) = (-2)^2 + 3 = 7$$

$$3- f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x + 1) = ((x + 1) + 1) = x + 2$$

$$\text{ومنه } f \circ f(-2) = -2 + 2 = 0$$

$$4- g \circ g(y) = g(g(y)) = g(y^2 + 2) = (y^2 + 2)^2 + 2$$

$$\text{ومنه } g \circ g(-2) = ((-2)^2 + 2)^2 + 2 = 38$$

(6) لتكن المجموعتان $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ وليكن الاقترانان

$f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow A$ المعرفان به

$$f(a) = 3, f(b) = 2, f(c) = 1 \text{ و } g(a) = b, g(b) = c, g(c) = a$$

أوجد قيم ما يلي:

$$1- g \circ f(x)$$

$$2- f \circ g(x)$$

الجواب:-

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = g(3)$$

$$g \circ f(b) = g(f(b)) = g(2) \quad -1$$

$$g \circ f(c) = g(f(c)) = g(1)$$

الاقتران $g \circ f(x)$ غير معرف، لأن $Rang(f) \neq Dom(g)$

الإقتران $f \circ g$ هو معرف

$$\begin{array}{l} f \circ g(a) = f(g(a)) = f(b) = 2 \\ f \circ g(b) = f(g(b)) = f(c) = 1 \\ f \circ g(c) = f(g(c)) = f(a) = 3 \end{array} \quad -2$$

(7) لتكن $A = B = Z$ وليكن الإقترانان $f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow B$

المعرفان هكذا $f(a) = 2a + 3$ ، $g(a) = 3a + 2$

أوجد قيم ما يلي:

$$g \circ f(x) \quad -1$$

$$f \circ g(x) \quad -2$$

الجواب:-

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11 \quad -1$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7 \quad -2$$

(8) لتكن $A = B = R$ وليكن الإقترانان $f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow B$

المعرفان هكذا $f(x) = 2x + 5$ ، $g(x) = \frac{1}{2}(x - 5)$

أوجد قيم ما يلي:

$$g \circ f(x) \quad -1$$

$$f \circ g(x) \quad -2$$

الجواب:-

$$\begin{array}{l} g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) \\ = \frac{1}{2}((2x + 5) - 5) = x = I_r(x) = x \end{array} \quad -1$$

$$\begin{array}{l} f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2}(x - 5)\right) \\ = 2\left(\frac{1}{2}(x - 5)\right) + 5 = x = I_r(x) = x \end{array} \quad -2$$

(9) لتكن $A = B = R$ وليكن الإقترانان $f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow B$

المعرفان بي $f(x) = 2x^3 - 1$ و $g(y) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}}$

و المطلوب:

1- أثبت أن $f, g, g \circ f, f \circ g$ كل اقتران منها هو اقتران تقابل.

2- احسب قيمة $g \circ f(x)$

3- احسب قيمة $f \circ g(y)$

الجواب:-

1- لتكن $x \in A$ و $y = f(x) = 2x^3 - 1$ لنجد x بدلالة y ، ومنه

$$\text{إذن } y = 2x^3 - 1 \mapsto x^3 = \frac{1}{2}(y + 1) \mapsto x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}}$$

ثم نثبت بطريقة مشابهة أن $g \circ f(x) = x = I_R(x) = x \mapsto g \circ f = I_R$ إذن الاقتران f هو تقابل.

و عليه يكون g تقابلاً. ومنه نستنتج أن $g^{-1} = f$ و $f^{-1} = g$ وهكذا تكون جميعها تقابلاً.

(10) أوجد ناتج ما يلي:

$$1- \left\lceil \frac{1}{2} + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil \right\rceil$$

$$2- \left\lceil -\frac{3}{4} \right\rceil$$

$$3- \left\lceil \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \frac{1}{2} \right\rceil$$

$$4- \left\lceil -2.88 \right\rceil$$

$$5- \left\lceil -0.3 \right\rceil$$

الجواب:

$$\left\lceil \frac{1}{2} + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{2} + 1 \right\rceil = 2-1$$

$$\left\lceil -\frac{1}{2} + \left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil \right\rceil = \left\lceil -\frac{1}{2} + (-1) \right\rceil = \left\lceil -\frac{3}{2} \right\rceil = -2$$

$$\left\lceil -\frac{3}{4} \right\rceil = -1 \quad \left\lceil -\frac{3}{4} \right\rceil = 0-2$$

$$\left\lceil \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil 0 + 1 + \frac{1}{2} \right\rceil = 2 - 3$$

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot 2 \right\rfloor = 1$$

$$\lfloor -2.88 \rfloor = -3$$

$$\lceil -2.88 \rceil = -2$$

$$\lfloor -0.3 \rfloor = -1 - 4$$

$$\lceil -0.3 \rceil = 0 - 5$$

(10) لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وليكن لدينا التباديل p_1 و p_2 و p_3 المعرفة

$$\text{على } A \text{ بـ: } p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ و}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

أوجد ما يلي:

$$p_1^{-1} \circ p_2^{-1} - 1$$

$$p_1^{-1} \circ p_2^{-1} - 2$$

$$(p_3 \circ p_2) \circ p_1 - 3$$

$$p_3 \circ (p_2 \circ p_1)^{-1} - 4$$

الجواب:

$$1. \quad p_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad p_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad p_1^{-1} \circ p_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad (p_3 \circ p_2) \circ p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad p_3 \circ (p_2 \circ p_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

11) لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ أوجد ناتج ما يلي :

$$-1 \quad (1, 4) \circ (2, 4, 5, 6) \circ (1, 4, 6, 7)$$

$$-2 \quad (5, 8) \circ (1, 2, 3, 4) \circ (3, 5, 6, 7)$$

الجواب:

$$(1, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(2, 4, 5, 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(1, 4, 6, 7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

إذن

$$1. \quad (1, 4) \circ (2, 4, 5, 6) \circ (1, 4, 6, 7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad (5, 8) \circ (1, 2, 3, 4) \circ (3, 5, 6, 7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

12) لتكن $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ المطلوب إيجاد ضرب الدورات

المنفصلة للتباديل التالية:

$$p = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ f & e & g & h & d & c & b & a \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & c & a & d & f & g & h & e \end{pmatrix}$$

الجواب:

$$p = \{a, f, c, g, b, e, d, h\} \text{ دورة}$$

$$q = (e, f, g, h, e) \circ (a, b, c) \text{ دورة}$$

13) بين هل التبديلات $p = \{a, f, c, g, b, e, d, h\}$

و $q = (e, f, g, h, e) \circ (a, b, c)$ من مثال (12) السابق هي تبديلات فردية أم زوجية؟

زوجية؟

الجواب: p تبديل فردي وكذلك q أيضاً تبديل فردي

$$p = \{a, f, c, g, b, e, d, h\}$$

$$= (a, h) \circ (a, d) \circ (a, e) \circ (a, b) \circ (a, g) \circ (a, c) \circ (a, f)$$

$$\begin{aligned} q &= (e, f, g, h) \circ (a, b, c) \\ &= [(e, h) \circ (e, g) \circ (e, f)] \circ (a, c) \circ (a, b) \end{aligned}$$

(14) بين التبديل $X = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ d & b & a & f & e & h & g & c \end{pmatrix}$ فردي أم زوجي؟

الجواب: أولاً نتبع الصور فنحصل $f(a)=d, f(d)=f, f(f)=h, f(h)=$

$c, f(c)=a$ ومنه نجد دورة واحدة هي $X = \{a, d, f, h, c\}$ ثم

نجزئها إلى دورات منفصلة فنحصل

$X = (a, c) \circ (a, h) \circ (a, f) \circ (a, d)$ إذن التبديل زوجي.

(15) لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وليكن التبديل $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

أوجد p^2, p^3 ؟

الجواب:

- $p^2 = p \circ p$ حيث فرضاً $p = (1, 2, 4)$ إذن

$$p^2 = (1, 2, 4) \circ (1, 2, 4) = (1, 4, 2)$$

- $p^3 = p \circ p \circ p = p \circ p^2$ ومنه نجد أن

$$p^3 = p \circ p^2 = (1, 2, 4) \circ (1, 4, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = I_A$$

إذن $p^3 = (1, 1) \circ (2, 2) \circ (3, 3) \circ (4, 4) \circ (5, 5) \circ (6, 6) = I_A$

تمارين غير محلولة Unsolved Exercises

1- إذا علمت أن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{a, b, c\}$ وجميع العلاقات التالية هي من A إلى B .

بين أي من مجموعات الأزواج المرتبة الآتية تمثل اقترانا؟

$$f1 = \{(1, a), (2, b), (3, a), (4, b)\} \quad -1$$

$$f2 = \{(1, a), (2, b), (1, b), (3, a), (4, b)\} \quad -2$$

$$f3 = \{(1, c), (2, b), (3, a)\} \quad -3$$

$$f4 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\} \quad -4$$

2- إذا علمت أن $A = \{a, b, c, d\}$ بين إن كان الاقتران التالي معرفاً في كل مكان، أو احدى- لواحد، أم شامل أم تقابل؟
 $f = \{(a, a), (b, c), (c, d), (d, b)\}$

3- إذا علمت أن $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\}$ و $B = \{a, b, c, d\}$ بين إن كان الاقتران التالي معرفاً في كل مكان، أو احدى- لواحد، أم شامل أم تقابل؟
 $g = \{(\frac{1}{2}, a), (\frac{1}{6}, b), (\frac{1}{4}, d)\}$

4- لتكن $f : A \longrightarrow B$ اقترانا. أوجد f^{-1} لكل مما يلي:

$$a. \quad A = B = R; \quad f(a) = a^3 + 1 \quad -1$$

$$b. \quad A = B = R; \quad f(a) = \frac{2a-1}{3} \quad -2$$

$$c. \quad f = \{(a, c), (b, b), (c, d), (d, e), (e, a)\}, A=B=\{a, b, c, d, e\}$$

5- بين أي من الإقترانات التالية والمعرفة من A إلى B واحد- لواحد. حيث $A=B=\{a, b, c, d\}$

$$f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c, f(d) = d \quad -1$$

$$f(a) = b, f(b) = b, f(c) = d, f(d) = c \quad -2$$

$$f(a) = d, f(b) = b, f(c) = c, f(d) = d \quad -3$$

6- بين أي من الاقترانات التالية والمعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة Z واحد لواحد؟

$$f(n) = n - 1 \quad -1$$

$$f(n) = n^2 + 1 \quad -2$$

$$f(n) = n^3 \quad -3$$

$$f(n) = \frac{n}{2} \quad -4$$

7- بين أي من الاقترانات التالية والمعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $A=B=R$ تقابل؟

$$f(a) = 2a + 1 \quad -1$$

$$f(a) = a^2 + 1 \quad -2$$

$$f(a) = a^3 \quad -3$$

$$f(a) = -3a + 4 \quad -4$$

$$f(a) = \frac{a^2 + 1}{a^2 + 2} \quad -5$$

8- أوجد ناتج ما يلي:

$$\lceil 3.75 \rceil - 2 \quad \lfloor 3.75 \rfloor - 1$$

$$\lceil -18.4 \rceil - 4 \quad \lfloor -18.4 \rfloor - 3$$

$$\lceil -2.55 \rceil - 6 \quad \lfloor -2.55 \rfloor - 5$$

$$\lceil -34.75 \rceil - 8 \quad \lfloor 34.75 \rfloor - 7$$

$$\lceil 6 \rceil - 10 \quad \lfloor 6 \rfloor - 9$$

9- لتكن $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ أوجد ناتج ما يلي؟

$$(c, e, g, h) \circ (a, c, b) \quad 1$$

$$(b, f) \circ (c, e, g, h) \circ (b, e, c, d) \quad 2$$

$$(a, d) \circ (b, d, e, f) \circ (a, d, f, g) \quad 3$$

$$(e, h) \circ (a, b, c, d) \circ (c, e, f, g) \quad 4$$

10- لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ بين إن كانت التباديل التالية فردية أم زوجية؟

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$p1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}^{-2}$$

$$p3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 5 & 8 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-3}$$

$$p4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}^{-4}$$

11- لتكن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ولتكن التباديل $f = \{1, 3\}$, $g = \{2, 4\}$ من A أوجد $f \circ g$; $f^{-1} \circ g^{-1}$ ؟

12- لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ولتكن $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ أوجد

$$p \circ p = p^2; \quad p^{-1} \circ p$$

المصطلحات العلمية Terminology

<u>لمصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
الاقترانات	Functions
الضرب الديكارتي	Cartesian product
النونية المرتبة	ordered n-tuple
الاقتران	Function
مجال f	Domain f
المجال المقابل f	Range f
نطاق f	$Dom(f)$
مدى f	$Ran(f)$
الصفات المميزة للاقتران	Properties of Functions
الاقتران واحد-لواحد	One-to-one (Injective) Function
الاقتران الشامل	Onto (Surjective) Function
الاقتران في كل مكان	Everywhere defined Function
اقتران تقابل (أو تناظر)	One to one Correspondence (Bijective) Function
اقتران المساواة (الذاتي)	Identity Function
معكوس الاقتران	Inverse Function
اقتران مركب	Composition Function
معكوس الاقتران المركب	Inverse Composition Function

<u>لمصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
الاقتران لقوة n	Function to Power n
الإقترانات المتساوية	Functions Equality
اقتران التجاهل	Overriding
اقتران المعاودة	Recursive
اقتران حافظ الصفة	Isomorphism
اقتران التباديل	Permutations
تبديل دوري	Cyclic Permutation
دورة	Cycle
دورات منفصلة	Disjoint Cycles
التباديل الزوجية	Even Permutations
التباديل والفردية	Odd Permutations
اقترانات الحاسوب	Computer Functions
اقتران الانتماء	Characteristic Function
اقتران أكبر عدد صحيح	Ceiling Function
اقتران أصغر عدد صحيح	Floor Function

الفصل الرابع

المتتاليات Sequences

المتسلسلات Series

المصفوفات Matrices

125	الفصل الرابع
125	المتتاليات Sequences
125	المتسلسلات Series
125	المصفوفات Matrices
129	صيغ المتتالية Sequence Formulas
129	الأولى: الصيغة البسيطة Explicit Formula
130	الثانية: صيغة المعاودة Recursive Formula
134	إرشادات للطالب عليه الاستفادة منها عند إيجاد الحد العام التوني لمتتالية ما وذلك قبل البدء في كتابة الحل.
135	المتسلسلات Series
141	متسلسلات التعرف عليها فيه الإفادة للطالب إن شاء الله
144	المصفوفات Matrices
146	أنواع المصفوفات The Matrices Types
146	المصفوفة الصفرية Zeros Matrix
146	المصفوفة المربعة Square Matrix
146	المصفوفة القطرية Diagonal Matrix
146	المصفوفة الذاتية Identity Matrix
147	المصفوفة المثلثية Triangular Matrix
148	منقول المصفوفة The Transpose of Matrix A
148	المصفوفة المتماثلة The Symmetric Matrix
149	حساب المصفوفات Matrix Arithmetic
149	تساوي المصفوفات Matrix Equality
149	جمع المصفوفات Matrix Addition
150	خوارزمية جمع مصفوفتين Algorithm Matrix Addition
151	ضرب المصفوفات Matrix Multiplication
153	خوارزمية ضرب مصفوفتين Algorithm Matrix Multiplication

153	Power of Matrix	مصفوفة الأس
153 ...	Characteristics of Matrix Arithmetic	خصائص حساب المصفوفات
154	Boolean Matrices	المصفوفات البولية
154	Boolean Matrices Arithmetic	حساب المصفوفات البولية
155	The Join of two Zero-One Matrices	ضم مصفوفتين صفر- واحد
156	The Meet of two Zero-One Matrices	لقاء مصفوفتان صفر- واحد
156		الضرب البولي لمصفوفتين صفر- واحد
159	Solved exercises	تمارين محلولة
163	Unsolved exercises	تمارين غير محلولة
165	Terminology	المصطلحات العلمية

المتتاليات Sequences

تستعمل المتتاليات عادة لتمثيل قوائم عناصرها مرتبة، وهذا ما يوحي إليه اسم المتتالية بأن هناك مجموعة من القيم بعضها يلي بعض أو متوالية من حيث ترتيب عناصرها. والمتتاليات من التطبيقات المباشرة للاقتارات. والمتتاليات من تراكيب الرياضيات المتقطعة وتراكيب نظرية الحساب. أما التعريف الرياضي للمتتالية فهو:

لتكن A مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة، و B مجموعة جزئية أخرى من الأعداد (صحيحة، نسبياً أو حقيقية).

المتتالية هي الاقتران f من A إلى B ، $f: A \rightarrow B$. وتكتب على الشكل التالي:

$$f = \{(1, f(1)), (2, f(2)), \dots, (n, f(n))\} \subset A \times B$$

وإذا احتوت A على الصفر كان الشكل التالي

$$f = \{(0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2)), \dots, (n, f(n))\} \subset A \times B$$

والصورة الشائعة لكتابة المتتالية هي $f(1), f(2), \dots, f(i), \dots, f(n), \dots$ وإذا احتوت A على الصفر نبدأ بـ $f(0)$ أولاً ثم نضيف الحدود الأخرى. لو أعطينا أسماء متغيرات للقيم السابقة لحصلنا

$$\begin{array}{l} f(1) = a_1 \\ f(2) = a_2 \\ \vdots \\ f(i) = a_i \\ \vdots \\ f(n) = a_n \\ \vdots \end{array}$$

وعندئذ نسمى

الحد الأول a_1

والحد الثاني a_2

والحد النوني a_n أو الحد العام a_n

ونرمز للمتتالية التي حدها العام a_n بـ $\{a_n\}$ أو بالشكل $\langle a_n \rangle$.

صيغ المتتالية Sequence Formulas

عرفنا المتتالية بأنها اقتران من مجموعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعة جزئية منها، وعليه يكون الاقتران عادة بإحدى الصيغ التالية:

الأولى: الصيغة البسيطة Explicit Formula

حيث الاقتران f بصيغة بسيطة وعادية، وعليه نكتب الحد العام على النحو التالي: $a_n = f(n) = \text{exp ressi on}(n)$ وذلك لكل $n = 1, 2, \dots$

مثال (1): اكتب قانون الصيغة البسيطة للحد العام للمتتالية التي تمثلها الحدود

الأولى الخمسة التالية: $1, 4, 9, 16, 25, \dots$

مباشرة نجد أن الصيغة البسيطة لقانون الحد العام للمتتالية هو الاقتران

$$f : A \longrightarrow B; \quad f(n) = n^2$$

وعليه نكتب الحد النوني للمتتالية هكذا $a_n = n^2; \quad n = 1, 2, \dots$

إذن المتتالية هي $\langle n^2 \rangle = \langle 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots \rangle$

الحظ مثلاً قيم الحد السادس والحد العاشر هي: $a_6 = 36, \quad a_{10} = 100$

مثال (2): أوجد أول أربعة حدود من حدود المتتاليات التي حدها العام الآتي:

$$1. \quad a_n = \frac{1}{n}; \quad n = 1, 2, \dots$$

$$2. \quad a_n = (-1)^n; \quad n = 1, 2, \dots$$

$$3. \quad a_n = 2^n; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

الجواب:

1- قيم المتتالية $a_n = \frac{1}{n}; \quad n = 1, 2, \dots$ هي

$$a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2}; a_3 = \frac{1}{3}; a_4 = \frac{1}{4}$$

2- قيم المتتالية $a_n = (-1)^n; \quad n = 1, 2, \dots$ هي

$$a_1 = (-1)^1 = -1; \quad a_2 = (-1)^2 = 1 \\ a_3 = (-1)^3 = -1 \quad a_4 = (-1)^4 = 1$$

3- قيم المتتالية $a_n = 2^n; \quad n = 0, 1, 2, \dots$ هي

$$a_0 = 2^0 = 1; \quad a_1 = 2^1 = 2 \quad a_2 = 2^2 = 4 \\ a_3 = 2^3 = 8 \quad a_4 = 2^4 = 16$$

الثانية: صيغة المعاودة: Recursive Formula

حيث الاقتران r بصيغة المعاودة وعليه نكتب الحد العام على النحو التالي:

$$\begin{aligned} a_1 &= c = \text{const} \\ a_n &= f(n) = f(n-1) = \text{expression} \end{aligned}$$

وذلك لكل $n = 2, 3, 4, \dots$ وقانون المعاودة يتطلب الخصائص التالية:

أولاً: خاصية القيمة الاستهلالية $a_1 = f(1) = c = \text{const}$ وهو الثابت

$$a_1 = c$$

ثانياً: خاصية المعاودة $a_n = f(n) = f(n-1) = \text{expression}(a_{n-1})$ ، وهي كتابة الحد النوني a_n باستدعاء مباشر للحد (أو الحدود) التي تسبقه

$$a_n = \text{expression}(a_{n-1})$$

مثال(3): اكتب قانون المعاودة للحد العام للمتتالية التي تمثلها الحدود الأولى

الخمس التالية: 3, 9, 15, 21, ...

الحل: مباشرة نكتب قيم الحدود مع مؤشرات

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 9 = 3 + 6 = a_1 + 6 \\ a_3 &= 15 = 9 + 6 = a_2 + 6 \\ a_4 &= 21 = 15 + 6 = a_3 + 6 \\ &\vdots \\ a_i &= f(i-1) = a_{i-1} + 6 \end{aligned}$$

ومنه نجد الحد العام $a_n = a_{n-1} + 6$

إن صيغة المتتالية النهائية بقانون المعاودة هي

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_n &= a_{n-1} + 6 \quad ; n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

الحظ مثلاً قيم الحدين الخامس والسادس هي $a_5 = 27$, $a_6 = 33$.

مثال(4): أوجد أول أربعة حدود من حدود المتتاليات التي حدها العام الآتي:

$$\begin{aligned} a_1 &= -3 \\ a_n &= -2a_{n-1} + 1; \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad 1.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + (-1)^n \cdot 2; \quad n = 2, 3, \dots \end{array}} \quad 2.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; \quad n = 3, 4, \dots \end{array}} \quad 3.$$

الجواب:

1- قيم أول أربعة حدود من المتتالية هي:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = -3 \\ a_n = -2a_{n-1} + 1; \quad n = 1, 2, \dots \end{array}}$$

$$a_1 = -3; \quad a_2 = -2a_1 + 1 = -2(-3) + 1 = 7;$$

$$a_3 = -2(7) + 1 = -13; \quad a_4 = 27; \quad a_5 = -53$$

2- قيم أول أربعة حدود من المتتالية

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + (-1)^n \cdot 2; \quad n = 2, 3, \dots \end{array}}$$

هي:

$$a_1 = 0; \quad a_2 = a_1 + (-1)^2 \cdot 2 = 0 + 1 \cdot 2 = 2$$

$$a_3 = a_2 + (-1)^3 \cdot 2 = 2 + (-1) \cdot 2 = 0 \quad a_4 = a_3 + (-1)^4 \cdot 2 = 2$$

3- قيم أول أربعة حدود من المتتالية هي:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; \quad n = 3, 4, \dots \end{array}}$$

$$a_1 = 2; \quad a_2 = 5; \quad a_3 = a_2 + a_1 = 5 + 2 = 7$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 7 + 5 = 12; \quad a_5 = a_4 + a_3 = 12 + 7 = 19$$

مثال (5): اكتب قانون الصيغة المناسب للحد العام للمتتاليات التي تمثلها الحدود الأولى التالية:

(a) 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22 ...

(b) -3, 5, -11, 21, -43, 85 ...

(c) 2, 6, 12, 20, 30, 42 ...

(d) 1, 7, 25, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047 ...

$$3, -1, 43, 71, 787, 2639 \dots \text{ (e)}$$

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192 \dots \text{ (f)}$$

$$15, 8, 1, -6, -13, -20, -27 \dots \text{ (g)}$$

$$3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47 \dots \text{ (h)}$$

$$2, 16, 54, 128, 250, 432, 686 \dots \text{ (i)}$$

$$2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321 \dots \text{ (j)}$$

$$-1, 3, 0, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4 \dots \text{ (k)}$$

الجواب :

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, 22 \dots \text{ (a) الحد العام هو}$$

$$a_1 = 1; \quad a_n = a_{n-1} + n - 1$$

$$-3, 5, -11, 21, -43, 85 \dots \text{ (b) الحد العام هو}$$

$$a_1 = -3; \quad a_n = -2a_{n-1} - 1$$

$$2, 6, 12, 20, 30, 42 \dots \text{ (c) الحد العام هو } a_n = n^2 + n$$

$$a_1 = 2; \quad a_n = a_{n-1} + 2 \cdot n \text{ أو } a_n = 2n$$

$$1, 7, 25, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047 \dots \text{ (d) الحد العام هو}$$

$$a_n = 3^n - 2$$

$$3, -1, 787, 2639 \dots \text{ (e) الحد العام هو } a_n = 2(-3)^n + 5^n$$

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192 \dots \text{ (f) الحد العام هو } a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$15, 8, 1, -6, -13, -20, -27 \dots \text{ (g) الحد العام هو } a_n = 22 - 7n$$

$$3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47 \dots \text{ (h) الحد العام هو}$$

$$a_n = \frac{n^2 + n + 4}{2}$$

$$2, 16, 54, 128, 250, 432, 686 \dots \text{ (i) الحد العام هو } a_n = 2n^3$$

(j) ... 40321, 5041, 721, 121, 25, 7, 3, 2 الحد العام هو

$$a_n = n! + 1$$

(k) ... 4, 3, 7, 6, 2, 5, 1, 4, 0, 3, -1 الحد العام

$$a_1 = -1; a_n = -a_{n-1} + n \text{ هو}$$

تمارين (1): اكتب قانون الصيغة المناسب للحد العام للمتتاليات التي تمثلها الحدود الأولى التالية:

(a) ... 102, 83, 66, 51, 38, 27, 18, 11, 6, 3

(b) ... 43, 39, 35, 31, 27, 23, 19, 15, 11, 7

(c) ... 19682, 6560, 2186, 728, 242, 80, 26, 8, 2, 0

(d) ... 2027029, 135135, 10395, 945, 105, 3, 1

(e) ... 65536, 256, 16, 4, 2

تمارين (2): أوجد أول أربعة حدود من حدود المتتاليات التي حدها العام الآتي:

$$1. a_n = 2^n + 1$$

$$2. a_n = \frac{n}{2}$$

$$3. a_n = (n+1)^{n+1}$$

$$4. a_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

تمارين (3): لنفرض الاقتران f المعروف

للمتتالية $\{f_n\} = \{1/n, n = 1, 2, \dots\}$ و لنفرض الاقتران g

المعرف للمتتالية $\{g_n\} = \{2^n, n = 1, 2, \dots\}$. أوجد الاقتران

المركب $f \circ g$. و إذا كانت $k < n$ أثبت أن الاقتران المركب حافظ

لصفة الترتيب يعني $f \circ g(k) < f \circ g(n) \rightarrow k < n$.

إرشادات للطالب عليه الاستفادة منها عند إيجاد الحد العام النوني لمتتالية ما وذلك قبل البدء في كتابة الحل.

- 1- هل يوجد في حدود المتتالية تكرار لقيمة معينة؟
- 2- هل للمتتالية حدود يمكن تكوينها من قيم حدود سابقة، وذلك بإضافة القيمة نفسها أو قيمة تعتمد على الدليل الرائي؟
- 3- هل في حدود المتتالية حدود يمكن تحصيلها من حدود سابقة بعد ضربها بقيمة معينة؟
- 4- هل يوجد في حدود المتتالية حدود يمكن تكوينها من تركيبي حدود سابقة بطريقة مميزة؟

❖ متتاليات التعرف عليها فيه الإفادة للطالب إن شاء الله.

الحد العام النوني	الحدود العشر الأولى
n^2	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ...
n^3	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000 ...
n^4	1, 4, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000 ...
2^n	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 ...
3^n	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049 ...
$n!$	1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800 ...

المتسلسلات ¹ Series

إذا كانت لدينا المتتاليات $f = \langle f_n \rangle = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ فإنه بالامكان تكوين متتالية جديدة $\langle x_r \rangle$ قيمة حدها الرائي يساوي حاصل جمع r من الحدود الأولى للمتتالية f وتكتب بالصيغة التالية:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1 \\ x_2 &= f_1 + f_2 \\ x_3 &= f_1 + f_2 + f_3 \\ &\vdots \\ x_r &= f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_r \\ &\vdots \\ x_n &= \sum_{i=1}^{i=n} f_i \end{aligned}$$

نسمي متغير r (الراء) دليل الجمع (أو دلالة *Summation Index*) المتسلسلة $\langle x_r \rangle$. وكذلك يطلق على الراء مؤشر الحدود.

وفي ناتج جمع r حدود $\sum_{i=1}^{i=r} f_i$ يسمى العدد 1 بالحد الأدنى *Lower Limit* لدليل الجمع i ، ويسمى العدد r بالحد الأعلى *Upper Limit* لدليل الجمع i .

ملحوظة: على الطالب التمييز بين ناتج جمع r من الحدود الأولى للمتتالية الذي يكتب باستخدام الرمز $\sum$ بالصيغة

The summation of the first r terms of f_i is

$$\sum_{i=1}^{i=r} f_i = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_r$$

و بين ناتج ضرب r من الحدود الأولى للمتتالية الذي يكتب باستخدام الرمز $\prod$ بالصيغة

¹ مبادئ التحليل الرياضي. ترجمة الدكتور وليد ديب، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، 1984م.

The Product of the first r terms of f_i is

$$\prod_{i=1}^{i=r} f_i = f_1 * f_2 * f_3 * \dots * f_r$$

مثال (1): إذا أعطينا المتتالية ذات الحد النوني $a_n = \frac{1}{n}$; $n = 1, 2, \dots$ وأوجد

الحدود الخمسة الأولى لمتسلسلة المتتالية؟

الجواب:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{1}; \\ x_2 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2}; \\ x_3 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \\ x_4 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}; \\ x_5 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}; \end{aligned}$$

مثال (2): أوجد الحد الخامس للمتسلسلة المعرفة بالمتتالية

$$a_n = n^2; \quad n = 1, 2, \dots$$

الجواب: الحد الخامس للمتسلسلة

$$x_5 = \sum_{i=1}^{i=5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

مثال (3): أوجد الحد الثالث للمتسلسلة المعرفة بالمتتالية

$$a_n = 2n; \quad n = 1, 2, \dots$$

وأوجد مضروب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية؟

الجواب: الحد الثالث للمتسلسلة

$$x_3 = \sum_{i=1}^{i=3} 2i = 2.1 + 2.2 + 2.3 = 2 + 4 + 6 = 12$$

1- مضروب الحدود الثلاثة الأولى

$$x_3 = \prod_{i=1}^{i=3} 2i = 2.1 * 2.2 * 2.3 = 2 * 4 * 6 = 48$$

مثال (3): أوجد قيمة مايلي: $X = \sum_{k=4}^{k=9} (-1)^k$ ؟ و الجواب:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{k=4}^{k=9} (-1)^k = (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 + (-1)^9 \\ &= 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

مثال (4): أوجد ناتج جمع الجمع Double Summation الآتي:

$$X = \sum_{i=1}^{i=4} \sum_{j=1}^{j=3} ij \quad \text{؟ والجواب:}$$

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{i=4} \sum_{j=1}^{j=3} ij \\ &= \sum_{i=1}^{i=4} (i * 1 + i * 2 + i * 3) \\ &= \sum_{i=1}^{i=4} (i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^{i=4} 6i \\ &= 6 * 1 + 6 * 2 + 6 * 3 + 6 * 4 = 6 + 12 + 18 + 24 = 60 \end{aligned}$$

مثال (5): أوجد ناتج ما يلي: $X = \sum_{k \in \{0, 1, 3, 5\}} k$ ؟

$$X = \sum_{k \in \{0, 1, 3, 5\}} k = 0 + 1 + 3 + 5 = 9 \quad \text{الجواب:}$$

مثال (6): أوجد ناتج ما يلي: $\sum_{i=1}^{i=5} (i + 1)$ ؟ والجواب:

$$\sum_{i=1}^{i=5} (i + 1) = (1 + 1) + (2 + 1) + (3 + 1) + (4 + 1) + (5 + 1) = 20$$

مثال (7): أوجد ناتج ما يلي: $\sum_{i=1}^{i=5} 7$ ؟ والجواب:

$$\sum_{i=1}^{i=5} 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$$

مثال (8): أوجد ناتج ما يلي: $\sum_{i=1}^{i=4} (2^{i+1} - 2^i)$ ؟

و الجواب:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=4} (2^{i+1} - 2^i) \\ &= (2^{1+1} - 2^1) + (2^{2+1} - 2^2) + (2^{3+1} - 2^3) + (2^{4+1} - 2^4) \\ &= 2^2 - 2^1 + 2^3 - 2^2 + 2^4 - 2^3 + 2^5 - 2^4 \\ &= 4 - 2 + 8 - 4 + 16 - 8 + 32 - 16 = 30 \end{aligned}$$

مثال (9): أوجد ناتج جمع الجمع الآتي: $\sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} (i + j)$ ؟

والجواب:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{i=4} \sum_{j=1}^{j=3} (i + j) \\ &= \sum_{i=0}^{i=4} [(i+1) + (i+2) + (i+3)] \\ &= \sum_{i=0}^{i=4} (3i + 6) \\ &= (3*0+6) + (3*1+6) + (3*2+6) + (3*3+6) + (3*4+6) \\ &= 6 + 9 + 12 + 15 + 18 = 60 \end{aligned}$$

مثال (10): أوجد ناتج جمع الجمع الآتي: $\sum_{i=0}^{i=2} \sum_{j=0}^{j=3} (i^2 j^3)$ ؟

والجواب:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{i=2} \sum_{j=0}^{j=3} (i^2 j^3) &= \\ \sum_{i=0}^{i=2} [(i^2 0^3) + (i^2 1^3) + (i^2 2^3) + (i^2 3^3)] &= \sum_{i=0}^{i=2} [0 + i^2 + 8i^2 + 27i^2] \\ \sum_{i=0}^{i=2} (36i^2) &= \\ &= (36 * 0^2) + (36 * 1^2) + (36 * 2^2) \\ &= 0 + 36 + 144 = 180 \end{aligned}$$

مثال (11): أوجد ناتج مايلي:

$$1. \prod_{i=0}^{i=5} 2 \cdot i^5$$

$$2. \prod_{i=5}^{i=10} i$$

$$3. \prod_{i=3}^{i=5} 7$$

الجواب:

$$1. \prod_{i=0}^{i=5} 2 \cdot i^5 = 2 \cdot 0^5 * 2 \cdot 1^5 * 2 \cdot 2^5 * 2 \cdot 3^5 * 2 \cdot 4^5 * 2 \cdot 5^5 = 0$$

$$2. \prod_{i=5}^{i=10} i = 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 = 151200$$

$$3. \prod_{i=3}^{i=5} 7 = 7 * 7 * 7 = 343$$

متسلسلات التعرف عليها فيه الإفادة للطالب إن شاء الله

القانون الأقرب	جمع r حدود
$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} \quad r \neq 1$	$\sum_{k=0}^{k=n} ar^k$
$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=1}^{k=n} k$
$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=1}^{k=n} k^2$
$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$\sum_{k=1}^{k=n} k^3$

تمارين (1): ما قيم المتسلسلات التالية؟

$$\sum_{k=1}^{k=5} (-2)^k \quad (a)$$

$$\sum_{j=1}^{j=3} \sum_{i=1}^{i=2} (j - i) \quad (b)$$

$$\sum_{k \in S} k; \quad S = \{1, 5, 7, 9, 11\} \quad (c)$$

$$\sum_{k=0}^{k=8} 2 \cdot (-3)^k \quad (d)$$

$$\sum_{k=0}^{k=8} (1 + (-1)^k) \quad (e)$$

$$\sum_{j=1}^{j=3} \sum_{i=1}^{i=2} j \quad (f)$$

$$\sum_{k \in S} 2; \quad S = \{1, 5, 7, 9, 11\} \quad (g)$$

$$\prod_{i=3}^{i=5} 2 \quad (h)$$

$$i = \prod_{i=1}^{100} (-1)^i \quad (i)$$

$$\sum_{k=0}^{k=4} K! \quad (j)$$

$$\prod_{i=1}^{i=4} i! \quad (k)$$

تمارين (2): أثبت أن $\sum_{j=1}^{j=n} (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$ وذلك لكل متتالية من الأعداد

الحقيقية $\langle a_n \rangle$ ؟ تسمى هذه المتسلسلة بـ *المقرب Telescoping*

تمارين (3): أوجد ناتج الجمع $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$ وذلك بالاستعانة بالتمرين السابق

المصفوفات Matrices

تستخدم المصفوفات في تراكيب رياضية عديدة منها تمثيل العلاقة بين عناصر مجموعة ما. و لتمثيل خطوط النقل الجوية والطرق المعبدة وشبكات الهاتف. سنراجع مفاهيم المصفوفات، و ندرس للمرة الأولى المصفوفات البولية *Boolean Matrices* (مصفوفات صفر- واحد)، وبعض الخوارزميات المتعلقة بحساب المصفوفات.

نعطي الآن مثالا على استخدام المصفوفات ولنفرض أن هناك تاجر جملة نشيطاً وضع مبيعاته اليومية على شكل شبكة تسهل عليه حساب مبيعاته اليومية ومن أجل ذلك قام بترويس الشبكة عمودياً بأسماء عملائه وأشار إلى أسمائهم بالرمز y_k وعَنُون الشبكة أفقياً بأسماء أصناف بضائع عملائه وأشار إلى أسمائها بالرمز x_i . ويمثل الرمز $x_i y_k$ كمية الصنف x_i المباع للعميل y_k . و هو مبين بالشبكة التالية:

شبكة المبيعات اليومية لتاجر الجملة

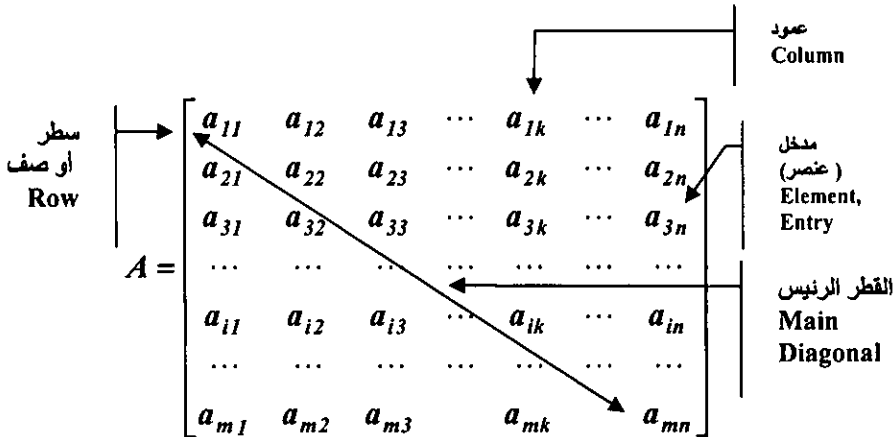
العميل المنصف ↓	عيسى y_1	صبيحي y_2	أكرم y_3	...	محمد y_k	...	خالد y_n
القمح x_1	$x_1 y_1$	$x_1 y_2$	$x_1 y_3$		$x_1 y_k$		$x_1 y_n$
الحمص x_2	$x_2 y_1$	$x_2 y_2$	$x_2 y_3$		$x_2 y_k$		$x_2 y_n$
الفول x_3	$x_3 y_1$	$x_3 y_2$	$x_3 y_3$		$x_3 y_k$		$x_3 y_n$
...					...		...
البازيلا x_i	$x_i y_1$	$x_i y_2$	$x_i y_3$	...	$x_i y_k$	...	$x_i y_n$
...					...		...
العدس x_m	$x_m y_1$	$x_m y_2$	$x_m y_3$		$x_m y_k$		$x_m y_n$

نقول إن شبكة التاجر تحتوي على m صنف من البضائع، أي m سطر، وكذلك تحتوي شبكة التاجر على n عميل، أي n عمود. وأبعاد الشبكة تكون $m \times n$ فراغاً يستطيع التاجر تعبئته بالقيم العددية. ونسمي $x_i y_k$ القيمة العددية

مدخل التاجر في الفراغ (الخلية) الذي محلها تقاطع الصف i والعمود k (أي تقاطع الصف i والعمود k).

فالمصفوفة تنظيم² من الأعداد على شكل شبكة $grid$ مؤلفة من صفوف و أعمدة $rows$ and $columns$. فلنفرض عدد الصفوف m ، وعدد الأعمدة n ، فحجم المصفوفة $Matrix dimension$ هو $m \times n$. وتحتوي هذه المصفوفة $m \times n$ قيمة عددية تسمى العناصر. فإذا رمزنا للمصفوفة بالحرف A ، وعناصرها العام بالرمز a_{ik} $1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n$ الذي محله تقاطع الصف i والعمود k . فإننا نشير إلى المصفوفة وعناصرها معاً بالصيغة التالية:

$$A = [a_{ik}] \quad 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq n$$



مثال (1): المصفوفة التالية من صفين وثلاثة أعمدة: $A = \begin{bmatrix} 10 & 29 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

وعدد عناصرها $2 \times 3 = 6$ ، عدد الأعمدة $n=3$ ، عدد الأسطر $m=2$.

² أ.د عبد المجيد نصير. الشامل في الرياضيات العامة. إربد-الأردن. 1985م.

أنواع المصفوفات The Matrices Types

المصفوفة الصفرية Zeros Matrix:

هي مصفوفة من أي حجم وقيمة كل عنصر فيها تساوي صفراً. وبشكل عام

$$z_{ik} = 0 \quad 1 \leq i \leq m; \quad 1 \leq k \leq n$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{مثال:}$$

المصفوفة المربعة Square Matrix

هي مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها أي $m = n$ مثل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{حيث } n=2.$$

المصفوفة القطرية Diagonal Matrix

هي مصفوفة قيمة كل عنصر فيها تساوي صفراً باستثناء قيم عناصر القطر الرئيس فهي مختلفة عن الصفر. ونعني بالقطر الرئيس مجموعة العناصر الواقعة على الخط المستقيم الواصل بين عنصر الزاوية اليسرى العلوية وعنصر الزاوية اليمنى السفلية من المصفوفة. وهذا موضح في الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الذاتية Identity Matrix

هي مصفوفة مربعة من أي حجم وقيمة كل عنصر من عناصر قطرها الرئيس يساوي واحداً وباقي العناصر قيمة كل منها تساوي الصفر. وتسمى أيضاً مصفوفة الحياد نسبة لخاصيتها الحيادية في عملية ضرب المصفوفات.

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_n = [a_{ij}] \quad \begin{cases} a_{ii} = 1 & 1 \leq i \leq n \\ a_{ij} = 0 & \text{for } i \neq j \quad 1 \leq j \leq n \end{cases} \quad \text{وبشكل عام}$$

المصفوفة المثلثية *Triangular Matrix*:

a. المصفوفة المثلثية العلوية *Upper Triangular Matrix*

هي مصفوفة مربعة تكون عناصرها تحت القطر الرئيس أصفارا.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 40 & 0 \\ 0 & 11 & 50 & 66 \\ 0 & 0 & 12 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 31 \end{bmatrix}$$

b. المصفوفة المثلثية السفلية *Lower Triangular Matrix*

هي مصفوفة مربعة تكون عناصرها فوق القطر الرئيس أصفارا.

$$B = \begin{bmatrix} 66 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 77 & 0 & 0 \\ -11 & 15 & 88 & 0 \\ 17 & 8 & 10 & 19 \end{bmatrix}$$

منقول المصفوفة A *The Transpose of Matrix*

لنكن $A = [a_{ij}] \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{cases}$ مصفوفة. نسمي منقول المصفوفة A

ونرمز لها A^T ؛ المصفوفة المعرفة بالصيغة $A^T = [a^T_{ij}] \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$ ، A^T ناتجة عن تبديل الصفوف في A إلى أعمدة في A^T .

يصاغ منقول المصفوفة بـ $a^T_{ij} = a_{ji} \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$

والمصفوفة التالية $A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ منقولتها هي $A^T = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 9 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

المصفوفة المتماثلة A *The Symmetric Matrix*

لنكن $A = [a_{ij}] \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$ مصفوفة مربعة. نسمي A مصفوفة متماثلة

إذا تساوت مع منقولتها A^T . أي كل عنصر ونظيره مع القطر متساويان.

و تصاغ عناصر المصفوفة المتماثلة بـ $a_{ij} = a_{ji} \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$

المصفوفة التالية A متماثلة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ بينما B ليست مصفوفة

متماثلة $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ حيث $b_{13} = 3 \neq b_{31} = 7$.

³ مشروع مجمع اللغة العربية الأردني للرموز العربية والعلمية. 1985م. أ.د أحمد سعيدان
⁴ أ.د عبد المجيد نصير. الشامل في الرياضيات العامة. اربد-الأردن. 1985م.

الحظ أن، كل مصفوفة قطرية هي مصفوفة متماثلة، مثل: المصفوفة

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{الذاتية}$$

(أو (الحيادية في ضرب المصفوفات)

حساب المصفوفات Matrix Arithmetic

تساوي المصفوفات Matrix Equality

تتساوى المصفوفتان A و B إذا تحقق الشرطان التاليان:
 أولاً: إذا كان لهما الحجم نفسه، أي يمتلكان العدد نفسه من الأسطر والأعمدة
 ثانياً: إذا كان كل عنصر في A يساوي نظيره في B .

$$b_{ij} = a_{ij} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{array} \right. \quad \text{و تصاغ على الشكل التالي}$$

Two matrices are equals if

- they have the same number of rows and the same number of columns and
- the corresponding entries in every position are equal.

جمع المصفوفات Matrix Addition

لتكن المصفوفتان A و B من الحجم نفسه ،

$$A = [a_{ij}] \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{array} \right. , B = [b_{ij}] \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{array} \right.$$

تعرف المصفوفة C ناتج جمع A و B ونكتب $C = A + B$ وذلك بجمع العناصر المتناظرة فيهما. وتصاغ على النحو الآتي

$$C = [c_{ij}] \begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

مثال (2): أوجد C ناتج جمع $A+B$ المعرفتين بـ:

$$B = \begin{bmatrix} 11 & 22 & 30 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

الجواب:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 22 & 30 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+11 & 2+22 & 3+30 \\ 0+2 & 4+1 & 5+5 \\ 3+7 & 5+5 & (-2)+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 33 \\ 2 & 5 & 10 \\ 10 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

مثال (3): أوجد C ناتج جمع $A+B$ المعرفتين بـ:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الجواب:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

خوارزمية جمع مصفوفتين *Algorithm Matrix Addition*

Procedure Matrix Addition (A, B : matrices)

for $i := 1$ to m

begin

for $j := 1$ to n

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

end { $C = [c_{ij}]$ is the sum of A and B }

ضرب المصفوفات Matrix Multiplication

لإيجاد حاصل ضرب مصفوفتين، يشترط أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى A مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية B . لنفرض

$$B = [b_{ij}] \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p \end{array} \right. \quad \text{المصفوفتين } A \text{ و } B \text{ معرفتين بـ:}$$

$$A = [a_{ij}] \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{array} \right.$$

$$A * B \quad \text{تعرف المصفوفة } C = [c_{ij}] \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p \end{array} \right. \quad \text{حاصل ضربيهما}$$

أو AB بحيث أن العنصر العام c_{ij} هو ناتج جمع حاصل ضرب عناصر السطر i في عناصر العمود j وتساغ على الشكل التالي

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

مثال (5): أوجد C حاصل ضرب المصفوفتين AB المعرفتين بـ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحظ أن، عدد الأعمدة في المصفوفة A يساوي عدد السطور في المصفوفة B والجواب:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*2+2*1 & 1*1+2*0 \\ 3*2+4*1 & 3*1+4*0 \\ 5*2+6*1 & 5*1+6*0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \\ 16 & 5 \end{bmatrix}$$

ملحوظة: المصفوفة $AB \neq BA$ والمضروب BA غير موجود. والسبب عدم تحقق شرط ضرب مصفوفتين، حيث عدد أعمدة B يختلف عن عدد الصفوف في A .

مثال (6): أوجد C حاصل ضرب المصفوفتين AB المعرفتان بـ:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

الحظ أن عدد الأعمدة في المصفوفة A يساوي عدد السطور في المصفوفة B
الجواب:

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2*2 + 3*6 + (-4)*2 & 2*3 + 3*3 + (-4)*1 \\ 1*2 + 2*6 + 3*2 & 1*3 + 2*3 + 3*1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 + 18 + (-8) & 6 + 9 + (-4) \\ 3 + 12 + 6 & 3 + 6 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 21 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

خوارزمية ضرب مصفوفتين *Algorithm Matrix Multiplication*

Procedure *Matrix Multiplication* (A, B : matrices)

for $i:=1$ to m

begin

for $j:=1$ to n

begin

$$c_{ij} = 0$$

For $k:=1$ to p

$$c_{ij} = c_{ij} + a_{ik} b_{kj}$$

end

end { $C = [c_{ij}]$ is the product of A and B }

مصفوفة الأس *Power of Matrix*

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن A^r المصفوفة المرفوعة للقوة r ، وهي حاصل ضرب A في نفسها عدد راء (r) من المرات.

فعندما تكون A ذات حجم $n \times n$. يكون

$$A^0 = I_n$$

$$A^r = \underbrace{AAA \cdots A}_{r \text{ times}}$$

خصائص حساب المصفوفات *Characteristics of Matrix Arithmetic*

لتكن A و B و C مصفوفات. و لتكن Z_0 المصفوفة الصفرية وليكن x ثابتاً عددياً. فإن خصائص حساب المصفوفات هي:

$$1. (A^T)^T = A$$

$$2. (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$3. (AB)^T = B^T A^T$$

$$A + B = B + A \quad .4$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad .5$$

$$A + Z_0 = Z_0 + A = A \quad .6$$

$$AB \neq BA \quad .7$$

$$(AB)C = A(BC) \quad .8$$

$$A(B + C) = AB + AC \quad .9$$

$$(A + B)C = AC + BC \quad .10$$

$$xA = Ax = [xa_{ij}] \quad .11$$

$$(A^k)^p = A^{k+p} \quad .12$$

المصفوفات البولية Boolean Matrices

المصفوفة البولية هي مصفوفة عناصرها إما صفر وإما واحد وتسمى أيضا بمصفوفة صفر- واحد. وهذا النوع من المصفوفات يستخدم لتمثيل العلاقات وغيرها من التراكيب المتقطعة.

مثال (1): مصفوفات بولية ذات أحجام مختلفة

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و}$$

حساب المصفوفات البولية Boolean Matrices Arithmetic

نستخدم ثلاثة عوامل بولية في حساب المصفوفات صفر- واحد هي:

(a) O عامل الضرب البولي Boolean Product operator

(b) $\vee$ عامل الاتحاد البولي The Join Operator

(c) $\wedge$ عامل التقاطع البولي The Meet Operator

جميع هذه العوامل ثنائية أي تنفذ على زوج من البتات *pairs of bits* (زوج من الأعداد الثنائية). وتصاغ على النحو التالي، مع العلم بأن x, y زوج من الأعداد الثنائية:

$$x \vee y = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 1 \text{ or } y = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad 1. \text{ عامل الاتحاد البولي}$$

$$x \wedge y = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad 2. \text{ عامل التقاطع البولي}$$

$$\begin{aligned} 0 \vee 0 &= 0; & 0 \vee 1 &= 1; & 1 \vee 0 &= 1; & 1 \vee 1 &= 1 \\ 0 \wedge 0 &= 0; & 1 \wedge 0 &= 0; & 0 \wedge 1 &= 0; & 1 \wedge 1 &= 1 \end{aligned} \quad \text{مثال (2):}$$

وإليك تعريف العوامل البولية على المصفوفات.

ضم مصفوفتين صفر- واحد *The Join of two Zero-One Matrices*
 لتكن $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتان بوليتان لهما الحجم نفسه $m \times n$. نعرف $C = [c_{ij}]$ مصفوفة ناتج الضم البولي للمصفوفتين، ونرمز لها بـ $A \vee B$. حيث العنصر c_{ij} ناتج عن ضم عامل الاتحاد لعنصر A مع عنصر B . وتصاغ على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} A \vee B &= C \\ c_{ij} &= a_{ij} \vee b_{ij}; 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

مثال (3): أوجد الضم البولي للمصفوفتين التاليتين:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الجواب: ضم المصفوفتين

$$\begin{aligned} A \vee B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \vee 0 & 1 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = C \end{aligned}$$

لقاء مصفوفتان صفر- واحد *The Meet of two Zero-One Matrices*
 لتكن $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتان بوليتان من حجم $m \times n$. نعرف
 $C = [c_{ij}]$ مصفوفة ناتج اللقاء البولي للمصفوفتين ونرمز لها بـ
 $A \wedge B$. حيث العنصر c_{ij} ناتج عن ضم عامل التقاطع لعنصر A
 مع عنصر B . وتصاغ بـ

$$\begin{aligned} A \wedge B &= C \\ c_{ij} &= a_{ij} \wedge b_{ij}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

مثال (4): أوجد اللقاء البولي للمصفوفتين التاليتين:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الجواب: لقاء المصفوفتين

$$\begin{aligned} A \wedge B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \wedge 0 & 1 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C \end{aligned}$$

الضرب البولي لمصفوفتين صفر- واحد

The Boolean Product of two Zero-One Matrices

لإيجاد حاصل ضرب مصفوفتين يشترط أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى A مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية B .

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة بولية من حجم $m \times n$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفة بولية

$$C = [c_{ij}] \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p \end{array} \right. \quad \text{من حجم } n \times p. \text{ تعرف المصفوفة}$$

مصفوفة حاصل الضرب البولي لهما ونرمز لها بـ $A \circ B$ ، بحيث
 العنصر c_{ij} ناتج اتحاد لتقاطع عناصر السطر i في عناصر العمود
 j . وتصاغ على الشكل التالي:

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj}) \vee \dots \vee (a_{in} \wedge b_{nj})$$

$$= \bigvee_{k=1}^{kon} (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

مثال (5): أوجد C حاصل الضرب البولي للمصفوفتين AOB المعرفتين بـ

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحظ أن عدد الأعمدة في المصفوفة A يساوي عدد السطور في المصفوفة B
الجواب:

$$C = AOB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} O \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\ (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \vee 1 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 1 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ملحوظة: المصفوفة $AB \# BA$ و المضروب BA غير موجود، بسبب عدم تحقق شرط ضرب مصفوفتين. حيث إن عدد أعمدة B يختلف عن عدد الصفوف في A .

مثال (6): أوجد C حاصل الضرب البولي للمصفوفتين AOB المعرفتين بـ:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحظ أن عدد الأعمدة في المصفوفة A يساوي عددا السطور في المصفوفة B

الجواب:

$$\begin{aligned}
 C = AOB &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} O \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \vee 0 \vee 0 & 1 \vee 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

تمارين محلولة Solved exercises

تمرين (1): لنفرض أننا أعطينا المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

- (a) ما العناصر a_{12}, a_{22}, a_{23}
 (b) ما العناصر b_{11}, b_{31}
 (c) ما العناصر c_{13}, c_{23}, c_{33}
 (d) ما عناصر القطر الرئيس في المصفوفة C
 (e) ما عناصر القطر الثانوي في المصفوفة C

الجواب:

- (a) $a_{12} = -2, a_{22} = 1, a_{23} = 2$
 (b) $b_{11} = 3, b_{31} = 4$
 (c) $c_{13} = 4, c_{23} = -1, c_{33} = 8$
 (d) عناصر القطر الرئيس في المصفوفة C هي:
 $c_{11} = 2, c_{22} = 6, c_{33} = 8$
 (e) عناصر القطر الثانوي في المصفوفة C هي:
 $c_{13} = 4, c_{22} = 6, c_{31} = 2$

تمرين (2): لنفرض أننا أعطينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، أوجد A^3 ؟

الجواب: $A^3 = AAA$ نجد أولاً

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ 12 & 37 \end{bmatrix}$$

$$\text{ثم } A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ 12 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 93 \\ 124 & 221 \end{bmatrix} \text{ وهو المطلوب.}$$

تمرين (3): لنفرض أننا أعطينا المصفوفتين التاليتين:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

اثبت أن $(A+B)^T = A^T + B^T$ ؟

الجواب:

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 9 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ ومنه } (A+B)^T = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ ثم}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ ثم } B^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ و من هما}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ إذن } (A+B)^T = A^T + B^T \text{ وهو المطلوب}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ أوجد } A^3 \text{ ثم}$$

استنتج $A^k; k = 4, 5, \dots$ ؟

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \text{ الجواب:}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{bmatrix} \text{ ومنه نستنتج } k = 4, 5, \dots$$

تمرين (5): لتكن لدينا المصفوفتان التاليتان $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد $A \wedge B$ و $A \vee B$ و $A \circ B$ ؟

الجواب:

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \circ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرين (6): لتكن لدينا المصفوفات التالية :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد 1- $(A \vee B) \circ C$ ؟

2- $(A \wedge B) \circ C$ ؟

الجواب:

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad -1$$

$$(A \vee B) \circ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad -2$$

$$(A \wedge B) \circ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرين (7): اكتب خوارزمية لجمع عناصر القطر الرئيس للمصفوفة

$$A = [a_{ij}] \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

الجواب: خوارزمية جمع عناصر القطر الرئيس

Algorithm Matrix Summation of main diagonal elements

Procedure Main Diagonal Sum (*A*: matrix);

Sum := 0;

for *i* := 1 **to** *n*

Sum := *Sum* + *a_{ii}*;

{*Sum of a_{ii} elements of A*}

تمارين غير محلولة Unsolved exercises

تمرين (1): بين المصفوفة القطرية من المصفوفات التالية:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ و}$$

تمرين (2): ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } D = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ و}$$

أوجد ما يلي:

(a) $C + D$

(b) AB

(c) BA

(d) $CA + DA$

(e) $(C + D)^T$

تمرين (3): ليكن لدينا المصفوفتان التاليتان:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \text{ أثبت أن } AB \neq BA$$

تمرين (4): إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ أثبت أن $A^2 = I_2$

تمرين (5): ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد ما يلي:

$$(A \vee B) \text{OC} \quad (a)$$

$$(A \wedge B) \text{OC} \quad (b)$$

تمرين (6): ليكن لدينا المصفوفة التالية $A = [a_{ij}]$ $\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{array} \right.$

(a) أكتب خوارزمية لجمع عناصر القطر الثانوي للمصفوفة

(تلميح: $\text{if } (i + j) = (n - 1) \text{ then } \text{sum} := \text{sum} + a_{ij}$ Hint)

(b) أكتب خوارزمية لجمع عناصر المصفوفة المثلثية العليا

(تلميح: $\text{if } i \leq j \text{ then } \text{sum} := \text{sum} + a_{ij}$ Hint)

(c) أكتب خوارزمية لجمع عناصر المصفوفة المثلثية السفلى

(تلميح: $\text{if } i \geq j \text{ then } \text{sum} := \text{sum} + a_{ij}$ Hint)

Terminology المصطلحات العلمية

المصطلح العربي	English Term
المتتالية	Sequence
صيغ المتتالية	Sequence Formulas
الصيغة البسيطة	Explicit Formulas
صيغة المعاودة	Recursive Formula
المتسلسلات	Series
دليل الجمع	Summation Index
الحد الأدنى	Lower Limit
الحد الأعلى	Upper Limit
جمع r من الحدود الأولى للمتتالية	The summation of the first r terms of f_i
ضرب r من الحدود الأولى للمتتالية	The Product of the first r terms of f_i
جمع الجمع	Double Summation
متسلسلة المقرب	Telescoping Series
المصفوفات	Matrices
شبكة	Grid
صفوف	Rows
أعمدة	Columns
حجم المصفوفة	Dimension Matrix

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
أنواع المصفوفات	The Matrices Types
المصفوفة الصفرية	Zeros Matrix
المصفوفة المربعة	Square Matrix
القطر الرئيس	Main Diagonal
المصفوفة القطرية	Diagonal Matrix
المصفوفة الذاتية (الحيادية)	Identity Matrix
المصفوفة المثلثية	Triangular Matrix
المصفوفة المثلثية العلوية	Upper Triangular Matrix
المصفوفة المثلثية السفلية	Lower Triangular Matrix
منقول المصفوفة	The Transpose of Matrix
المصفوفة المتماثلة	The Symmetric Matrix
حساب المصفوفات	Matrix Arithmetic
تساوي المصفوفات	Matrix Equality
جمع المصفوفات	Matrix Addition
خوارزمية جمع مصفوفتين	Algorithm Matrix Addition
ضرب مصفوفتين	Matrix Multiplication
خوارزمية ضرب مصفوفتين	Algorithm Matrix Multiplication
مصفوفة الأس	Power of Matrix

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
خصائص حساب المصفوفات	Characteristics of Matrix Arithmetic
المصفوفات البولية أو (صفر - واحد)	Boolean Matrices
حساب المصفوفات البولية	Boolean Matrices Arithmetic
عامل الضرب البولي	Boolean Product operator
عامل الاتحاد البولي	The Join Operator
عامل التقاطع البولي	The Meet Operator
ضم مصفوفتين صفر - واحد	The Join of two Zero-One Matrices
لقاء مصفوفتان صفر - واحد	The Meet of two Zero-One Matrices
الضرب البولي لمصفوفتين صفر - واحد	The Boolean Product of two Zero-One Matrices

الفصل الخامس

الرياضيات التوافقية¹

Combinatorics

¹ قاموس المواكب. الأستاذ ناصر الشوباصي. سلسلة الرضا للمعلومات. دار الرضا للنشر. دمشق. 2000م.

168.....	الفصل الخامس
168.....	الرياضيات التوافقية
168.....	Combinatorics
170.....	اقتران المضروب The Factorial Function
170.....	قاعدة (1)
170.....	قاعدة (2)
171.....	معاملات ذات الحدين Binomial Coefficients
172.....	قاعدة (3)
172.....	قاعدة (4)
173.....	قاعدة (5)
174.....	نظرية ذات الحدين Binomial Theorem
176.....	المبدأ الأساسي للعد Fundamental Principle of Counting
	قاعدة تعميم المبدأ الأساسي للعد Generalization of Fundamental
177.....	Principle of Counting
178.....	التباديل Permutations
181.....	التوافيق Combinations
183.....	نظرية 1 Theorem One
184.....	متساوية فاندروموني Vandermonde's Identity
184.....	مخططات الشجرة Tree Diagrams
185.....	تباديل لمجموعات مكررة فيها بعض العناصر
186.....	قاعدة (6)
187.....	التباديل والتوافيق في حالة السحب مع الإعادة
187.....	Permutations and Combinations with repetitions
188.....	تمارين محلولة Solved Exercises
192.....	تمارين غير محلولة Unsolved Exercises
193.....	المصطلحات العلمية Terminology

اقتران المضروب The Factorial Function

لأهمية اقتران مضروب n في طرق العد نعيد كتابة تعريفه هنا مرة ثانية وهو لكل عدد طبيعي، نرمز له بـ:

$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * (n-1) * n$$

وهذا يدل على أن حساب مضروب $n!$ يتم بضرب جميع الأعداد الطبيعية بين 1 و n وفي الحالة الخاصة بقيمة الصفر، يعرف مضروب الصفر بـ $0! = 1$. وكذلك عرفنا سابقا اقتران المعاودة لمضروب n بالصيغة التالية:

$0! = 1$ $1! = 1$	القيم الاستهلالية

وخاصية المعاودة $n! = n * (n-1)!$ لكل $n > 1$

مثال (1): احسب $3!$ ؟

الجواب: $3! = 3 * 2! = 3 * 2 * 1! = 3 * 2 * 1 = 6$

قاعدة (1)

$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$	لكل عدد طبيعي n ، فإن:

مثال (2): احسب قيمة $\frac{4!}{3!}$ ؟ الحل: $\frac{4!}{3!} = \frac{4 * 3!}{3!} = (3+1) = 4$

قاعدة (2)

$\frac{(n+m)!}{n!} = \prod_{i=n+1}^{i=n+m} i$	تعميم قاعدة (1):

$$\frac{10!}{7!} = \prod_{i=8}^{10} i = 8 * 9 * 10 = 720 \quad \text{الحل:}$$

مثال (3): احسب قيمة $\frac{10!}{7!}$ ؟

تمارين (1): احسب ما يلي:

(a) $3!$

(b) $1!$

(c) $6!$

(d) $7!$

(e) $\frac{20!}{17!}$

(f) $\frac{150!}{147!}$

(g) $\frac{\binom{21!}{20!}}{19!}$

معاملات ذات الحدين Binomial Coefficients

معامل ذات الحدين $\binom{n}{r}$ والذي يقرأ " نون اختيار r , n choose r " للأعداد

الطبيعية n و r شريطة $r \leq n$ ، يكتب بالصيغة التالية:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! * r!}$$

بشكل أساسي معامل ذات الحدين $\binom{n}{r}$ يقرر عدد توافيق r راء أشياء مأخوذة من n نون أشياء.

مثال (1): اشترت طالبة ثلاثة قمصان ألوانها أسود وأبيض وأزهر.

فبكم طريقة ترتدي الطالبة قميصين في يوم واحد؟

الجواب: إن اختيارات الطالبة لقميصين في يوم واحد يمكن تلخيصها بالاختيارات التالية؟

أ- أسود و أبيض

ب- أزهر وأسود

ت- أزهر وأبيض

وفي مثل هذه الحالة فإن معامل ذات الحدين يحسب اختيارات الطالبة على النحو الآتي: " كم عدد توافيق قميصين مأخوذة من ثلاثة قمصان "؟

$$\cdot \frac{3!}{(3-2)!*2!} = \frac{6}{2} = 3 \text{ أي } \binom{3}{2} \text{ هي}$$

و لو قررت الطالبة ارتداء قميص واحد تختاره من بين ثلاثة قمصان فإن معامل ذات الحدين يحسب اختيارات الطالبة على النحو الآتي:
" كم عدد توافيق قميص مأخوذ من ثلاثة قمصان؟"

$$\cdot \binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)!*1!} = \frac{6}{2*1} = 3 \text{ أي } \binom{3}{1} \text{ هي}$$

قاعدة (3)

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \text{لكل عدد طبيعي } n, \text{ فإن:}$$

مثال (2): في المثال (1) السابق. فبكم طريقة ترتدي الطالبة القمصان الثلاثة في يوم واحد؟

الجواب: إن اختيارات الطالبة لثلاثة قمصان مأخوذة من قمصانها الثلاثة هي " أسود و أبيض و أزهر "، وفي مثل هذه الحالة فإن معامل ذات الحدين يحسب اختيارات الطالبة على النحو الآتي:
" كم عدد توافيق ثلاثة قمصان مأخوذة من ثلاثة قمصان؟"

$$\cdot \binom{3}{3} = 1 \text{ أي للقاعدة 3}$$

قاعدة (4)

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{لكل عدد طبيعي } n, \text{ فإن:}$$

مثال (3): في المثال (1) السابق. فبكم طريقة ترتدي الطالبة صفر قميص من قمصانها الثلاثة في يوم واحد؟

الجواب: إن اختيار الطالبة لصفر قميص مأخوذ من قمصانها الثلاثة هو احتمال واحد، أي عدم لبسها أياً من قمصانها الأسود و الأبيض و الأزهر. و في مثل هذه الحالة فإن معامل ذات الحدين يحسب اختيارات الطالبة على النحو الآتي:

" كم عدد توافيق صفر قميص مأخوذ من ثلاثة قمصان؟"

$$\cdot \binom{3}{0} = 1 \text{ أي للقاعدة 4}$$

قاعدة (5)

متساوية باسكال Pascal's Identity

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \text{ فإن } n \geq 1 \text{ لكل عدد طبيعي}$$

مثال (4): افرض أن $n = 5$ و $r = 3$ أثبت أن $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$

الجواب: حساب الطرف الأيسر للمتساوية بقانون معامل ذات الحدين هو

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{12} = 10$$

أما حساب الطرف الأيمن للمتساوية بقانون معامل ذات الحدين فهو

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} + \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{24}{4} + \frac{24}{6} = 6 + 4 = 10$$

إذن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$ وهو

المطلوب.

تمارين (1) احسب ما يلي:

$$\binom{3}{3} \text{ (h)}$$

$$\binom{0}{0} \text{ (i)}$$

$$\binom{6}{4} \text{ (j)}$$

$$\binom{6}{5} \text{ (k)}$$

$$\binom{6}{2} \text{ (l)}$$

$$\binom{100}{99} \text{ (m)}$$

تمارين (2) أثبت صحة القاعدة (5) والقاعدة (4) والقاعدة (3)؟

نظرية ذات الحدين Binomial Theorem

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r \text{ فإن } n \in N \text{ و } x \in R, y \in R \text{ إذا كانت}$$

شاهدنا هنا أن معاملات الحدود لنظرية ذات الحدين هي توافق و هذه المعاملات هي قيم مثلث باسكال² وهي تطبيق مباشر للقاعدة (5). أي أن كل قيمة في مثلث باسكال *Pascal's Triangle* هي ناتج جمع القيمتين الواقعتين فوقها. وإليك مثلث باسكال أو عوامل مفكوك $(x+y)^n$.

مثلث باسكال

							$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$					
						$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$					
						$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$				
						$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$			
						$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$		
						$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$	
						$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$
1												
1	1											
1	2	1										
1	3	3	1									
1	4	6	4	1								
1	5	10	10	5	1							
1	6	15	20	15	6	1						
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}$

متساوية

هاسكال

$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

السطر الأول يمثل $n=0$ ، والسطر الثاني يمثل $n=1$ ، والسطر الثالث يمثل $n=2$. زيادة على أن العنصر الأول من كل سطر يمثل $r=0$ ، والعنصر الثاني من كل سطر يمثل $r=1$ ، والعنصر الثالث من كل سطر يمثل $r=2$ ، وهكذا. وعليه فإن القيمة الأولى من الجدول هي "عدد توافق صفر شيء مأخوذ من صفر أشياء".

بينما مدخلات السطر الثاني من الجدول تمثل "عدد توافق صفر شيء مأخوذ من شيء واحد" ثم "عدد توافق واحد شيء مأخوذ من شيء واحد".

² (1623-1662) Blaise Pascal عالم رياضيات فرنسي ، ومكتشف في الهندسة التحليلية ومخترع آلة حساب باسكال وعمره 18 عام. أسس مع زميله العالم الفرنسي Fermat نظرية الاحتمالات. اكتشف مثلثه عام 1654م.

مثال (1): فك تعبير ذات الحدين التالي مستخدماً نظرية ذات الحدين (مثلث باسكال): $(x + y)^4$ ؟

الحل:

$$\begin{aligned}(x + y)^4 &= \sum_{r=0}^4 \binom{4}{r} x^{4-r} y^r \\&= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y^1 + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x^1 y^3 + \binom{4}{4} y^4 \\&= x^4 + 4x^3 y^1 + 6x^2 y^2 + 4x^1 y^3 + y^4\end{aligned}$$

مثال (2): ما معامل الحد $x^{12}y^{13}$ في تعبير ذات الحدين التالي: $(x + y)^{25}$ ؟

$$\text{الحل: } \binom{25}{13} = \frac{25!}{13!12!} = 5,200,300$$

مثال (3): ما معامل الحد $x^{12}y^{13}$ في تعبير ذات الحدين التالي: $(2x - 3y)^{25}$ ؟

$$\text{الحل: } (2x - 3y)^{25} = \sum_{r=0}^{25} \binom{25}{r} (2x)^{25-r} (-3y)^r \text{ وبالتالي}$$

$$\binom{25}{13} 2^{12} (-3)^{13} = -\frac{25!}{13!12!} 2^{12} 3^{13} \text{ هو المعامل المطلوب}$$

تمارين (1): بالرجوع إلى مثلث باسكال أوجد ما يلي:

$$\binom{6}{5}, \binom{6}{4}, \binom{6}{3}, \binom{6}{2}$$

تمارين (2): بالرجوع إلى مثلث باسكال أوجد قيم المدخلات التالية:

$$\text{أ- } n = 3, r = 2$$

$$\text{ب- } n = 5, r = 3$$

$$\text{ت- } n = 4, r = 2$$

$$\text{ث- } n = 6, r = 4$$

المبدأ الأساسي للعد Fundamental Principle of Counting

يفترض مبدأ العد الأساسي أن هناك سلسلة من الأحداث $events$ يمكن وقوعها بعدة طرق مختلفة. فمثلاً لو كان لدينا ثلاثة أحداث أسماء متغيراتها e_1, e_2, e_3 . فإذا كان، حدوث e_1 بـ n_1 من الطرق المختلفة، وكان يتبع e_1 في التنفيذ الحادث الثاني e_2 بـ n_2 من الطرق المختلفة، ويتبع الحادث الثاني الحادث الثالث e_3 بـ n_3 من الطرق المختلفة. فإن عدد طرق تنفيذ سلسلة الأحداث

$$e_1 e_2 e_3 \text{ معاً هي } n_1 * n_2 * n_3$$

مثال (1): ما عدد كلمات السر $Passwords$ التي يمكن تكوينها لبرنامج حاسوب إذا علمت أن كلمة السر تتألف من ثلاثة رموز؛ حيث تبدأ الكلمة بحرف لاتيني ثم نتبعه بالأرقام العربية في مواقع الرموز الأخرى؟

الحل:

كلمة السر تتكون من ثلاثة رموز. وكل رمز يشكل حادثاً مستقلاً عن الآخر في الحدوث وهن:

الحادث الأول e_1 اختيار حرف لاتيني من بين 26 حرفاً. (عدد أحرف الهجاء اللاتينية هو $n_1 = 26$)

الحادث الثاني e_2 اختيار رقم عربي من بين 10 أرقام. (عدد الأرقام العربية هو $n_2 = 10$)

الحادث الثالث e_3 اختيار رقم عربي من بين 10 أرقام. (عدد الأرقام العربية هو $n_3 = 10$)

إذن كلمة السر هي سلسلة الأحداث $e_1 e_2 e_3$ معاً وعدد طرق تنفيذه هي

$$n_1 * n_2 * n_3 \text{ و حسابها } 26 * 10 * 10 = 2600$$

مثال (2): إذا قمنا برمي حجر النرد e_1 . ثم أتبعناه برمي قطعة نقود e_2 . ثم أتبعناه بسحب ورقة e_3 من حزمة لعبة ورق. فبكم طريقة يمكن تنفيذ

الحادث $e_1 e_2 e_3$ ؟

الحل: الحادث الأول e_1 ظهور رقم عربي من بين ستة أرقام. (عدد أوجه حجر

النرد هو $n_1 = 6$). والحادث الثاني e_2 ظهور وجه من وجهي قطعة النقود.

(صورة وكتابة $n_2 = 2$). والحادث الثالث e_3 سحب ورقة لعب من حزمة

ورق اللعب. (عدد الورق في الحزمة هو $n_3 = 52$). إذن كلمة السر هي

سلسلة الأحداث $e_1 e_2 e_3$ معاً وعدد طرق تنفيذه هي $n_1 * n_2 * n_3$ و

$$\text{حسابها : } n_1 * n_2 * n_3 = 6 * 2 * 52 = 624$$

ملاحظة: لابد أن الطالب لاحظ الشبه الكبير بين المبدأ الأساسي للعد واحتساب

عدد العناصر في مجموعة الضرب الديكارتي $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ التي عدد عناصرها $|A \times B| = |A| \times |B|$ وبشكل عام فإن عدد عناصر

المجموعة $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ هو $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|$

حيث أن عدد عناصر المجموعة يمكن اعتباره هنا عدد الطرق المختلفة لوقوع الحادث e_i . إذن نستطيع تعميم المبدأ الأساسي للعد على النحو الآتي:

قاعدة تعميم المبدأ الأساسي للعد *Generalization of Fundamental Principle of Counting*

إذا كان لدينا الأحداث التي أسماء متغيراتها $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$. وإذا كان تنفيذ e_1 بـ n_1 من الطرق المختلفة، وكان يتبع e_1 في التنفيذ الحادث الثاني e_2 بـ n_2 من الطرق المختلفة، ويتبع الحادث الثاني الحادث الثالث e_3 بـ n_3 من الطرق المختلفة وهكذا حتى وقوع الحادث e_k بـ n_k من الطرق المختلفة. فإن عدد طرق تنفيذ سلسلة الأحداث $e_1 e_2 e_3 \dots e_k$ معاً هي $n_1 * n_2 * n_3 * \dots * n_k$.

مثال (4): كم عدداً فردياً مكوناً من أربعة منازل مختلفة يمكننا تكوينه من الأرقام التالية: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7؟

الحل: لتكوين عددٍ فردي يجب أن تكون منزلة الآحاد رقماً فردياً أي يتم اختيار منزلة الآحاد e_1 بأربع طرق n_1 من بين الأرقام: 1, 3, 5, 7. ثم يتم اختيار منزلة العشرات e_2 بست طرق n_2 . ثم يتم اختيار منزلة المئات e_3 بخمس طرق n_3 . ثم يتم اختيار منزلة الآلاف e_4 بأربع طرق n_4 وعليه فإن عدد الأعداد الفردية $e_1 e_2 e_3 e_4$ التي يمكن تكوينها هو $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4$ أي $4.6.5.4 = 480$.

تمارين (1): تقوم كافتيريا الجامعة ببيع سندويشات للطلبة بحيث يختار الطالب أحد أنواع الخبز الثلاثة: أسود، أبيض أو خبز مع سمسم، مع إحدى الحشوات المقترحة: بيض، دجاج أو سمك التونا. فكم نوعاً مختلفاً من السندويشات يستطيع الطالب شراءها؟

تمارين (2): تقوم الجامعة بعقد مسابقة بين طلبتها الذكور من لاعبي التنس وعدددهم 15 طالبا وكذلك عقد مسابقة للاعبات التنس وعدددهن 15 طالبة. ما عدد توليفات الفائزة بالمسابقة لطلبة الجامعة؟

تمارين (3): ما عدد كلمات السر التي يمكن تكوينها لمستخدمي البريد الالكتروني في الجامعة إذا علمت أن كلمة السر تتألف من سلسلة عشرة رموز عشوائية. تبدأ الكلمة بحرف لاتيني ثم نتبعها الرموز الأخرى بحيث تبدأ إما بالأرقام العربية أو بإحدى الحروف اللاتينية الصغيرة أو الكبيرة؟

التباديل Permutations

في المبدأ الأساسي للعد كنا مهتمين بعدد الطرق المختلفة لوقوع سلسلة أحداث مستقلة في الحدوث عن بعضها بعض. حيث افترض الاستقلالية لوقوع الحادث عن الآخر وهذه الفرضية ليست ضرورية عند التعامل مع التباديل. بشكل رئيسي ينحصر الاهتمام بعدد المرات التي يمكن فيها ترتيب بعض الأشياء ذات الصلة أو الأحداث.

لنفرض أن لدينا المجموعة $A = \{a, b, c\}$ ذات العناصر الثلاثة. لنفكر ملياً في كيفية ترتيب عناصر المجموعة A . فالاحتمالات التالية تظهر للوجود هذه ستة متاليات للعناصر

$$3 * 2 * 1 = 6 \text{ arrangements}$$

$$\text{choices} \begin{cases} a \begin{cases} b\{c & : a, b, c \\ c\{b & : a, c, b \end{cases} \\ b \begin{cases} a\{c & : b, a, c \\ c\{a & : b, c, a \end{cases} \\ c \begin{cases} a\{b & : c, a, b \\ b\{a & : c, b, a \end{cases} \end{cases}$$

الحظ أن مبدأ الاستقلالية في الحدوث غير موجود. فمثلاً إذا اخترنا أن نبدأ الترتيب بالعنصر b مثلاً فهذا يعني أن العنصر الثاني في الترتيب لا يمكن أن يكون b وكذلك العنصر الثالث في الترتيب لا يمكن أن يكون b . ومنه فإن عدد الاحتمالات المختلفة لترتيب عناصر المجموعة A هو: $3! = 3 * 2 * 1 = 6$ وأي ترتيب arrangement لعناصر المجموعة

A يسمى تباديل permutation.

بشكل عام يمكننا تعميم النتيجة السابقة على النحو الآتي:

إذا أعطينا مجموعة عدد عناصرها n . فالعنصر الأول في التباديل يمكن اختياره من n من العناصر. والعنصر الثاني في التباديل يمكن اختياره من $(n-1)$ من العناصر. والعنصر الثالث يمكن اختياره من $(n-2)$ من العناصر. وهكذا نستمر. فالعنصر r في التباديل يمكن اختياره من $(n-r-1)$ العناصر. إذن العدد الكلي للتباديل يعطى بالصيغة التالية:

$$n * (n-1) * (n-2) * \dots * (n-r-1) * \dots * 3 * 2 * 1 = n!$$

وبناء عليه يكون عدد التباديل لـ n من العناصر هو مضروب n أي $(n!)$.

أما تباديل n من العناصر مأخوذة r عنصر في المرة الواحدة وبكلام آخر تباديل r عنصر مأخوذة من n عناصر فهي تدعى "راء تباديل r -Permutation". وتكتب بالصيغة $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ وهو عدد الطرق المختلفة (تباديل) التي يتم بها ترتيب n من العناصر مأخوذة r عنصر في كل مرة.

مثال (1): إذا كان لدينا عشرة طيور مختلفة و ستة صناديق فارغة كلاً منها يتسع لطائر واحد. فبكم طريقة مختلفة يمكننا أن نملأ الصناديق بالطيور؟

الحل: عدد التباديل لوضع عشرة طيور في ستة صناديق في كل مرة

$$P(10,6) = \frac{10!}{(10-6)!} \text{ هو}$$

$$P(10,6) = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200 \text{ ويساوي}$$

مثال (2): كم كلمة عدد حروفها خمسة يمكن تكوينها من بين أحرف كلمتي "تراكيب متقطعة"؟

الحل: عدد حروف "تراكيب متقطعة" هو 12 حرفاً وعليه فإن عدد الكلمات المختلفة المؤلفة من خمسة حروف التي يمكن تكوينها من بين 12 حرفاً

$$P(12,5) = \frac{12!}{(12-5)!} \text{ هو}$$

$$P(12,5) = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95040 \text{ ويساوي}$$

مثال (3): كم اقتران واحد- لواحد يمكن تعريفه من $A = \{a, b, c\}$ إلى $B = \{5, 7, 10, 13, 16, 24, 31\}$ ؟

الحل: عدد الاقترانات واحد- لواحد المختلفة هو عدد تباديل 7 عناصر مأخوذة 3 عناصر في المرة الواحدة.

$$P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} \text{ أي ويساوي}$$

$$P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

تمارين (1): ما هو عدد الطرق المختلفة التي يمكن أن ترتب فيها الأحرف

$$A, B, C, D, E, F$$

تمارين (2): كم كلمة عدد حروفها اثنان يمكن تكوينها من بين الأحرف

$$A, B, C, D, E, F$$

تمارين (3): كم كلمة عدد حروفها أربعة يمكن تكوينها من بين الأحرف

$$A, B, C, D, E, F$$

تمارين (4): عدد طلاب مجلس طلبة كلية علم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات

سبعة طلاب. فبكم طريقة يمكنهم اختيار ثلاثة طلاب بحيث يكون

أحدهم رئيساً والآخر نائباً للرئيس والثالث أميناً لسر المجلس؟

تمارين (5): أوجد قيمة ما يلي:

$$P(4,3) \text{ (a)}$$

$$P(10,3) \text{ (b)}$$

$$P(n,n) \text{ (c)}$$

$$P(8,4) \text{ (d)}$$

$$P(10,0) \text{ (e)}$$

$$P(n,r) \text{ (f)}$$

تمارين (6): أوجد قيمة n إذا كانت $P(n,2) = 20$ ؟

تمارين (7): رشح 15 طالباً أنفسهم للفوز بمقاعد مجلس طلبة كلية علم

الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات التي عددها سبعة مقاعد. بكم طريقة

يمكن تشكيل قوائم الأسماء الفائزة بمقاعد مجلس الطلبة؟

التوافيق Combinations

لا بد من التنويه على أنه عند تشكيل تبديل عناصر المجموعة $A = \{a, b, c\}$ التي عددها ستة تبديل، كان الترتيب للعناصر مهماً والتكرار مسموحاً به. لكن في تشكيل توافيق عناصر المجموعة A الذي هو اختيار للعناصر حيث يكون التكرار ممنوعاً، والترتيب غير مهم.

عدد توافيق المجموعة A وكل توافقية مكونة من ثلاثة عناصر نحصل المجموعة A نفسها أي توافقية واحدة.

تذكر الترتيب غير مهم والتكرار ممنوع. توافيق العناصر هي

$$A = \{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$$

نعرف توافيق r عناصر مأخوذة من n عنصر r -combination، بأي مجموعة جزئية عدد عناصرها r مأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n . ونرمز له $C(n, r)$. ويعرف قانوناً بالصيغة التالية

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

r عنصر في المرة الواحدة هو معامل ذات الحدين نفسه.

An r -combination of a set of n objects, denoted $C(n, r)$, is any subset of r elements of a set of n objects. $C(n, r)$ is defined in the following way

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال (1): لتكن لدينا المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، والمطلوب إيجاد كل التوافيق الممكن تكوينها من عناصر A من مأخوذة ثلاثة عناصر بالوقت نفسه؟

$$\text{الحل: عدد التوافيق هو } C(4, 3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4 \text{ وهي:}$$

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, A_2 = \{1, 2, 4\}, A_3 = \{1, 3, 4\}, A_4 = \{2, 3, 4\}$$

مثال (2): بكم طريقة يمكن سحب خمس أوراق من أوراق حزمة لعب الورق؟
الحل: عدد طرق سحب الورقة هو

$$C(52, 5) = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52!}{5! 47!} =$$

$$\frac{52 * 51 * 50 * 49 * 48}{1 * 2 * 3 * 4 * 5} = 2598960$$

مثال (3): كم كلمة سر لنظام حاسوب مؤلفة من أربعة رموز يمكن تشكيلها إذا علمت أن الرمز الأول يتم اختياره من المجموعة $A = \{A, B, C, C, D, E, F, G, H\}$ ويتم اختيار الرموز الثلاثة المتبقية من الأحرف الإنجليزية الصغيرة أو الكبيرة أو من الأرقام العربية؟

الحل: نطبق مبدأ العد الأساسي:

الحادث الأول e_1 اختيار رمز هو حرف من بين 9 حروف وعليه

$$n_1 = C(9,1) = \binom{9}{1} = \frac{9!}{1!(9-1)!} = 9$$

الحادث الثاني e_2 اختيار رمز من بين 26 حرفا لاتينيا كبيرا أو من بين 26 حرفا لاتينيا صغيرا أو من بين 10 أرقام عربية. ومنه

$$n_2 = 10 + 26 + 26 = 62$$

الحادث الثالث e_3 هو شبيه للحادث الثاني و منه $n_3 = 10 + 26 + 26 = 62$

الحادث الرابع e_4 هو شبيه للحادث الثاني و الثالث و منه

$$n_4 = 10 + 26 + 26 = 62$$

إذن الحادث $e_1 e_2 e_3 e_4$ عدد الطرق المحتملة لحدوثه

$$n_1 * n_2 * n_3 * n_4 = 9 * 62 * 62 * 62 = 2144952 \text{ هو}$$

مثال (4): بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من سبعة أشخاص بحيث تتكون كل لجنة من أربعة رجال من أصل 20 رجلا وثلاثة نساء من أصل 20 امرأة؟

الحل: نطبق مبدأ العد الأساسي حيث

الحادث الأول e_1 اختيار 4 رجال من بين 30 رجلا، عدد الاختيارات هو

$$n_1 = C(30,4) = \frac{30!}{4!(30-4)!} = \frac{30!}{4! 26!} = 27405$$

والحادث الثاني e_2 اختيار 3 نساء من بين 20 امرأة، عدد الاختيارات هو

$$n_2 = C(20,3) = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20!}{3! 17!} = 1140$$

إذن الحادث $e_1 e_2$ عدد الطرق المحتملة لاختيار لجنة من سبعة أشخاص (رجال و 3 نساء) هو

$$n_1 * n_2 = C(30,4) * C(20,3) = 27405 * 1140 = 31\ 241\ 700$$

نظرية 1 Theorem One

لتكن n عدداً طبيعياً موجباً إذن $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$ وهو عدد المجموعات الجزئية لمجموعة مكونة من n عنصر.

البرهان: مجموعة مكونة من عدد n من العناصر لديها 2^n مجموعة جزئية. كل مجموعة جزئية إما أن تكون مكونة من صفر عنصر أو مكونة من عنصر واحد أو مكونة من عنصرين وهكذا حتى نصل إلى المجموعة نفسها كآخر مجموعة جزئية تتألف من n من العناصر. و كل مجموعة جزئية هي توافقية وعدد المجموعات الجزئية المكونة من

$$r \text{ راء عناصر هو } C(n, r) = \binom{n}{r}$$

- عدد المجموعات الجزئية المكونة من صفر عنصر: $C(n, 0)$
- عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصر واحد: $C(n, 1)$
- عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين: $C(n, 2)$
-
- عدد المجموعات الجزئية المكونة من r راء عناصر: $C(n, r)$
-
- عدد المجموعات الجزئية المكونة من n نون عناصر: $C(n, n)$

ومنه فإن عدد المجموعات الجزئية الكلي يساوي $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}$ أي 2^n . لماذا

يساوي مجموعها 2^n ؟ يمكن احتسابه باستخدام اقتران الانتماء، والمبدأ الأساسي للعد. نذكر بتعريف اقتران الانتماء: إذا كانت X مجموعة وكانت $A \subset X$ فإنه يوجد اقتران، يميز انتماء عناصر X للمجموعة الجزئية A يرمز له f_A ويعرف بـ

$$f_A : X \rightarrow \{0, 1\} ; x \rightarrow f_A(x) ; f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

كيفية احتساب العدد الكلي للمجموعات الجزئية موضح بالمخطط التالي:

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad r \quad \dots \quad n$	
$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_r \quad \dots \quad x_n$	$\Leftarrow \text{Elements of } X$
$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 1$	
$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0$	$\Leftarrow \text{Choices of } f_A(x_r)$
$2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad \dots \quad 2 \quad \dots \quad 2$	$\Leftarrow 2 \times 2 \times \dots \times 2 \text{ } n \text{ times} = 2^n$

متساوية فاندروموني³ Vandermonde's Identity

لتكن m, n, r أعداد صحيحة موجبة بحيث $r \leq m$ and $r \leq n$ عندئذ:

$$C(m+n, r) = \sum_{k=0}^{r} C(m, r-k)C(n, k)$$

يترك إثبات متساوية فاندروموني للطالب كتمرين مع علمه بوجود مجموعتين عدد عناصر الأولى m وعدد عناصر الثانية n ويقوم باحتساب المجموعات الجزئية المكونة من اتحادهما بحيث يأخذ من المجموعة الأولى k عنصر ومن المجموعة الثانية $n-k$ عنصر. وهذا يحدث في $C(m, r-k)C(n, k)$ عدد طريقة مختلفة. (تذكر مثال اختيار لجنة من سبعة أشخاص تشكل من 3 نساء وأربعة رجال).

مثال (1): تطبيق لمتساوية فاندروموني وبرهان لها معاً:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)$$

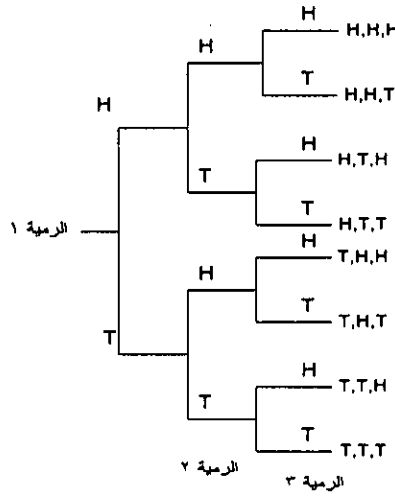
مثال (2): تطبيق مباشر من مثال (1) السابق

$$((-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n, k) = 0$$

مخططات الشجرة Tree Diagrams

الشجرة: كما نشاهدها عبارة عن مجموعة من الأغصان تنبثق من ساق واحدة بحيث لا تلتقي الأغصان معاً وتتجه أغصانها من الأسفل إلى الأعلى. و نستخدم مخطط الشجرة كرسـم بياني لأنه يساعدنا على التعداد بروية العينين لجميع الاحتمالات الممكنة لوقوع أحداث متتالية. و نسبة لهذا الهيكل الشجري، نعرف مخطط الشجرة: برسم بياني مكون من مجموعة من الخطوط المستقيمة (فروع)، تنبثق من خط واحد وخطوط مستقيمة أخرى تنبثق من نهاية الفروع، وهكذا بحيث لا تلتقي الخطوط معاً لتشكل دائرة. و في حالة استخدام المخطط الشجري في العد، نعد الفرع ممثلاً لاختيار محتمل، وتكون النتيجة النهائية للعد هو عدد نهايات الفروع التي لا تنبثق عنها فروع أخرى (نسمي ورقة نهاية كل فرع) والمخطط التالي يبين النتائج الثماني لرمي قطعة نقود ثلاث مرات.

³ (1735-1796) Alexandre-Theophile Vandermonde: أهم أعماله في الرياضيات هي أربعة أوراق قام بنشرها في 1771-1772م. حيث حوت على مساهمته في جذور المعادلات ونظرية المحددات وحلولة لمسألة knight's tour. وعمل في صناعة الفولاذ وشارك في الثورة الفرنسية وشغل عدة وظائف في الحكومة.



تمارين (1): ارسم مخطط شجرة لخيوط من الأرقام الثنائية طوله أربع بتات

بحيث لا يتعاقب في الخيط البت 1 مرتين؟

تمارين (2): ارسم مخطط شجرة مبينا فيه نتائج رمي قطعة نقد مرتين؟

تمارين (3): ارسم مخطط شجرة مبينا فيه عدد الأرقام الممكن تكوينها من

المجموعة $\{2, 4, 6\}$ ؟ (لا يسمح بالتكرار)

تباديل لمجموعات مكررة فيها بعض العناصر

مثال توضيحي: كم سلسلة حرفية يمكن تشكيلها من كلمة كتاكيت؟

لاحظ أن كلمة كتاكيت تتكون من 6 أحرف حيث يتكرر:

- الحرف [ك] مرتين

- الحرف [ت] مرتين

- الحرف [ا] مرة واحدة و

- الحرف [ي] مرة واحدة

انظر الحرف [ك] يحتل موقعين من أصل ستة مواقع في الكلمة أي $C(6,2)$

والحرف [ت] يحتل موقعين من أصل أربعة مواقع متبقية في الكلمة أي

$C(4,2)$

والحرف [ا] يحتل موقعا واحدا من أصل موقعين متبقين في الكلمة أي $C(2,1)$

والحرف [ي] يحتل موقعا واحدا باقيا في الكلمة أي $C(1,1)$ ومنه يكون عدد السلاسل الحرفية التي يمكن تشكيلها هو

$$\begin{aligned} & C(6,2) * C(4,2) * C(2,1) * C(1,1) \\ &= \frac{7!}{2!4!} * \frac{4!}{2!2!} * \frac{2!}{1!1!} * \frac{1!}{1!0!} = \frac{7!}{2!2!1!1!} \\ &= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2.1.2.1.1.1} = 1260 \end{aligned}$$

ومن المثال السابق نستنتج القاعدة التالية:

قاعدة (6)

إذا كانت القائمة $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ تحتوي على n عنصر وعناصرها المختلفة تظهر مكررة على النحو الآتي:

العنصر a_1 يتكرر ظهوره k_1 مرة

العنصر a_2 يتكرر ظهوره k_2 مرة

.....

العنصر a_i يتكرر ظهوره k_i مرة

فإن عدد التباديل المختلفة من عناصر المجموعة A هو $\frac{n!}{k_1! k_2! k_3! \dots k_i!}$

مثال (1): كم كلمة مختلفة يمكن تكوينها من كلمة Mississippi؟

الحل: عدد حروف الكلمة هو 11 حرفاً

الحرف (M) يتكرر مرة واحدة

الحرف (I) يتكرر 4 مرات

الحرف (S) يتكرر 4 مرات

الحرف (P) يتكرر مرتين

ومنه فإن عدد التباديل المختلفة من عناصر الكلمة هو

$$\frac{11!}{1!4!4!2!} = 34650$$

مثال (2): بكم طريقة يمكن توزيع خمس أوراق من حزمة ورق اللعب على أربعة لاعبين؟

الحل: عدد أوراق الحزمة 52 ورقة

$$\frac{52!}{5!5!5!5!32!}$$

عدد طرق توزيع الأوراق

التباديل والتوافيق في حالة السحب مع الإعادة

Permutations and Combinations with repetitions

أولاً

عدد التباديل المختلفة لـ n عنصر مأخوذ r في كل مرة مع التكرار هو n^r

البرهان : نطبق المبدأ الأساسي للعد:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_r & \cdots & x_n & n \text{ Elements} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_r & \text{sequence of } r \text{ elements} \\ n & n & n & & n & \text{each position } n \text{ Choices} \end{array}$$

و عليه فإن عدد التباديل مع التكرار هو $n \times n \times \cdots \times n$ r times $\Rightarrow n^r$

ثانياً

عدد التوافيق المختلفة لـ n عنصر مأخوذ r في كل مرة مع التكرار هو

$$C(n+r-1, n-1) = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

مثال (1): ثلاثة صناديق الأول يحتوي على الأقل على 8 كرات حمراء والصندوق الثاني يحتوي على الأقل على 8 كرات زرقاء والثالث على 8 كرات صفراء.

- 1- بكم طريقة يمكننا سحب 8 كرات؟
- 2- بكم طريقة يمكننا سحب 8 كرات بحيث يكون على الأقل كرة واحدة من كل لون؟

الحل:

$$C(8+3-1, 3-1) = C(10, 2) = 45 \quad -1$$

$$C(5+3-1, 3-1) = C(7, 2) = 21 \quad -2$$

مثال (2): كم حل للمساواة $x_1 + x_2 + x_3 = 11$

$$C(3+11-1, 3-1) = C(13, 2) = 78 \quad \text{الحل:}$$

تمارين محلولة Solved Exercises

1- بكم طريقة يمكن تشكيل كلمة سر لينك، علماً بأن الكلمة مؤلفة من أربعة رموز بحيث يكون الرمز الأول من حروف اللغة الإنجليزية الكبيرة والرمزان المتبقيان من الأرقام العربية؟
الجواب: $67600 = 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26$

2- بكم طريقة يمكن لستة رجال و ست نساء أن يجلسوا وذلك على الشكل التالي:

- (a) كل شخص يستطيع أن يجلس بجانب الشخص الآخر؟
(b) يجلس رجل ثم امرأة بالتعاقب؟

الجواب:

$$P(12,12) = \frac{12!}{(12-12)!} = \frac{12!}{0!} = 12! \quad (a)$$

$$P(6,6).P(6,6) = 6!.6! \quad (b)$$

3- بكم طريقة يمكن سحب ثماني أوراق من حزمة ورق اللعب، خمس أوراق حمراء وثلاث أوراق سوداء؟؟

$$\binom{26}{5} \binom{26}{3} = \frac{26!}{5!(26-5)!} \cdot \frac{26!}{3!(26-3)!} \quad \text{الجواب:}$$

4- وعاء يحتوي 15 كرة، منها 8 كرات حمراء و سبع كرات سوداء و المطلوب:

- (a) بكم طريقة يمكن اختيار خمس كرات جميعها حمراء؟
(b) بكم طريقة يمكن اختيار خمس كرات جميعها سوداء؟
(c) بكم طريقة يمكن اختيار خمس كرات، منها كرتان حمراوان و 3 كرات سوداء؟
(d) بكم طريقة يمكن اختيار خمس كرات، منها 3 كرات حمراء و كرتان سوداوان؟

الجواب:

$$\binom{8}{5} \binom{7}{0} = \frac{8!}{5!(8-5)!} \cdot \frac{7!}{0!(7-0)!} = 112 \quad (a)$$

$$\binom{8}{0} \binom{7}{5} = \frac{8!}{0!(8-0)!} \cdot \frac{7!}{5!(7-5)!} = 21 \quad (b)$$

$$\binom{8}{2}\binom{7}{3} = \frac{8!}{2!(8-2)!} \cdot \frac{7!}{3!(7-3)!} \quad (c)$$

$$\binom{8}{3}\binom{7}{2} = \frac{8!}{3!(8-3)!} \cdot \frac{7!}{2!(7-2)!} \quad (d)$$

5- برهن على أن $C(n, r) = C(n, n-r)$ ؟

الجواب: الطرف الأيسر $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad \text{الطرف الأيمن}$$

ولتساوي الطرفين نحصل صحة المساواة $C(n, r) = C(n, n-r)$

6- برهن على أن $C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1)$ ؟

$$C(n+1, r) = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \quad \text{الجواب: الطرف الأيسر}$$

الطرف الأيمن

$$\begin{aligned} C(n, r) + C(n, r-1) &= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} = \\ &= \frac{n![(n-r+1) + r]}{r!(n-r+1)!} = \frac{n![n+1]}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \end{aligned}$$

ولتساوي الطرفين نحصل على صحة المساواة

$$C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1)$$

7- يتألف نادي من 25 عضواً والمطلوب معرفة الآتي:

- (a) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من أربعة أعضاء؟
 (b) بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائبه وسكرتير ومحاسب للنادي ؟

الجواب:

$$\binom{25}{4} = \frac{25!}{4!(25-4)!} = \frac{25!}{4!(21)!} = 12650 \quad (a)$$

$$P(25,4) = \frac{25!}{(25-4)!} \cdot \frac{25!}{(21)!} = 303600 \quad (b)$$

8- قمنا برمي حجر النرد أربع مرات وسجلنا النتائج؟

(a) ماهية النتائج التي يمكن إحرازها؟

(b) ماهية النتائج التي يمكن الحصول فيها فقط على خمستين (Exactly two fives) ؟

(c) ماهية النتائج التي يمكن الحصول فيها على الأقل خمستين (At least two fives) ؟

(d) ماهية النتائج التي يمكن الحصول فيها على الأكثر خمستين (At most two fives) ؟

الجواب:

$$n^r = 6^4 = 1296 \quad (a)$$

$$\binom{4}{2} \binom{5}{1} \binom{5}{1} = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{5!}{1!4!} \cdot \frac{5!}{1!4!} = 6.5.5 = 150 \quad (b)$$

$$\binom{4}{4} + \binom{4}{3} \binom{5}{1} + \binom{4}{2} \binom{5}{1} \binom{5}{1} = 1 + 20 + 150 = 171 \quad (c)$$

$$\binom{4}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{1} \binom{5}{1} \binom{5}{1} + \binom{4}{1} \binom{5}{1} \binom{5}{1} \binom{5}{1} + \binom{4}{2} \binom{5}{1} \binom{5}{1} \quad (d)$$

9- أوجد السطر التاسع في مثلث باسكال (الذي يضم معامل ذات الحدين $C(9, k)$ ، $0 \leq k \leq 9$).

$$\boxed{1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1} \quad \text{الجواب:}$$

10- أوجد معامل الحد $x^{101} y^{99}$ من مفكوك ذات الحدين $(2x - 3y)^{200}$

$$\text{الجواب: } (2x + (-3y))^{200} = \sum_{j=0}^{200} C(200, j) (2x)^{200-j} (-3y)^j$$

$$\boxed{C(200, 99) (2x)^{200-99} (-3y)^{99}} \quad j = 99 \text{ ومنه عندما تكون}$$

و عليه فإن معامل الحد هو

$$C(200,99)(2)^{101}(-3)^{99} = -2^{101}3^{99}C(200,99)$$

11- أوجد معامل الحد x^9 من مفكوك ذات الحدين $(2-x)^{19}$

الجواب: $(2-x)^{19} = \sum_{j=0}^{19} C(19,j)(2)^{19-j}(-x)^j$

ومنه عندما تكون $j = 9$ $C(19,9)(2)^{19-9}(-x)^9$

و عليه فإن معامل الحد هو

$$C(19,9)(2)^{19-9}(-1)^9 = (-1)^9 2^{10} C(19,9) = -94595072$$

تمارين غير محلولة Unsolved Exercises

- 1- أوجد ناتج ما يلي:
 - (a) $C(n, n); p(n, n)$
 - (b) $C(n, 0); p(n, 0)$
 - (c) $C(n, n-1); p(n, n-1)$
 - (d) $C(n+1, n-1); p(n+1, n-1)$
 - (e) $C(n, 1); p(n, 1)$
- 2- ما عدد التباديل التي يمكن تشكيلها من المجموعات التالية:
 - (a) $\{a, b, c, d\}$
 - (b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
 - (c) $\{0, 1, 2, l, n, m\}$
- 3- بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاث طالبات من أصل سبع طالبات وطالبين من أصل ثمانية طلاب ؟
- 4- بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من ستة أشخاص من مجموعة مؤلفة من 10 أشخاص بحيث يكون أحدهم رئيساً للجنة؟
- 5- بكم طريقة يمكن اختيار ست أوراق لعب من حزمة ورق اللعب ؟
- 6- أوجد ناتج ما يلي ؟
 - (a) $C(8, 8); p(8, 8)$
 - (b) $C(6, 3); p(6, 3)$
 - (c) $C(12, 6); p(8, 5)$
 - (d) $C(5, 3); p(6, 5)$
 - (e) $C(8, 4); p(8, 1)$

المصطلحات العلمية Terminology

المصطلح العربي	English Term
الرياضيات التوافقية	Combinatorics
اقتران المضروب	The Factorial Function
معاملات ذات الحدين	Binomial Coefficients
نون اختيار ر	n choose r
متساوية باسكال	Pascal's Identity
نظرية ذات الحدين	Binomial Theorem
مثلث باسكال	Pascal's Triangle
المبدأ الأساسي للعد	Fundamental Principle of Counting
حادث	Event
تعميم المبدأ الأساسي للعد	Generalization of Fundamental Principle of Counting
التباديل	Permutations
ترتيب	arrangement
راء تباديل	Permutation-r
التوافيق	Combinations
توافيق راء	r-combination
متساوية فاندرومونيدي	Vandermonde's Identity
مخططات الشجرة	Tree Diagrams
التباديل والتوافيق في حالة السحب مع الإعادة	Permutations and Combinations with repetitions

الفصل السادس

أساليب البرهان والاستقراء الرياضي

Methods of Proof and Mathematical Induction

194	الفصل السادس
194	أساليب البرهان والاستقراء الرياضي
194	<i>Methods of Proof and Mathematical Induction</i>
195	أساليب البرهان <i>Methods of Proof</i>
195	البرهان المباشر Direct Proof
196	البرهان غير المباشر Indirect Proof
196	1- برهان التناقض Proof by Contradiction
196	2- برهان المعاكس الايجابي Proof by Contrapositive
197	برهان الاستقراء الرياضي AProof by Mathematical Induction
201	قوانين التعويض Laws of Substitution
201	نظرية 1 Theorem One (انفصال Modus Ponens)
202	نظرية 2 Theorem Two (قانون التعويض Law of Substitution)
202	نظرية 3 Theorem Three (قوانين دومورغان De Morgan's Law)
203	نظرية 4 Theorem Four (الصيغة الأخرى لقانون التعويض)
203	نظرية 5 Theorem Five
204	نظرية 6 Theorem Six
205	قواعد الاستنتاج Rules of Inference
206	مسائل محلولة Solved Problems
213	تمارين غير محلولة Unsolved Exercises
215	المصطلحات العلمية Terminology

أساليب البرهان Methods of Proof

في كثير من القضايا المنطقية التي نتعامل معها، نحتاج للبرهنة على صحتها، ودون إثبات صحة هذه القضايا بالبرهان المنطقي تبقى تلك القضايا ادعاءات. والبرهان هو عبارة عن سلسلة عبارات منطقية صحيحة لإثبات صحة عبارة أو خطئها، أو جملة معينة وأساليب البرهان الرئيسية أهمها الطرق التالية:

أولاً: برهان مباشر Direct Proof

ثانياً: برهان غير مباشر Indirect Proof الذي يتمثل بـ:

- برهان المعاكس الايجابي A Proof by Contrapositive

- برهان التناقض A Proof by Contradiction

ثالثاً: برهان الاستقراء الرياضي A Proof by Mathematical Induction

البرهان المباشر Direct Proof

البرهان الذي يثبت صحة القضية، باستخدام صواب الفرضية مباشرة و بالاستعانة بقوانين التعويض وقواعد الاستنتاج - والتي سندرسها بعد قليل - للوصول إلى صواب النتيجة مباشرة. فمثلاً إذا أردنا إثبات صواب التضمين $p \rightarrow q$ باستخدام صواب p نثبت أن q صواب أي أن q قضية خاطئة لا يمكن أن توجد.

مثال (1): برهن باستخدام البرهان المباشر على صحة النظرية التالية:

"إذا كان x عدداً طبيعياً زوجياً، فإن مربعه x^2 هو عدد زوجي".

الحل: بما أن x عدد طبيعي زوجي إذن $x=2n$ حيث n عدد طبيعي. و بتربيع طرفي المساواة السابقة نحصل المساواة $x^2 = 4n^2$ ومنه $x^2 = 2(2n^2)$ إذن x^2 عدد زوجي.

تمارين (1): أثبت باستخدام البرهان المباشر على صحة النظرية التالية:

"إذا كان $10x+15y=51$ ، فإن x و y ليسا من الأعداد الصحيحة".

تمارين (2): برهن باستخدام البرهان المباشر على صحة النظرية التالية:

"إذا كان x عدداً طبيعياً زوجياً و y عدداً طبيعياً زوجياً، فإن x^2+y^2 هو عدد طبيعي زوجي".

البرهان غير المباشر Indirect Proof

البرهان الذي يفرض عدم صحة النتيجة للقضية، ثم يصل إلى تناقض منطقي. وله عدة طرق منها:

1- برهان التناقض Proof by Contradiction

البرهان الذي نفترض فيه صواب نفي النتيجة، ثم باستخدام صحة الفرضيات، نحصل منها تناقضاً. فمثلاً إذا أردنا إثبات صواب التضمين $p \rightarrow q$ نفترض صواب $\sim q$ وباستخدام صواب p نثبت أن $(\sim q \wedge p) \rightarrow r$ حيث r أي قضية خاطئة.

مثال (1): برهن باستخدام برهان التناقض على صحة النظرية التالية:
"إذا كان x عدداً طبيعياً زوجياً، فإن مربعه x^2 هو عدد طبيعي زوجي".

الحل:

الفرضية: " x عدد طبيعي زوجي" إذن $x = 2n$ حيث n عدد طبيعي.

النتيجة: " x^2 هو عدد طبيعي زوجي"

نفترض صحة نفي النتيجة أي أن " x^2 ليس عدداً طبيعياً زوجياً".

إذن " x^2 عدد طبيعي فردي"

ومنه $x^2 = 2m + 1$ حيث m عدد طبيعي. ومنه $x = \sqrt{2m+1}$

وباستخدام الفرضية " x عدد طبيعي زوجي أي $x = 2n$ "،

إذن $2n = \sqrt{2m+1}$ وبتربيع كلا طرفي المساواة نحصل $4n^2 = 2m+1$

وهذه المساواة تناقض لأن $4n^2 = 2(2n^2)$ هي عدد زوجي

مساو للعدد الفردي $2m+1$. إذن القضية "إذا كان x عدداً طبيعياً زوجياً

فإن مربعه x^2 هو عدد طبيعي زوجي" هي تحصيل حاصل.

2- برهان المعاكس الايجابي Proof by Contrapositive

وهو البرهان الذي يفترض صواب نفي النتيجة، ثم نستنتج نفي الفرضية. أي إذا أردنا إثبات صواب التضمين $p \rightarrow q$ ، نبرهن صواب المعاكس الايجابي للتضمين $\sim q \rightarrow \sim p$ ، فنبدأ بافتراض صحة $\sim q$ (أي q خاطئة) ثم نستنتج مباشرة صحة $\sim p$ (أي أن p خاطئة). علماً أن التضمين ومعاكسه الايجابي متكافئان منطقياً.

مثال (1): نعرف x عدد تام ^{1} Perfect Number على أنه عدد يساوي مجموع قواسمه (و دون العدد x) مثل $6 = 1+2+3$ إذن 6 عدد تام بينما 8 ليس عدداً تاماً فمجموع قواسمه هو $7 = 1+2+4$ (8 عدداً ناقصاً) وكذلك 12 ليس عدداً تاماً فمجموع قواسمه $16 = 1+2+3+4+6$. (12 عدداً زائداً).

نعرف Y عدد أولي Prime Number على أن قواسمه فقط العدد 1 والعدد نفسه ($Y \geq 2$). الأعداد 5، 7، 11 هي أعداد أولية. 4 ليس عدداً أولياً لأن 2 من قواسمه.

مثال (2): برهن باستخدام برهان المعاكس الايجابي على صحة النظرية التالية:
"إذا كان x عدداً تاماً فإن x ليس عدداً أولياً".

الحل: الفرضية هي " P x عدد تاماً". والنتيجة هي " q x ليس عدداً أولياً".
المعاكس الايجابي $\sim q \rightarrow \sim P$ يعني أن " $\sim P$ x عدد تام".
و " $\sim q$ هو x عدد أولي".

نفرض صواب " $\sim q$ إذن x عدد أولي" وبما أن $x \geq 2$ إذن قواسمه فقط عدداً 1 و x نفسه وعليه فمجموع قواسمه التي أقل من نفسه هو فقط 1 وهذا يؤدي إلى أن " $\sim P$ x ليس عدداً تاماً" صواب. هكذا أثبتنا صحة المعاكس الايجابي للتضمنين وعليه فإن التضمنين نفسه صواب أي "إذا كان x عدداً تاماً فإن x ليس عدداً أولياً" تحصيل حاصل.

برهان الاستقراء الرياضي A Proof by Mathematical Induction

يعرف برهان الاستقراء الرياضي على النحو الآتي:

نريد إثباتاً لصواب النظرية $P(n)$ لجميع قيم n بحيث $n \geq n_0$ ويتم البرهان في ثلاث خطوات هي:

أولاً: نثبت أن $P(n_0)$ صواباً
ثانياً: نفرض أن $P(k)$ صواب لجميع قيم k بحيث $k \geq n_0$
ثالثاً: نثبت أن $P(k+1)$ صواب لجميع قيم k .

وهكذا أثبتنا أن صواب النظرية $P(n)$ لجميع قيم n بحيث $n \geq n_0$

مثال (1):

برهن بالاستقراء الرياضي صحة النظرية $2^n \leq n!$ لكل $n: n \geq 4$

¹ الدكتور أحمد سعيدان قاموس مصطلحات الرياضيات الابتدائية منشورات مجمع اللغة العربية الأردني (1987م) صفحة 22 بند 62

الحل:

أولاً: نثبت أن $P(4)$ صواب.

الطرف الأيمن $(24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!)$ $\leq$ الطرف الأيسر $(2^4 = 16)$.

ثانياً: نفترض أن $P(k)$ صواب لكل قيم k بحيث $k \geq n_0$. أي $2^k \leq k!$ لكل قيم k بحيث $k \geq 4$.

ثالثاً: نثبت أن $P(k+1)$ صواب لجميع قيم k . برهن أن $2^{k+1} \leq (k+1)!$ لكل قيم k بحيث $k \geq 4$.

البرهان: ننتقل من $2^{k+1} = 2^k \cdot 2^1$ ثم نستخدم الفرضية ثانياً $2^k \leq k!$ فنحصل $2^{k+1} = 2^k \cdot 2^1 \leq k! \cdot 2^1$ ومنه $2^{k+1} = 2^k \cdot 2^1 \leq k! \cdot 2^1 \leq k! \cdot (k+1) = (k+1)!$ و $2^1 \leq k+1$ لأن $k \geq 4$ وعليه

$2^{k+1} = 2^k \cdot 2^1 \leq k! \cdot 2^1 \leq k! \cdot (k+1) = (k+1)!$ حيث إن $2^{k+1} = 2^k \cdot 2^1$ حيث $k! \cdot (k+1) = (k+1)!$

أي أن النظرية $2^{k+1} \leq (k+1)!$ لجميع قيم k بحيث $k \geq 4$ صواب.

مثال (2): برهن على صحة المتساوية

$$P(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ وذلك لكل } n \geq 1$$

الحل:

أولاً: نثبت أن $P(1)$ صواب. الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر

$$(1) = ([1(1+1)/2] = 1)$$

ثانياً: نفترض أن $P(k)$ صواب لجميع قيم k بحيث $k \geq 2$. أي

$$P(k) = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

ثالثاً: نثبت أن $P(k+1)$ صواب لجميع قيم k .

$$\text{برهن أن } P(k+1) = 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

بحيث $k \geq 3$

البرهان: ننتقل من الفرضية $P(k) = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ الصائبة من

$$\text{ثانياً ثم نضيف } (k+1) \text{ لكل طرف من أطراف المتساوية فنحصل } 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

من المتساوية هو الطرف الأيسر لـ $P(k+1)$. الآن بقي أن نثبت أن

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \text{ هو الطرف الأيمن لـ } P(k+1).$$

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) &= \frac{[k(k+1) + 2(k+1)]}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

أي أن المتساوية $P(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ صواباً وذلك لكل $n \geq 1$.

مثال (3): برهن على صواب النظرية

$$P(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{لكل } n \geq 1$$

الحل:

أولاً: نثبت أن $P(1)$ صواباً. والطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر
 $(1^2 = 1) = (1(1+1)(2*1+1)/6) = 1$

ثانياً: نفترض أن $P(k)$ صواباً لجميع قيم $k \geq 2$. أي أن

$$\boxed{P(k) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$$

ثالثاً: نثبت أن $P(k+1)$ صواباً لجميع قيم $k \geq 3$.

$$\boxed{P(k+1) = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}} \quad \text{أي لنبرهن على أن}$$

البرهان: ننطلق من الفرضية

$$P(k) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

نضيف $(k+1)^2$ لكل طرف من أطراف المتساوية فنحصل

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)[2k+1]}{6} + (k+1)^2$$

الطرف الأيسر من المتساوية هو الطرف الأيسر لـ $P(k+1)$. الآن بقي

$$\text{أن نثبت أن الطرف الأيمن } \frac{k(k+1)[2k+1]}{6} + (k+1)^2 \text{ هو الطرف}$$

الأيمن لـ $P(k+1)$.

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)[2k+1]}{6} + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} \\ &= \frac{(k+1)[(k+2)(2k+3)]}{6} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

أي أن المتساوية $P(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ صواب وذلك لكل $n \geq 1$.

مثال (4): برهن على صواب النظرية $P(n) = n^3 + 5n + 6$ يقبل القسمة على 3 ودون باق لكل $n \geq 0$ ؟

الحل:

أولاً: نثبت أن $P(0)$ صواب. $P(0) = 0^3 + 5 \cdot 0 + 6 = 6 = 3 \cdot 2$. إذن $P(0)$ يقبل القسمة على 3.

ثانياً: نفترض أن $P(k)$ صواب لجميع قيم $k \geq 1$. أي $P(k) = k^3 + 5k + 6$ لكل قيم $k \geq 1$

ثالثاً: نثبت أن $P(k+1)$ صواب لجميع قيم k . برهن

$$P(k+1) = (k+1)^3 + 5(k+1) + 6$$

البرهان : نطلق من الفرضية $P(k) = k^3 + 5k + 6$ من ثانيا حيث

إن $k^3 + 5k + 6$ تقبل القسمة على 3. الآن بقي أن نثبت أن الطرف الأيمن

$$P(k+1) = (k+1)^3 + 5(k+1) + 6$$

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 5(k+1) + 6 &= k^3 + 5k + 6 + 3k^2 + 3k + 5 + 1 \\ &= (k^3 + 5k + 6) + 3(k^2 + k + 2) \end{aligned}$$

نلاحظ أن القوس الأول يقسم على 3 حسب الفرض والقوس الثاني يقبل القسمة

على 3 لأنه مضروب بـ 3 أي أن $P(k+1)$ تقبل القسمة على 3.

إذن النظرية $P(n) = n^3 + 5n + 6$ تقبل القسمة على 3 صواب و لكل $n \geq 0$.

مثال (5): أثبت أن $P(n) = n^2 > n + 5$ مهما كانت $n \geq 3$

الحل:

أولاً: نثبت أن $P(3)$ صواب. $P(3) = [3^2 = 9] > [3 + 5 = 8]$ إذن $P(3)$ صحيحة.

ثانياً: نفترض أن $P(k)$ صواب لجميع قيم $k \geq 4$. أي $P(k) = k^2 > k + 5$ لجميع قيم $k \geq 4$

ثالثاً: نثبت أن $P(k+1)$ صواباً لجميع قيم k . برهن

$$P(k+1) = (k+1)^2 > (k+1) + 5$$

البرهان: نطلق من الفرضية $P(k) = k^2 > k + 5$ من ثانيا ثم نضيف الحد

$2k + 1$ لطرفي $P(k)$. فنحصل الآتي:

$$\begin{aligned} k^2 + 2k + 1 &> k + 5 + 2k + 1 \\ (k+1)^2 &> [(k+1) + 5] + 2k > (k+1) + 5 \end{aligned}$$

أي أن $P(k+1)$ صحيح. إذن النظرية $P(n) = n^2 > n+5$ صواب مهما كانت $n \geq 3$..

تمارين (1): أثبت باستخدام برهان الاستقراء الرياضي صواب النظرية

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

تمارين (2): أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي صواب النظرية $(n^2 + n)$ عدد زوجي لجميع قيم $n \geq 1$ ؟

تمارين (3): برهن على صواب النظرية $P(n) = 1+2+3+\dots+(2n-1) = n^2$ لكل $n \geq 1$

تمارين (4): برهن على صواب النظرية

$$P(n) = 1+2+2^2+\dots+n^2 = 2^{n+1} - 1 \text{ لكل } n \geq 0$$

تمارين (5): برهن على صواب النظرية $P(n) = n! \geq 2^{n-1}$ لكل $n \geq 1$

قوانين التعويض Laws of Substitution

في الفقرات الآتية سوف نتطرق للقضايا المنطقية الصحيحة دائماً التي أسميناها **Tautology** ولعدها قانوناً للاستدلال والاستنتاج وكيفية تعويضها في قضية منطقية مركبة بما يكافئ بعض قضاياها المنطقية البسيطة التي تكون أجزائها.

نظرية 1 (Theorem One) (انفصال Modus Ponens)

إذا كانت القضيتان p و $p \rightarrow q$ كلاهما صحيحين، فإن القضية q هي أيضاً، صحيح (صواب). تسمى هذه النظرية بالانفصال **Modus Ponens**

$$p \rightarrow q$$

$$\frac{p}{\therefore q} \text{ Ponens وتكتب على الصيغة التالية}$$

البرهان: نفرض أن القضية q خطأ لذلك يوجد على الأقل حالة من الاحتمالات في جدول قيم الصدق للتضمين (تحصيل حاصل) تكون فيها q خاطئة. وبما أن p دائماً صواب في كل حالة من الاحتمالات لجدول قيم الصدق للتضمين (تحصيل حاصل) إذن هناك حالة في جدول قيم الصدق للتضمين (تحصيل حاصل) التي فيها تأخذ p صواباً و q خطأ، مما يؤدي إلى وجود حالة للتضمين قيمة الصدق فيها خاطئة. وعليه، يكون

التضمنين لدينا، ليس دائماً صواباً. وهذا يناقض فرضية النظرية بأن التضمنين تحصيل حاصل. لذلك، لا بد أن تكون q دائماً صواباً.

نظرية 2 (قانون التعويض Law of Substitution) Theorem Two

لتكن القضية p مكونة من القضايا البسيطة $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$ وإذا كانت القضية q مكونة من القضايا البسيطة $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$ وإذا كانت القضية q هي القضية التي تنتج من القضية p بتعويض القضايا $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$ بدلاً من $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$. فإذا كانت p دائماً صواباً أي تحصيل حاصل فإن q أيضاً تحصيل حاصل.

البرهان: القضايا $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$ لها الاحتمالات المنطقية نفسها التي تملكها القضايا $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$ في جدول قيم الصدق. لذلك فإنه لا يتغير شيء عند الانتقال من جدول قيم الصدق لـ p إلى جدول قيم الصدق لـ q . وعليه إذا كانت p تحصيل حاصل، فإن q أيضاً هي تحصيل حاصل.

نظرية 3 (قوانين دومورغان De Morgan's Law) Theorem Three

لتكن p_1 و p_2 أي قضيتان منطقيتان. فإن قانوني دومورغان الآتية هما تحصيل حاصل:

$$1. \sim (p_1 \wedge p_2) \Leftrightarrow ((\sim p_1) \vee (\sim p_2))$$

$$2. \sim (p_1 \vee p_2) \Leftrightarrow ((\sim p_1) \wedge (\sim p_2))$$

البرهان: أثبت أن $\sim (p_1 \wedge p_2) \Leftrightarrow ((\sim p_1) \vee (\sim p_2))$ دائماً صواباً. أولاً: نثبت أن $\sim (p_1 \wedge p_2) \rightarrow ((\sim p_1) \vee (\sim p_2))$ هو تحصيل حاصل. ثم باستخدام نظرية 1 ونظرية 2 نحصل تحصيل حاصل التالي

$$\begin{array}{c} \sim (p_1 \wedge p_2) \\ \sim p_1 \\ \hline \therefore ((\sim p_1) \vee (\sim p_2)) \end{array}$$

حيث إن قضية نفي العطف $\sim (p_1 \wedge p_2)$ صواب، يعني أن قضية العطف $p_1 \wedge p_2$ خطأ، وهذا يعني أن كلا القضيتين البسيطتين p_1 و p_2 خطأ. أي

أن قضية النفي $\sim p_1$ صواب. و أن قضية الاختيار $(\sim p_1) \vee (\sim p_2)$ أيضاً صواب.

ثانياً: نثبت أن $((\sim p_1) \vee (\sim p_2)) \rightarrow \sim (p_1 \wedge p_2)$ هو تحصيل حاصل. ثم باستخدام نظرية 1 و نظرية 2 نحصل تحصيل حاصل التالي

$$\begin{array}{c} (\sim p_1) \vee (\sim p_2) \\ \sim p_1 \\ \hline \therefore \sim (p_1 \wedge p_2) \end{array}$$

حيث إن قضية الاختيار $(\sim p_1) \vee (\sim p_2)$ صواب، يعني أن القضية $\sim p_1$ صواب، وهذا يعني أن القضية البسيطة p_1 خطأ. أي أن قضية $p_1 \wedge p_2$ خطأ. و عليه فإن قضية النفي $\sim (p_1 \wedge p_2)$ صواب. وهكذا تم إثبات القانون الأول من قوانين دومورغان على أنه تحصيل حاصل. نترك برهان القانون الثاني كتمرين للطالب.

نظرية 4 Theorem Four (الصيغة الأخرى لقانون التعويض)

لتكن P قضية منطقية مركبة، وتحتوي على القضية X كقضية منطقية بسيطة من مكوناتها. ولتكن القضيتين X و Y متكافئتين منطقياً. فإذا قمنا باستبدال القضية Y بالقضية X ، حيثما ظهرت في القضية P فإننا نحصل القضية Q التي تكافئ منطقياً القضية P .

البرهان: بما أن القضية X تكافئ منطقياً القضية Y ، فهذا يدل على أن لهما قيم الصدق نفسها تماماً. أي ليس هناك تغيير على قيم الصدق للقضية P بعد تعويض Y بدلاً من X لنحصل القضية Q كما في نظرية قانون التعويض (نظرية 2) و عليه فإن القضيتين P و Q متكافئتان منطقياً.

نظرية 5 Theorem Five

إذا كانت القضية المنطقية P مكونة من القضايا البسيطة $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ومن العوامل المنطقية التالية $\sim, \wedge, \vee$. ولتكن القضية Q هي القضية التي نحصلها من القضية P بإجراء التغييرات التالية حيث نستبدل العطف $\wedge$ بالاختيار $\vee$ و نستبدل عامل الاختيار $\vee$ بعامل العطف $\wedge$ حيثما ظهرا ونستبدل القضية $\sim p_i$ بالقضية p_i وذلك لجميع قيم $i = 1, 2, 3, \dots, n$ فإن القضية الجديدة Q تكافئ منطقياً القضية P .

البرهان: برهان هذه النظرية فوق مستوى هذا الكتاب إلا إننا سنعطي بعض الإشارات للبرهان منها:

- ❖ الفرضية حالة عطف نستخدم برهان المعاكس الايجابي والتضمين هو $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow Q$ فالمعاكس الايجابي لتضمين العطف هو $Q \rightarrow (\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee p_3 \dots \sim p_n)$ وللبرهنة على صحة القضية يكفي أن نثبت أن التضمين $p_i \rightarrow \sim Q$ صواب على الأقل لقيمة واحدة للمتغير i .
- ❖ الفرضية حالة اختيار والتضمين هو $(P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee \dots \vee P_n) \rightarrow Q$ وللبرهنة على صحة القضية نستخدم هنا ما يسمى برهان الحالات أي نثبت أن التكافؤ المنطقي الآتي تحصيل حاصل

$$\begin{aligned} & [(P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee \dots \vee P_n) \rightarrow Q] \Leftrightarrow \\ & [(p_i \rightarrow Q) \wedge (p_i \rightarrow Q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow Q)] \end{aligned}$$

برهان الحالات يعتمد على إثبات صحة كل حالة $p_i \rightarrow Q$ ولكل قيمة من قيم المتغير i وفي حالة تشابه الحالات نكتفي ببرهان حالة واحدة فقط.

نظرية 6 Theorem Six

تطبيقات باستخدام نظرية 5 (قوانين دومورغان المعممة)

$$1. (\sim (\wedge_i^n p_i)) \Leftrightarrow (\vee_i^n (\sim p_i))$$

$$2. (\sim (\vee_i^n p_i)) \Leftrightarrow (\wedge_i^n (\sim p_i))$$

قواعد الاستنتاج Rules of Inference

يمكن تلخيص قواعد الاستنتاج المنطقي بقضايا التحصيل الحاصل التالية ومن أهمها ما يلي:

جدول قواعد الاستنتاج المنطقي

Name&No الاسم و الرقم	Rule of Inference قاعدة الاستنتاج	Tautological form صيغة تحصيل حاصل
Addition الإضافة I1	$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \rightarrow (p \vee q)$
Simplification التبسيط I2	$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
Modus Ponens انفصال I3	$\frac{p \quad p \rightarrow q}{\therefore q}$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
Modus Tollens التحمل I4	$\frac{\sim q \quad p \rightarrow q}{\therefore \sim p}$	$[\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p$
Disjunctive Syllogism القياس التخييري I5	$\frac{p \vee q \quad \sim p}{\therefore q}$	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$
Hypothetical Syllogism القياس الافتراضي I6	$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r}$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
Conjunction المطف I7	$\frac{p \quad q}{\therefore p \wedge q}$	$[(p) \wedge (q)] \rightarrow (p \wedge q)$
Constructive Dilemma معضلة البناء I8	$\frac{(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \quad p \vee r}{\therefore q \vee s}$	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$
Destructive Dilemma معضلة الهدم I9	$\frac{(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \quad \sim q \vee \sim s}{\therefore \sim p \vee \sim r}$	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim s)] \rightarrow [\sim p \vee \sim r]$

Solved Problems مسائل محلولة

قبل البدء بإعطاء مسائل عامة محلولة في المنطق الرياضي وطرق البرهان وجدنا ضروريا التذكير بخصائص العوامل المنطقية السابقة مرة أخرى ففي الإعادة إفادة إن شاء الله.

جدول خصائص العوامل المنطقية

م	الاسم	الخاصية Property	Name
L1	الذات	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$	Identity
L2	هيمنة القيم الصدق	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$	Domination of Truth Values
L3	التماثل	$P \wedge P \Leftrightarrow P$ $P \vee P \Leftrightarrow P$	Idem potent
L4	التبديل	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	Commutative
L5	التجميع	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	Associative
L6	التوزيع	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	Distributive
L7	نفي النفي	$\sim(\sim P) \Leftrightarrow P$	Double Negation
L8	قوانين دو مورغان	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$ $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$	De Morgan's Laws

تحصيل حاصل Tautologies	
$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\sim P) \vee Q)$	L9
$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$	L10
$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$	L11
$\sim(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \sim Q$	L12
$\sim(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)]$	L13

1- أثبت أن قانون القياس الافتراضي $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ هو تحصيل حاصل وذلك باستخدام قواعد الاستنتاج.
أولاً: مراجعة الحل السابق مع جدول الصدق لعبارة قانون القياس الافتراضي

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$	النتيجة
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

من جدول الصدق لقانون القياس الافتراضي $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ نجد أن عمود النتيجة تحصيل حاصل.

ثانياً- باستخدام قواعد الاستنتاج المنطقي لعبارة قانون القياس الافتراضي

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

لنعطي التضمين $p \rightarrow r$ قيمة خاطئة (النتيجة $p \rightarrow r$). فهل يا ترى تأخذ الفرضيات لتضمين قانون القياس الافتراضي $q \rightarrow r$ و $p \rightarrow q$ قيم صائبة. وهذا يؤدي بدوره إلى تناقض وهذا مرفوض. الآن يأخذ التضمين $p \rightarrow r$ قيمة خاطئة F فقط عندما تأخذ r قيمة F وتأخذ p قيمة T. وحتى تأخذ $q \rightarrow r$ القيمة T فإن q يجب أن تأخذ القيمة F. وحتى يأخذ التضمين $p \rightarrow q$ قيمة صائبة يجب أن تأخذ p قيمة F. وهذا يعني أن على p أن تأخذ القيم T و F معاً في آن واحد. وهذا لا يمكن أن يحدث. وبالتالي يستحيل إيجاد حالة تأخذ فيه الفرضيات القيمة T بينما تأخذ النتيجة القيمة F.

2- أثبت أن القانون التالي هو تحصيل حاصل وذلك باستخدام قواعد الاستنتاج.

$$\begin{array}{l} P \leftrightarrow Q \\ Q \vee R \\ \sim R \\ \hline \therefore \sim P \end{array}$$

الحل: نفرض أن النتيجة $\sim p$ تكون خاطئة F فإن p عندئذ تكون صائبة T. وحتى تكون القضية $P \leftrightarrow Q$ صائبة T يجب أن تكون Q هي أيضاً صائبة T. وحتى تكون القضية $\sim R$ هي أيضاً صائبة T تكون R خاطئة F. وحتى تكون القضية $Q \vee R$ صائبة T يجب أن تكون Q هي أيضاً صائبة T. نستنتج مما سبق أن الفرضيات جميعها صائبة T و النتيجة

تكون خاطئة F وهذا غير ممكن في المنطق الرياضي وعليه فالقانون السابق هو تحصيل حاصل.

$ \begin{array}{l} T : P^T \leftrightarrow Q^T \\ T : Q^T \vee R^F \\ T : \sim R^T \\ F \therefore \sim P^T \end{array} $	الحل السابق بإيجاز:

3- أثبت بإيجاز أن القوانين التالية هي تحصيل حاصل باستخدام قواعد الاستنتاج؟

$$\begin{array}{l}
 P \vee Q \\
 \sim P \\
 \hline
 \therefore Q \\
 P \rightarrow Q \\
 P \\
 \hline
 \therefore Q
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 (a) \\
 (b)
 \end{array}$$

الحل

$$\begin{array}{l}
 T : P^F \vee Q^F \\
 T : \sim P^F \\
 F \therefore Q^F
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 (a) \text{ بإيجاز}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 T : P^F \rightarrow Q^F \\
 T : P^F \\
 F \therefore Q^F
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 (b) \text{ بإيجاز}
 \end{array}$$

الحظ في (a) أن P هي F و Q هي F وبالتالي $P \vee Q$ هي F وعلى حسب الفرض هي T وهذا بحد ذاته تناقض.

الحظ في (b) أن P هي F و على حسب الفرض هي T وهذا بحد ذاته تناقض.

4- أثبت بإيجاز صواب القوانين التالية وذلك باستخدام قواعد الاستنتاج؟

$$\begin{array}{l}
 P \rightarrow Q \\
 \sim Q \rightarrow \sim R \\
 \hline
 \therefore R \rightarrow Q \\
 P \wedge Q \\
 \sim P \rightarrow Q \\
 \hline
 \therefore \sim Q
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 (a) \\
 (b)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \sim R \rightarrow \sim Q \quad (c) \\ \hline \therefore \sim R \rightarrow \sim P \end{array}$$

الحل بإيجاز

$$\begin{array}{l} T : P^F \rightarrow Q^F \\ T : \sim Q^{TF} \rightarrow \sim R^F \quad (a) \\ \hline F : \therefore R^T \rightarrow Q^F \\ T : P^{FT} \wedge Q^T \\ T : \sim P^T \rightarrow Q^T \quad (b) \\ \hline F : \therefore \sim Q^T \\ T : P^T \rightarrow Q^T \\ T : \sim R^{FT} \rightarrow \sim Q^F \quad (c) \\ \hline F : \therefore \sim R^T \rightarrow \sim P^F \end{array}$$

الحظ في (a) أن Q تأخذ قيم F و T معاً في آن واحد.
الحظ في (b) أن P تأخذ قيم F و T معاً في آن واحد.
الحظ في (c) أن R تأخذ قيم F و T معاً في آن واحد.

5- برهن باستخدام الاستقراء الرياضي ما يلي: $5^n - 1$ تقبل القسمة على 4 ودون باقي؟

الحل:

❖ $P(1) = 5^1 - 1 = 4 \cdot 1$ وهذه صواباً لأنها مضاعفات 4
❖ نفرض أن $P(k) = 5^k - 1$ من مضاعفات 4
❖ لنبرهن على أن $P(k+1) = 5^{k+1} - 1$ من مضاعفات 4.
$$P(k+1) = 5^{k+1} - 1 = 5^k \cdot 5 - 1$$
$$= 5^k(4+1) - 1 = 5^k \cdot 4 + 5^k - 1 = 4 \cdot 5^k + (5^k - 1)$$
 نلاحظ أن الحد الأول $4 \cdot 5^k$ مضروب 4 وبالتالي يقبل القسمة على 4. أما الحد الثاني $(5^k - 1)$ على حسب الفرض من مضاعفات 4.

6- برهن باستخدام الاستقراء الرياضي على صحة ما يلي:

$$P(n) = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} \quad ?$$

الحل:

❖ $P(1) = 1^2 = [1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1 - 1)] / 3 = 3 / 3 = 1$ وهذه صواب لأن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر.

❖ نفرض أن

$$P(k) = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k+1)(2k-1)}{3}$$

لكل $k \geq 2$.

❖ لنبرهن على أن $P(k+1)$ صحيحة لكل $k \geq 3$. من أجل ذلك نضيف إلى طرفي $P(k)$ الحد $[2(k+1)-1]^2$

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 \\ &= \frac{(k+1)[2(k+1)+1][2(k+1)-1]}{3} \end{aligned}$$

ومنه $P(n) = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$ صواباً.

$$\bigcup_{i=1}^{i=n} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i} \text{ ما أثبت أن مجموعات } A_1, A_2, \dots, A_n$$

1. $P(1) = \overline{A_1} = \overline{A_1}$ ومنه $P(1)$ صواب.

2. نفرض أن $\bigcup_{i=1}^{i=k} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^{i=k} A_i}$ لكل $k \geq 2$.

3. لنثبت أن $P(k+1)$ صحيحة أي أن $\bigcup_{i=1}^{i=k+1} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^{i=k+1} A_i}$ صواباً.

لأجل ذلك نفرض أن $B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ ومنه

$$\bigcup_{i=1}^{i=k+1} \overline{A_i} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}} = \overline{B \cup A_{k+1}}$$
 ومنه

لقوانين دومورغان ثم استخدام الطرف الأيمن لـ $P(k)$ بدل الطرف الأيسر وذلك لوجود مساواة.

$$\overline{B \cup A_{k+1}} = \overline{B} \cap \overline{A_{k+1}} = \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{i=k} A_i \right)} \cap \overline{A_{k+1}} = \bigcap_{i=1}^{i=k+1} \overline{A_i} = P(k+1)$$

ومنه نجد أن $P(k+1)$ صحيحة وبالتالي $P(n)$ صواباً.

8- لتكن $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ مجموعات ما.

$$\text{أثبت أن } \left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{i=n} (A_i \cap B)$$

1. $P(1) = A_1 \cap B = A_1 \cap B$ ومنه $P(1)$ صواباً.

2. نفرض أن $P(k) = (\bigcup_{i=1}^{i=k} A_i) \cap B = \bigcup_{i=1}^{i=k} (A_i \cap B)$ لكل $k \geq 2$.

3. لثبت أن $P(k+1)$ صحيحة أي أن

$$P(k+1) = (\bigcup_{i=1}^{i=k+1} A_i) \cap B = \bigcup_{i=1}^{i=k+1} (A_i \cap B)$$

لأجل ذلك، نفرض أن $C = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$

$$\begin{aligned} (\bigcup_{i=1}^{i=k+1} A_i) \cap B &= (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}) \cap B = \\ (C \cup A_{k+1}) \cap B &= (C \cap B) \cup (A_{k+1} \cap B) = \\ (\bigcup_{i=1}^{i=k} A_i \cap B) \cup (A_{k+1} \cap B) &= \\ (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_k \cap B) \cup (A_{k+1} \cap B) &= \\ \bigcup_{i=1}^{i=k+1} (A_i \cap B) \end{aligned}$$

ومنه نجد أن $P(k+1)$ صحيحة وبالتالي $P(n)$ صواب لجميع قيم $n \geq 1$.

9- برهن على أن $P(n) = a + ar^1 + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}$ صواب.

وذلك لكل $r \neq 1$ و $n \geq 0$

الحل:

1. $P(0) = a = \frac{a(r^1 - 1)}{r - 1} = a$ وهذه صواب لأن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر.

2. نفرض أن $P(k) = a + ar^1 + ar^2 + \dots + ar^k = \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1}$ لكل

$k \geq 1$

3. لنبرهن على أن

$$P(k+1) = a + ar^1 + ar^2 + \dots + ar^k + ar^{k+1} = \frac{a(r^{(k+1)+1} - 1)}{r - 1}$$

صحيحة لكل $k \geq 2$. من أجل ذلك نضيف الحد ar^{k+1} إلى طرفي

المساواة من $P(k)$

وبعد التعويض نحصل:

$$\begin{aligned}
 a + ar^1 + ar^2 + \dots + ar^k + ar^{k+1} &= \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1} + ar^{k+1} \\
 &= \frac{a(r^{k+1} - 1) + ar^{k+1}(r - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{k+1} - 1) + a(r^{k+2} - r^{k+1})}{r - 1} \\
 &= \frac{a(r^{k+1} - 1 + r^{k+2} - r^{k+1})}{r - 1} = \frac{a(r^{k+2} - 1)}{r - 1}
 \end{aligned}$$

إذن $P(k+1)$ صحيحة وبالتالي $P(n)$ صواب وذلك من أجل $n \geq 1$ و $n \geq 0$

9- برهن على أن

$$P(n) = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2}$$

صواب، لكل $n \geq 1$.

الحل:

$$1. \quad P(1) = 1^2 = \frac{(-1)^{1-1} \cdot 1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \quad \text{و هذه صواب.}$$

لأن الطرفين الأيمن يساوي الطرف الأيسر.

2. نفرض أن

$$P(k) = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{k-1} k^2 = \frac{(-1)^{k-1} k(k+1)}{2}$$

لكل $k \geq 2$.

3. لنبرهن على أن $P(k+1)$ صحيحة لكل $k \geq 2$.

$$\begin{aligned}
 P(k) &= 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^k (k+1)^2 \\
 &= \frac{(-1)^{k-1} k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2
 \end{aligned}$$

من أجل ذلك نضيف الحد $(-1)^k (k+1)^2$ إلى طرفي المساواة من $P(k)$ وبعد التعويض نحصل:

$$\begin{aligned}
 &1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^k (k+1)^2 \\
 &= \frac{(-1)^{k-1} k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2 \\
 &= (-1)^k (k+1) \left[\frac{-k}{2} + (k+1) \right] = (-1)^k (k+1) \left[\frac{-k + 2k + 2}{2} \right] \\
 &= (-1)^k (k+1) \left[\frac{k+2}{2} \right] = (-1)^k (k+1) \frac{[(k+1)+1]}{2}
 \end{aligned}$$

إذن $P(k+1)$ صحيحة وبالتالي $P(n)$ صواب وذلك من أجل $n \geq 1$.

11- برهن على أن $8^n - 2^n$ تقبل القسمة على 6 دون باق؟
الحل: برهان الخطوة الثالثة فقط

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 2^{k+1} &= 8^k \cdot 8 - 2^k \cdot 2 \\ &= 8^k (6 + 2) - 2^k \cdot 2 = 6 \cdot 8^k + 8^k - 2^k \cdot 2 = 6 \cdot 8^k + 2(8^k - 2^k) \end{aligned}$$

12- برهن على أن $11^n - 4^n$ تقبل القسمة على 7 دون باق؟
الحل: برهان الخطوة الثالثة فقط

$$\begin{aligned} 11^{k+1} - 4^{k+1} &= 11^k \cdot 11 - 4^k \cdot 4 = 11^k (7 + 4) - 4^k \cdot 4 \\ &= 7 \cdot 11^k + 4 \cdot 11^k - 4^k \cdot 4 = 7 \cdot 11^k + 4(11^k - 4^k) \end{aligned}$$

تمارين غير محلولة Unsolved Exercises

1- بين أي القوانين التالية صحيح أم خطأ؟ وبايجاز

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \sim Q \\ \hline \therefore P \end{array} \quad (a)$$

$$\begin{array}{l} (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \\ \sim Q \wedge R \\ \hline \therefore P \end{array} \quad (b)$$

$$\begin{array}{l} \sim (P \rightarrow Q) \\ P \\ \hline \therefore \sim Q \end{array} \quad (c)$$

$$\begin{array}{l} P \rightarrow R \\ P \rightarrow Q \\ \hline \therefore P \rightarrow (R \rightarrow Q) \end{array} \quad (d)$$

$$\begin{array}{l} P \rightarrow (R \vee Q) \\ R \rightarrow \sim Q \\ \hline \therefore P \rightarrow R \end{array} \quad (e)$$

$$\begin{array}{l} \sim R \rightarrow \sim P \\ R \\ \hline \therefore P \end{array} \quad (f)$$

$$\begin{array}{l} P \rightarrow (Q \rightarrow R) \\ Q \rightarrow (P \rightarrow R) \\ \hline \therefore (P \vee Q) \rightarrow R \end{array} \quad (g)$$

$$\begin{array}{l} (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \\ P \vee R \\ \hline \therefore Q \vee S \end{array} \quad (h)$$

2- أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي ما يلي:

$$5 + 10 + 15 + \dots + 5n = \frac{5n(n+1)}{2} \quad .1$$

$$1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = (2n+1)(n-1) \quad .2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4}{4} \quad .3$$

$$1*2 + 2*3 + 3*4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad .4$$

$$3 + 3*5 + 3*5^2 + \dots + 3.5^n = \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4} \quad .5$$

$$1*1! + 2*2! + \dots + n*n! = (n+1)! - 1 \quad .6$$

$$3^n < n! \quad .7$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n < \left(\frac{2n+1}{8}\right)^2 \quad .8$$

$$6*7^n - 2*3^n \text{ تقبل القسمة على } 4 \text{ دون باق} \quad .9$$

$$3^n + 7^n - 2 \text{ تقبل القسمة على } 8 \text{ دون باق} \quad .10$$

$$n^3 - n \text{ تقبل القسمة على } 3 \text{ دون باق} \quad .11$$

$$2 - 2*7 + 2*7^2 - \dots + 2(-7)^n = \frac{(1 - (-7)^{n+1})}{4} \quad .12$$

$$13. \text{ لتكن } A_1, A_2, \dots, A_n, B \text{ مجموعات ما. أثبت أن}$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i=1}^{i=n} (A_i \cup B)$$

$$14. \text{ لتكن } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ مجموعات ما. أثبت أن } \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{i=n} \overline{A_i}$$

المصطلحات العلمية Terminology

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
أساليب البرهان	Methods of Proof
الاستقراء الرياضي	Mathematical Induction
برهان مباشر	Direct Proof
برهان غير مباشر	Indirect Proof
برهان المعاكس الايجابي	by Contrapositive A Proof
برهان التناقض	A Proof by Contradiction
برهان الاستقراء الرياضي	A Proof by Mathematical Induction
قانون التعويض	Law of Substitution
الانفصال	Modus Ponens (or Direct Inference)
قوانين دومورغان	De Morgan's Law
الصيغة الأخرى لقانون التعويض	Other Formula for Law of Substitution
قوانين دومورغان المعممة	Generalized De Morgan's Law
قواعد الاستنتاج المنطقي	Rules of Inference
الإضافة	Addition
التبسيط	Simplification
الانفصال	Modus Ponens
التحمل	Modus Tollens
القياس التخييري	Disjunctive Syllogism
القياس الافتراضي	Hypothetical Syllogism
العطف	Conjunction
معضلة البناء	Constructive Dilemma
معضلة الهدم	Destructive Dilemma

الفصل السابع

العلاقات

The Relations

216.....	الفصل السابع
216.....	العلاقات
216.....	<i>The Relations</i>
218.....	الأزواج المرتبة Ordered Pair
218.....	تساوي الأزواج المرتبة
218.....	مصطلحات Terms
218.....	العلاقات الثنائية Binary Relations
221.....	Sets Arising from Binary Relations مجموعات ناشئة من العلاقات الثنائية
221.....	نطاق R Dom(R)
221.....	مدى R Ran(R)
221.....	مجموعة العناصر المنسوبة لـ x بالعلاقة R (R-Relative x) $R(x)$
221.....	مجموعة العناصر المنسوبة لـ A_1 بالعلاقة R (R-Relative A_1) $R(A_1)$

222.....	Theorem one 1	نظرية 1
223.....	Representing Relations	تمثيل العلاقات
223.....	Using Matrices	استخدام المصفوفات (a)
225.....	Using Directed Graph	استخدام رسم بياني موجه (b)
226.....	Terms	مصطلحات
227.....	Restriction of Relation to a Set	حصر العلاقة في مجموعة
227.....	Relational Composition	مركب العلاقات
229.....	Theorem Two 2	نظرية 2
230.....	Paths in Directed Graph	المسارات في الرسم البياني الموجه
235.....	Relational Inverse	معكوس العلاقة
235.....	Properties of Relations	خصائص العلاقات
235.....	Reflexivity	1. انعكاسية
235.....	Irreflexivity	2. غير انعكاسية
237.....	Symmetry	3. التماثلية
237.....	Asymmetry	4. اللاتماثلية
238.....	Antisymmetry	5. التخالفية
240.....	Transitivity	6. التعددي
240.....	Theorem Three 3	نظرية 3
241.....	Terms	مصطلحات
241.....	Graph of R	مخطط العلاقة R
242.....	Connected Set	المجموعة المترابطة (متصلة)
242.....	Theorem Four 4	نظرية 4
242.....	Equivalence	7. تكافؤ
244.....	Congruence Modulo	تطابق الباقي
245.....	Theorem Five 5	نظرية 5
246.....	Partition	تجزئة
247.....	Equivalence Relation and Partition	علاقة التكافؤ والتجزئة
247.....	Theorem Six 6	نظرية 6
248.....	Equivalence Classes	صفوف التكافؤ
248.....	Theorem Seven 7	نظرية 7
248.....	Theorem Eight 8	نظرية 8
249.....	Theorem Nine 9	نظرية 9
251.....	Solved Exercises	تمارين محلولة
259.....	Unsolved Exercises	تمارين غير محلولة
261.....	Terminology	المصطلحات العلمية

الأزواج المرتبة Ordered Pair

عرفنا سابقاً ضرب الديكارتى¹ للمجموعتين A و B بالمساواة

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

نسمي العنصر (a, b) زوجاً مرتباً *ordered pair*. ويمكن تعريف الزوج المرتب بشكل مجموعة هكذا $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ ، ويسمى a المسقط الأول ويسمى b المسقط الثاني.

تساوي الأزواج المرتبة:

نقول إن الزوج المرتب (x, y) يساوي الزوج المرتب (a, b) إذا وفقط إذا $a = x$ و $b = y$. وبصيغة أخرى $(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow (a = x) \wedge (b = y)$ الحظ أن المسقط الأول a في (a, b) يساوي المسقط الأول x في (x, y) . و المسقط الثاني b في (a, b) يساوي المسقط الثاني y في (x, y) . الحظ أيضاً، أن الزوجين $(a, b) \neq (b, a)$ مختلفان، فالترتيب له أهميته في دراسة الأزواج المرتبة.

مصطلحات² Terms

أطلقنا على العنصر (a, b) زوجاً مرتباً *ordered pair*. ونطلق على (a, b, c) ثلاثية مرتبة *ordered triple*. ونطلق على (a, b, c, d) رباعية مرتبة *ordered quadruplet*. ونطلق على (a, b, c, d, e) خماسية مرتبة *ordered quintuplet*. و سداسية *sextuplet* وسباعية *sevenfold* وثمانية *octave* وغالباً ما نحذف كلمة مرتبة. وأخيراً نطلق على $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ النونية المرتبة *ordered n-tuple*.

العلاقات الثنائية Binary Relations

أفضل طريقة لتمثيل عناصر من مجموعتين مختلفتين، هي استخدام الأزواج المرتبة، ذات الصلة. ونطلق على مجموعات الأزواج المرتبة علاقات. ندرس أولاً العلاقات الثنائية ثم نعرف عناصر ذات صفات معينة مثل التكافؤ.

لتكن A و B مجموعتين غير خاليتين. R علاقة ثنائية من A إلى B إذا كانت R مجموعة جزئية من $A \times B$.

¹ انظر فصل الإقتراعات السابق.

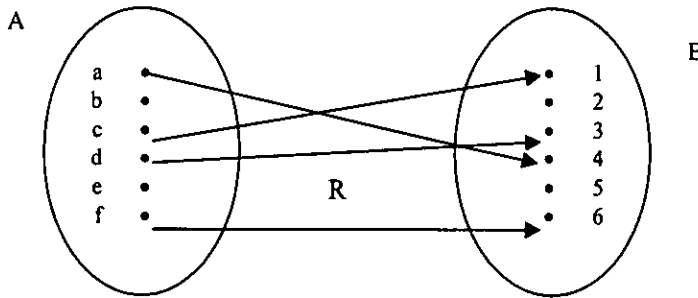
² مبادئ التحليل الرياضي ترجمة د. وليد ديب. منشورات مجمع اللغة العربية الأردني. 1984م.

Let A and B be nonempty sets. A **binary relation** R from A to B is a subset of $A \times B$.

إن العلاقة الثنائية R من A إلى B هي مجموعة أزواج مرتبة بحيث يأتي العنصر الأول للزوج المرتب من A والعنصر الثاني من B .

نستخدم الصياغة aRb لتدوين أن $(a, b) \in R$ وكذلك aRb لتدوين $(a, b) \notin R$. علاوة على ذلك، عندما يكون العنصر (a, b) ينتمي إلى R ، نقول a مرتبط مع b بالعلاقة R . ونسمي A مصدراً (مجالاً) للعلاقة R ، ونسمي B هدفاً (المجال المقابل) للعلاقة R . وعندما تكون $A = B$ أي $R \subset A \times A$ نقول العلاقة R معرفة على A .

و بما أن العلاقة R مجموعة جزئية من $A \times B$ فمن المحتمل وجود عناصر من A غير مرتبطة مع أي عنصر من B . واحتمال وجود عناصر من B غير مرتبط بها أي عنصر من A . والرسم التخطيطي التالي يوضح ذلك:



مثال (1): لتكن $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{a, b\}$ مجموعتين. ولتكن R علاقة ثنائية من A إلى B معرفة بالشكل التالي:
 $R = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, b)\}$
 نفسه مجموعة جزئية فعلية من $A \times B$.
مثال (2): لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. ولتكن R علاقة ثنائية معرفة على A بالشكل التالي:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$

مثال (3): لتكن $A = \{1,2,3,4,5\}$. ولتكن R علاقة ثنائية معرفة على A بالشكل

التالي: $aRb \Leftrightarrow a > b$ أوجد R ؟

الحل: $R = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$

مثال (4): لتكن $A = \{1,2,3,4,5\}$. ولتكن R علاقة ثنائية معرفة على A بالشكل

التالي: $aRb \Leftrightarrow a \text{ divides } b$ أوجد R ؟

الحل: $R = \{(a,b) \mid a \text{ divides } b\}$ إذن العلاقة المطلوبة هي:

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$

مثال (5): لتكن $A = \{1,2,3,4,5\}$. ولتكن R علاقة ثنائية معرفة على A بالشكل التالي:

$aRb \Leftrightarrow 2 \text{ divides } a - b$ أوجد R ؟

الحل: $R = \{(a,b) \mid 2 \text{ divides } a - b\}$ إذن $R = \{(3,1), (5,1), (4,2), (5,3)\}$

تمارين (1): لتكن $A = \{1,2,3\}$. ولتكن R علاقة ثنائية معرفة على A بـ

$X R Y \Leftrightarrow X \subset Y$. العلاقة R تعرف بالمساواة التالية:

$R = \{(X,Y) \in P(A) \times P(A) \mid X \subset Y\}$ أوجد عناصر R ؟

تمارين (2): لتكن $A = \{1,2,3,4,5\}$. ولتكن R علاقة معرفة على A بـ

$aRb \Leftrightarrow a \leq b$ أوجد R ؟

تمارين (3): لتكن $A = \{1,2,3,4,5\}$. ولتكن R علاقة معرفة على A بـ

$aRb \Leftrightarrow b \text{ divides } a$ أوجد R ؟

تمارين (4): لتكن $A = \{1,2,3,4,5\}$. ولتكن R علاقة معرفة على A بـ

$aRb \Leftrightarrow 2 \text{ divides } b - a$ أوجد R ؟

تمارين (5): لتكن $D_{20} = \{1,2,4,5,10,20\}$. ولتكن R معرفة على A بـ

$aRb \Leftrightarrow a \text{ divides } b$ أوجد R ؟

تمارين (6): لتكن $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$. ولتكن R معرفة على A بـ

$aRb \Leftrightarrow a \text{ divides } b$ أوجد R ؟

مجموعات ناشئة من العلاقات الثنائية *Sets Arising from Binary Relations*
لتكن R علاقة ثنائية من A إلى B .

نطاق R $Dom(R)$

مجموعة عناصر A المرتبطة مع عناصر B بالعلاقة R تدعى نطاق R Domain R . وتكتب بالصيغة التالية: $Dom(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B; xRy\}$

أمثلة محلولة:

من مثال (1) السابق نجد أن $Dom(R) = \{1,2,3\} = A$

من مثال (2) السابق نجد أن $Dom(R) = \{1,2,3,4\} \subset A$

من مثال (3) السابق نجد أن $Dom(R) = \{2,3,4,5\} \subset A$

من مثال (4) السابق نجد أن $Dom(R) = \{1,2,3,4,5\} = A$

من مثال (5) السابق نجد أن $Dom(R) = \{3,4,5\} \subset A$

مدى R $Ran(R)$

مجموعة عناصر B المرتبطة مع عناصر A بالعلاقة R تدعى مدى R Range R . وتكتب بالصيغة التالية: $Ran(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A; xRy\}$

أمثلة محلولة:

من مثال (1) السابق نجد أن $Ran(R) = \{a, b\} = B$

من مثال (2) السابق نجد أن $Ran(R) = \{2,3,4,5\} \subset A$

من مثال (3) السابق نجد أن $Ran(R) = \{1,2,3,4\} \subset A$

من مثال (4) السابق نجد أن $Ran(R) = \{1,2,3,4,5\} = A$

من مثال (5) السابق نجد أن $Ran(R) = \{1,2,3\} \subset A$

مجموعة العناصر المنسوبة لـ x بالعلاقة R $(R\text{-Relative } x) R(X)$
مجموعة عناصر B المرتبطة مع العنصر x بالعلاقة R .
وتصاغ هكذا $R(x) = \{y \in B \mid xRy\}$

مجموعة العناصر المنسوبة لـ A_1 بالعلاقة R $(R\text{-Relative } A_1) R(A_1)$
لتكن A_1 مجموعة جزئية من A . نعرف $R(A_1)$ مجموعة عناصر B المرتبطة مع عناصر x في A_1 بالعلاقة R . وتصاغ $R(A_1) = \bigcup_{x \in A_1} R(x)$

مثال (1): لتكن لدينا العلاقة R المعرفة على $A = \{a, b, c, d, e\}$ بـ
 $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a), (d, c), (c, b)\}$
 أوجد ناتج ما يلي:

$$Dom(R), Ran(R) \quad (a)$$

$$R(a), R(b), R(c), R(d), R(e) \quad (b)$$

$$R(A_1) \text{ if } A_1 = \{b, c, e\} \quad (c)$$

الحل:

$$\begin{aligned} Dom(R) &= \{a, b, c, d\} \subset A, \\ Ran(R) &= \{a, b, c\} \subset A \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} R(a) &= \{a, b\}, \\ R(b) &= \{c\}, \\ R(c) &= \{a, b\}, \\ R(d) &= \{c\}, \\ R(e) &= \phi \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \{b, c, e\} \\ R(A_1) &= R(b) \cup R(c) \cup R(e) \\ &= \{c\} \cup \{a, b\} \cup \phi \\ &= \{c, a, b\} \end{aligned} \quad (c)$$

نظرية 1 Theorem one

لتكن R علاقة من A إلى B و لتكن A_1 و A_2 مجموعتين جزئيتين من A .

1. إذا كان $A_1 \subset A_2$ فإن $R(A_1) \subset R(A_2)$

2. أيًا كانت A_1 و A_2 مجموعات جزئية من A فإن

$$R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2) \quad i.$$

$$R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2) \quad ii.$$

يتترك البرهان كتمرين للطالب.

مثال (1): لتكن لدينا العلاقة R المعرفة آتيا من $A = \{1, 2, 3\}$ إلى

$$R = \{(1, x), (1, z), (2, w), (2, p), (2, q), (3, y)\}, \quad b = \{x, y, z, w, p, q\}$$

و لتكن $A_1 = \{1, 2\}$ و $A_2 = \{2, 3\}$ مجموعتين جزئيتين من A . أوجد ناتج ما يلي:

$$1. R(A_1)$$

$$2. R(A_2)$$

$$3. R(A_1 \cup A_2)$$

$$4. R(A_1) \cup R(A_2)$$

$$5. R(A_1 \cap A_2)$$

$$6. R(A_1) \cap R(A_2)$$

الحل:

$$1. R(A_1) = \{x, z, w, q, p\}$$

$$2. R(A_2) = \{w, q, p, y\}$$

$$3. R(A_1 \cup A_2) = R(A) = \{x, y, z, w, q, p\} = B$$

$$4. R(A_1) \cup R(A_2) = \{x, y, z, w, q, p\} = B = R(A_1 \cup A_2)$$

$$5. R(A_1 \cap A_2) = R(\{2\}) = \{p, q, w\}$$

$$6. R(A_1) \cap R(A_2) = \{x, z, w, p, q\} \cup \{w, p, q, y\} = \{w, p, q\} = R(A_1 \cap A_2)$$

تمثيل العلاقات Representing Relations

هناك طرق عديدة لتمثيل العلاقات، سنكتفي هنا بالحدوث عن استخدام المصفوفات والبيان المتجه لتمثيل العلاقات الثنائية.

(a) استخدام المصفوفات Using Matrices

لتمثيل العلاقات الثنائية المنتهية باستخدام المصفوفات البولية (مصفوفات

صفر- واحد)، لنفرض أن R علاقة من A إلى B . والمجموعتين

المنتهيتين A و B معرفتان بـ $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ و

$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$. نستطيع تمثيل R باستخدام مصفوفة بولية،

نرمز لها بـ M_R ومعرفة بـ $M_R = [m_{ij}] ; i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n$

العنصر العام m_{ij} للمصفوفة نعرفه بـ $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{if } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$

أي أن انتماء الزوج المرتب (a_i, b_j) للعلاقة R يعني أن قيمة نظيره

m_{ij} من عنصر المصفوفة تساوي واحداً، وإلا صفراً.

مثال (1): ليكن لدينا $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{x, y\}$ والعلاقة

$R = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}$ من A إلى B .

أكتب المصفوفة M_R ؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} (1, x) & (1, y) \\ (2, x) & (2, y) \\ (3, x) & (3, y) \end{bmatrix} \xrightarrow{R = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}} M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ الحل:}$$

مثال (2): ليكن لدينا $A = \{x, y, z\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و المصفوفة } R \text{ أوجد العلاقة } R \text{ ؟}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{if } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}} R \text{ الحل:}$$

$$= \{(x, 2), (y, 1), (y, 3), (y, 4), (z, 1), (z, 3), (z, 5)\}$$

تمارين (1): لتكن R علاقة معرفة على المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

على النحو الآتي: $a R b \Leftrightarrow a = 2b - 1$ أوجد ما يلي؟

$Ran(R)$ (a)

$Dom(R)$ (b)

R (c)

M_R (d)

تمارين (2): لتكن R علاقة معرفة على المجموعة $A = \{1, 2, -1, -2\}$

على النحو الآتي: $a R b \Leftrightarrow ab > 0$ أوجد ما يلي؟

$Ran(R)$ (a)

$Dom(R)$ (b)

R (c)

M_R (d)

تمارين (3): لتكن R علاقة معرفة على المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

على النحو الآتي: $a R b \Leftrightarrow a + b = 5$ أوجد ما يلي؟

$Ran(R)$ (a)

$Dom(R)$ (b)

R (c)

M_R (d)

(b) استخدام رسم بياني موجه³ Using Directed Graph

إذا كانت R علاقة معرفة على المجموعة المنتهية A . فإن تمثيل العلاقة R على شكل رسم بياني موجه يتم بإتباع الخطوات التالية:

- 1- وضع عناصر A داخل دوائر صغيرة تدعى رؤوس البيان الموجه (Vertices مفردتها⁴ $(Vertex)$)
- 2- لكل عنصر (a_i, a_j) في العلاقة R نرسم الخط الموجه $\rightarrow$ الذي يبدأ بالدائرة المؤشرة بالعنصر a_i وينتهي بالدائرة المؤشرة بالعنصر a_j . تسمى هذه الخطوط الموجهة بأضلاع البيان الموجه.
- 3- نسمي الرسم البياني الموجه والنهائي بالمخطط الموجه للعلاقة R $directed graph of R$ ويختصر إلى $Digraph$ ، ونرمز له DG_R .

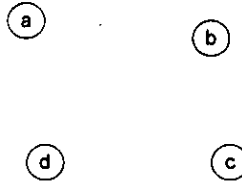
الخط الموجه الذي يخرج ويعود للرأس نفسه يدعى الدورة Cycle أو العروة، ويمثل العنصر (a_i, a_i) .

مثال (1): ليكن لدينا $A = \{a, b, c, d\}$ والعلاقة

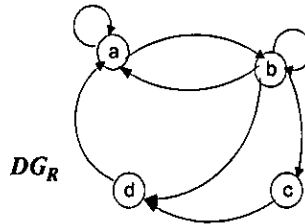
$$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, d), (c, a)\}$$

معرفة على A . ارسم DG_R البيان الموجه للعلاقة R ؟

1. وضع عناصر A داخل دوائر صغيرة تدعى رؤوس البيان الموجه Vertices



2. لكل عنصر (a_i, a_j) في العلاقة R نرسم الخط الموجه $\rightarrow$ الذي يبدأ بالدائرة المؤشرة بالعنصر a_i وينتهي بالدائرة المؤشرة بالعنصر a_j .

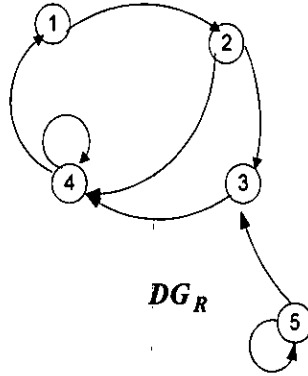


³ قاموس المواكب. أ. ناصر الشوباسي. سلسلة الرضا للمعلومات، دمشق. 2000م.

⁴ هناك من يطلق على رؤوس البيان عقد البيان مفردتها عقدة أو ذروة البيان

3. نسمي الرسم البياني المتجه والنهائي بالمخطط المتجه للعلاقة R ونرمز له بـ DG_R .

مثال (2): ليكن لدينا الرسم البياني المتجه DG_R أوجد R وأوجد A وأوجد مدى ونطاق R . وأوجد أيضاً M_R ؟



الحل: من رؤوس الرسم الموجهة نجد المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. من أضلاع البيان الموجهة نجد العلاقة $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 4), (5, 3), (5, 5)\}$ ومنه نحصل مدى R وهو $Ran(R) = A$ ونطاق R وهو $Dom(R) = A$ والمصفوفة M_R وهي

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصطلحات Terms

1. درجة داخلية للعنصر a : هي عدد العناصر b بحيث $(b, a) \in R$
In-degree of an element a is the number of elements b such that $(b, a) \in R$
2. درجة خارجية للعنصر a : هي عدد العناصر b بحيث $(a, b) \in R$ وهو $|R(a)|$

Out-degree of an element a is the number of elements b such that $(a, b) \in R$, and it is equal to $|R(a)|$.

3. درجة داخلية للرأس: هي عدد الأضلاع المنتهية في الرأس. (الضلع هو الخط الموجه)

In-degree of a vertex is the number of edges terminating at the vertex.

4. درجة خارجية للرأس: هي عدد الأضلاع الخارجة من الرأس.

Out-degree of a vertex is the number of edges leaving the vertex.

حصر العلاقة في مجموعة Restriction of Relation to a Set

ليكن لدينا المجموعة A والعلاقة R معرفة على A . لنفرض أن X مجموعة جزئية من A ، نعرف حصر العلاقة R في المجموعة الجزئية X بتقاطع العلاقة R مع حاصل الضرب الديكارتي لـ X ويرمز له بـ $R \cap (X \times X)$.

مثال (1): ليكن لدينا المجموعة $A = \{1,2,3,4,5\}$ والعلاقة

$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1), (4,4), (5,3), (5,5)\}$ معرفة على A .

لنفرض أن $X = \{1,2,3\}$ مجموعة جزئية من A . أوجد اقتصار R

على المجموعة X .

الحل: حصر العلاقة R في المجموعة الجزئية X هو $R \cap (X \times X)$ ؛ وبعد إيجاد حاصل الضرب الديكارتي نحصل:

$$\begin{aligned} R \cap (X \times X) \\ = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1), (4,4), (5,3), (5,5)\} \cap (\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}) \\ = \{(1,2), (2,3)\} \end{aligned}$$

مركب العلاقات Relational Composition

أولاً: لتكن R_1 و R_2 علاقات ثنائية من A إلى B . أي أن R_1 و R_2 مجموعات من الأزواج المرتبة من $A \times B$. إن عمليات الحساب على المجموعات يمكننا من تعريف علاقات جديدة مثل اتحاد علاقتين وتقاطعهما وفرقهما R_1 و R_2 وكذلك مكمل علاقة وعلى النحو الآتي:

1. اتحاد علاقتين:

$$R_1 \cup R_2 = \{(x, y) \mid ((x, y) \in R_1) \vee ((x, y) \in R_2)\}$$

2. تقاطع علاقتين:

$$R_1 \cap R_2 = \{(x, y) \mid ((x, y) \in R_1) \wedge ((x, y) \in R_2)\}$$

3. فرق علاقيتين:

$$R_1 - R_2 = \{(x, y) \mid ((x, y) \in R_1) \wedge ((x, y) \notin R_2)\}$$

4. متمم علاقة: $\overline{R_1} = \{(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \notin R_1\}$

5. فرق تناظر علاقيتين:

$$R_1 \oplus R_2 = \{(x, y) \mid ((x, y) \in (R_1 \cup R_2)) \wedge ((x, y) \notin (R_1 \cap R_2))\}$$

ثانياً: لتكن R علاقات ثنائية من A إلى B . ولتكن S علاقة ثنائية من B إلى C . مركب العلاقتين R و S ونرمز له بـ $S \circ R$ ويلفظ بعد R (S after R) ويعرف مركباهما بالمساواة التالية:

$$S \circ R = \{(x, z) \mid y \in B; xRy \wedge ySz\}$$

ثالثاً: لتكن R علاقات ثنائية معرفة على المجموعة A . مركب العلاقة R ونرمز له بـ $R \circ R = R^2$ ويعرف بالمساواة التالية:

$$R^2 = R \circ R = R^1 \circ R^1 = \{(x, z) \mid y \in A; xRy \wedge yRz\}; \quad R = R^1$$

رابعاً: لتكن R علاقات ثنائية معرفة على المجموعة A . نعرف $R^{(n+1)} = R^n \circ R$ بالمساواة التالية:

$$R^{n+1} = R^n \circ R = \{(x, z) \mid y \in A; xR^n y \wedge yRz\}$$

مثال (1): لنفرض أن $R_1 = \{(1, p), (2, q), (3, r)\}$

و $R_2 = \{(1, p), (1, q), (1, r), (1, s)\}$ علاقات ثنائية من $A = \{1, 2, 3\}$ إلى $B = \{p, q, r, s\}$. أوجد المجموعات التالية:

$$R_1 \cup R_2; R_1 \cap R_2; R_1 - R_2; R_2 - R_1; R_1 \oplus R_2; \overline{R_1}; \overline{R_2}$$

الحل:

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, p), (1, q), (1, r), (1, s), (2, q), (3, r)\} -$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1, p)\} -$$

$$R_1 - R_2 = \{(2, q), (3, r)\} -$$

$$R_1 \oplus R_2 = \{(1, q), (1, r), (1, s), (2, q), (3, r)\} -$$

$$R_2 - R_1 = \{(1, q), (1, r), (1, s)\} -$$

$$\overline{R_1} = (A \times B) - \{(1, p), (2, q), (3, r)\} -$$

$$\overline{R_2} = (A \times B) - \{(1, p), (1, q), (1, r), (1, s)\} -$$

مثال (2): لنفرض أن $R = \{(1, p), (1, s), (2, r), (3, p), (3, s)\}$ علاقة ثنائية من $A = \{1, 2, 3\}$ إلى $B = \{p, q, r, s\}$. ولتكن

$S = \{(p, x), (q, x), (r, y), (r, z), (s, y)\}$ علاقة ثنائية من
 $B = \{p, q, r, s\}$ إلى $C = \{x, y, z\}$. أوجد $R \circ S$ ؟

الحل: نأخذ تراكيب الأزواج التي تحقق التعريف السابق لمركب العلاقتين

$$(1, y) = (1, s) \wedge (s, y) \text{ ، } (1, x) = (1, p) \wedge (p, x) \text{ وهي:}$$

$$(3, y) = (3, s) \wedge (s, y) \text{ ، } (3, x) = (3, p) \wedge (p, x)$$

$$(2, z) = (2, r) \wedge (r, z) \text{ ، } (2, y) = (2, r) \wedge (r, y)$$

$$S \circ R = \{(1, x), (1, y), (3, x), (3, y), (2, y), (2, z)\} \text{ إذن}$$

مثال (3): لنفرض أن R علاقة ثنائية معرفة على $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ ، أوجد R^n ، $n = 2, 3, 4$ ؟

$$\text{الحل: } R^2 = R \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$$

$$R^3 = R^2 \circ R = (R \circ R) \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

$$R^4 = R^3 \circ R = ((R \circ R) \circ R) \circ R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

$$R^n = R^3 \text{ فإن } n \geq 3 \text{ إذن لكل } R^4 = R^3$$

نظرية 2 Theorem Two

أولاً: لتكن R_1 و R_2 علاقات ثنائية من A إلى B وعليه فإن المتساويات التالية صحيحة

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} \quad (a)$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} \quad (b)$$

ثانياً: لتكن R_1 علاقة من A إلى B و R_2 علاقة من B إلى C . المتساوية التالية

$$M_{R_1 \circ R_2} = M_{R_2} O M_{R_1} \text{ صحيحة:}$$

ثالثاً: لتكن R علاقات ثنائية معرفة على المجموعة A . المتساوية التالية

$$M_{R^n} = \underbrace{M_R O M_R O \dots O M_R}_{n \text{ factors}} = [M_R]^n O \text{ صحيحة:}$$

مثال (1): لتكن لدينا مصفوفات العلاقات التالية:

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد $M_{R_1 \cup R_2}$ ؟ وأوجد $M_{R_1 \cap R_2}$ ؟

الحل: $M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال (2): أوجد المصفوفة $M_{S \circ R}$ لمركب العلاقات الممثلة

بالمصفوفات $M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ؟

الحل: $M_{S \circ R} = M_S O M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

مثال (3): أوجد المصفوفة التي تمثل العلاقة R^2 إذا علمت أن العلاقة R يمثلها

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل: $M_{R \circ R} = M_R O M_R = [M_R]^2 O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

المسارات في الرسم البياني الموجه *Paths in Directed Graph*

1. لتكن R علاقة معرفة على المجموعة A . نسمى Π مساراً في R

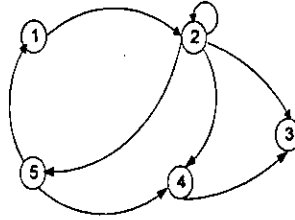
بطول n ($n \in \mathbb{Z}^+$) من a إلى b ؛ المتتالية المنتهية المعرفة

بـ $\Pi = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$ ، والتي تبدأ من a وتنتهي في b بحيث

$$a R x_1, x_1 R x_2, \dots, x_{n-1} R b$$

الحظ أن المسار الذي طوله n يشمل $n+1$ عنصراً. وليست هذه العناصر بالضرورة متميزة.

مثال (1): المسار $\Pi_1 = 1,2,5,4,3$ بطول 4 و المسار $\Pi_2 = 1,2,5,1$ هو دورة بطول 3 و المسار $\Pi_3 = 2,2$ هو دورة بطول 1



2. لتكن n ثابتاً صحيحاً موجباً. العلاقة R^n معرفة على A بـ $xR^n y$ وتعني وجود مسار في R بطول n من x إلى y .

Let n be a fixed positive integer. A relation R^n on A , is defined by $xR^n y$ which means there is a path of length n from x to y in R

3. نسمي R^∞ علاقة مربوطة العلاقة R المعرفة على A بـ $xR^\infty y$ وتعني وجود مسار في R من x إلى y . وذلك أيّاً كان طول المسار الموجود في R من x إلى y . أي أن $R^\infty = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$ و $M_{R^\infty} = M_{R^1} \vee M_{R^2} \vee \dots \vee M_{R^n}$

The Connectivity relation R^∞ of relation R on a set A , is defined by $xR^\infty y$ which means there is some path in R from x to y .

4. $R^n(x)$ هي مجموعة الرؤوس في البيان المتجه والتي يمكن بلوغها بوجود مسار في R بطول n ابتداءً من x .

5. $R^\infty(x)$ هي مجموعة الرؤوس في البيان المتجه والتي يمكن بلوغها بوجود مسار في R - أيّاً كان طول المسار - ابتداءً من x .

6. نسمي R^* علاقة موصلية العلاقة R المعرفة على A بـ $xR^* y$ وتعني إما $x = y$ أو $xR^\infty y$. أي أن y يمكن الوصول إليها من x ، إما y هي x أو بوجود مسار في R من x إلى y . وعليه فإن $R^* = \Delta \cup R^\infty$

و $M_{R^*} = I_n \vee M_{R^{\infty}}$. آخذين بالاعتبار أن العلاقة Δ تعرف
 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in A\}$.

The Reachability relation R^* of relation R on a set A , is defined by xR^*y which means $x = y$ or $xR^{\infty}y$, y is reachable from x if either y is x or there is some path in R from x to y .

7. ليكن لدينا المسار $\Pi_1 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$ في R من a إلى b وطوله n ، ولدينا أيضاً المسار $\Pi_2 = b, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, c$ وطوله m . نسمي المسار Π من a إلى c بطول $n + m$ ، هو مركب المسارين Π_1 و Π_2 ودون $\Pi_2 \circ \Pi_1$ والمعرف بـ $\Pi_2 \circ \Pi_1 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, c$.

مثال (1): لنفرض أن $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (c, e), (d, e)\}$ علاقة ثنائية معرفة على $A = \{a, b, c, d, e\}$.

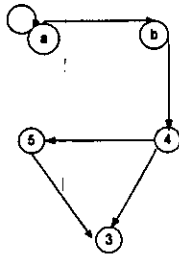
أوجد ما يلي :

أولاً: ارسم البيان المتجه للعلاقة R ؟

ثانياً: احسب R^* , R^{∞} , R^n ؟

الحل:

أولاً: الرسم البياني للمتجه للعلاقة R هو المخطط التالي.



ثانياً: نحسب M_R من العلاقة R . ومنها نحصل

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ثم نحسب R^2 من $M_{R^2} = M_R \circ M_R$ حيث M_{R^2} ومنها نحصل

$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^2 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,d), (b,e), (c,e)\} \text{ إذن}$$

ثم نحسب R^3 من M_{R^3} حيث $M_{R^3} = M_{R^2} OM_R$ ومنه نحصل

$$M_{R^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^3 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,e)\} \text{ إذن}$$

ثم نحسب R^4 من M_{R^4} حيث $M_{R^4} = M_{R^3} OM_R$ ومنه نحصل

$$M_{R^4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^4 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e)\} \text{ فنستنتج}$$

ثم نحسب R^5 من M_{R^5} حيث $M_{R^5} = M_{R^4} OM_R$ ومنه نحصل

$$M_{R^5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^5 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e)\} = R^4$$

و عليه تكون $R^n = R^4$ لكل $n \geq 5$

ثم نحسب R^∞ من $R^\infty = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$ فنستنتج

$$R^\infty = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e), (c,d), (c,e), (d,e)\}$$

$$M_{R^\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و منه نحصل}$$

وأخيراً نحسب R^* من $R^* = \Delta \cup R^\infty$ ونحسب $M_{R^*} = I_n \vee M_{R^\infty}$

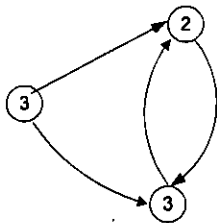
فنستنتج

$$R^* = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e), (c,d), (c,e), (d,e)\}$$

و منه نحصل

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تمارين (1): من الرسم البياني المتجهة التالي أوجد ما يلي:



(a) M_R و R

(b) M_{R^2} و R^2

(c) M_{R^3} و R^3

(d) M_{R^∞} و R^∞

(e) M_{R^*} و R^*

معكوس العلاقة Relational Inverse

نعرف معكوس العلاقة R ببساطة الصورة المعكوسة للعلاقة R ونرمز لها بـ R^{-1} .

The relational inverse of a relation R is simply its mirror image and is denoted by R^{-1} .

مثال (1): ليكن لدينا العلاقة R من A إلى B ، بحيث $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$ ومنها نحصل معكوسها R^{-1} الذي يحقق المساواة التالية: $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), (b_3, a_3)\}$ ومن المفيد ملاحظة أن $Dom(R^{-1}) = Ran(R)$ بينما $Dom(R) = Ran(R^{-1})$.

خصائص العلاقات Properties of Relations

في هذه الفقرة نفرض أن العلاقة R معرفة على المجموعة A . وفيما يلي تعريف لبعض الخصائص المميزة للعلاقات الثنائية:

1. انعكاسية Reflexivity

تكون العلاقة R انعكاسية إذا $(a, a) \in R$ لكل عنصر $a \in A$.

وبكلام آخر كل عنصر في المجموعة A مربوط مع نفسه بالعلاقة R .



The relation R on a set A is called reflexive if $(a, a) \in R$ for every element $a \in A$.

ويفيد هذا أن كل رأس من رؤوس البيان الموجهة لتمثيل العلاقة يحتوي على دورة (عروة). وفي مصفوفة العلاقة يكون كل عنصر من عناصر القطر الرئيس يساوي 1. أي $m_{ii} = 1; i = 1, 2, \dots, n$.

2. غير انعكاسية Irreflexivity

تكون العلاقة R غير انعكاسية إذا $(a, a) \notin R$ لكل عنصر $a \in A$.

The relation R on a set A is called irreflexive if $(a, a) \notin R$ for every element $a \in A$.

وبكلام آخر كل عنصر في المجموعة A غير مربوط مع نفسه بالعلاقة R .
 ويفيد هذا بأن رؤوس البيان المتجه لتمثيل العلاقة لا تحتوي على دورة
 (عروة). وفي مصفوفة العلاقة يكون كل عنصر من عناصر القطر
 الرئيس يساوي 0. أي $m_{ii} = 0; i = 1, 2, \dots, n$.

مثال (1): إذا كان لدينا المجموعة $A = \{a, b, c, d\}$. بين أي العلاقات التالية
 علاقة انعكاسية أم غير انعكاسية؟

$$R1 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, d), (d, a), (d, d)\} - 1$$

$$R2 = \{(a, a), (a, b), (b, a)\} - 2$$

$$R3 = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (c, c), (c, a), (d, d)\} - 3$$

$$R4 = \{(b, a), (c, b), (d, a), (d, b), (d, c)\} - 4$$

$$R5 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\} - 5$$

$$R7 = \Delta = \{(x, x) | x \in A\} - 6$$

$$R8 = \phi - 7$$

الحل: 1- $R1$ ليست انعكاسية لأن $(c, c) \notin R1$

2- $R2$ ليست انعكاسية لأن $(c, c) \notin R2, (d, d) \notin R2, (b, b) \notin R2$

3- $R3$ انعكاسية ، كل عنصر مربوط مع نفسه بالعلاقة

4- $R4$ غير انعكاسية ، كل عنصر غير مربوط مع نفسه بالعلاقة

5- $R5$ انعكاسية ، كل عنصر مربوط مع نفسه بالعلاقة

6- $R7 = \Delta = \{(x, x) | x \in A\}$ علاقة مساواة فهي انعكاسية

7- $R8 = \phi$ غير انعكاسية

تمارين (1): لتكن المجموعة $A = Z$ مجموعة الأعداد الصحيحة. بين أي
 العلاقات التالية علاقة انعكاسية أم غير انعكاسية؟

$$R1 = \{(a, b) | a \leq b\} , R2 = \{(a, b) | a > b\}$$

$$R3 = \{(a, b) | a = b\} , R4 = \{(a, b) | a = b + 1\}$$

$$R5 = \{(a, b) | a + b \leq 3\}$$

3. التماثلية Symmetry

تكون العلاقة R تماثلية متى وجد $(x, y) \in R$ عندئذٍ يوجد $(y, x) \in R$.



The relation R on a set A is called symmetric, if whenever $(x, y) \in R$ then $(y, x) \in R$

ويفيد هذا أنه متى وجد خط متجه من الرأس x إلى الرأس y ، عندئذٍ يوجد خط متجه من الرأس y إلى الرأس x . أي أن الخطوط المتجهة تكون دائماً في الاتجاهين. وفي مصفوفة العلاقة نحصل المتساوية $m_{ij} = m_{ji}; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$. أي أن العناصر التي فوق القطر متساوية مع نظيرتها تحت القطر. وبكلام آخر فإن كل زوج مرتب في العلاقة التماثلية R يكون معكوسه أيضاً في R .

4. اللاتماثلية Asymmetry

تكون العلاقة R لا تماثلية متى وجد $(x, y) \in R$ عندئذٍ $(y, x) \notin R$

The relation R on a set A is called asymmetric, if whenever $(x, y) \in R$ then $(y, x) \notin R$

ويفيد هذا أنه متى وجد خط متجه من الرأس x إلى الرأس y ، عندئذٍ لا يوجد خط متجه من الرأس y إلى الرأس x . أي أن الخطوط المتجهة تكون دائماً في اتجاه واحد فقط. وفي مصفوفة العلاقة ليس بالضرورة أن تكون العناصر التي فوق القطر متساوية مع نظيرتها تحت القطر

$$\begin{cases} \text{if } m_{ij} = 1 \text{ then } m_{ji} = 0 \\ \text{if } m_{ij} = 0 \text{ then } m_{ji} = 1 \end{cases}$$

مثال (2): إذا كان لدينا المجموعة $A = \{a, b, c, d\}$. بين أي العلاقات التالية علاقة تماثلية أم لا تماثلية؟

$$R1 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, d), (d, a), (d, d)\} \quad 1$$

$$R2 = \{(a, a), (a, b), (b, a)\} \quad 2$$

$$R3 = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (c, c), (c, a), (d, d)\} \quad 3$$

$$R4 = \{(b, a), (c, b), (d, a), (d, b), (d, c)\} \quad 4$$

$$R5 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\} \quad 5$$

$$R7 = \Delta = \{(x, x) \mid x \in A\} \quad 6$$

الحل:

$$1. \quad R1 \text{ ليست تماثلية لأن } (d, c) \notin R1$$

$$2. \quad R2 \text{ تماثلية}$$

$$3. \quad R3 \text{ ليست تماثلية يكفي أن } (d, a) \notin R3$$

$$4. \quad R4 \text{ لا تماثلية}$$

$$5. \quad R5 \text{ ليست تماثلية يكفي أن } (c, a) \notin R5$$

$$6. \quad R7 = \Delta = \{(x, x) \mid x \in A\} \text{ علاقة مساواة فهي تماثلية}$$

تمارين (2): لتكن المجموعة $A = \mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة. بين أي العلاقات التالية علاقة تماثلية أم غير تماثلية؟

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (4, 1)\} \quad (a)$$

$$R1 = \{(a, b) \mid a \leq b\} \quad (b)$$

$$R2 = \{(a, b) \mid a > b\} \quad (c)$$

$$R3 = \{(a, b) \mid a = b\} \quad (d)$$

$$R4 = \{(a, b) \mid a = b + 1\} \quad (e)$$

$$R5 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\} \quad (f)$$

5. التخالفية Antisymmetry

تكون العلاقة R تخالفية متى وجد $(x, y) \in R$ و $(y, x) \in R$ عندئذٍ تكون $x = y$. أو تكون العلاقة R تخالفية متى وجد $x \neq y$ عندئذٍ فبما $(x, y) \notin R$ أو $(y, x) \notin R$.

The relation R on a set A is called antisymmetric, if whenever $(x, y) \in R$ and $(y, x) \in R$ then $x = y$. The relation R on a set A is called antisymmetric, if whenever $x \neq y$ then $(x, y) \notin R$ or $(y, x) \notin R$.

ويفيد هذا أنه متى وجد خط متجه من الرأس x إلى الرأس y ، عندئذ فإما أن يكون هذا الخط دورة عندئذ $x = y$ أو لا يوجد خط متجه من الرأس y إلى الرأس x . أي أن الخطوط المتجهة دائماً في اتجاه واحد. وفي مصفوفة العلاقة نحصل المتباينة $m_{ij} \neq m_{ji}; i \neq j$. أي أن العناصر التي فوق القطر غير متساوية مع نظيرتها تحت القطر.

مثال (3): إذا كان لدينا المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$. هل العلاقة $R = \{(1,2), (2,2), (3,4), (4,1)\}$ تخالفية ؟

الحل: R تخالفية، التعريف التالي مثبت فالعلاقة R تخالفي متى وجد

$x \neq y$ عندئذ فإما $(x, y) \in R$ أو إما $(y, x) \in R$.

مثال (4): إذا كان لدينا المجموعة $A = \mathbb{Z}^+$. هل العلاقة $R = \{(a, b) | a \text{ divides } b\}$ تخالفية ؟

الحل: R تخالفية، التعريف التالي مثبت فالعلاقة R تخالفية متى وجد $x \text{ divides } y$ و $y \text{ divides } x$ عندئذ $x = y$.

تمارين (3): لتكن المجموعة $A = \mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة. بين أي العلاقات التالية علاقة تخالفية ؟

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (4,1)\} \quad (a)$$

$$R1 = \{(a, b) | a \leq b\} \quad (b)$$

$$R2 = \{(a, b) | a > b\} \quad (c)$$

$$R3 = \{(a, b) | a = b\} \quad (d)$$

$$R4 = \{(a, b) | a = b + 1\} \quad (e)$$

$$R5 = \{(a, b) | a + b \leq 3\} \quad (f)$$

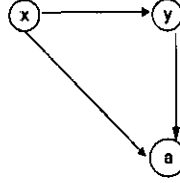
تمارين (4): بين خصائص العلاقات الممثلة بالمصفوفات التالية؟

$$m_{R3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{R1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_{R6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, m_{R5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, m_{R4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. التبعدي Transitivity

نقول إن العلاقة R تبعديّة، متى وجد $(x, y) \in R$ و $(y, z) \in R$ عندئذٍ يوجد $(x, z) \in R$.



The relation R on a set A is called transitive, if whenever $(x, y) \in R$ and $(y, z) \in R$ then $(x, z) \in R$.

إذا كانت العلاقة R تبعدي، ففي الرسم البياني الموجه للعلاقة R ، يمكن استبدال كل مسار طوله 2 فأكثر بمسار طوله 1. بكلام آخر في المصفوفة التي تمثل العلاقة فإذا كان $m_{ik} = 1$ و $m_{kj} = 1$ فإن $m_{ij} = 1$. الحظ من تعريف مركب العلاقات السابق، أن العلاقة R تحتوي على مركبها

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in R \\ (y, z) \in R \end{array} \right\} \Rightarrow (x, z) \in R^2 = R \circ R \subset R$$

ومنها تستنتج النظرية التالية

نظرية 3 Theorem Three

$$R^n \subset R; n = 1, 2, \dots \text{ أي } R \text{ علاقة تبعدي}$$

مثال (5): إذا كان لدينا المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4\}$. هل العلاقة

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (4, 2)\} \text{ تبعدي؟}$$

الحل: R علاقة تبعدي، لأنه لا توجد عناصر x, y, z في A ، بحيث

$$(x, y) \in R \text{ و } (y, z) \in R \text{ و } (x, z) \notin R$$

مثال (6): إذا كان لدينا المجموعة $A = \mathbb{Z}^+$. هل العلاقة

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ divides } b\} \text{ تبعدي؟}$$

الحل: R تبعدي، لأنه متى وجد $x \text{ divides } y$ و $y \text{ divides } z$ عندئذٍ

$$x \text{ divides } z$$

مثال (7): إذا كان لدينا المجموعة $A = Z$. هل العلاقة $R = \{(a, b) | a < b\}$ تعدي؟

$$\text{الحل: } R \text{ تعدي، لأنه } \begin{cases} a < b \\ b < c \end{cases} \Rightarrow a < c$$

تمارين (5): إذا كان لدينا المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ؛ أي العلاقات التالية تعدي؟

$$1. R_1 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$2. R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$3. R_3 = \{(4, 3)\}$$

$$4. R_4 = \{(1, 2), (1, 3), (4, 2)\}$$

تمارين (6): إذا كان لدينا المجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ ؛ هل العلاقة التي تمثلها

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ المصفوفة } M_R \text{ علاقة تعدي؟}$$

تمارين (7): إذا كان لدينا المجموعة $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ؛ هل العلاقة الممثلة بـ

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ علاقة تعدي؟}$$

مصطلحات Terms

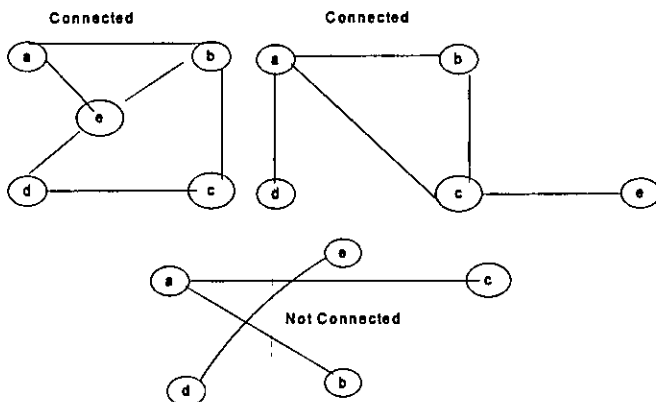
مخطط العلاقة R Graph of R

إذا كانت العلاقة R علاقة تماثل، فهذا يعني أن الخطوط المتجهة *directed edges* تكون في الاتجاهين (-) بين كل رأسين يحققان علاقة التماثل (-). وعليه يمكن استبدال هذين الخطين المتجهين $\rightarrow$ بخط واحد "—" دون

أسهم *undirected edge* بين الرأسين، ويسميان برأسين متجاورين *adjacent vertices*. وفي هذه الحالة يسمى الرسم البياني بمخطط العلاقة R . *Graph of R*

المجموعة المترابطة (متصلة) Connected Set

تكون المجموعة A مترابطة إذا وجد مسار من أي عنصر في المجموعة A إلى أي عنصر آخر في A .



نظرية 4 Theorem Four

- لتكن R علاقة معرفة على المجموعة A . إذن
1. العلاقة R انعكاسية تفيد أن $a \in R(a)$ لكل $a \in A$.
 2. العلاقة R تماثلية تفيد أن $a \in R(b)$ إذا وفقط إذا $b \in R(a)$.
 3. العلاقة R تعدي تفيد إذا $b \in R(a)$ و $c \in R(b)$ عندئذ $c \in R(a)$.

7. تكافؤ Equivalence

العلاقة R هي علاقة تكافؤ إذا كانت R تحقق خصائص الانعكاسية والتماثلية والتعدي.

A relation R on a set A is called equivalence if R is reflexive, symmetric and transitive.

مثال (8): إذا كان لدينا المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$ هل العلاقة المعرفة بـ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,3), (3,3), (4,4)\}$ تكافؤ؟

الحل: R تكافؤ لأنها انعكاسية $\Delta \subset R$ $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ و تماثلية $(1,2), (2,1), (3,4), (4,3)$ و تعدي لأنها تحقق

$(3,4), (4,3) \mapsto (3,3)$	$(1,1), (1,2) \mapsto (1,2)$
$(4,3), (3,4) \mapsto (4,4)$	$(2,1), (1,1) \mapsto (2,1)$
$(3,3), (3,4) \mapsto (3,4)$	$(2,1), (1,2) \mapsto (2,2)$
$(4,3), (3,3) \mapsto (4,3)$	$(1,2), (2,1) \mapsto (1,1)$

مثال (9): إذا كان لدينا المجموعة $A = Z$. هل العلاقة $R = \{(a,b) | a \leq b\}$ تكافؤ؟

الحل: R ليست تكافؤاً، لأنها ليست تماثلاً حيث $5 \leq 6$ بينما $6 \not\leq 5$
 علماً أن العلاقة $\leq$ هي انعكاسية $a \leq a$ دائماً صحيحة وكذلك تعدي

$$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$$

مثال (10): إذا كان لدينا العلاقة R معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية. هل العلاقة $R = \{(a,b) | (a-b) \in Z\}$ تكافؤ؟

الحل: R تكافؤ لأنها

- انعكاسية $a - a = 0 \in Z$

- و تماثلية فإذا وجد $(a,b) \in R$ إذن $(a-b) \in Z$ ومنه نحصل

$$(b-a) \in Z \text{ إذن } (b,a) \in R$$

- و تعدي حيث إن

$$\left. \begin{aligned} (a,b) \in R &\Rightarrow (a-b) \in Z \\ (b,c) \in R &\Rightarrow (b-c) \in Z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{[(a-b) + (b-c)]}_{\text{sum of two integers}} \Rightarrow (a-c) \in Z \Rightarrow (a,c) \in R$$

تمارين (8): لتكن المجموعة $A = Z$ مجموعة الأعداد الصحيحة. بين أي العلاقات التالية علاقة تكافؤ؟

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (4,1)\} \quad (a)$$

$$R1 = \{(a,b) | a \leq b\} \quad (b)$$

$$R2 = \{(a,b) | a > b\} \quad (c)$$

$$R3 = \{(a,b) | a = b\} \quad (d)$$

$$R4 = \{(a,b) | a = b + 1\} \quad (e)$$

$$R5 = \{(a,b) | a + b \leq 3\} \quad (f)$$

تمارين (9): إذا كان لدينا المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$ ؛ هل العلاقة الممثلة بـ

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

علاقة تكافؤ؟

تمارين (10): إذا كان لدينا المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$ ؛ هل العلاقة الممثلة بـ

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

علاقة تكافؤ؟

تطابق الباقي Congruence Modulo

لتكن $\equiv$ علاقة معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة. نسمي هذه العلاقة $\equiv$ تطابق باق مقياس n ($n \in \mathbb{Z}^+$) حسب القاعدة $n \text{ divides } (x - y) \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n}$. و بكلام آخر $(x, y) \in \equiv$ يفيد أن باقي قسمة x على n يطابق باقي قسمة y على n .

مثال (1): لتكن $n = 2$ ، أوجد ستة أزواج مرتبة من العناصر التي تنتمي لعلاقة تطابق الباقي مقياس 2؟

الحل: إذا كان x عدداً صحيحاً فيمكن كتابته على النحو الآتي $x = 2q + r$ حيث r باقي القسمة على 2 و q ناتج القسمة هكذا:

$$\begin{aligned} 8 &= 2 \cdot 4 + 0 \\ 9 &= 2 \cdot 4 + 1 \\ 10 &= 2 \cdot 5 + 0 \\ 11 &= 2 \cdot 5 + 1 \\ 12 &= 2 \cdot 6 + 0 \\ 13 &= 2 \cdot 6 + 1 \\ 14 &= 2 \cdot 7 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot 0 + 0 \\ 1 &= 2 \cdot 0 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 6 &= 2 \cdot 3 + 0 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \end{aligned}$$

ومنه إذا كانت x عدداً فردياً $x = 2m + 1$ أما إذا كانت x عدداً زوجياً
 $x = 2p + 0$ نستنتج أن $0 \equiv 2 \pmod{2}$ ، $2 \equiv 10 \pmod{2}$ ، $8 \equiv 24 \pmod{2}$ ، و
 $3 \equiv 1 \pmod{2}$ ، $13 \equiv 5 \pmod{2}$ ، $9 \equiv 101 \pmod{2}$ ، $8 \equiv 100 \pmod{2}$.

الحظ أن قسمة الأعداد الصحيحة على اثنين شطرت Z إلى مجموعتين
 أولاهما الأعداد الزوجية التي باقي قسمتها على 2 صفر، وثانيها
 مجموعة الأعداد الفردية التي باقي قسمتها على 2 واحد. ومن الجدير
 ذكره أن Z ناتج اتحاد مجموعتي الأعداد الفردية والزوجية.
 ومن المعلوم أن تقاطع المجموعتين هو المجموعة الخالية.

تمرين (1): بين إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة (إذا كانت خاطئة
 وضح السبب)؟

(a) $17 \equiv 4 \pmod{2}$

(b) $17 \equiv 4 \pmod{3}$

(c) $17 \equiv 4 \pmod{4}$

(d) $17 \equiv 4 \pmod{5}$

(e) $17 \equiv 4 \pmod{6}$

(f) $6 \equiv 2 \pmod{7}$

(g) $5 \equiv (-1) \pmod{3}$

(h) $6 \not\equiv 4 \pmod{3}$

(i) $43 \equiv 43 \pmod{10}$

نظرية 5 Theorem Five

علاقة $\equiv$ تطابق الباقي مقياس n ($n \in Z^+$)؛ هي علاقة تكافؤ على مجموعة
 الأعداد الصحيحة.

البرهان: العلاقة $\equiv$ انعكاسية؛ لنفرض $z \in Z$ ، العبارة $z \equiv z \pmod{n}$
 صحيحة، لأن $z - z = 0$ و $0 \equiv 0 \pmod{n}$ يقبل القسمة على أي n .
 العلاقة $\equiv$ تماثلية؛ لنفرض $x \in Z, y \in Z$ ، إذا كان $x \equiv y \pmod{n}$ صواباً،
 فإن $x - y = kn$ يقبل القسمة على n . ومنه نستنتج $y - x = (-k)n$ يقبل
 القسمة على n . إذن المتطابقة صواب $y \equiv x \pmod{n}$.

العلاقة $\equiv$ تعدي؛ لنفرض $x \in Z, y \in Z, z \in Z$ وإذا كان لدينا $x \equiv y \pmod n$ و $y \equiv z \pmod n$ ، المطلوب إثبات $x \equiv z \pmod n$ صواب.

من الفرض نحصل المتساويتين $x - y = kn$ و $y - z = in$ ثم نقوم بجمعهما

$$(x - y) + (y - z) = kn + in \Rightarrow (x - z) = (k + i)n = jn$$

إذن $x \equiv z \pmod n$ صواب. وعليه فإن العلاقة $\equiv$ تطابق باقي مقياس n تكافؤ على مجموعة الأعداد الصحيحة.

تجزئة Partition

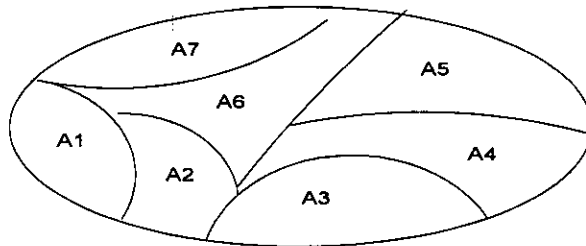
P تجزئة (أو حاصل التقسيم) للمجموعة A هو جمع من مجموعات جزئية منفصلة غير خالية من A اتحادها يكون A . وبكلام آخر، جمع المجموعات الجزئية $A_i; i \in I$ (حيث I هي مجموعة أدلة) ينشئ P تجزئة للمجموعة A إذا وفقط إذا

$$\begin{cases} - A_i \neq \phi \text{ for } i \in I \\ - A_i \cap A_j = \phi, \text{ when } i \neq j \\ - A = \bigcup_{i \in I} A_i \end{cases}$$

نطلق على المجموعة الجزئية A_i كتلة **Block** أو خلية **Cell** من التجزئة P

A **partition (or quotient)** P of a set A is a collection of disjoint nonempty subsets of A that have A as their union. In other words, the collection of subsets $A_i; i \in I$ (where I is an index set) forms a partition P of A if and only if

$$\begin{cases} - A_i \neq \phi \text{ for } i \in I \\ - A_i \cap A_j = \phi, \text{ when } i \neq j \\ - A = \bigcup_{i \in I} A_i \end{cases}$$



A partion of a set

مثال (1): لتكن $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ولدينا المجموعات الجزئية التالية من

$$A : A_1 = \{1,2,3,4\}, A_2 = \{1,3,5,7\}, A_3 = \{1,3,5,6,7,8\}$$

$$A_4 = \{2,4\}, A_5 = \{6,8\}. \text{ أوجد التجزئات الممكنة لـ } A ?$$

الحل: تجزئة P_1 هي $\{A_2, A_4, A_5\}$ المجموعة $\{A_1, A_2\}$ ليست تجزئة

لأن $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ والتجزئة P_2 هي $\{A_4, A_3\}$. كذلك

$$\{A_4, A_5\} \text{ ليست تجزئة لأن } A_4 \cap A_5 \neq \emptyset$$

مثال (2): لتكن $A = \{1,2,3\}$ ، أوجد جميع التجزئات الممكنة لـ A ؟

$$\text{الحل: } A = \{\{1\}, \{2,3\}\}, A = \{\{2\}, \{1,3\}\}, A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

$$A = \{\{1,2\}, \{3\}\}, A = \{\{1,2,3\}\}$$

تمرين (1): أوجد ثلاث تجزئات لمجموعة الأعداد الصحيحة؟

تمرين (2): عدد جميع تجزئات مجموعة الأعداد الصحيحة باستخدام العلاقة

$$x \equiv y \pmod{3}$$

علاقة التكافؤ والتجزئة Equivalence Relation and Partition

نظرية 6 Theorem Six

لتكن P تجزئة للمجموعة A ، العلاقة R المعرفة على A " aRb إذا وفقط إذا العنصران a, b ينتميان للقطاع نفسه " هي علاقة تكافؤ على A . نقول إن العلاقة R عرفتتها التجزئة P .

يترك البرهان كتمرين للطالب

مثال (3): لتكن $A = \{a, b, c, d\}$ ولتكن P تجزئة للمجموعة A معرفة بـ

$$P = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}. \text{ أوجد علاقة التكافؤ المعرفة بواسطة التجزئة}$$

P ؟

الحل: بالنظر إلى P نجد أنها تحتوي على قطاعين الأول $\{a, b\}$ والقطاع

الثاني $\{c, d\}$ وعلى حسب النظرية السابقة بأن العنصر a مربوط

بالعنصر b بالعلاقة R إذا كانا من القطاع نفسه ومنه نستنتج ما يلي:

- من القطاع الأول نجد أن R تحتوي على $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

- من القطاع الثاني نجد أن R تحتوي على $\{(c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$

- إذن العلاقة R هي

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$$

و بسبب أن علاقة التكافؤ انعكاسية نحصل العناصر مثل (a, a) وبسبب تعريف العلاقة نحصل على العناصر مثل (a, b) وبسبب تماثل علاقة التكافؤ نحصل العناصر مثل (b, a) . وهكذا نجد العلاقة R .

تمرين (3): لتكن $A = \{a, b, c, d\}$ ولتكن P تجزئة للمجموعة A معرفة بـ $P = \{\{a, b, c\}, \{d\}\}$ أوجد علاقة التكافؤ المعرفة بواسطة التجزئة P ؟

صفوف التكافؤ Equivalence Classes

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A ، وليكن a عنصراً ما من A ، نسمي المجموعة $R(a) = \{b \in A \mid aRb\}$ صف تكافؤ *Equivalence Class* من صفوف العلاقة R .

نظرية 7 Theorem Seven

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A ، وليكن a, b أي عنصرين من A ،
التضمين التالي صحيح $b \in R(a) \rightarrow R(b) = R(a)$

البرهان:

أولاً: لنثبت أن $R(a) \subset R(b)$. من الفرض $x \in R(a) \wedge b \in R(a)$ ومن تعريف العلاقة $xRa \wedge aRb$ ، ومن تعدي العلاقة نحصل xRb ، إذن $x \in R(b)$ ، ومنه نستنتج أن $R(a) \subset R(b)$ وهو المطلوب.
ثانياً: لنثبت أن $R(b) \subset R(a)$. من الفرض $x \in R(b) \wedge b \in R(a)$ ومن تعريف العلاقة $xRb \wedge aRb$ ، ومن تماثل العلاقة نحصل bRa ومن تعدي العلاقة نحصل xRa ، إذن $x \in R(a)$ ، ومنه نستنتج أن $R(b) \subset R(a)$ وهو المطلوب.

نظرية 8 Theorem Eight

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A ، وليكن a, b أي عنصرين من A ،
العبارات التالية صواباً:

$$a \in R(a) \quad 1$$

$$R(b) = R(a) \vee R(a) \cap R(b) = \emptyset \quad 2$$

البرهان:

أولاً: لنثبت أن $a \in A \Leftrightarrow R(a) \neq \phi$. من الفرض R علاقة تكافؤ و $a \in A$ ومن انعكاسية العلاقة R إذن aRa ، ومنه $a \in R(a)$ ، ومنه نستنتج أن $R(a) \neq \phi$

ثانياً: لنثبت أن $R(b) = R(a) \vee R(a) \cap R(b) = \phi$ إذا كان $R(a) \cap R(b) \neq \phi$ فلنثبت أن $R(b) = R(a)$. لنفرض أن $x \in (R(a) \cap R(b))$ ، ومنه $x \in R(a) \wedge x \in R(b)$ ومن النظرية السابقة نحصل $R(x) = R(a) \wedge R(x) = R(b)$ إذن $R(x) = R(a) = R(b)$ وهو المطلوب.

نظرية 9 Theorem Nine

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A ، فإن صفوف التكافؤ للعلاقة R ، تشكل تجزئة للمجموعة A

البرهان: من النظريتين السابقتين أثبتنا أن صفوف التكافؤ غير خالية وكذلك إما أن تكون متساوية أو أن تقاطعها هو المجموعة الخالية.

- $R(a) \neq \phi$ for $a \in A$
- $R(a) \cap R(b) = \phi$, when $a \neq b$ إذن
- $A = \bigcup_{a \in A} R(a)$

وهذا يحقق تعريف التجزئة وهو المطلوب.

ملحوظة: نكتب التجزئة من صفوف التكافؤ على النحو التالي:

$$P = A/R = \bigcup_{a \in A} R(a)$$

ومن هنا التسمية ناتج التقسيم.

مثال (4):

لتكن $\equiv$ علاقة تطابق باقي مقياس 5 وعلى حسب القاعدة $x \equiv y \pmod{5} \Leftrightarrow 5 \text{ divides } (x - y)$ أوجد صفوف التكافؤ؟

الحل: عدد صفوف التكافؤ لعلاقة $\equiv$ تطابق باقي مقياس n هي n صفاف وهي: $R(0), R(1), R(2), \dots, R(n-1)$

و عندما يكون مقياس تطابق باقي القسمة على 5 تكون الصفوف خمسة

هي: $R(0), R(1), R(2), R(3), R(4)$ وبالتفصيل هي:

(a) $R(0) = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}$ ، مجموعة عناصر باقي قسمتها على 5 هو صفر وهي مضاعفات 5.

(b) $R(1) = \{\dots, -6, -1, 6, 11, \dots\}$ ، مجموعة عناصر باقي قسمتها على 5 هو 1

(c) $R(2) = \{\dots, -7, -2, 2, 7, 12, 17, \dots\}$ ، مجموعة عناصر باقي قسمتها على 5 هو 2

(d) $R(3) = \{\dots, -8, -3, 3, 8, 13, 18, \dots\}$ ، مجموعة عناصر باقي قسمتها على 5 هو 3

(e) $R(4) = \{\dots, -9, -4, 4, 9, 14, 19, \dots\}$ ، مجموعة عناصر باقي قسمتها على 5 هو 4

مثال (5): لتكن R تكافؤ معرفة

$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,3), (3,3), (4,4)\}$ ، على

المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$ ، أوجد A/R ؟

الحل:

- العنصر 1 مربوط مع 2 بالعلاقة R ومن النظريات السابقة نحصل

$$R(1) = R(2) = \{1,2\}$$

- العنصر 3 مربوط مع 4 بالعلاقة R ومن النظريات السابقة نحصل

$$R(3) = R(4) = \{3,4\}$$

$$P = A/R = \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$$

تمارين محلولة Solved Exercises

1. لتكن $A = \{0,1,2,3,4\}$ و $B = \{0,1,2,3\}$ أوجد R في الحالات التالية:

$$aRb \Leftrightarrow a = b \quad (a)$$

$$aRb \Leftrightarrow a > b \quad (b)$$

$$aRb \Leftrightarrow a \text{ divides } b \Leftrightarrow a/b \quad (c)$$

$$aRb \Leftrightarrow a + b = 4 \quad (d)$$

$$aRb \Leftrightarrow b = a^2 \quad (e)$$

$$aRb \Leftrightarrow a + b \leq 5 \quad (f)$$

الحل:

$$R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\} \quad , aRb \Leftrightarrow a = b \quad (a)$$

$$, aRb \Leftrightarrow a > b \quad (b)$$

$$R = \{(1,0), (2,1), (2,0), (3,2), (3,1), (3,0), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3)\} \quad , aRb \Leftrightarrow a \text{ divides } b \Leftrightarrow a/b \quad (c)$$

$$R = \{(1,3), (2,2), (3,1), (4,0)\} \quad , aRb \Leftrightarrow a + b = 4 \quad (d)$$

$$R = \{(1,1), (0,0)\} \quad , aRb \Leftrightarrow b = a^2 \quad (e)$$

$$, aRb \Leftrightarrow a + b \leq 5 \quad (f)$$

$$R = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (4,0), (4,1)\}$$

2. لتكن $A = R$ مجموعة الأعداد الحقيقية، ولتكن العلاقة R معرفة على A

$$aRb \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25 \quad \text{أوجد ما يلي:}$$

(a) العلاقة R ؟

(b) نطاق العلاقة $Dom(R)$

(c) مدى العلاقة $Ran(R)$

الحل:

(a) العلاقة R هي

$$R = \{(0,5), (5,0), (0,-5), (-5,0), (3,4), (4,3), (-3,4), (3,-4), (-3,-4), (-4,-3), (-4,3), (4,-3)\}$$

(b) نطاق العلاقة $Dom(R)$ هو $\{0,5,-5,3,-3,4,-4\}$

(c) مدى العلاقة $Ran(R)$ هو $\{0,5,-5,3,-3,4,-4\}$

3. لتكن $A = \mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة، ولتكن العلاقة R معرفة على A بـ $aRb \Leftrightarrow 2a + 3b = 6$ أوجد ما يلي:

(a) العلاقة R ؟

(b) نطاق العلاقة $Dom(R)$

(c) مدى العلاقة $Ran(R)$

الحل:

(a) العلاقة R هي

$$R = \{(0,2), (-3,4), (-6,6), (-9,8), (-12,10), (-15,12), \dots$$

$$(3,0), (6,-2), (9,-4), (12,-6), (15,-8), \dots\}$$

(b) نطاق العلاقة $Dom(R)$ هو

$$Dom(R) = \{0, -3, -6, -9, -12, \dots, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$$

(c) مدى العلاقة $Ran(R)$ هو

$$Ran(R) = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 0, -2, -4, -6, -8, \dots\}$$

4. لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ، ولتكن العلاقة R معرفة على A بـ

$$R = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,5), (3,6), (4,7)\}$$

(a) $R(1), R(2), R(3), R(4)$ ؟

(b) $R(2), R(4), R(6)$ ؟

(c) $R(A1)$ حيث إن $A1 = \{1, 3, 5, 7\}$ ؟

الحل:

$$R(1) = \{2, 4\}; R(3) = \{6\}; R(5) = \{\}; R(7) = \{\} \quad (a)$$

$$R(2) = \{3, 5\}; R(4) = \{\}; R(6) = \{\} \quad (b)$$

$$R(A1) = \bigcup_{a \in A1} R(a) = R(1) \cup R(3) \cup R(5) \cup R(7) = \{2, 4, 6\} \quad (c)$$

5. لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، ولتكن المجموعات $A1 = \{1, 2, 3, 4\}$ ،

$$A2 = \{5, 6, 7\} \quad A3 = \{4, 5, 7, 9\} \quad A4 = \{4, 8, 10\} \quad A5 = \{8, 9, 10\}$$

$$A6 = \{1, 2, 3, 6, 8, 10\}$$

(a) $\{A1, A2, A5\}$ ؟

(b) $\{A1, A3, A5\}$ ؟

(c) $\{A3, A5\}$ ؟

(d) $\{A2, A3, A4\}$ ؟

الحل:

(a) $\{A1, A2, A5\}$ تجزئة

(b) $\{A1, A3, A5\}$ ليست تجزئة

(c) تجزئة $\{A3, A5\}$

(d) ليست تجزئة $\{A2, A3, A4\}$

6. لتكن $A = \{x | x \text{ positive integer and } (x^2 - 2x) \leq 4x\}$ ، ولتكن

$$R = \{(a, b) | aRb \Leftrightarrow (b^2 - a) = 3a\}$$

أوجد ما يلي:

(a) العلاقة R ؟

(b) نطاق العلاقة $Dom(R)$

(c) مدى العلاقة $Ran(R)$

(d) مصفوفة العلاقة M_R ؟

الحل:

نجد أولاً المجموعة A ، $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ حيث إن جميع عناصر A

$$x \in Z^+ \wedge (x^2 - 2x) \leq 4x$$

(a) العلاقة R هي $R = \{(1, 2), (4, 4)\}$

(b) نطاق العلاقة $Dom(R) = \{1, 4\}$

(c) مدى العلاقة $Ran(R) = \{2, 4\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(d) مصفوفة العلاقة}$$

7. لتكن $A = \{1, 2, 3\}$ ، ولتكن $B = \{1, 2\}$ ، ولتكن العلاقة R من A إلى

B معرفة بـ $R = \{(a, b) | aRb \Leftrightarrow a > b\}$ ، أوجد ما يلي:

(a) العلاقة R و مصفوفة العلاقة M_R

(b) مصفوفة العلاقة M_{R^2} و العلاقة R^2

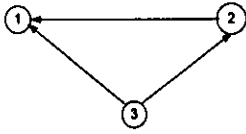
(c) $M_{R^{\infty}}$

(d) $R(2) \cap R(3)$

الحل:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(a) العلاقة } R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\} \text{ و مصفوفة العلاقة}$$

(b) لا نستطيع إيجاد مصفوفة العلاقة M_{R^2} لأن شرط ضرب مصفوفتين لم يتحقق لذلك نرسم البيان الموجه للعلاقة ثم نجد العلاقة R^2 .



$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ إذن } R^2 = \{(3,1)\} \text{ ومنه}$$

$$M_{R^+} = M_R \vee M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (c)$$

$$R(2) \cap R(3) = \{1\} \text{ إذن } R(3) = \{1,2\}, R(2) = \{1\} \quad (d)$$

8. لتكن $A = \{x \mid x \text{ positive integer and } (x+2) < 8\}$ ، ولتكن

$R = \{(a,b) \mid aRb \Leftrightarrow b < a+1\}$ ، أوجد ما يلي:

(a) العلاقة R^2 و مصفوفة العلاقة M_{R^2} ؟

$Dom(R^2)$ (b)

$Ran(R^2)$ (c)

(d) البيان الموجه للعلاقة R^2 ؟

الحل: نجد أولاً المجموعة A ، إذن $A = \{1,2,3,4,5\}$ إذ جميع عناصر A تحقق

$$x \in \mathbb{Z}^+ \wedge (x+2) < 8$$

(a) العلاقة R هي

$$R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة العلاقة هي}$$

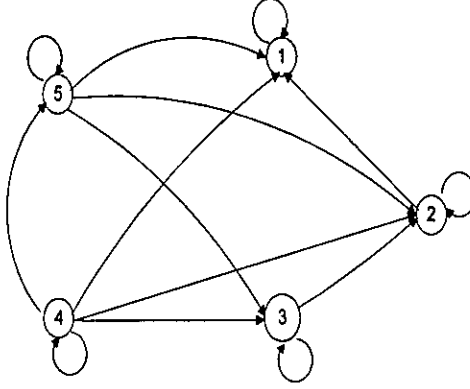
$$M_{R^2} = M_R \circ M_R \text{ مصفوفة لعلاقة}$$

$$R^2 = R \text{ إذن } M_{R^2} = M_R \circ M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_R$$

(b) النطاق $Dom(R) = Dom(R^2) = A$

(c) المدى $Ran(R) = Ran(R^2) = A$

(d) البيان الموجه للعلاقة R^2 هو البيان الموجه للعلاقة R



9. لتكن $A = Z$ ، ولتكن العلاقة R معرفة على

$R = \{(a, b) \mid aRb \Leftrightarrow b < a + 1\}$ ، بين إن كانت R :

(a) انعكاسية؟

(b) تماثلية

(c) تخالفية

(d) تعدية

(e) أم تكافؤ

الحل:

(a) R انعكاسية *Reflexive*، حيث المتباينة $a < a + 1$ صحيحة دائماً،

إذن aRa

(b) ليست R تماثلية *Not Symmetric* لأن معكوس أزواج R لا ينتمي

دائماً لـ R مثل $(5, 7) \in R$ بينما $(7, 5) \notin R$ وهي كذلك

Not Asymmetric لكون كل عنصر مربوطاً مع نفسه وهي

أيضاً *Not Irreflexive* لأنها انعكاسية.

(c) R تخالفية *Antisymmetric* لأن عكس كل زوج غير موجود في

R وإن وجد فإن $a = b$

(d) R تعدية *Transitive* لأن علاقة أقل من هي علاقة تعدية بسبب أن

المسقط الأول دائماً أقل أو يساوي المسقط الثاني.

(e) ليست تكافؤاً *Not Equivalence* لأنها ليست تماثلية.

10. لتكن $A = Z$ ، ولتكن العلاقة R معرفة على A بـ $R = \{(a, b) \mid aRb \Leftrightarrow b \leq a + 1\}$ ، بين إن كانت R :

- (a) انعكاسية؟
- (b) تماثلية
- (c) تخالفية
- (d) تعدي
- (e) أم تكافؤ

الحل:

- (a) R انعكاسية Reflexive، حيث المتباينة $a \leq a + 1$ دائماً صواب، إذن aRa
- (b) ليست R تماثلية Not Symmetric لأن معكوس أزواج R لا ينتمي دائماً لـ R مثل $(5, 7) \in R$ بينما $(7, 5) \notin R$ وهي كذلك
- Not Asymmetric لكون كل عنصر مربوطاً مع نفسه وهي أيضاً Not Irreflexive لأنها انعكاسية.
- (c) ليست تخالفاً Not Antisymmetric لأن عكس كل زوج موجود في R حيث $(4, 3) \in R$ وكذلك $(3, 4) \in R$
- (d) R تعدي Transitive لأن علاقة أقل من أو يساوي هي علاقة تعدي بسبب أن المسقط الأول دائماً أقل أو يساوي المسقط الثاني.
- (e) ليست تكافؤاً Not Equivalence لأنها ليست تماثلية.

11. لتكن $A = \{x \mid x \text{ positive integer and } (x^2 - 2x) \leq 4x\}$ ، ولتكن العلاقة R معرفة على A بـ $R = \{(a, b) \mid aRb \Leftrightarrow b^2 - a = 3a\}$ ، أوجد ما يلي:

- (a) نطاق العلاقة $Dom(R^*)$ ؟
- (b) مدى العلاقة $Ran(R^*)$ ؟
- (c) و مصفوفة العلاقة M_{R^*}
- (d) ارسم البيان الموجهة لـ R^* ؟

الحل: نوجد أولاً عناصر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ التي تحقق المتباينة

- $x \in Z^+ \wedge ((x^2 - 2x) \leq 4x)$ ، أما عناصر R فيجب أن تحقق $b^2 - a = 3a$ ومنه $R = \{(1, 2), (4, 4)\}$. ونستنتج بعد إجراء العمليات اللازمة أن $R^\infty = R^n = \dots = R^2 = R^1 = R$ ومنه $M_{R^*} = I_6 \vee M_{R^*}$

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ إذن}$$

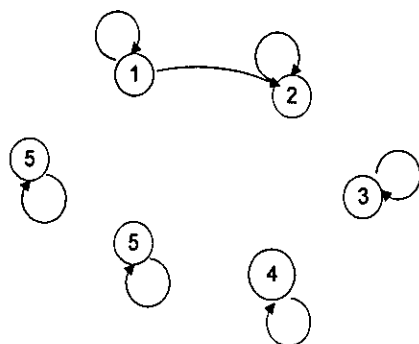
ومنه $R^* = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ وعليه لدينا الإجابات التالية

(a) نطاق العلاقة $Dom(R^*) = A$

(b) مدى العلاقة $Ran(R^*) = A$

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (c) و مصفوفة العلاقة}$$

(d) البيان الموجه لـ R^* ؟



12. لتكن العلاقة $R = \phi$ بين R إن كانت R

- (a) تماثلية
- (b) غير تماثلية
- (c) تخالفية
- (d) تعدي

الحل:

- (a) Symmetric تماثلية R
- (b) Not asymmetric غير تماثلية R
- (c) Antisymmetric تخالفي R
- (d) Transitive تعدي R

13. بين خصائص المصفوفة التالية

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

- (a) R غير انعكاسية Irreflexive لأن عناصر القطر الرئيس أصفاراً.
- (b) تماثلية Symmetric ، لأن عناصر فوق القطر الرئيس موجود نظيرها تحت القطر الرئيس
- (c) R غير تماثلية Not asymmetric وذلك لأنها تماثلية
- (d) R ليست تخالفيًا Not Antisymmetric لأنها تماثلية
- (e) R ليست تعدي Not Transitive

تمارين غير محلولة Unsolved Exercises

(1) إذا كانت $A = \{1,2,3,4\}$ ، بين خصائص العلاقات التالية ثم ارسم البيان الموجه لكل علاقة؟:

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\} \quad (a)$$

$$R1 = \{(1,1), (3,3)\} \quad (b)$$

$$R2 = \{(1,3), (4,2), (2,4), (3,1), (2,2)\} \quad (c)$$

$$R3 = A \times A \quad (d)$$

(2) إذا كانت A هي مجموعة الأعداد الحقيقية، ولتكن العلاقة R معرفة على A بـ $R = \{(a,b) \mid aRb \Leftrightarrow b^2 + a^2 = 4\}$ ، بين خصائص هذه العلاقة؟

(3) إذا كانت $A = \{1,2,3,4\}$ بين إن كانت العلاقات التالية هي علاقة تكافؤ؟:

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1), (2,3), (3,3), (4,4)\} \quad (a)$$

$$R1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\} \quad (b)$$

$$R2 = \{(2,2), (3,3), (4,4)\} \quad (c)$$

$$R4 = \{(1,1), (2,1), (1,2), (2,2)\} \quad (d)$$

(4) إذا كانت $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ وكانت لدينا التجزئة التالية $P = \{\{1,3,5\}, \{2,4,6\}\} = A/R$ وجد علاقة التكافؤ؟:

(5) لتكن $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ و لتكن

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1), (2,3), (3,3), (4,4)\}$$

والمطلوب إيجاد ما يلي:

$$R^2 \quad (a)$$

$$R^3 \quad (b)$$

$$R^4 \quad (c)$$

$$R^5 \quad (d)$$

$$R^\infty \quad (e)$$

$$R^* \quad (f)$$

(6) لتكن A و لتكن R علاقة انعكاسية Reflexive معرفة على المجموعة A . أثبت أن R^n هي علاقة انعكاسية أيضاً ولجميع قيم n عدد صحيح موجب؟

(7) لتكن لدينا المصفوفة $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ والمطلوب إيجاد ما يلي:

R^2 (a)

R^3 (b)

R^4 (c)

(8) أثبت أن العلاقة R هي علاقة تكافؤ إذا وفقط إذا $(R \circ R \subset R \text{ and } R^{-1} = R \text{ and } \Delta \subset R)$

المصطلحات العلمية Terminology

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
العلاقات	The Relations
الضرب الديكارتي	Cartesian Product
الأزواج المرتبة	Ordered Pair
تساوي الأزواج المرتبة	Equality of ordered pairs
مصطلحات	Terms
ثلاثية مرتبة	Ordered Triple
رباعية مرتبة	Ordered Quadruplet
خماسية مرتبة	Ordered Quintuplet
سداسية	Sextuplet
سباعية	Sevenfold
ثمانية	Octave
النونية المرتبة	Ordered n-Tuple
العلاقات الثنائية	Binary Relations
مجموعات ناشئة من العلاقات الثنائية	Sets Arising from Binary Relations
نطاق R	$Dom(R)$
مدى R	$Ran(R)$
مجموعة العناصر المنسوبة لـ x بالعلاقة R	R -Relative $x : R(X)$
مجموعة العناصر المنسوبة لـ A_1 بالعلاقة R	R -Relative $A_1 : R(A_1)$
تمثيل العلاقات	Representing Relations
المصفوفات البولية	Matrices
رسم بياني موجه	Directed Graph (Digraph)

المصطلح العربي	English Term
رؤوس البيان الموجه	Vertices (مفردها Vertex)
الدورة (العروة)	Cycle
درجة داخلية للعنصر a	In-degree of an element a
درجة خارجية للعنصر a	Out-degree of an element a
درجة داخلية للرأس	In-degree of a vertex
درجة خارجية للرأس	Out-degree of a vertex
مركب العلاقات	Relational Composition
إتحاد علاقتين	Union of Binary Relations
تقاطع علاقتين	Intersection of Binary Relations
فرق علاقتين	Difference of Binary Relations
متمم علاقة	Complements of Binary Relations
فرق تناظر علاقتين	Symmetric Difference of Binary Relations
المسارات في الرسم البياني الموجه	Paths in Directed Graph
العلاقة R^n	Relation R^n
علاقة مربوطة R^∞	The Connectivity Relation R^∞
علاقة موصلية R^*	The Reachability Relation R^*
معكوس العلاقة	Inverse of a Relation
خصائص العلاقات	Properties of Relations
انعكاسية	Reflexive
غير انعكاسية	Irreflexivity
التماثلية	Symmetric
اللاتماثلية	Asymmetric

المصطلح العربي	English Term
التخالفية	Antisymmetry
التعدي	Transitive
مخطط العلاقة R	Graph of R
الخطوط المتجهة في الاتجاهين	Directed Edges
خط واحد " — " دون أسهم	Undirected Edge
رأسين متجاورين	Adjacent Vertices
مجموعة مترابطة (متصلة)	Connected Set
تكافؤ	Equivalence
تطابق الباقي	Congruence Modulo
تجزئة	Partition
كتلة	Block
خلية	Cell
علاقة التكافؤ والتجزئة	Equivalence Relation and Partition
صفوف التكافؤ	Equivalence Classes

الفصل الثامن

علاقات الترتيب

Order Relations

264	الفصل الثامن
264	علاقات الترتيب
264	Order Relations
266	الترتيب الجزئي Partial Order
267	مقارنة العناصر Elements Comparison
268	مزدوج الترتيب الجزئي Dual Partial Order
268	مجموعة مرتبة كلياً Totally Ordered Set
269	مخططات هاس' Hasse Diagrams
270	خطوات رسم مخطط هاس'
272	عناصر النهاية العظمى والصغرى Maximal and Minimal Elements
272	النهاية العظمى Maximal Element
273	النهاية الصغرى Minimal Element
275	العناصر العظمى والصغرى The Greatest and the Least Elements
275	العنصر الأعظم The Greatest Element
275	العنصر الأصغر The Least Element
276	نظرية 1 Theorem One
276	نظرية 2 Theorem Two
278	الحدود العليا والدنيا The Upper and the Lower Bounds
278	أصغر حد أعلى وأكبر حد أدنى The Least Upper and the Greatest Lower Bounds
279	نظرية 3 Theorem Three
281	شباك Lattice
282	شباك جزئي Sub lattice
283	نماذج خاصة من الشباك Special Types of Lattice
283	شباك محدد Bounded lattice
283	شباك توزيعي Distributive lattice
285	متعم العنصر
286	الشباك المتعم
287	تمارين محلولة Solved Exercises
299	تمارين غير محلولة Unsolved Exercises
302	المصطلحات العلمية Terminology

نستخدم غالباً العلاقات، لترتيب بعض العناصر أو كلها في مجموعة ما. لنفترض هنا مثالين لعلاقات الترتيب، المثال الأول هو ترتيب الكلمات في المعجم، باستخدام علاقة تحتوي على الزوج (a, b) من الكلمات، حيث تأتي الكلمة a قبل b في القاموس. والمثال الثاني، هو ترتيب مجموعة الأعداد الصحيحة، وباستخدام العلاقة الأقل من والتي تحتوي على الزوج (a, b) من الأعداد، يفيد أن a أقل من b ، أي أن العدد a يسبق العدد b في الترتيب.

الترتيب الجزئي Partial Order

لتكن R علاقة على المجموعة A ، نسمي R علاقة ترتيب جزئي **Partial Order**، إذا كانت العلاقة R تحقق الخصائص الثلاث التالية: الانعكاسية والتخالفية والتعدي.

نسمي المجموعة A مع علاقة الترتيب الجزئي R ؛ مجموعة مرتبة جزئياً **Partially Ordered Set or POSet**، ونرمز لها بـ (A, R) .

A relation R on a set A is called a **Partial Order** if it is reflexive, antisymmetric and transitive. A set A with a partial order relation R is called a **Partially Ordered Set** or **POSet**, and is denoted by (A, R) .

مثال (1): أثبت أن علاقة $\geq$ أكبر أو تساوي علاقة ترتيب جزئي على مجموعة الأعداد الصحيحة Z ؟

الحل: - $\geq$ انعكاسية، حيث $a \geq a$ وهذه المتباينة دائماً صواب.
 - $\geq$ تخالفية، حيث $a \geq b$ و $b \geq a$ يعطي دائماً أن العددين الصحيحين متساويان أي $a = b$.
 - $\geq$ تعدي، حيث $a \geq b$ و $b \geq c$ يعطي دائماً $a \geq c$.
 إذن العلاقة $\geq$ هي ترتيب جزئي على Z ، وإن $(Z, \geq)$ مجموعة مرتبة جزئياً

مثال (2): أثبت أن علاقة $\subset$ الاحتواء هي علاقة ترتيب جزئي على مجموعة القوة للمجموعة A . بكلام آخر، أثبت أن $(P(A), \subset)$ مجموعة مرتبة جزئياً أي **POSet**؟

الحل: - $\subset$ انعكاسية، حيث $X \subset X$ وهذا الاحتواء دائماً صواب.
 - $\subset$ تخالفية، حيث $X \subset Y$ و $Y \subset X$ يعطي دائماً أن المجموعتين متساويتان أي $X = Y$.

- $\subset$ تعدي، حيث $X \subset Y$ و $Y \subset Z$ يعطي دائماً $X \subset Z$.
إذن العلاقة $\subset$ هي ترتيب جزئي على $P(A)$ ، وإن
مجموعة مرتبة جزئياً $(P(A), \subset)$

مثال (3): أثبت أن علاقة | القسمة $a \mid b \Leftrightarrow a \text{ divides } b$ هي ترتيب جزئي
على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة Z^+ ؟
الحل:

- انعكاسية، حيث $a \mid a$ وهذه القسمة دائماً صواب، حيث $a = 1 \cdot a$
 - تخالفية، حيث $a \mid b \Rightarrow b = p \cdot a$ و $a \mid a \Rightarrow a = q \cdot a$ نعوض قيمة $b = p \cdot a$ في المساواة الثانية، نحصل
 $a = b$ ومنه $a = q \cdot p \cdot a \Rightarrow 1 = q \cdot p \Rightarrow q = p = 1$
 - التعدي، حيث $a \mid b$ و $b \mid c$ نستخدم طريقة برهان خاصية تخالفية لتحصيل
 $a \mid c$
- إذن العلاقة | هي ترتيب جزئي على Z^+ ، وإن $(Z^+, |)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

مقارنة العناصر Elements Comparison

إذا كان العنصران a و b من المجموعة المرتبة جزئياً (A, R) ، نسمي a
و b قابلين للمقارنة comparable إذا وجد أي من aRb أو bRa .

تسمى a و b غير قابلين للمقارنة incomparable إذا لم يوجد aRb
ولا bRa .

The elements a and b of a POSet (A, R) are called comparable if either aRb or bRa . When a and b are elements of A such that neither aRb nor bRa , a and b are called incomparable.

مثال (4): في علاقة | القسمة التي هي ترتيب جزئي على مجموعة الأعداد
الصحيحة Z^+ ، هناك أعداد غير قابلة للمقارنة تحت علاقة القسمة.
فعلى سبيل المثال العدان 7 و 11 لا يقسم أي منهما على الآخر، إذ
لا $7 \mid 11$ ولا $11 \mid 7$ موجود.

مثال (5): في علاقة $\subset$ الاحتواء، التي هي ترتيب جزئي على مجموعة القوة، هناك مجموعات غير قابلة للمقارنة تحت علاقة الاحتواء. على سبيل المثال لنكن $A = \{1, 2, 3\}$ ، فمثلاً، المجموعتان الجزئيتان $\{1, 2\}$ و $\{3\}$ غير قابلتين للمقارنة تحت علاقة الاحتواء؛ أي لا المجموعة $\{3\}$ تحتوي المجموعة $\{1, 2\}$ يعني $X1 \not\subset X2$ ولا المجموعة $\{1, 2\}$ تحتوي المجموعة $\{3\}$ يعني $X2 \not\subset X1$.

مزدوج الترتيب الجزئي Dual Partial Order

لنكن R علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A ، ولنكن R^{-1} معكوس العلاقة R . إذن R^{-1} هي أيضاً ترتيب جزئي على المجموعة A . ونسمي (A, R^{-1}) مزدوج الترتيب الجزئي (A, R) . ونسمي R^{-1} مزدوج علاقة الترتيب الجزئي R .

لنثبت أن R^{-1} هي ترتيب جزئي، أي R^{-1} هي: انعكاسية وتخالفية وتعدي. نستفيد أولاً من خواص R كعلاقة ترتيب جزئي وهي: انعكاسية إذن $\Delta \subset R$ ، و R تخالفية إذن $\Delta \subset R \cap R^{-1}$ ، وأخيراً R تعدي إذن $R^2 \subset R$.

و بأخذ المعكوس نحصل: R^{-1} انعكاسية حيث $\Delta^{-1} = \Delta$ ، و R^{-1} تخالفية حيث $\Delta \subset R \cap (R^{-1})^{-1} = R \cap R^{-1}$ ، و R^{-1} تعدي حيث $(R^{-1})^2 \subset R^{-1}$. إذن R^{-1} هي ترتيب جزئي.

مثال (6):

- إذا كانت $(Z, \geq)$ مجموعة مرتبة جزئياً، فإن المزدوج هو $(Z, \leq)$.
- إذا كانت $(N, \geq)$ مجموعة مرتبة جزئياً، فإن المزدوج هو $(N, \leq)$.
- إذا كانت $(R, \geq)$ مجموعة مرتبة جزئياً، فإن المزدوج هو $(R, \leq)$.

مجموعة مرتبة كلياً Totally Ordered Set

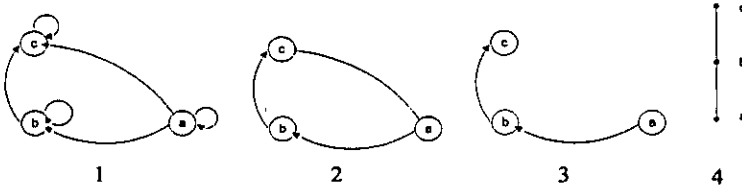
إذا كانت (A, R) مجموعة مرتبة جزئياً POSet، وكل عنصرين a و b فيها قابلين للمقارنة comparable، المجموعة A تسمى مجموعة مرتبة كلياً $totally ordered set$ أو مرتبة خطياً $linearly ordered$. والعلاقة R تسمى ترتيباً كلياً $total order$ أو تسمى ترتيباً خطياً $linear order$. المجموعة المرتبة كلياً تدعى أيضاً السلسلة $Chain$.

If (A, R) is a POSet and every two elements of A are comparable, A is called totally ordered or linearly ordered set, and R is called a total order or linear order. A totally ordered set is also called a chain.

مثال (7): إذا كانت $(Z, \geq)$ مجموعة مرتبة جزئياً، أي عددين صحيحين a و b فيها قبالان للمقارنة، وبالتالي فهي مجموعة مرتبة كلياً أي Z سلسلة الأعداد الصحيحة، وكذلك $(N, \geq)$ هي سلسلة الأعداد الطبيعية وأيضاً $(R, \geq)$ هي سلسلة الأعداد الحقيقية، أي مجموعات مرتبة ترتيباً كلياً تحت العلاقة أكبر أو تساوي.

مخططات هاس¹ Hasse Diagrams

في المخططات الموجهة، للمجموعات المنتهية المرتبة جزئياً، لا داعي لرسم بعض الخطوط الموجهة، لأنها أصلاً يجب أن تكون موجودة. حيث إن علاقة الترتيب الجزئي هي انعكاسية وعليه فإن كل رأس من رؤوس البيان الموجهة عليه دورة (عروة) ومن أجل التبسيط والايجاز في رسم المخططات الموجهة نلغي من المخطط البياني كل الدورات (المخطط الموجهة في الخطوة 1 أدناه إذ يصبح كما هو موضح في الخطوة 2 أدناه). وعلاقة الترتيب الجزئي هي أيضاً تعدية؛ فإذا وجد كل من aRb و bRc فلا بد من وجود aRc وعليه لا بد من إسقاط الخط الموجه الذي يبدأ من a وينتهي بـ c (المخطط الموجه في الخطوة 2 أدناه إذ يصبح كما هو موضح في الخطوة 3 أدناه).



خطوات رسم مخطط هاس¹

¹ Helmut Hasse ولد عام 1898م في مدينة Kassel الألمانية. بدأ دراسته الجامعية عام 1918 في جامعة Göttingen ثم انتقل إلى جامعة Marburg عام 1920 حيث درس نظرية الأعداد على يدي عالم الجبر Kurt Hensel. منذ 1936م عمل محرراً لدورية الرياضيات الألمانية Crelle's Journal. حصل منصباً في جامعة Hamburg عام 1950م. وخلال الحرب العالمية الثانية خدم في البحرية الألمانية باحثاً في الرياضيات التطبيقية. وتوفي سنة 1979م.

الخطوة الأولى: هي حذف الدورات من رؤوس البيان الموجهة.

الخطوة الثانية: بعد حذف الدورات هي إسقاط الخطوط الموجهة التي تمثل

خاصية التعدي في المخطط البياني.

الخطوة الثالثة: إعادة رسم المخطط البياني الموجه على حسب ما تشير إليه

الخطوط الموجهة بدءاً من الأسفل إلى الأعلى. ثم إلغاء الأسهم

من الخطوط ثم استبدال النقاط بالدوائر.

مثال (1): ارسم مخطط هاس للمجموعة المرتبة جزئياً التالية:

$$(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$$

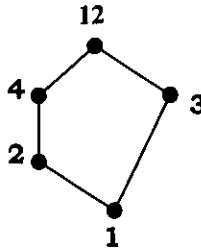
الحل:



مثال (2): لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ والترتيب الجزئي هو a يقسم b $(a|b)$ ،

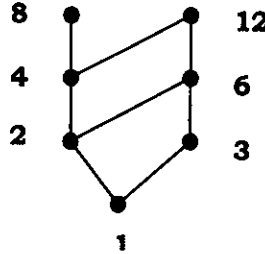
ارسم مخطط هاس للمجموعة المرتبة جزئياً $(A, |)$.

الحل:



مثال (3) : ارسم مخطط هاسُ للترتيب الجزئي المعروف بـ a يقسم b $(a|b)$ على المجموعة $\{1,2,3,4,6,8,12\}$.

الحل:



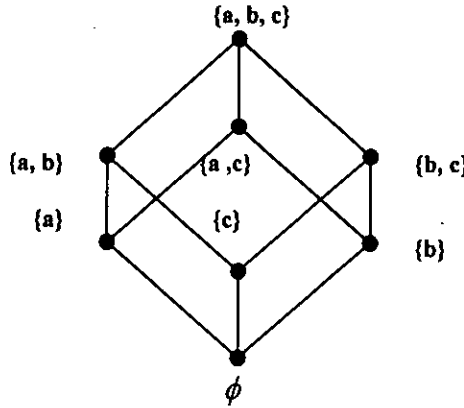
مثال (4) : لتكن المجموعة $S = \{a, b, c\}$ ، ولتكن مجموعة القوة $X = P(S)$. ارسم مخطط هاسُ للترتيب الجزئي التالي: إذا علمت أن $A \in X$,

$$(P(X), \subseteq) = \{(A, B) \mid A \subseteq B\} \quad B \in X$$

الحل:

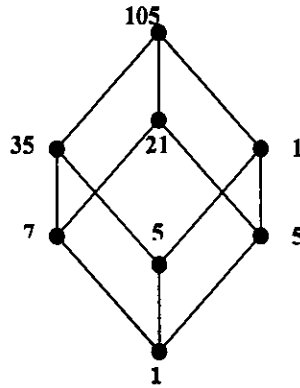
$$P(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

وبالتالي يمكن رسم مخطط هاسُ على الشكل التالي:



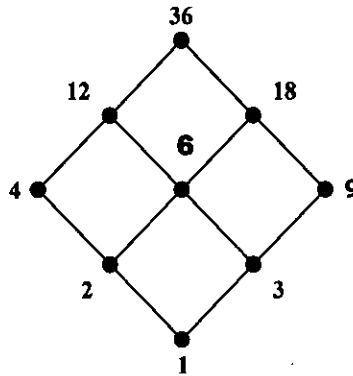
مثال (5) : ارسم مخطط هاسُ لمجموعة قواسم العدد 105 (D_{105}) . علاقة الترتيب الجزئي هي القسمة

الحل: $D_{105} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$



مثال (6): ارسم مخطط هاس لـ D_{36}

الحل: $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$



عناصر النهاية العظمى والصغرى ² *Maximal and Minimal Elements*

إن بعض عناصر مجموعات الترتيب الجزئي ذات الصفات الخاصة تؤدي دوراً مهماً في عدد من تطبيقات الترتيب الجزئي. ومن هذه العناصر:

النهاية العظمى *Maximal Element*

لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً وليكن $a \in A$ ، نسمي a عنصر نهاية عظمى *Maximal element* إذا لم يكن أصغر من أي عنصر آخر في A .
وربما نكتب لا يوجد $b \in A$ بحيث $a \leq b$.

² الدكتور أحمد سعيدان مقرر لجنة الرموز العلمية والعربية في مشروع مجمع اللغة العربية الأردني للرموز العلمية والعربية (1985). عبارات مختزلة صفحة 29

An element $a \in A$ of a POSet $(A, \leq)$ is called maximal if it is not less than any element of the POSet. That is, a is a maximal, if there is no element $b \in A$, such that $a \leq b$.

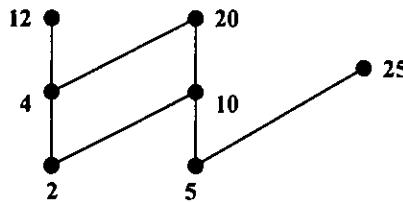
النهاية الصغرى Minimal Element

لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً وليكن $a \in A$ ، نسمي a هو عنصر نهاية صغرى Minimal element إذا لم يكن أكبر من أي عنصر آخر في A . ورياضياً نكتب لا يوجد $b \in A$ بحيث $b \leq a$.

An element $a \in A$ of a POSet $(A, \leq)$ is called minimal if it is not greater than any element of the POSet. That is, a is a minimal, if there is no element $b \in A$, such that $b \leq a$.

نستطيع تحصيل على النهاية العظمى والصغرى بسهولة من خلال استخدام مخططات هاس.

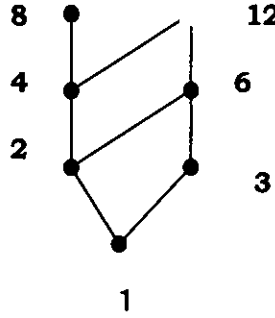
مثال(1): لتكن لدينا المجموعة المرتبة جزئياً $(\{2,4,5,10,12,20,25\}, |)$. أوجد عناصر النهاية العظمى والصغرى؟
الحل: نرسم مخطط هاس للمجموعة المرتبة جزئياً، وهو على الشكل التالي:



من المخطط نلاحظ أن عناصر النهاية العظمى هي 12 و 20 و 25 أما عناصر النهاية الصغرى فهي 2 و 5 فقط.

مثال(2): لتكن لدينا المجموعة المرتبة جزئياً $(\{1,2,3,4,6,8,12\}, |)$. أوجد عناصر النهاية العظمى والصغرى.

الحل: مخطط هاس للمجموعة المرتبة جزئياً المعطاة يكون على الشكل التالي ومنه نلاحظ أن :



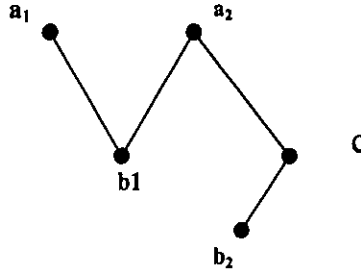
عناصر النهاية العظمى هي 8 و 12 أما عنصر النهاية الصغرى فهو 1 فقط.

مثال (3): لتكن $(Z, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً، أوجد عناصر النهاية العظمى و عناصر النهاية الصغرى فيها.

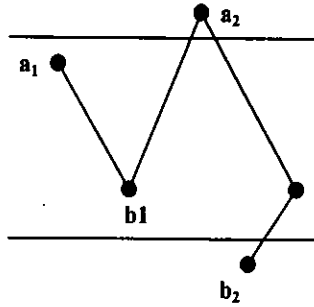
الحل: لا يوجد عنصر نهاية عظمى بسبب آلية إيجاد عناصر z حيث نضيف 1 لأي عدد نجده وهكذا نولد ما هو أكبر منه. ولا يوجد عنصر نهاية صغرى بسبب آلية إيجاد عناصر z حيث نطرح 1 من أي عدد نجده وهكذا نولد ما هو أصغر منه.

مثال (4): ليكن لدينا مخطط هاس التالي و المطلوب إيجاد عناصر النهايتين العظمى والصغرى في هذا المخطط؟

الحل: عناصر النهاية العظمى هي: a_1, a_2 أما عناصر النهاية الصغرى فهي: b_1, b_2



مثال (5): أوجد عناصر النهايتين العظمى والصغرى في المخطط التالي؟
الحل: عنصر النهاية العظمى هو a_2 أما عنصر النهاية الصغرى فهو b_2 .



العناصر العظمى والصغرى The Greatest and the Least Elements

العنصر الأعظم The Greatest Element

العنصر a ($a \in A$) هو العنصر الأعظم The greatest element في الترتيب الجزئي $(A, \leq)$ ، إذا كان أكبراً من أي عنصر آخر. رياضياً نكتب العنصر a هو عنصر أعظم في $(A, \leq)$ ، إذا كان $b \leq a$ لأي $b \in A$.

An element $a \in A$ of a POSet $(A, \leq)$ is called **greatest element**, if it is greater than every other element. That is, a is a greatest element of $(A, \leq)$, if $b \leq a$ for all $b \in A$.

العنصر الأصغر The Least Element

العنصر a ($a \in A$) هو عنصر أصغر The least element في الترتيب الجزئي $(A, \leq)$ ، إذا كان أصغر من أي عنصر آخر. رياضياً نكتب العنصر a هو عنصر أصغر في $(A, \leq)$ ، إذا كان $a \leq b$ لأي $b \in A$.

An element $a \in A$ of a POSet $(A, \leq)$ is called **least element**, if it is less than all the other elements in the POSet. That is, a is a least element of $(A, \leq)$, if $a \leq b$ for all $b \in A$.

ملحوظة: ليكن الترتيب الجزئي $(A, \leq)$ وليكن مزدوج الترتيب الجزئي هو $(A, \geq)$. وعليه فإن العنصر الأعظم في $(A, \leq)$ هو العنصر الأصغر في $(A, \geq)$. وكذلك فإن العنصر الأصغر في $(A, \leq)$ هو العنصر الأعظم في $(A, \geq)$.

نظرية 1 Theorem One

لتكن A مجموعة منتهية غير خالية من العناصر و مرتبة جزئياً بالعلاقة $\leq$. إذن A تمتلك على الأقل عنصر نهاية عظمى واحداً ، وعلى الأقل عنصر نهاية صغرى واحداً.

Let A be a finite nonempty POSet with partial order $\leq$. Then A has at least one maximal element and at least one minimal element.

البرهان: ليكن العنصر a عنصراً ما من A . فإذا لم يكن العنصر a نهاية عظمى ، فإنه بإمكاننا إيجاد $a_1 \in A$ بحيث إن $a \leq a_1$. فإذا لم يكن العنصر a_1 نهاية عظمى ، فإنه بإمكاننا إيجاد $a_2 \in A$ بحيث إن $a_1 \leq a_2$ وهذا الجدال لا يمكن الاستمرار به إلى ما لا نهاية. حيث إن A مجموعة منتهية وترتيب جزئي. وهكذا نهائياً سوف نحصل السلسلة المنتهية التالية: $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq a_k$ وعليه لا يمكن وجود $a_k \leq b$ أي كان $b \in A$. إذن a_k هو عنصر نهاية عظمى في $(A, \leq)$. وبالطريقة نفسها نثبت وجود عنصر واحد على الأقل هو نهاية صغرى .

نظرية 2 Theorem Two

الترتيب الجزئي يوجد له على الأكثر عنصر أعظم واحد وعلى الأكثر عنصر أصغر واحد .

A POSet has at most one greatest element and at most one least element.

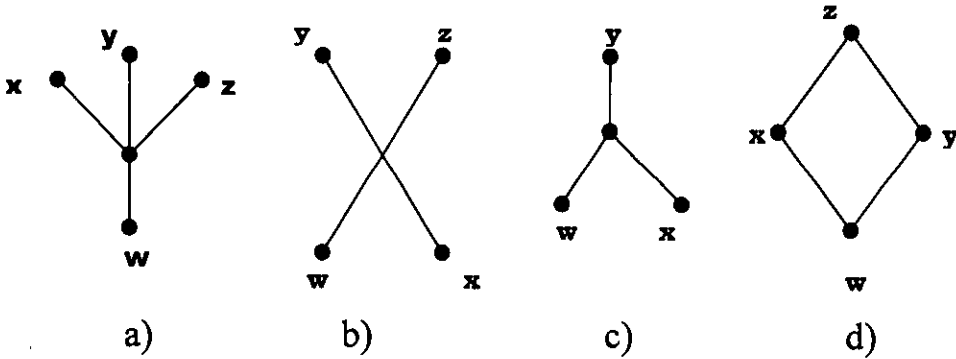
البرهان: ليكن العنصران a و b نهايات عظمى في الترتيب الجزئي $(A, \leq)$. وبسبب b نهاية عظمى، إذن $a \leq b$. وبسبب a نهاية عظمى، إذن $b \leq a$. ومن هنا فإن $a=b$ بسبب خاصية التخالفية. فإذا وجد في الترتيب الجزئي عنصر هو نهاية عظمى فإنه العنصر الوحيد. وبالطريقة نفسها نثبت وجود عنصر واحد على الأكثر هو نهاية صغرى .

مثال (1): لتكن $(P(s), \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ولتكن $S = \{1,2,3\}$. أوجد عنصرها الأعظم والأصغر؟

الحل:

$P(s) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
 نلاحظ أن العنصر الأعظم الذي يحتوي على كل
 المجموعات الجزئية هو $S = \{1,2,3\}$ والعنصر الأصغر
 المحتوي في كل المجموعات الجزئية هو $\emptyset$.

مثال (2): أوجد العنصرين الأعظم والأصغر في كل من مخططات هاس التالية:



الحل:

المخطط	العنصر الأعظم	العنصر الأصغر
(a)	لا يوجد	w
(b)	لا يوجد	لا يوجد
(c)	y	لا يوجد
(d)	z	w

مثال (3): أوجد العنصرين الأعظم والأصغر في المجموعة المرتبة جزئياً $(\mathbb{Z}^+, |)$

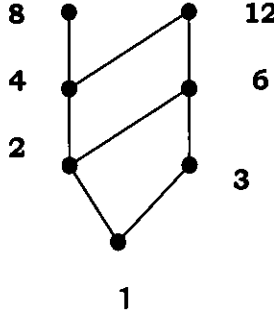
الحل: العنصر الأصغر هو 1 إذ يقسم الجميع عليه، و العنصر الأعظم لا يوجد.

مثال (4): أوجد العنصرين الأعظم والأصغر في المجموعة المرتبة جزئياً $(\mathbb{Z}, |)$

الحل: العنصر الأصغر لا يوجد، و العنصر الأعظم لا يوجد.

مثال (5): لتكن لدينا المجموعة المرتبة جزئياً $(\{1,2,3,4,6,8,12\}, |)$ أوجد
 عنصريها الأعظم والأصغر؟

الحل : بعد رسم مخطط هاس، نجد أن العنصر الأصغر هو 1، و العنصر الأعظم لا يوجد.



الحدود العليا والدنيا³ The Upper and the Lower Bounds

لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ، ولتكن B مجموعة جزئية من A ، نسمي العنصر $a \in A$ حد أعلى upper bound للمجموعة الجزئية B ، إذا كان $b \leq a$ وذلك أيًا كان $b \in B$.

ونسمي العنصر $a \in A$ حد أدنى lower bound للمجموعة الجزئية B ، إذا كان $a \leq b$ وذلك أيًا كان $b \in B$.

Consider the POSet A and a subset B of A . An element $a \in A$ is called an **upper bound** of B if $b \leq a$ for all $b \in B$.

An element $a \in A$ is called a **lower bound** of B if $a \leq b$ for all $b \in B$.

أصغر حد أعلى وأكبر حد أدنى The Least Upper and the Greatest Lower Bounds

لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ، ولتكن B مجموعة جزئية من A ، نسمي العنصر $a \in A$ أصغر حد أعلى (LUB) least upper bound لـ B إذا كان $a \leq b$ ، كلما كان b حداً أعلى لـ B وبكلام آخر هو أصغر الحدود العليا.

ونسمي العنصر $a \in A$ أكبر حد أدنى (GLB) greatest lower bound لـ B إذا كان $b \leq a$ كلما كان b حداً أدنى لـ B وبكلام آخر هو أكبر الحدود الدنيا.

³ الدكتور أحمد سعيدان مقرر لجنة الرموز العلمية والعربية في مشروع مجمع اللغة العربية الأردني للرموز العلمية والعربية (1985). عبارات مختزلة صفحة 29.

Let A be a POSet and B a subset of A . An element $a \in A$ is called a **least upper bound** (LUB) of B if a is less than every other upper bound of B . that is, $a \leq b$ whenever b is an upper bound of B .

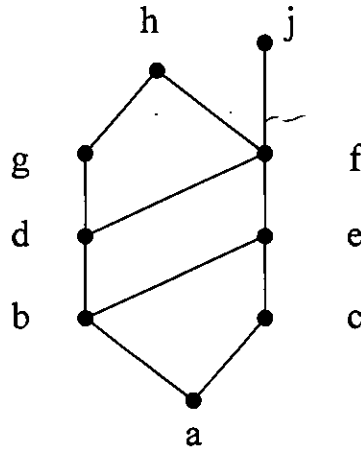
An element $a \in A$ is called an **greatest lower bound** (GLB) of B if $b \leq a$ whenever b is a lower bound of B .

نظرية 3 Theorem Three

لنكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. و B المجموعة جزئية من A . عندئذ تمتلك B عنصراً واحداً على الأكثر كأصغر حد أعلى LUB وعنصراً واحداً على الأكثر كأكبر حد أدنى GLB.

Let $(A, \leq)$ be a POSet. Then a subset B of A has at most one LUB and at most one GLB.

مثال (1) : ليكن لدينا مخطط هاس التالي:

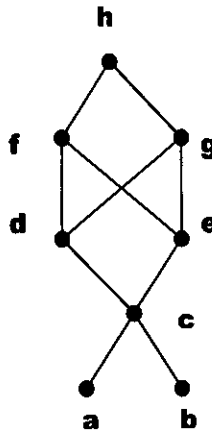


ولتكن لدينا المجموعات التالية: $\{a, b, c\}, \{j, h\}, \{b, e, f, d\}, \{b, d, g\}$ والمطلوب إيجاد الحدود العليا و الدنيا و أكبر حد أدنى و أصغر حد أعلى لكل مجموعة جزئية؟

الحل:

المجموعة الجزئية	الحدود الدنيا Lower Bounds	أكبر حد أدنى GLB	الحدود العليا Upper Bounds	أصغر حد أعلى LUB
{a, b, c}	a	a	e, f, j, h	e
{j, h}	a, b, c, d, e, f	f	لا يوجد	لا يوجد
{b, e, f, d}	a, b	b	f, g, h	f
{b, d, g}	a, b	b	g, h	g

مثال (2): لتكن $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ مجموعة مرتبة جزئياً، ومخطط هاس لهذه المجموعة معطى على الشكل التالي:



ولتكن $B_1 = \{a, b\}$ و $B_2 = \{c, d, e\}$ مجموعتين جزئيتين من A . والمطلوب إيجاد

(1) الحدود العليا لكلتا المجموعتين B_1 و B_2 ؟

(2) الحدود الدنيا للمجموعتين B_1 و B_2 ؟

(3) أوجد أكبر حد أدنى للمجموعتين B_1 و B_2 ؟

(4) أوجد أصغر حد أعلى للمجموعتين B_1 و B_2 ؟

والحل موضح في الجدول التالي:

المجموعة الجزئية	الحدود الدنيا Lower Bounds	أكبر حد أدنى GLB	الحدود العليا Upper Bounds	أصغر حد أعلى LUB
$B_1 = \{a, b\}$	none	none	c, d, e, f, g, h	c
$B_2 = \{c, d, e\}$	a, b, c	c	f, g, h	none

شباك⁴ Lattice

نسمي شباك lattice كل ترتيب جزئي $(A, \leq)$ يوجد فيه لأي زوج من العناصر $\{a, b\}$ كلا العنصرين أصغر حد أعلى $\text{LUB}(\{a, b\})$ وأكبر حد أدنى $\text{GLB}(\{a, b\})$.

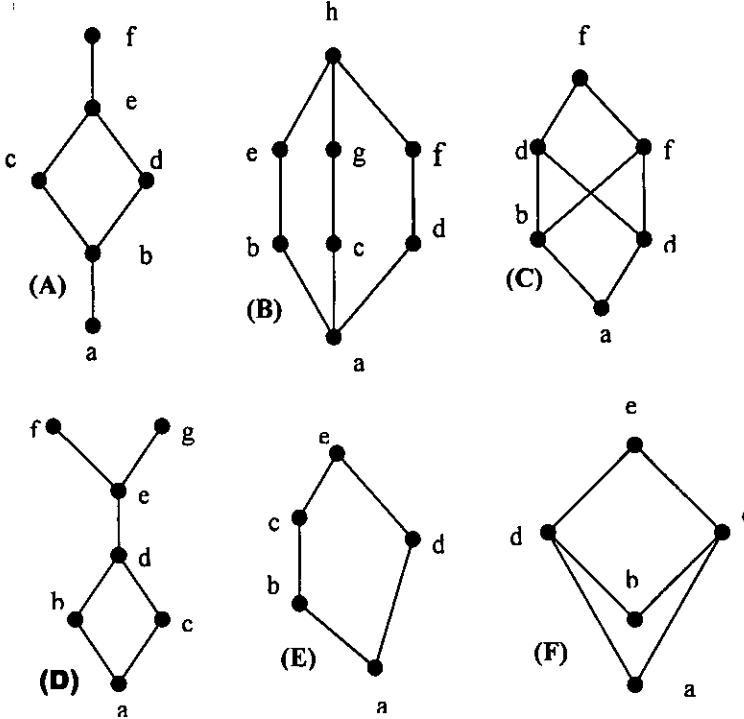
و يرمز للعنصر $\text{LUB}(\{a, b\})$ بـ $a \vee b$ و يرمز للعنصر $\text{GLB}(\{a, b\})$ بـ $a \wedge b$.

A partially ordered set $(A, \leq)$ in which every pair of elements $\{a, b\}$ has both a least upper bound and a greatest lower bound is called a **lattice**. We denote $\text{LUB}(\{a, b\})$ by $a \vee b$ and we denote $\text{GLB}(\{a, b\})$ by $a \wedge b$.

تؤدي تراكيب الشباك دوراً هاماً في الجبر البولي ونماذج تدفق المعلومات.

مثال(1): بين أي من مخططات هاس التالية هو شباك؟

الحل: المخططات E و B و A كل منها يمثل شباك. والمخططات F و D لا تمثل أيًا منها شباك.



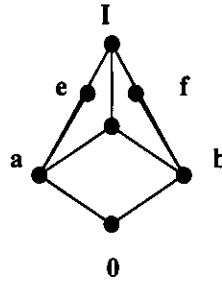
⁴ ابن منظور. لسان العرب. المجلد العاشر. حرف القاف والكاف. دار صادر بيروت. توزيع دار الجيل لبنان. "طريق شباك أي متداخل ملتبس مختلط شركه بعضها في بعض والشباك من أسماء الأسد.

شباك جزئي Sub lattice

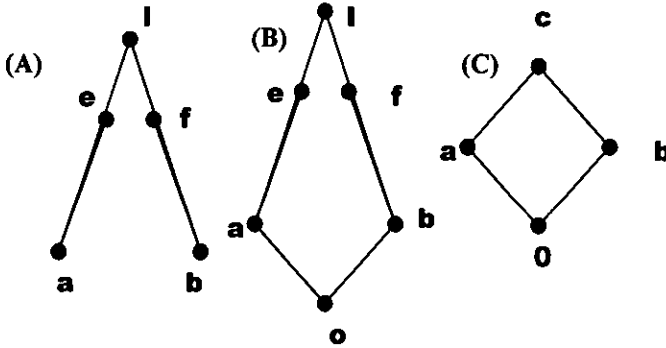
ليكن $(L, \leq)$ شباك ، ولتكن B مجموعة جزئية غير خالية من L ، نسمي B شباك جزئياً من L إذا كان $a \wedge b \in B$ و $a \vee b \in B$ كلما كان $a \in B$ و $b \in B$.

Let $(L, \leq)$ be a lattice. A nonempty subset B of L is called a sublattice of L if $a \vee b \in B$ and $a \wedge b \in B$ whenever $a \in B$ and $b \in B$.

مثال (2): ليكن لدينا الشباك التالي :



هل المجموعات المتمثلة بالأشكال التالية هي شباك جزئي أم لا.



الحل :

(a) الحظ أن $a \wedge b = 0 \notin B_a$ وبالتالي هذا يكفي حتى نقول إن B_a ليست شباك جزئياً

(b) وبالتالي هذا يكفي حتى نقول أن B_b ليست شباك جزئياً

(c) الحظ أن $a \vee b = c \in B_c$ وأيضا $a \wedge b = 0$ وهو من B_c أيضا ، وكذلك

$$b \wedge c = b \in B_c \text{ and } a \wedge c = a \in B_c \text{ and } b \vee c = c \in B_c \text{ and } a \vee c = c \in B_c$$

أي إن B_c شباك جزئي .

نماذج خاصة من الشباك Special Types of Lattice

شباك محدّد Bounded lattice

الشباك L هو محدّد إذا احتوى على عنصر أعظم I وعنصر أصغر o .

A lattice L is said to be bounded if it has a greatest element I and a least element o .

مثال (3): الشباك $(Z^+, |)$ غير محدّد لعدم حيازته على عنصر أعظم وامتلاكه لعنصر أصغر 1.

مثال (4): الشباك $(P(S), \subseteq)$ محدّد وذلك لحيازته على عنصر أعظم S و عنصر أصغر $\emptyset$.

نتيجة: إذا كان L شباك محدّد فإنه لكل عنصر $a \in A$ نحصل

$$o \leq a \leq I, a \vee o = a, a \wedge o = o, a \vee I = I, a \wedge I = a$$

شباك توزيعي Distributive lattice

الشباك L يسمى توزيعي إذا أياً كانت العناصر a, b و c منتمية لـ L ، فإنها تحقق الخاصيتين التوزيعية التالية:

$$\begin{aligned} \bullet a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ \bullet a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

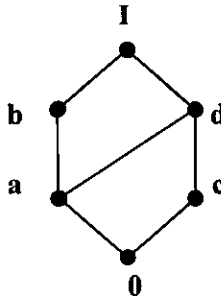
A lattice L is called distributive if any elements a, b , and c in L we have the following distributive properties:

$$\begin{aligned} \bullet a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ \bullet a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

نتيجة: إذا لم يكن L توزيعياً نقول إنه غير توزيعي Nondistributive

مثال (5): الشباك $(P(S), \subseteq)$ توزيعي، بسبب أن الاتحاد والتقاطع يحققان خاصتي التوزيع. لأننا نعرفهما بـ $X \cup Y = X \vee Y, X \cap Y = X \wedge Y$

مثال (6): بين إن كان الشباك التالي هو شباك توزيعي أم لا؟



الحل: خاصتنا التوزيع محققة لمخطط هاس' أعلاه وعليه فإن الشباك توزيعي. نكتفي بإثبات ذلك للعناصر الثلاثة التالية a, b, c على سبيل المثال.

$$1) a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge I = a$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \vee 0 = a$$

❖ ومنه أن طرفي الخاصية الأولى متساويان و الخاصية محققة

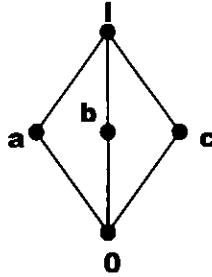
$$2) a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$$

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge d = a$$

أيضا طرفا الخاصية الثانية متساويان ، والخاصية محققة.

مثال (7) : بين ان كان الشباك التالي هو شباك توزيعي أم لا؟



الحل: الشباك غير توزيعي لعدم تحقق كلتا الخاصتين وعادة نكتفي بعدم تحقق إحدى الخاصتين.

$$1) a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge I = a$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0 \vee 0 = 0$$

$$a \neq 0$$

الشباك غير توزيعي Nondistributive وحتى لو تحققت الخاصية الثانية.

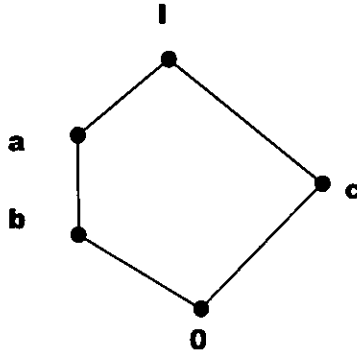
$$2) a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$$

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = I \wedge I = I$$

$$a \neq I$$

مثال (8) : بين ان كان الشباك التالي هو شباك توزيعي أم لا؟



الحل:

$$\begin{aligned} 1) a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \wedge (b \vee c) &= a \wedge I = a \\ (a \wedge b) \vee (a \wedge c) &= b \vee 0 = b \\ a &\neq b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ a \vee (b \wedge c) &= a \vee 0 = a \\ (a \vee b) \wedge (a \vee c) &= a \wedge I = a \\ a &= a \end{aligned}$$

الشباك غير توزيعي Nondistributive بسبب عدم تحقق الخاصية الأولى

متمم العنصر

ليكن L الشباك المحدد والمالك للعنصر الأعظم I و للعنصر الأصغر 0 ، وليكن $a \in L$ ، فالعنصر $a' \in L$ هو متمم لـ العنصر a إذا تحقق $I' = 0$ و $0' = I$. راقب أن $a \vee a' = I$ و $a \wedge a' = 0$

Let L be a bounded lattice with greatest elements I , and least element 0 , and let $a \in L$. an element $a' \in L$ is called a **complement** of a if $a \vee a' = I$ and $a \wedge a' = 0$

Observe that $0' = I$ and $I' = 0$

مثال (9): لكل عنصر في الشباك $(P(S), \subseteq)$ عنصر متمم،. حيث إن

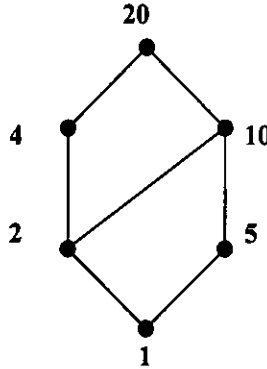
$$X \cup \bar{X} = X \vee \bar{X} = S, \quad X \cap \bar{X} = X \wedge \bar{X} = \phi$$

الشابك المتمم

الشابك L يدعى شابكاً متمماً *complemented* إذا كان محدداً ولكل عنصر فيه عنصر متمم له.

A lattice L is called **complemented** if it is bounded and every element in L has a complement.

مثال (10): بين ان كان $(D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}, |)$ شابك متمم أم لا؟



الحل : نلاحظ ان

$$5 \vee 10 = 10 \neq 20 \quad \text{و} \quad 5 \wedge 10 = 5 \neq 1$$

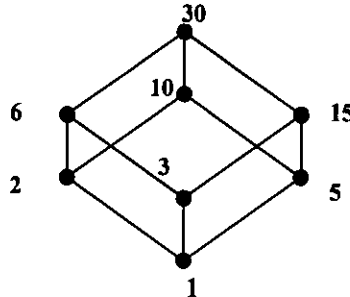
$$\text{بينما} \quad 2 \vee 10 = 10 \neq 20 \quad \text{و} \quad 2 \wedge 10 = 2 \neq 1$$

$$\text{و بينما} \quad 4 \vee 10 = 20 \quad \text{و} \quad 4 \wedge 10 = 2 \neq 1$$

وكذلك $1 \vee 10 = 10 \neq 20$ و $1 \wedge 10 = 1$ إذن لا يوجد متمم للعنصر 10 وعليه فإن D_{20} غير متمم.

مثال (11): ليكن لدينا الشابك المتمم D_{30} ، أوجد ما يلي: $3'$ و $6'$
 $(15 \vee 10) \vee 6'$ و $(15 \vee 10) \vee 6$

الحل:



من مخطط هاس أعلاه نجد أن

- (a) $3' = 10$ (b) $6' = 5$ (c) $(15 \wedge 10) \vee 6' = 5 \vee 6' = 5 \vee 5 = 5$
 (d) $(15 \vee 10) \vee 6 = 30 \vee 6 = 30$

تمارين محلولة Solved Exercises

1- بين أي العلاقات التالية هي مجموعة مرتبة جزئياً POSet؟

- (a) $A = Z$ و aRb إذا فقط إذا $a = 2b$.
 (b) $A = Z$ و aRb إذا فقط إذا b^2 يقسم a .
 (c) $A = R$ و aRb إذا فقط إذا $a \geq b$

الحل :

(a) نوجد أولاً العلاقة R المعرفة على $A = Z$

$$R = \{ \dots (-8, -4), (-6, -3), (-4, -2), (-2, 1), (0, 0), (2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4) \dots \}$$

نلاحظ أن R هي ليست انعكاسية not reflexive ، ولكنها علاقة تخالفيه antisymmetric وهي أيضاً علاقة ليست تعدياً not transitive وذلك لأن $(-8, -4), (-4, -2) \in R$ ولكن $(-8, -2) \notin R$ وبالتالي R ليست مجموعة مرتبة جزئياً .

(b) نلاحظ أن R تأخذ القيم التالية:

$$\begin{aligned} \{ \dots & (-16, -4), (-16, -2), (16, -1), (-16, 1), (-16, 2), \\ & (-16, 4), (16, 4), (16, 2), (16, 1), (-8, -2), \\ & (8, -2), (8, 1), (4, 2), (8, 2), (8, -1), (8, 2), (-9, -3), \\ & (-9, -1), (-9, 3), (-9, 1), (9, -1), (9, 1), \\ & (0, 0), (1, 1), (-1, 1), (1, -1) \dots \} \end{aligned}$$

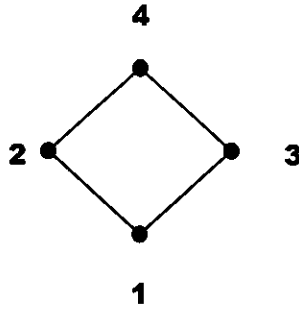
نلاحظ أن R ليست انعكاسية ، وليست تخالفيه وتعدياً وبالتالي R ليست مجموعة مرتبة جزئياً .

(c) من تعريف العلاقة نلاحظ أنها تحقق خصائص الانعكاسية والتخالفيه والتعدي أي أنها مجموعة مرتبة جزئياً.

2- لتكن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ارسم مخطط هاس للعلاقة التالية:

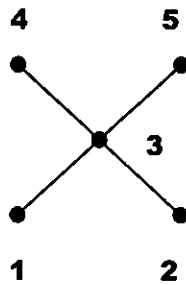
$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 4), (1, 4), (4, 4)\}$$

الحل:

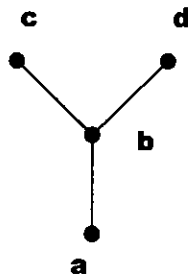


3 - لتكن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ارسم مخطط هاس للعلاقة التالية:
 $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,4), (3,5),$
 $(1,4), (4,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (5,5)\}$

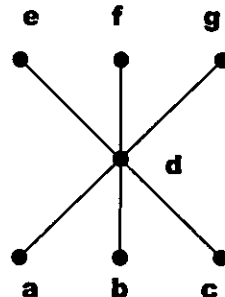
الحل:



4- أوجد العلاقات المعطاة بمخططات هاس التالية:



a)

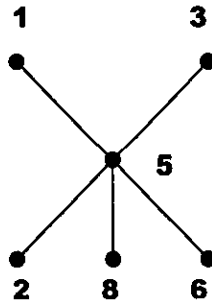


b)

الحل:

- a) $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (d, d)\}$
- b) $R = \{(a, a), (a, d), (a, e), (a, f), (a, g), (b, b), (b, d), (b, e), (b, f), (b, g), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (c, g), (d, d), (d, e), (d, f), (d, g), (e, e), (f, f), (g, g)\}$

5- أوجد المصفوفة التي تمثل مخطط هاس التالي:



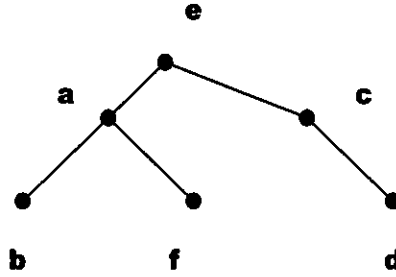
الحل:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6- رسم مخطط هاس الموافق للمصفوفة التالية ، حيث $A = \{a, b, c, d, e, f, \}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:



7- إذا كانت $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، ارسم مخطط هاسُ الموافق للمصفوفة التالية :

$$MR = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:



8- ليكن لدينا مخطط هاسُ التالي ، والمطلوب إيجاد التالي:

(a) النهاية العظمى

(b) النهاية الصغرى

(c) العنصر الأعظم

(d) العنصر الأصغر

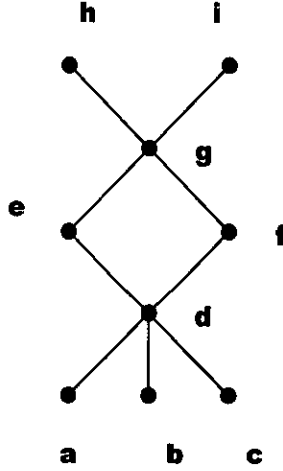
(e) الحدود العليا لـ $B = \{d, e, f\}$

(f) الحدود الدنيا لـ $B = \{d, e, f\}$

(g) أصغر حد أعلى لـ $B = \{d, e, f\}$

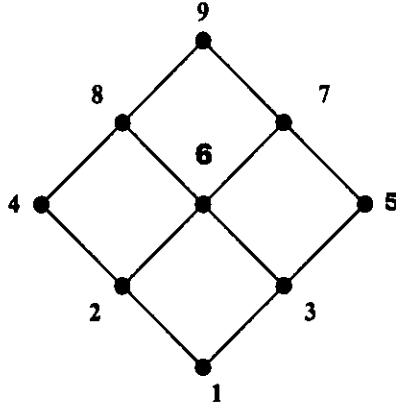
(h) أكبر حد أدنى لـ $B = \{d, e, f\}$

الحل :



- a) h, i
- b) a, b, c
- c) Has not
- d) Has not
- e) g, h, i
- f) a, b, c, d
- g) g
- h) d

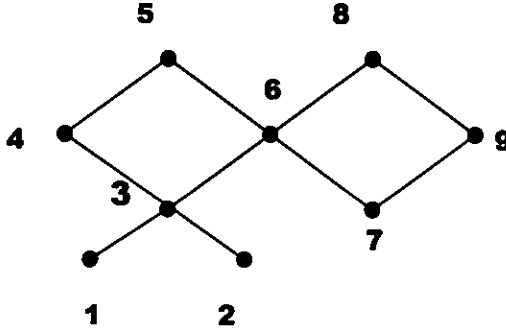
9- ليكن لدينا مخطط هاس التالي، والمطلوب إيجاد



- (a) النهاية العظمى
 (b) النهاية الصغرى
 (c) العنصر الأعظم
 (d) العنصر الأصغر
 (e) الحدود العليا لـ $\{6,7,8\}$
 (f) الحدود الدنيا لـ $\{6,7,8\}$
 (g) أصغر حد أعلى لـ $\{6,7,8\}$
 (h) أكبر حد أدنى لـ $\{6,7,8\}$
 الحل :

- a) g
 b) 1
 c) 9
 d) 1
 e) 9
 f) 1, 2, 3, 4
 g) 9
 h) 6

10 - أعد السؤال السابق ولكن من أجل $B = \{3,4,6\}$ ومخطط هاس التالي:



الحل:

- 1) 5, 8
- 2) 1, 2, 7
- 3) 5
- 4) Has not
- 5) 5
- 6) 1, 2, 3
- 7) LUB=5
- 8) GLB=3

11- أعد السؤال السابق ولكن من أجل المجموعة الجزئية $B = \{3, 4, 8\}$

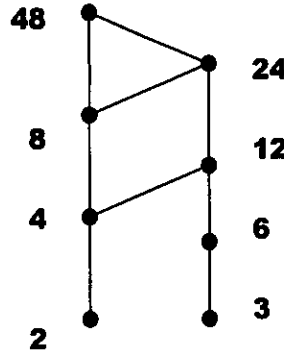
الحل:

- 1) 5, 8
- 2) 1, 2, 7
- 3) Has not
- 4) 3
- 5) Has not
- 6) 1, 2, 3
- 7) LUB = none
- 8) GLB = 3

12- لتكن لدينا $(\{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48\}, |)$ ولتكن $B = \{4, 6, 12, \}$ والمطلوب إيجاد :

- (a) الحدود العليا لـ $B = \{4, 6, 12, \}$
- (b) الحدود الدنيا لـ $B = \{4, 6, 12, \}$
- (c) أصغر حد أعلى لـ $B = \{4, 6, 12, \}$
- (d) أكبر حد أدنى لـ $B = \{4, 6, 12, \}$

الحل : نرسم أولا مخطط هاس

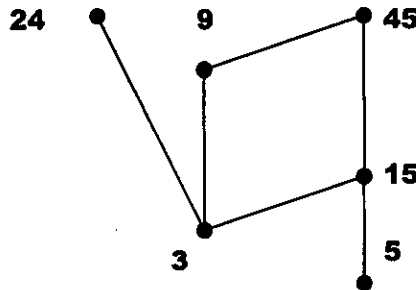


نلاحظ من مخطط هاس أن

- (e) الحدود العليا لـ B هي 24, 48, 12
- (f) الحدود الدنيا لـ B لا توجد
- (g) أصغر حد أعلى لـ B هو 12
- (h) أكبر حد أدنى لـ B لا يوجد

13- لتكن لدينا المجموعة المرتبة جزئياً ($\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |$) و المطلوب إيجاد

- a) Maximal elements
- b) Minimal element
- c) Greatest element
- d) Least element
- e) Upper bounds of $\{3, 5\}$
- f) LUB $\{3, 5\}$
- g) Lower bounds of $\{15, 45\}$
- h) GLB $\{15, 45\}$



الحل:

- a) 24, 45
- b) 3, 5
- c) None

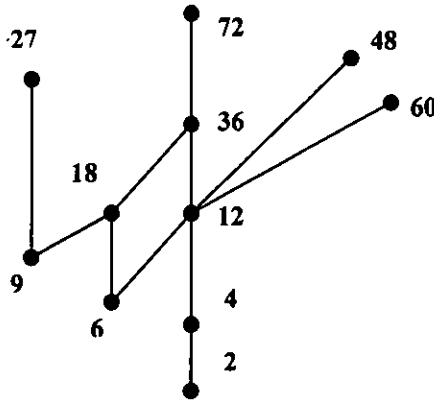
- d) None
- e) 15, 45
- f) 15
- g) 3,5,15
- h) 15

14- لتكن لدينا المجموعة المرتبة جزئياً التالية :
 $(\{2,4,6,9,12,27,36,48,60,72\}, |)$

والمطلوب إيجاد :

a) Maximal elements	b) Minimal elements
c) Greatest element	d) Least element
e) Upper bounds $\{2, 9\}$	f) LUB $\{49\}$
g) Lower bounds $\{60, 72\}$	h) GLB $\{60, 72\}$

الحل :



- a) 27,72,48,60
- b) 2, 9
- c) No
- d) No
- e) 18, 36, 72
- f) $\text{LUB } \{2, 9\} = 18$
- g) 12,6,4,2
- h) 12

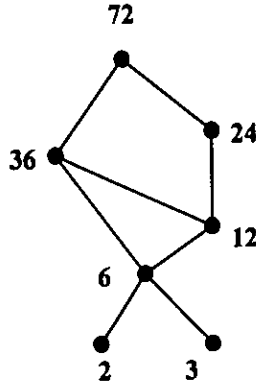
15- لتكن a و b عناصر من شباك متمم توزيعياً ، اختزل العبارة
 $b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b')))$

الحل:

$$b \wedge (a \vee (a' \wedge (b \vee b'))) = b \wedge (a \vee (a' \wedge I))$$

$$b \wedge (a \vee a') = b \wedge I = b$$

16- لتكن $(A, |)$ مجموعة مرتبة جزئياً (POSet)، حيث $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36, 72\}$ هل $(A, |)$ تمثل شباك أم لا؟
الحل: نرسم الشباك



نلاحظ أن $LUB \{2, 3\} = 6$ و $GLB \{2, 3\} = \text{none}$ وبالتالي $(A, |)$ ليست شباك

17 - ليكن الشباك المتمم D_{105} والمطلوب إيجاد

$$a) 21 \vee 3 =$$

$$b) 7' \wedge 21 =$$

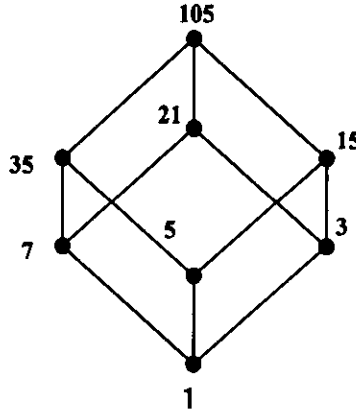
$$c) 1 \vee 105 =$$

$$d) 35 \wedge 15 =$$

$$e) 35 \vee 3' =$$

$$f) 15' \wedge 7' =$$

الحل : نرسم الشباك $D_{105} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$



ملحوظة: متمم العنصر X هو العنصر Y الذي سوف يضرب به لنحصل 105

$$a) 21 \vee 3 = 21$$

$$b) 7' \wedge 21 = 15 \wedge 21 = 3$$

$$c) 1 \vee 105 = 105$$

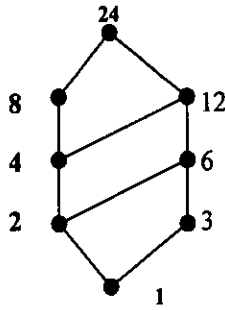
$$d) 35 \wedge 15 = 5$$

$$e) 35 \vee 3' = 35 \vee 35 = 35$$

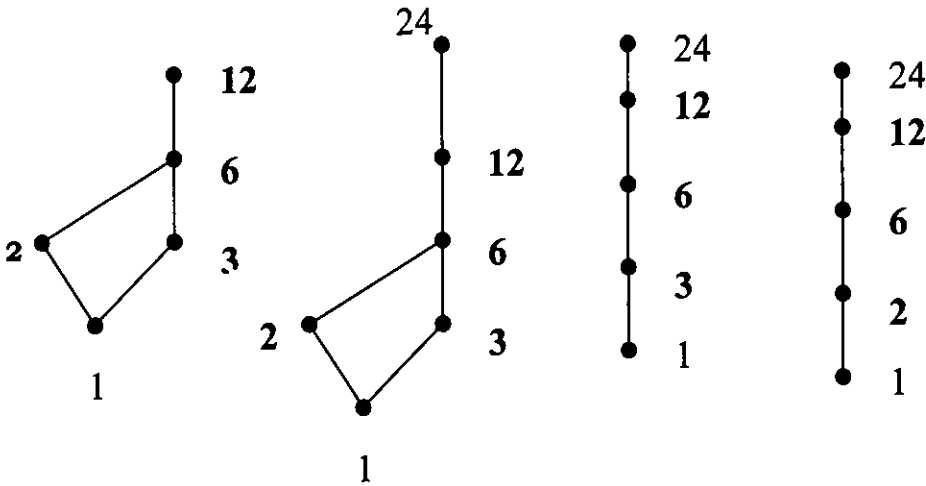
$$f) 15' \wedge 7' = 7 \wedge 15 = 7$$

18- أوجد كل الشباك الجزئي من D_{24} والمؤلفة من خمسة عناصر؟

الحل : $D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ ونرسم الشباك أولا



نلاحظ انه يوجد لدينا عدد أربعة شبك جزئي وهي : $\{1, 2, 3, 6, 12\}$ ، $\{1, 3, 6, 12, 24\}$ ، $\{1, 2, 6, 12, 24\}$ ، $\{1, 2, 3, 6, 12, 24\}$



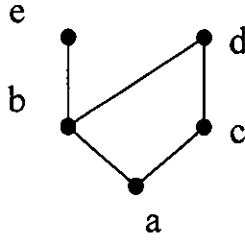
تمارين غير محلولة Unsolved Exercises

- 1- بين أي العلاقات التالية هي مجموعة مرتبة جزئياً :
 $b \geq a$ و aRb إذا وفقط إذا كان $A = R$ (a)
 $(P(S), \subseteq)$ حيث S مجموعة ما . (b)
 $(\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, |)$ (c)

- 2- ارسم مخططات هاس' للمجموعات المرتبة جزئياً التالية:

- (a) $(\{1,2,4,6,8\}, |)$
 (b) $(\{1,2,3,5,7,11,13\}, |)$
 (c) $(\{1,2,3,6,12,24,36,48\}, |)$
 (d) $(\{1,2,4,8,16,32,64\}, |)$

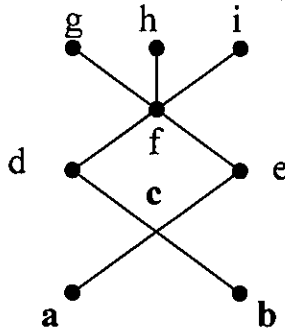
- 3- أوجد العلاقة لمخطط هاس' التالي:



- 4- لتكن $(\{1,2,3,4,6,8,12\}, |)$ ولتكن $B = \{4,6,12\}$ ، و المطلوب إيجاد :

- a) Upper bounds (B)
 b) Lower bounds (B)
 c) LUB (B)
 d) GLB (B)

- 5- ليكن لدينا مخطط هاس' التالي أه حد ما يلي .

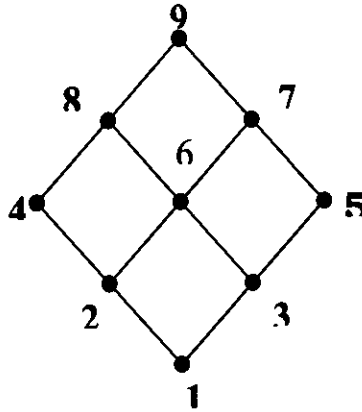


- a) Upper bounds $\{d, e, g\}$
 b) Lower bounds $\{e, d, f\}$

c) LUB $\{e, d, f\}$

d) GLB $\{f, g, h\}$

6- ليكن لدينا مخطط هاس التالي أوجد ما يلي :



a) Upper bounds $\{4, 5, 6\}$

b) Lower bounds $\{4, 5, 6\}$

c) LUB $\{4, 5, 6\}$

d) GLB $\{4, 5, 6\}$

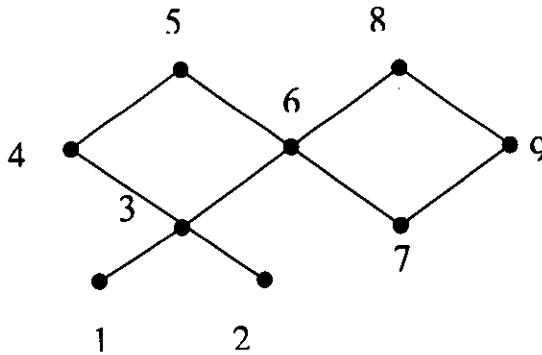
e) Upper bounds $\{2, 3, 7\}$

f) Lower bounds $\{2, 3, 7\}$

g) LUB $\{2, 3, 7\}$

h) GLB $\{2, 3, 7\}$

7- ليكن لدينا مخطط هاس التالي أوجد ما يلي :



a) Upper bounds $\{4, 7, 9\}$

b) Lower bounds $\{4, 7, 9\}$

c) GLB $\{4, 7, 9\}$

d) LUB $\{4, 7, 9\}$

e) LUB $\{4, 5, 8\}$

f) GLB $\{4, 5, 8\}$

8- لتكن لدينا $(|, \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48\})$ ولتكن $B = \{2, 8, 12\}$ أوجد:

- a) Upper bounds
- b) Lower bounds
- c) LUB
- d) GLB

9- لتكن $(|, \{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\})$

- a) LUB $(\{9, 18, 36\})$
- b) GLB $(\{9, 18, 36\})$
- c) LUB $(\{27, 72\})$
- d) CLB $(\{27, 72\})$
- e) LUB $(\{36, 48\})$
- f) GLB $(\{36, 48\})$

10- ارسم مخطط هاس للمجموعة D_{143} . ثم أوجد متمم كل عنصر من عناصر الشبكة D_{143} .

11- ارسم مخطط هاس للمجموعة D_{42} . ثم أوجد متمم كل عنصر من عناصر الشبكة D_{42} .

المصطلح العربي	English Term
علاقات الترتيب	Order Relations
ترتيب جزئي	Partial Order
مجموعة مرتبة جزئياً	Partially Ordered Set or POSet
مقارنة العناصر	Elements Comparison
قابل للمقارنة	Comparable
غير قابل للمقارنة	Incomparable
مزدوج الترتيب الجزئي	Dual Partial Order
مجموعة مرتبة كلياً	Totally Ordered Set
ترتيباً كلياً	Total Order
السلسلة	Chain
مرتبة خطياً	Linearly ordered
ترتيباً خطياً	linear order
مخططات هاس	Hasse Diagrams
عناصر النهاية العظمى والصغرى	Maximal and Minimal Element
النهاية العظمى	Maximal Element
النهاية الصغرى	Minimal element
عناصر عظمى وصغرى	Greatest and Least Elements
العنصر الأعظم	Greatest Element
العنصر الأصغر	Least Element
حد أعلى	Upper Bound
حد أدنى	Lower Bound

المصطلح العربي	English Term
أصغر حد أعلى	Least Upper Bound (LUB)
أكبر حد أدنى	Greatest Lower Bounds (GLB)
شباك	Lattice
شباك جزئي	Sub Lattice
نماذج خاصة من الشباك	Special Types of Lattice
شباك محدد	Bounded Lattice
شباك توزيعي	Distributive Lattice
غير توزيعي	Nondistributive
متمم العنصر	Element Complement
الشباك المتمم	Complemented Lattice

الفصل التاسع

الشجر

Trees

304.....	الفصل التاسع
304.....	الشجر
304.....	Trees
306.....	الشجرة Tree
309.....	الأوراق Leaves
309.....	مستويات الشجرة Levels of the Tree
309.....	ارتفاع الشجرة Height of the Tree
310.....	الشجرة المرتبة Ordered Tree
310.....	الشجرة الجزئية Subtree
311.....	الشجرة النونية التامة Complete n-tree
311.....	الشجرة الثنائية Binary Tree
312.....	الشجر الموسوم Labeled Trees
314.....	البحث في الشجرة Tree Searching
315.....	شجرة البحث الثنائي Binary Search Tree
318.....	خوارزميات اجتياز الشجرة Tree Traversal Algorithms
318.....	تدوين الصادرة أو الصيغة البولندية Polish Form or Prefix Notation
318.....	تدوين الخلف أو معكوس الصيغة البولندية
319.....	تدوين الوسط Infix Notation
319.....	خوارزمية الصادرة Algorithm Preorder
320.....	خوارزمية الوسط Algorithm Inorder
321.....	خوارزمية الخلف Algorithm Postorder
324.....	نسخ شبه برامج خوارزميات اجتياز الشجرة
324.....	Pseudocode Versions for Tree Traversal Algorithms
325.....	البحث المعم على الشجر Searching General Trees
326.....	الشجرة المولدة Spanning tree
327.....	الأشجار المولدة ذات الأقل تكلفة Minimal Spanning Trees
330.....	تمارين محلولة
335.....	تمارين غير محلولة؟
336.....	المصطلحات العلمية Terminology

الشجر Trees

قبل أن نعرف الشجرة ، لابد من الإشارة إلى أن الشجر حالة خاصة من العلاقات، ولها أهمية كبيرة لتمثيل السلالات العائلية والهيكل الإداري في المؤسسات. وكذلك يوجد للشجر تطبيقات في علم الحاسوب وخاصة في قواعد البيانات والمترجمات و تحليل الخوارزميات وتصميمها.

الشجرة Tree

لتكن A مجموعة ما ، ولتكن T علاقة معرفة على A . نقول عن T أنها شجرة إذا وجدت ذروة v في A ووجود مسار وحيد في T يبدأ من v إلى أية ذروة أخرى ، لكن لا يوجد مسار من v إلى v . نسمي v جذر الشجرة، و T شجرة ذات جذر ويرمز لها بـ (T, v) .

Let A be a set, and let T be a relation on A . We say that T is a tree if there is a vertex v in A with the property that there exists a unique path in T from v to every other vertex in A , but no path from v to v . v is called root of the tree T , and T is a rooted tree, and denoted by (T, v)

مثال(1): لتكن $A=\{1,2,3,4,5\}$. ولتكن العلاقة

$$T=\{(1,2),(2,3)(3,4)(4,5)\}$$

بين إن كانت T شجرة أم لا ، وإن كانت شجرة فسم جذرها؟

الحل: من المخطط الموجه التالي للعلاقة نجد أن T شجرة جذرها 1

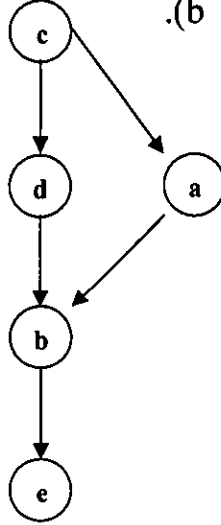


مثال(2): لتكن $A=\{a, b, c, d, e\}$ ولتكن العلاقة T المعرفة بـ

$$T = \{(a, b), (b, e), (c, d), (d, b), (c, a)\}$$

بين إن كانت T شجرة أم لا ، وإن كانت شجرة فما جذرها؟

الحل: نرسم مخطط العلاقة T ونجد T ليست شجرة ؛ لأن الذروة b منحدره من ذروتين هما a و d ، وهذا مخالف للتعريف (يوجد مسارين للوصول إلى الذروة b).

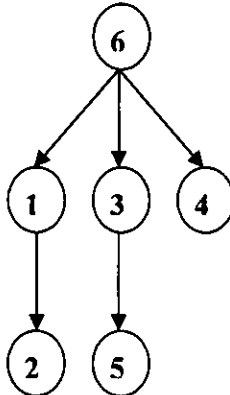


مثال(3): لتكن $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ولتكن العلاقة T المعرفة بـ

$$T = \{(1,2), (3,5), (6,1), (6,3), (6,4)\}$$

شجرة أم لا ، وإن كانت شجرة فما هو جذرها؟

الحل: نلاحظ أن T هي شجرة جذرها 6.

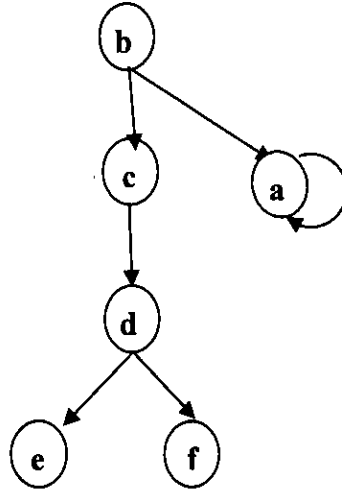


مثال(4): لتكن $A=\{a, b, c, d, e, f\}$. ولتكن العلاقة T المعرفة بـ

$$T = \{(a, a), (b, a), (b, c), (c, d), (d, e), (d, f)\}$$

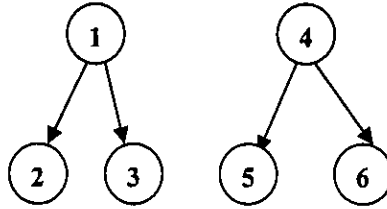
بين إن كانت T شجرة أم لا ، إن كانت شجرة فما جذرها؟

الحل: الحظ أن T ليست شجرة، وذلك لوجود دورة عند الذروة a .



مثال(5): لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، بين إن كانت العلاقة $T = \{(1, 2), (1, 3), (4, 5), (4, 6)\}$ شجرة أم لا؟

الحل:



نلاحظ أن T ليست شجرة وذلك بسبب عدم وجود جذر لها.

تمرين(1): لتكن العلاقة T المعرفة على المجموعة

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ بـ:

$T = \{(7, 8), (3, 7), (6, 8), (1, 3), (1, 2), (2, 4), (2, 5)\}$

بين إن كانت T شجرة أم لا، إن كانت شجرة فما جذرها؟

تمرين(2): لتكن $A = \{a, b, c, d, e, f, h, i, j\}$

ولتكن $T = \{(e, i), (b, e), (i, j), (d, f), (d, h), (b, d), (a, b), (a, c)\}$

بين إن كانت T شجرة أم لا، وما جذرها؟

تمرين(3): لتكن $A = \{u, v, w, x, y, z\}$. ولتكن العلاقة T المعرفة بـ

$T = \{(u, x), (u, v), (w, z), (x, w), (v, y), (y, y)\}$

بين إن كانت T شجرة أم لا، وما جذرها؟

تمرين(4): لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. ولتكن العلاقة T المعرفة بـ
 $T = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$ ، بين إن كانت T شجرة أم لا؟

الأوراق Leaves

الأوراق هي الذروات التي لا نسل لها. رؤوس الشجرة التي لا ينبثق منها فروع - وهي تمثل نهاية كل مسار. انظر المثال (6) أدناه.

The vertices of the tree that have no offspring are called the leaves of the tree.

مستويات الشجرة Levels of the Tree

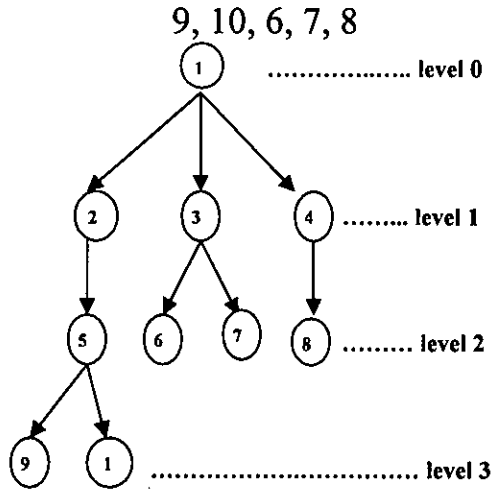
عند رسم شجرة ما، نبدأ من الجذر v ، وهذا يشكل المستوى صفر للشجرة level 0. ثم نرسم سلالة الجذر v أي أبناءه (الأشقاء) و هؤلاء الأبناء يشكلون المستوى الأول للشجرة level 1. ثم نرسم سلالة الأبناء أي أحفاد الجذر v . وأحفاد الجذر يشكلون المستوى الثاني للشجرة level 2. و أحفاد أبناء الجذر v ؛ (إن وجدوا) يشكلون المستوى الثالث للشجرة level 3. و لإيجاد رقم مستوى آخر نسل نضيف العدد 1 لرقم مستوى أبائه. انظر المثال (6) أدناه.

ارتفاع الشجرة Height of the Tree

هو أكبر رقم مستوى للشجرة. انظر المثال (6) أدناه.

The largest level number of a tree is called the height of the tree.

مثال(6): الشكل التالي يمثل شجرة جذرها 1 وارتفاعها 3 وأوراقها هي:



الشجرة المرتبة Ordered Tree

حينما نقوم برسم مخطط شجرة، تلقائياً نعد ترتيب ما في كل مستوى وذلك بتنظيم النسل من اليسار لليمين. هكذا شجرة نطلق عليها شجرة مرتبة. انظر الشجرة المرتبة في المثال (6) أعلاه.

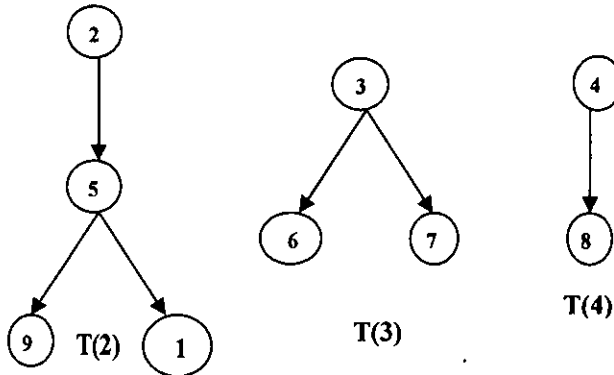
If we can draw the digraph of a tree is ordering at each level by arranging offspring from left to right. Such a tree will be called an ordered tree.

الشجرة الجزئية Subtree

لتكن (T, v) شجرة ذات جذر على المجموعة A ، ولتكن x ذروة في T . ولتكن B المجموعة المؤلفة من الذروة x وكل سلالتها (أي أبنائها x وأحفادها حتى آخر نسل-الأوراق-). أي كل الذروات في T التي نستطيع الوصول إليها بمسار ابتداءً من x . إذن $T(x)$ شجرة جزئية من T وتبدأ من الذروة x . $T(x)$ هي حصر العلاقة T في المجموعة B - $T(x) = T \cap B \times B$. كذلك $T(x)$ شجرة ذات جذر وجذرها هو x .

Let (T, v) be a rooted tree on the set A , and let x be a vertex of T . let B be the set consisting of x and all its descendants, that is, all vertices of T that can be reached by a path beginning at x . Then $T(x)$ is the Subtree of T beginning at x . $T(x)$ is also a rooted tree with root x . $T(x) = T \cap B \times B$ is the restriction of the relation T to B .

مثال(7): ارسم الأشجار الجزئية $T(4), T(3), T(2)$ من شجرة المثال (6).
الحل:



تمرين(8): ارسم $T(3)$ من المثال (1) و $T(a)$ من المثال (3) و $T(5)$ من المثال(6).

الشجرة النونية التامة Complete n-tree

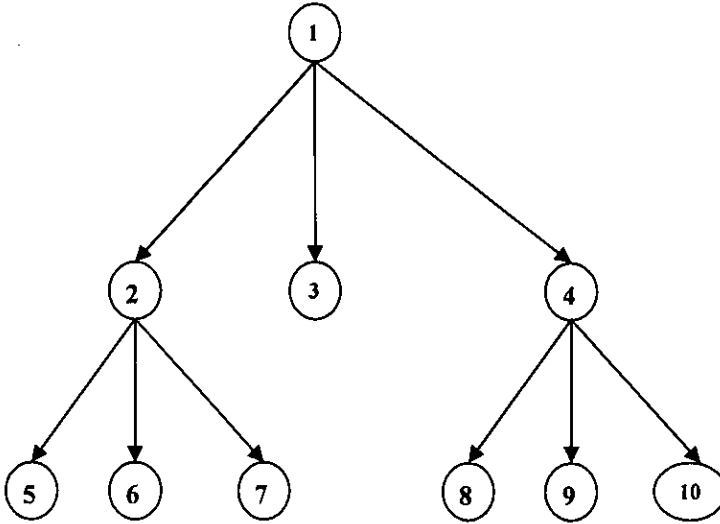
ليكن n عدد صحيح موجب، الشجرة T هي شجرة نونية ويرمز لها شجرة- n (n-tree) إذا يكون لكل ذروة غير الأوراق على الأكثر n سليل.

Let n be a positive integer, we say that a tree T is an ***n-tree*** if every vertex, other than the leaves, has at most n offspring.

والشجرة T هي شجرة نونية تامة ويرمز لها شجرة- n تامة (complete n-tree) (tree) إذا يكون لكل ذروة غير الأوراق تماماً n سليل. (إذا كان لكل ذروة عدد متساو من الأفرع أو صفر فرع).

We say that T is a ***complete n-tree*** if all vertices of T , other than the leaves, have exactly n offspring.

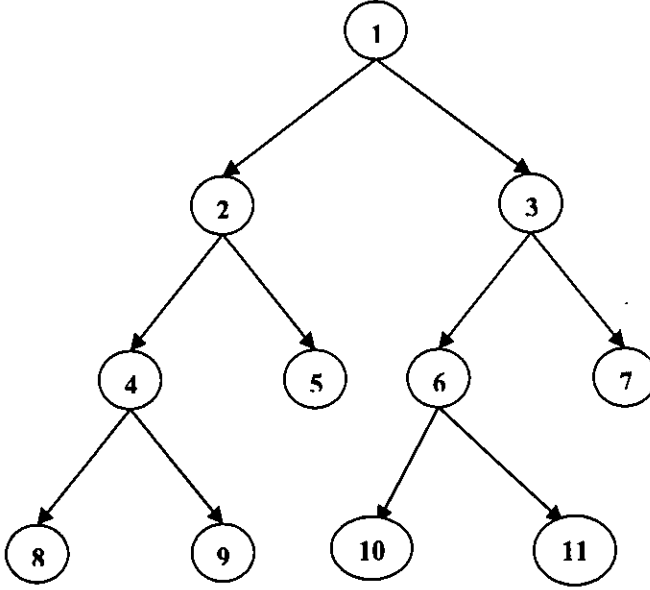
مثال (8): شجرة المخطط الموجهة في الشكل التالي أدناه هي شجرة-3 تامة.



الشجرة الثنائية Binary Tree

الشجرة الثنائية هي شجرة نونية تامة قيمة $n=2$ ونكتب شجرة-2 2-tree، أي هي الشجرة التي يكون لكل ذروة فيها سليلين اثنين فقط (complete 2-tree). انظر المثال 8 أدناه.

مثال (8): الشجرة في الشكل التالي تمثل شجرة ثنائية تامة.

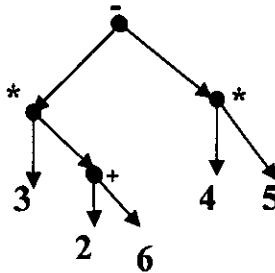


الشجر الموسوم Labeled Trees

من المفيد وسم ذرى (رؤوس) وخطوط الشجرة في المخطط الموجه ليشير إلى أن الشجرة تستعمل لغرض خاص. ومن الأمثلة التي تكون فيها مجموعة ذرى الشجرة غير مهمة بل بالأحرى فائدة الشجرة تؤكد بوسم هذه الذروات. فالشجرة الثنائية المستخدمة كشجرة تعبير جبري algebraic expression تؤسم الذروات بالعمليات الجبرية وتوسم الأوراق بالقيم العددية، وهذا خير مثال على الشجرة الموسومة.

مثال (1): مثل التعبير الجبري $((2+6)*3)-(4*5)$ على شكل شجرة موسومة؟

الحل: أولاً نبحث عن العملية الحسابية التي تمثل جذر الشجرة وذلك بتطبيق قواعد اسبقية تنفيذ العمليات الحسابية . وفي مثالنا عملية الطرح - تمثل جذراً للشجرة.

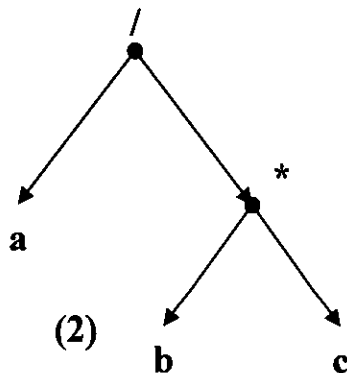
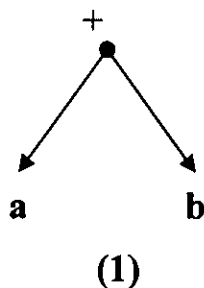


مثال(2): ارسم الشجرة الموسومة لكل من التعبيرات الحسابية التالية؟

$$a + b \quad (1)$$

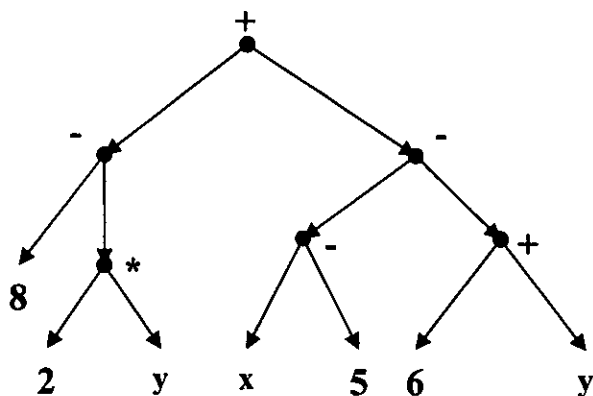
$$A / (b * c) \quad (2)$$

الحل:

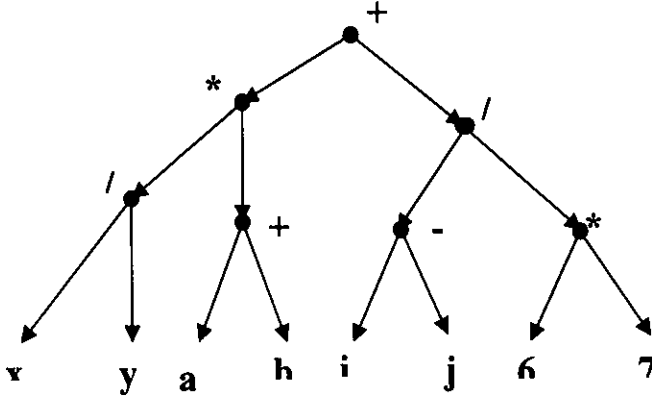


مثال(3): ارسم الشجرة الموسومة للتعبير الجبري التالي: $(8 - (2 * y)) + ((x - 5) - (6 + y))$

الحل:

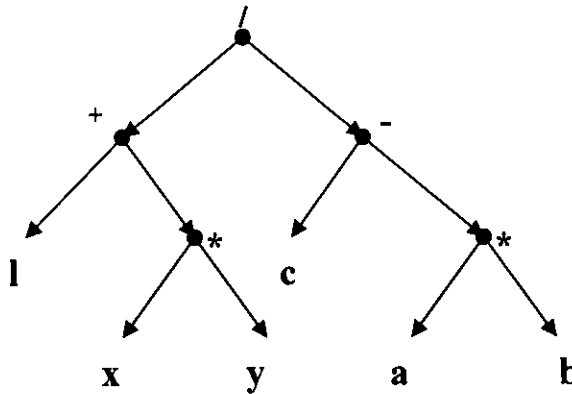


مثال(4): اكتب العلاقة الرياضية الممثلة بالشجرة الموسومة التالية:



الحل: $((x/y)*(a+b)) + ((i-j)/(6*7))$

مثال(5): اكتب العلاقة الرياضية الممثلة بالشجرة الموسومة التالية:



الحل: $(l + (x*y)) / (c - (a*b))$

البحث في الشجرة Tree Searching

هناك مناسبات عديدة يكون فيها مفيداً للتطبيقات الشجرية الأخذ في الاعتبار كل ذروة في الشجرة مرة واحدة ضمن ترتيب معين. وكلما تلاقينا الذروات واحدة بعد الأخرى، نرغب في اتخاذ اجراء معين أو في تنفيذ الحوسبة الملائمة للتطبيق الممثل بالشجرة. فمثلاً ، لو كانت الشجرة موسومة، فيمكننا عرض الوسم الموجود على كل ذروة، فإذا كانت الشجرة تمثل تعبيراً جبرياً، إذن على كل ذروة هناك عملية حسابية نرغب في تنفيذها. وتنفيذ المهمات المناسبة عند كل ذروة يسمى زيارة تلك الذروة visiting the vertex. إن معالجة الزيارة لكل ذروة في الشجرة ضمن ترتيب معين يسمى البحث في الشجرة tree searching أو البحث الشجري tree search.

لنأخذ في الاعتبار الشجرة ثنائية الموضع *binary positional tree* وهي الشجرة الثنائية المرتبة الموسومة والتي يحتمل وجود سليلين لكل ذروة فيها. ونسمي السليلين المحتملين فيها بالسليل الأيمن إن وجد؛ ونرمز له بـ v_R والثاني بالسليل الأيسر إن وجد؛ ونرمز له بـ v_L . ومن المحتمل أن يكون أحدهما أو كلاهما غير موجود عند بعض الذروات التي ليست أوراقاً. لتكن T شجرة ثنائية موضعية وجذرها v . إذن إذا وجد السليل الأيمن v_R سنطلق على $T(v_R)$ الشجرة الجزئية اليمنى للشجرة T ، وإذا وجد السليل الأيسر v_L وسنطلق على $T(v_L)$ الشجرة الجزئية اليسرى للشجرة T ، وتذكر أن الشجرة $T(v_R)$ هي شجرة ثنائية موضعية وجذرها هو السليل الأيمن v_R ، وتذكر كذلك أن الشجرة $T(v_L)$ هي شجرة ثنائية موضعية وجذرها هو السليل الأيسر v_L . إن هذا التدوين سوف يتيح لنا وصف خوارزميات البحث في الشجر بصيغة المعاودة *recursive form* وهي الخوارزميات التي تشير إلى نفسها أو تستدعي نفسها.

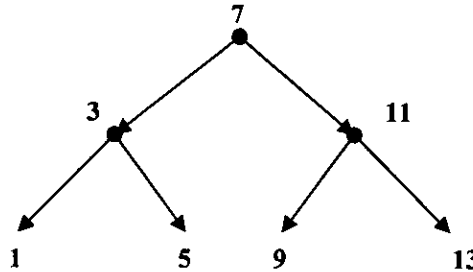
شجرة البحث الثنائي Binary Search Tree

هي شجرة ثنائية تستخدم طريقة سهلة للبحث عن كلمة أو رقم ضمن قائمة من الكلمات المرتبة هجائياً، أو قائمة من الأرقام مرتبة ترتيباً تصاعدياً. مثلاً عملية البحث عن موظف ضمن مجموعة موظفي مؤسسة ما؛ نقوم أولاً بترتيب أسماء الموظفين هجائياً أو يعطى كل موظف رقماً وظيفياً ونرتب الأرقام ترتيباً تصاعدياً، ثم نبحث بطريقة شجرة البحث الثنائي عن ذلك الموظف. وسوف نشرح هذه الطريقة من خلال الأمثلة التالية:

مثال (1): ارسم شجرة البحث الثنائي للأرقام التالية:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 ؟

الحل: 1. نلاحظ أن الأعداد مرتبة ترتيباً تصاعدياً، (وعدد القيم N عدد فردي)

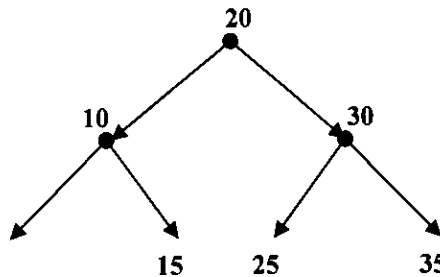


2. نحدد جذر الشجرة ، أي الذي ترتيبه يعين بالقانون: $(N+1)/2$ ، حيث N عدد الأرقام ، وفي مثالنا ، يكون الجذر هو العدد الرابع (7) في الترتيب 7 (من اليسار إلى اليمين): $7+1/2 = 4$
3. لو عددنا الجذر هو الجد فلا بد من إيجاد الابن الأيمن و الابن الأيسر للجذر (7). ونطبق الخطوة الثانية، على الشجرة الجزئية اليمنى 9, 11, 13 لإيجاد الابن الأيمن وهو (11). ثم نطبق الخطوة الثانية على الشجرة الجزئية اليسرى 1, 3, 5 لإيجاد الابن الأيسر وهو (3). وبالتالي نحصل الشجرة الثنائية المبينة في الشكل التالي:

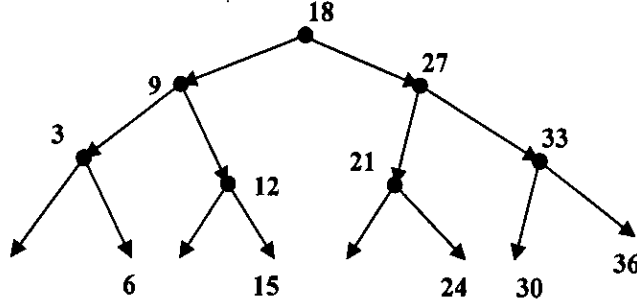
مثال (2): ارسم شجرة البحث الثنائي للأرقام التالية: 10, 15, 20, 25, 30, 35 ؟

الحل:

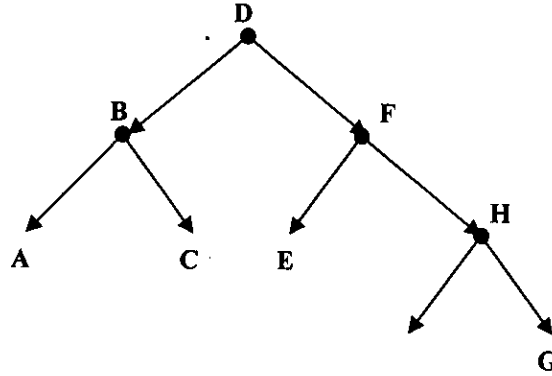
1. نلاحظ أن الأعداد مرتبة ترتيباً تصاعدياً، (وعدد القيم N عدد فردي)
2. نحدد جذر الشجرة ، أي الذي ترتيبه يعين بالقانون: $(N)/2$ ، حيث N عدد الأرقام ، وفي مثالنا ، يكون الجذر هو العدد الثالث (20) في الترتيب (من اليسار إلى اليمين): $6/2 = 3$
3. لو عددنا الجذر هو الجد فلا بد من إيجاد الابن الأيمن و الابن الأيسر للجذر (20). ونطبق الخطوة الثانية على الشجرة الجزئية اليمنى 25, 30, 35 لإيجاد الابن الأيمن وهو (30). ثم نطبق الخطوة الثانية على الشجرة الجزئية اليسرى 10, 15 لإيجاد الابن الأيسر وهو (10). و بالتالي نحصل الشجرة الثنائية المبينة في الشكل التالي (إن وجود الذروة غير الموسومة في الشجرة يدل على عدم وجود ابن أيسر للرقم 10):



مثال (3): ارسم شجرة البحث الثنائي للأرقام التالية:
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36
الحل: نحصل الشجرة التالية:



مثال (4): ارسم شجرة البحث الثنائي للأحرف التالية: A, B, C, D, E, F, H, G
الحل: نحصل الشجرة التالية:



تمرين (1): ارسم شجرة البحث الثنائي لكل مجموعة من الأعداد التالية:

1, 2, 3, 4, 5 (a)

2, 4, 8, 16, 32, 64 (b)

1, 2, 3... 18 (c)

تمرين (2): ارسم شجرة البحث الثنائي للأحرف التالية:

(a) أحرف اللغة الإنجليزية الصغيرة.

(b) أحرف اللغة العربية.

تمرين (3): ارسم شجرة البحث الثنائي لمجموعة أعداد لاعبي فريق كرة القدم.

خوارزميات اجتياز الشجرة Tree Traversal Algorithms

خوارزميات اجتياز الشجرة هي نفسها خوارزميات البحث في الشجرة. وسوف نتعرف ثلاثة خوارزميات هي خوارزمية الصدارة Algorithm Preorder وخوارزمية الخلف Algorithm Postorder وخوارزمية الوسط Inorder Algorithm وسوف يأتي وصفهن بعد أن نعطي أسباب تسمية هذه الخوارزميات التي جاءت وفقاً لنتائج تطبيقها على شجرة التعبير الجبري. وطرق تدوين التعابير الجبرية هي :

تدوين الصدارة أو الصيغة البولندية Polish Form or Prefix Notation

أسمينا هذا التدوين بالصدارة لأن صيغة الكتابة للتعبير تسبق فيه أو تصدر رموز العمليات المتغيرات المستقلة. وهي الصيغة نفسها المسماة بالصيغة البولندية.

وبعد تطبيق خوارزمية الصدارة على شجرة التعبير الجبري

((a-b)*(c+(d÷e))) سوف نحصل الصيغة البولندية $* - a b + c \div d e$. وهذا يمثل التعبير الجبري بشكل واضح دون الأقواس.

لتنفيذ التعبير المدون بالصيغة البولندية نتقدم كما يلي : نتحرك من اليسار إلى اليمين حتى تجد سلسلة الرموز على الشكل Fxy ، حيث F هي رمز العملية الثنائية ($+$, $-$, $*$, $\div$... وهكذا)، و x و y هما القيم الرقمية. احسب $x F y$ ثم ضع الجواب مكان الخيط الرمزي Fxy . ثم استمر بهذه الطريقة حتى تبقى قيمة رقمية واحدة فقط.

تدوين الخلف أو معكوس الصيغة البولندية

Prefix Notation or Polish Form Reverse

نسمى هذا التدوين الخلفي Postfix Notation أو معكوس الصيغة البولندية Form Reverse Polish حيث تأتي رموز العمليات الحسابية خلف أو بعد المتغيرات المستقلة. فصيغة التدوين الخلفي بعد تطبيق خوارزمية الخلف على شجرة التعبير الجبري ((a-b)*(c+(d÷e))) سوف نحصل معكوس الصيغة البولندية $a b - c d e \div + *$.

لتنفيذ التعبير المدون بالصيغة الخلفية نستخدم طريقة تنفيذ صيغة الصدارة نفسها ما عدا أن العامل يقع بعد المتغيرين هكذا xyF .

تدوين الوسط Infix Notation

نسمى هذا التدوين الوسطي أو الصيغة البينية حيث تتوسط رموز العمليات الحسابية المتغيرات المستقلة. فصيغة التدوين الوسطي بعد تطبيق خوارزمية الوسط على شجرة التعبير الجبري $((a-b)*(c+(d\div e)))$ سوف تحصل الصيغة البينية $a - b * c + d \div e$ وهو هي التعبير نفسه الذي بدأنا به.

خوارزمية الصدارة Algorithm Preorder

لتكن T شجرة ثنائية موضعية وجذرها v . نذكر بأنه إذا وجد السليل الأيمن v_R فسنتطرق على $T(v_R)$ الشجرة الجزئية اليمنى للشجرة T ، وإذا وجد السليل الأيسر v_L فسنتطرق على $T(v_L)$ الشجرة الجزئية اليسرى للشجرة T ، وعليه يمكن وصف خوارزمية الصدارة بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى: قم بزيارة جذر الشجرة v

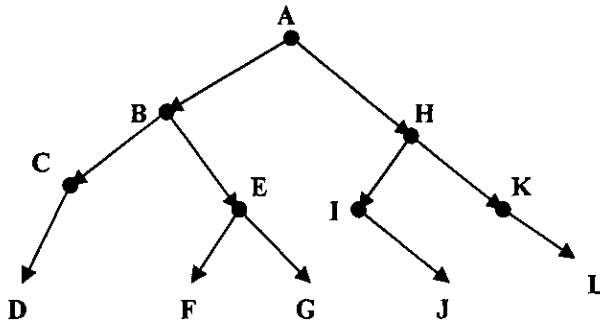
الخطوة الثانية: إذا وجد السليل الأيسر v_L ، فطبق خوارزمية الصدارة على الشجرة $(T(v_L), v_L)$

الخطوة الثالثة: إذا وجد السليل الأيمن v_R ، فطبق خوارزمية الصدارة على الشجرة $(T(v_R), v_R)$

ويمكن كتابة خوارزمية الصدارة بشكل غير رسمي على النحو الآتي:

1. قم بزيارة الجذر
2. ابحث في الشجرة الجزئية اليسرى إن وجدت
3. ابحث في الشجرة الجزئية اليمنى إن وجدت

مثال(1): طبق خوارزمية الصدارة على الشجرة الثنائية الموضعية التالية وعُدّ زيارة كل ذروة هو عبارة عن طباعة وسمها؟



الحل: وفقاً لخوارزمية الصدارة، سوف نقوم بزيارة الجذر ونطبع A ، ثم نطبق الخوارزمية على الشجرة الجزئية اليسرى $(T(B), B)$ ، ونقوم بزيارة جذرها ونطبع B ، ثم نطبق الخوارزمية على الشجرة الجزئية اليسرى

$(T(C), C)$ ، ونقوم بزيارة جذرها ونطبع C ، ثم نطبق الخوارزمية على الشجرة الجزئية اليسرى $(T(D), D)$ ، ونقوم بزيارة جذرها ونطبع D (السليل الأوحده الذروة C).

ويقودنا هذا البحث حتى الآن إلى طباعة سلسلة الرموز التالية: ABCD
الآن نعود لزيارة السليل الأيمن E للجذر B ثم نطبق الخوارزمية على الشجرة الجزئية اليسرى $(T(E), E)$ ، ونقوم بزيارة جذرها ونطبع E ، ثم نطبق الخوارزمية على الشجرة الجزئية اليسرى $(T(F), F)$ ، ونقوم بزيارة جذرها ونطبع F ، ثم نطبق الخوارزمية على الشجرة الجزئية اليمنى $(T(G), G)$ ، ونقوم بزيارة جذرها ونطبع G . ويقودنا هذا البحث حتى الآن إلى طباعة سلسلة الرموز التالية: ABCDEFG

الآن نعود لزيارة السليل الأيمن H للجذر A ثم نطبق الخوارزمية على الشجرة الجزئية اليمنى $(T(H), H)$ ، ونقوم بزيارة جذرها ونطبع H ، ثم نطبق الخوارزمية على الشجرة الجزئية اليسرى $(T(I), I)$ ، ونقوم بزيارة جذرها ونطبع I ، ثم نطبق الخوارزمية على الشجرة الجزئية اليمنى $(T(J), J)$ ، ونقوم بزيارة جذرها ونطبع J .

ويقودنا هذا البحث حتى الآن إلى طباعة سلسلة الرموز التالية:
ABCDEFGHIJ

الآن نعود لزيارة السليل الأيمن K للجذر H ثم نطبق الخوارزمية على الشجرة الجزئية اليمنى $(T(K), K)$ ، ونقوم بزيارة جذرها ونطبع K ، ثم نطبق الخوارزمية على الشجرة الجزئية اليمنى $(T(L), L)$ ، ونقوم بزيارة جذرها ونطبع L . ويقودنا البحث النهائي إلى طباعة سلسلة الرموز التالية:
ABCDEFGHIJKL

تمرين (1): طبق خوارزمية الصدارة على شجرة التعبير الجبري التالي:
 $(a-b)*(c+(d \div e))$ ، ثم نفذ العمليات الحسابية بالأرقام التالية:
 $(a=12, b=8, c=10, d=4, e=4)$ ؟

خوارزمية الوسط Algorithm Inorder

لتكن T شجرة ثنائية موضعية وجذرها v . نذكر بأنه إذا وجد السليل الأيمن v_R فسنتطرق على $T(v_R)$ الشجرة الجزئية اليمنى للشجرة T ، وإذا وجد السليل الأيسر v_L فسنتطرق على $T(v_L)$ الشجرة الجزئية اليسرى للشجرة T ، وعليه يمكن وصف خوارزمية الوسط بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى: إذا وجد السليل الأيسر v_L ، فطبق خوارزمية الصدارة على الشجرة $(T(v_L), v_L)$
الخطوة الثانية: قم بزيارة جذر الشجرة v
الخطوة الثالثة: إذا وجد السليل الأيمن v_R ، فطبق خوارزمية الصدارة على الشجرة $(T(v_R), v_R)$

مثال(2): طبق خوارزمية الوسط على الشجرة الثنائية الموضعية الموجودة في المثال(1) وعُدّ زيارة كل ذروة هو عبارة عن طباعة وسمها؟

الحل: وفقاً لخوارزمية الوسط ، سوف نقوم بزيارة الشجرة الجزئية اليسرى $(T(B), B)$ ، ثم نقوم بزيارة الشجرة الجزئية اليسرى $(T(C), C)$ ، (لا يوجد سليل أيمن لـ C) ، ثم نقوم بزيارة الشجرة الجزئية اليسرى $(T(D), D)$ ، وعليه نقوم بزيارة الجذر ونطبع D ، ثم نقوم بزيارة جذر $T(C)$ ونطبع C ، ثم نقوم بزيارة جذر $T(B)$ ونطبع B . يقودنا هذا البحث حتى الآن إلى طباعة سلسلة الرموز التالية: DCB
 الآن نعود لزيارة الجذر B ، ثم نتقدم نحو الشجرة الجزئية اليمنى $(T(E), E)$ ونطبع E ويقودنا هذا البحث حتى الآن إلى طباعة سلسلة الرموز التالية: DCBFEG
 الآن نعود لزيارة الجذر A ونطبع A ثم نطبق الخوارزمية على الشجرة الجزئية اليمنى $(T(H), H)$ ، ونطبع الرموز AIJHKL . ويقودنا هذا البحث النهائي إلى طباعة سلسلة الرموز التالية:
 DCBFEGAIJHKL

تمرين (2): طبق خوارزمية الوسط على شجرة التعبير الجبري التالي:
 $(a-b)*(c+(d \div e))$ ، ثم نفذ العمليات الحسابية بالأرقام التالية:
 $(a=12, b=8, c=10, d=4, e=4)$

خوارزمية الخلف Algorithm Postorder

لتكن T شجرة ثنائية موضعية وجذرها v . نذكر بأنه إذا وجد السليل الأيمن v_R فسنطلق على $T(v_R)$ الشجرة الجزئية اليمنى للشجرة T ، وإذا وجد السليل الأيسر v_L فسنطلق على $T(v_L)$ الشجرة الجزئية اليسرى للشجرة T ، وعليه يمكن وصف خوارزمية الخلف بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى: إذا وجد السليل الأيسر v_L ، فطبّق خوارزمية الصدارة على الشجرة $(T(v_L), v_L)$.
الخطوة الثانية: إذا وجد السليل الأيمن v_R ، فطبّق خوارزمية الصدارة على الشجرة $(T(v_R), v_R)$.
الخطوة الثالثة: قم بزيارة جذر الشجرة v .

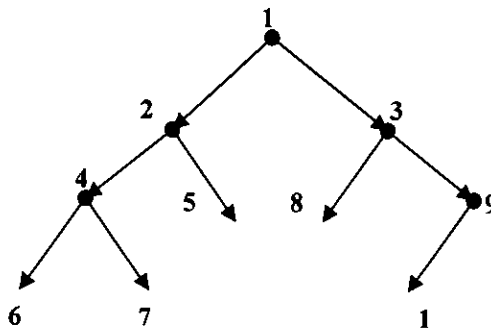
مثال(3): طبق خوارزمية الخلف على الشجرة الثنائية الموضعية الموجودة في المثال(1) وعُدّ زيارة كل ذروة هو عبارة عن طباعة وسمها؟

الحل: نبدأ بالبحث في الشجرة الجزئية اليسرى ومن اليسار D ، وباعتبار أنه لا يوجد ابن أيمن لـ C ؛ لذلك نأخذ C ، ثم الجزء الأيمن من الشجرة الجزئية اليسرى ونبدأ من F ثم الابن الأيمن لـ E وهو G ، ثم نأخذ الأب E ثم نعود ونأخذ الأب B . ننقل إلى الشجرة الجزئية اليمنى ونبدأ من J وذلك لعدم وجود الابن الأيسر للأب I ثم نأخذ I ثم نأخذ الابن الأيمن لـ K وهو L بسبب عدم وجود الابن الأيسر لـ K ثم نأخذ الأب K وبعده الأب H ثم نأخذ الجذر الرئيس A ، وبالتالي يكون الترتيب البعدي لهذه الشجرة على الشكل التالي:

DCFGEJBILKHA

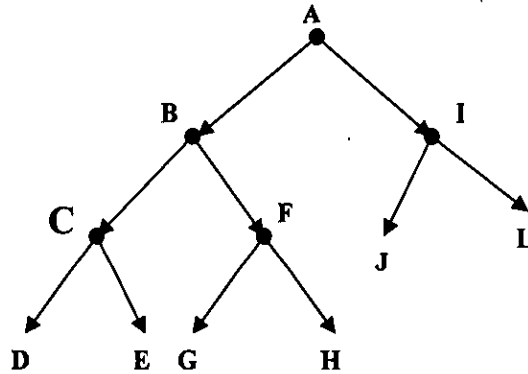
تمرين (3): طبق خوارزمية الخلف على شجرة التعبير الجبري التالي:
 $(a-b)*(c+(d\div e))$ ، ثم نفذ العمليات الحسابية بالأرقام التالية:
 $(a=12, b=8, c=10, d=4, e=4)$

مثال(4): طبق خوارزميات الصدارة والوسط والخلف للبحث في الشجرة التالية:



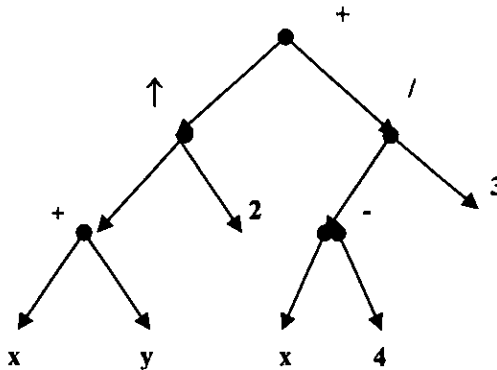
الحل: نتيجة تطبيق خوارزمية الصدارة هي: 1 2 4 6 7 5 3 8 9 10
 نتيجة تطبيق خوارزمية الوسط هي: 6 4 7 2 5 1 8 3 9 10
 نتيجة تطبيق خوارزمية الخلف هي: 6 7 4 5 2 10 9 3 8 1

تمرين (4): طبق خوارزميات الصدارة والوسط والخلف للبحث في الشجرة التالية:



مثال (5): طبق خوارزمية الصدارة على الشجرة الثنائية الموضعية الممثلة للتعبير الجبري التالي: $((x + y) \uparrow 2) + ((x - 4) / 3)$ وعدّ زيارة كل ذروة هو عبارة عن طباعة وسمها؟

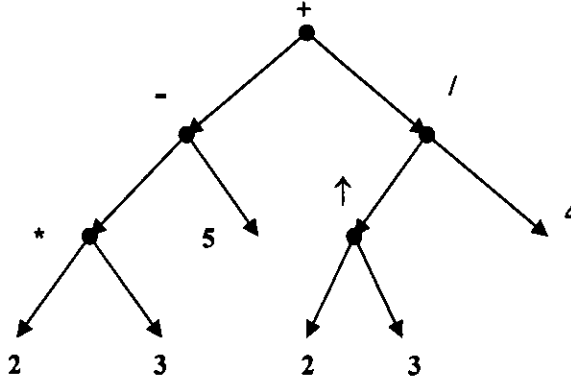
الحل : نرسم أولاً الشجرة الثنائية الموضعية، وهي على الشكل التالي:



و ثانياً نطبق خوارزمية الصدارة فنحصل النتيجة التالية:
 $+ \uparrow + x y 2 / - x 4 3$

مثال(6): ما التعبير الجبري بصيغة الأقواس الذي يمثله التعبير التالي بصيغة التدوين المسبق ؟ $2\ 3\ 4\ \uparrow\ +\ -\ * \ 2\ 3\ 5\ /\$

الحل: يمثل التعبير $3 = ((2 \uparrow 3) / 4) + ((2 * 3) - 5)$ والشجرة الثنائية الموضعية التي تمثله وبعد تطبيق خوارزمية الصدارة نحصل التعبير بالصيغة البولندية.



نسخ شبه برامج خوارزميات اجتياز الشجرة

Algorithms Pseudocode Versions for Tree Traversal

SUBROUTINE PREORDER (T, v)

1. **CALL VISIT(v)**
2. **IF** (v_L exists) **Then CALL PREORDER**(T(v_L), v_L)
3. **IF** (v_R exists) **Then CALL PREORDER**(T(v_R), v_R)
4. **RETURN**

END OF SUBROUTINE PREORDER

SUBROUTINE INORDER (T, v)

1. **IF** (v_L exists) **Then CALL INORDER** (T(v_L), v_L)
2. **CALL VISIT(v)**
3. **IF** (v_R exists) **Then CALL INORDER** (T(v_R), v_R)
4. **RETURN**

END OF SUBROUTINE INORDER

SUBROUTINE POSTORDER (T, v)

1. **IF** (v_L exists) **Then CALL POSTORDER** (T(v_L), v_L)
2. **IF** (v_R exists) **Then CALL POSTORDER** (T(v_R), v_R)
3. **CALL VISIT(v)**
4. **RETURN**

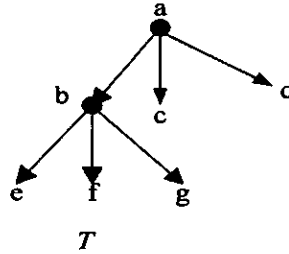
END OF SUBROUTINE POSTORDER

البحث المعمم على الشجر Searching General Trees

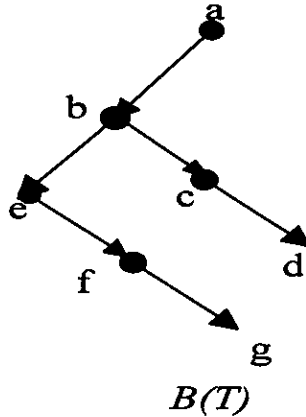
لقد عرضنا حتى الآن كيفية بحث الشجر الثنائي الموضعي. والآن نقدم كيفية تمثيل أي شجرة مرتبة T يمكن تمثيلها بشجرة ثنائية موضعية T_I ، وتختلف T_I عن الشجرة الأصلية T إلا أن T_I تحتفظ بكل تراكيب الشجرة الأصلية T . وهكذا نستطيع تطبيق الخوارزميات السابقة في البحث في أي شجرة مرتبة.

لتكن T أي شجرة مرتبة ولتكن A مجموعة ذروات الشجرة T . يمكن تعريف الشجرة الثنائية الموضعية $B(T)$ على مجموعة الذروات في A ، كما يلي:
إذا كانت $v \in A$ ، إذن السليل الأيسر v_L لـ v في $B(T)$ هو أول سليل أيسر لـ v في T (حسب ترتيب النسب أو القرابة المعطى في T)، إذا وجدت. والليل الأيمن v_R لـ v في $B(T)$ هو ثاني سليل لـ v في T (حسب ترتيب النسب أو القرابة المعطى في T)، إذا وجدت. انظر المثال التالي:

مثال (7): ارسم الشجرة الثنائية الموضعية $B(T)$ التي تمثل الشجرة المرتبة التالية:



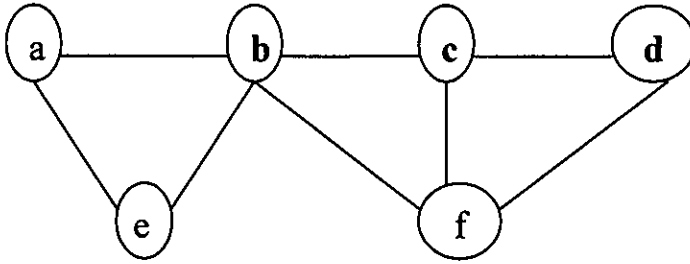
الحل: الشجرة الثنائية الموضعية $B(T)$ التي تمثل الشجرة المرتبة T هي الشجرة التالية:



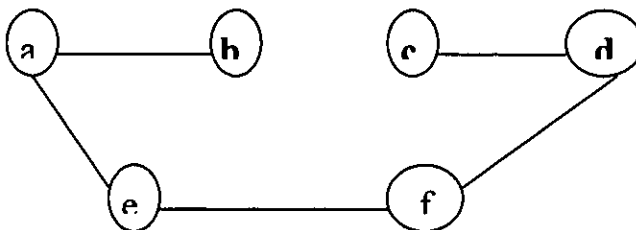
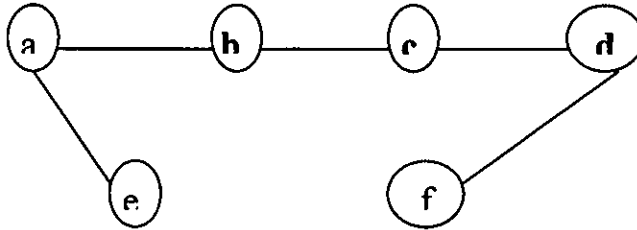
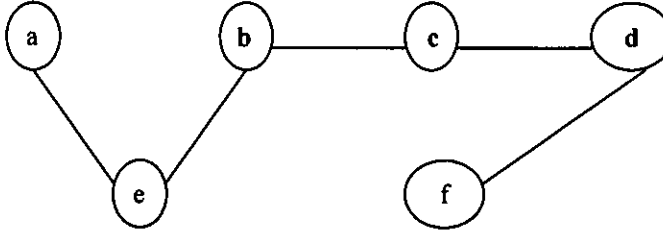
الشجرة المولدة *Spanning tree*

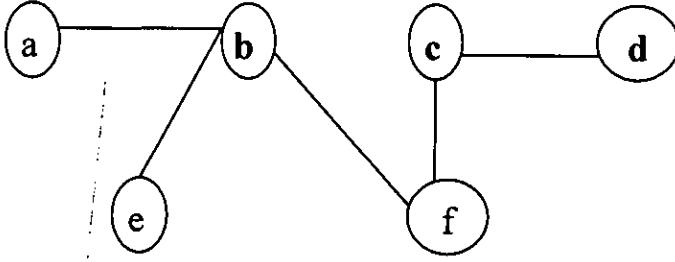
لتكن R علاقة تماثل و علاقة مترابطة (متصلة) على المجموعة A ، إذن T شجرة معرفة على A وشجرة مولدة للعلاقة R إذا كانت T شجرة مكونة بالضبط من نفس عدد الذروات المكونة للعلاقة R ويمكن تحصيل T باسقاط بعض قطع المستقيمات (الحواف) التي تتألف منها R .

مثال(1): لتكن R علاقة معطاة بالشكل البياني التالي:



الحل: نلاحظ أن لهذه العلاقة أكثر من شجرة مولدة واحدة، فمنها على سبيل المثال الشجرات الأربع التالية:





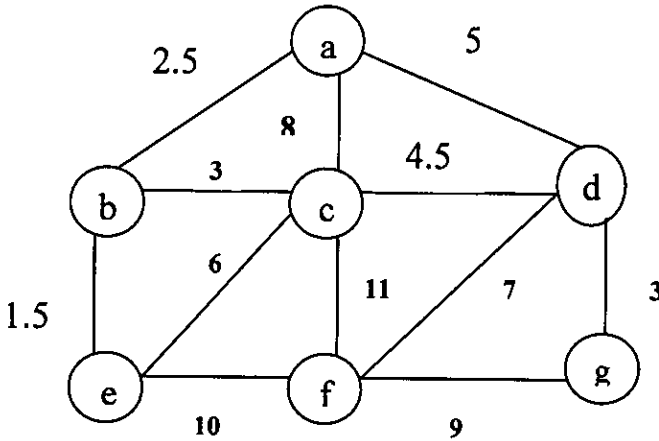
الأشجار المولدة ذات الأقل تكلفة Minimal Spanning Trees

لاحظنا أنه يمكننا إيجاد أكثر من شجرة مولدة لكل علاقة R ، وذلك بنزع بعض الحواف المختلفة. ولكن هناك حالات تحمل فيها كل حافة وزناً معيناً مثل التكلفة أو السعر وغيرها من القيم. والسؤال عن كيفية إيجاد الشجرة المولدة للعلاقة R والتي تكون أقل تكلفة؟ والجواب عنه يتحقق باتباع الخطوات التالية:

1. نقوم بالترتيب التصاعدي للحواف على حسب القيم الموزونة الموسومة بها.

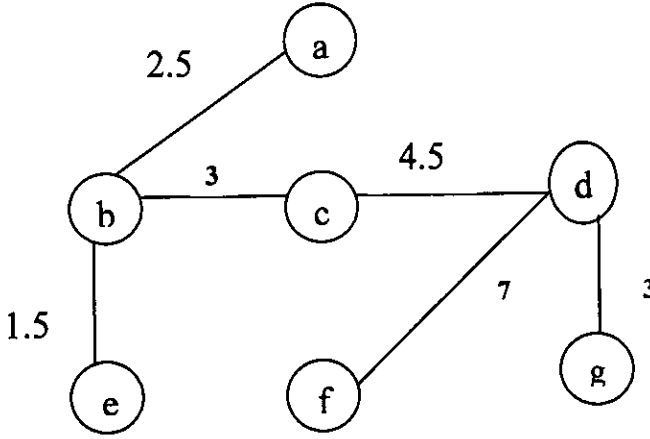
2. نقوم برسم الشجرة المولدة على حسب الترتيب السابق ابتداءً بالحافة ذات الوزن الأصغر ثم التي تليها مباشرة في الوزن ونستثني من الرسم كل حافة تشكل دورة.

مثال(2): أوجد الشجرة المولدة الأقل تكلفة للشكل التالي:

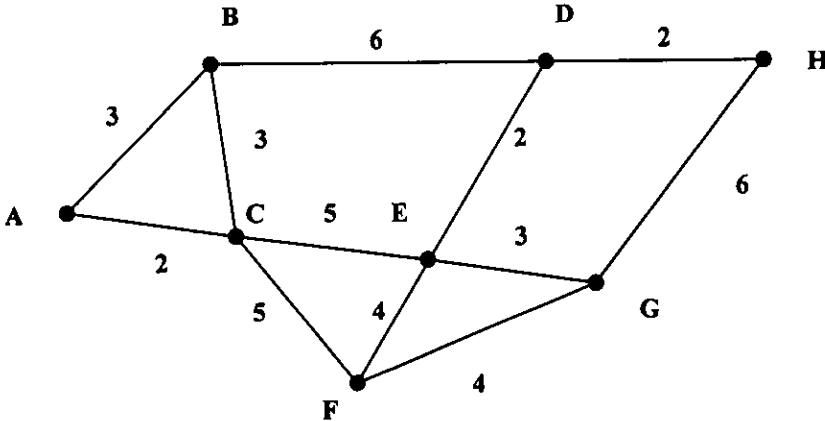


الحل: لإيجاد الشجرة المولدة الأقل تكلفة، نطبق الخطوات السابقتين وهما

1. نقوم بالترتيب التصاعدي للحواف على حسب الوزن الموسومة بها كل حافة. ونحصل الترتيب التالي: (b, e), (b, a), (b, c), (d, g), (c, d), (a, d), (c, e), (d, f), (f, g), (e, f), (c, f)
2. نقوم برسم الشجرة المولدة على حسب الترتيب السابق ابتداءً بالحاافة ذات الوزن الأصغر (b, e) ثم التي تليها مباشرة في الوزن (b, a)، ثم نصل (b, c)، ثم نصل (d, g)، ثم نصل (d, c) ونستثني من الرسم (d, a) لأنه يشكل دورة وكذلك نستثني من الرسم (c, e) لأنه يشكل أيضاً دورة ثم ننقل إلى الحافة (d, f) ونوصله لأنه يشكل دورة وهكذا حتي نتهي من إعادة رسم كل الحافات للشجرة. راقب أن الرسم متصل وهو الأقل تكلفة.



مثال (3): أوجد الشجرة المولدة الأقل تكلفة للعلاقة الممثلة بالشكل التالي:

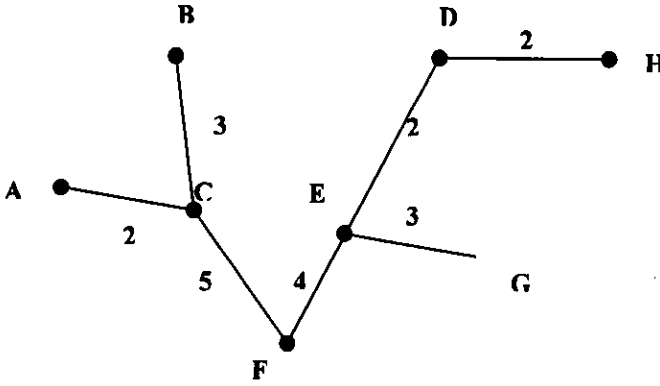


الحل: نرتب الأضلاع ترتيباً تصاعدياً على حسب التكلفة ونحصل الترتيب التالي للحواف الموزونة:

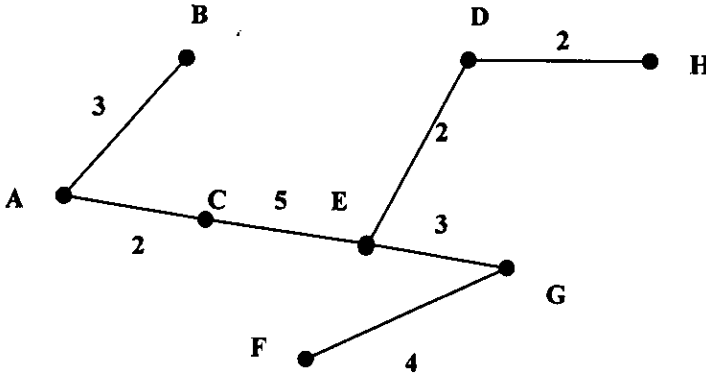
(A,C),(D,E),(D,H),(A,B),(B,C),(E,G),
(E,F),(F,G),(C,E),(C,F),(B,D),(G,H)

من الشكل السابق نلاحظ تكرارية أرقام التكلفة ، وبالتالي يكون لدينا أكثر من بديل للشجرة المطلوبة مثل:

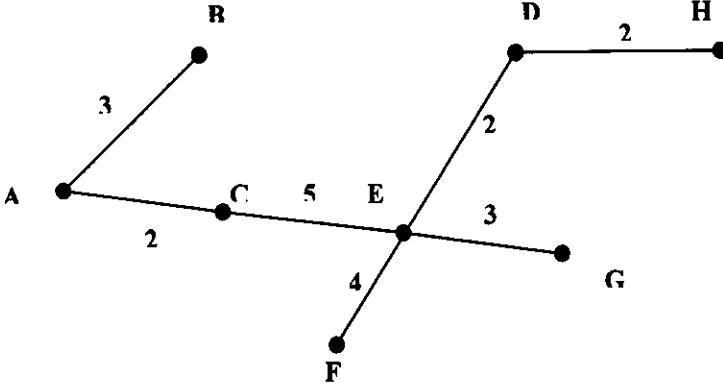
البديل الأول



البديل الثاني



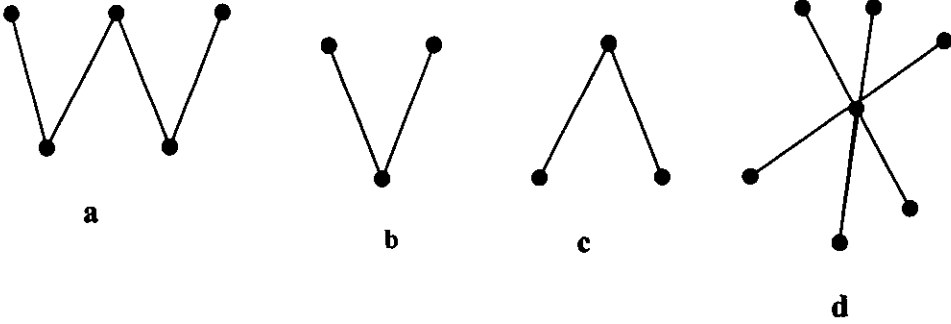
البديل الثالث



نلاحظ أن قيمة التكلفة للأشكال الثلاثة تساوي 21 ، وبالتالي تكون البدائل الثلاثة صحيحة ، يمكننا أن نختار أحد هذه البدائل.

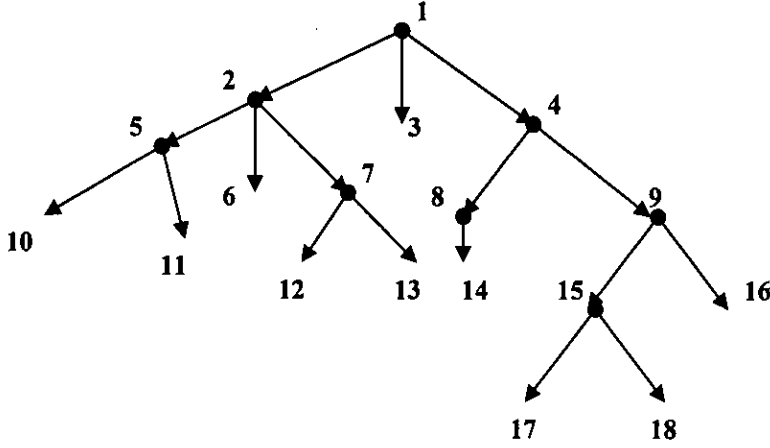
تمارين محلولة

1 - بين أي المخططات التالية هو شجرة:



الجواب: فقط المخطط c يحقق تعريف الشجرة

2 - لتكن الشجرة التالية:

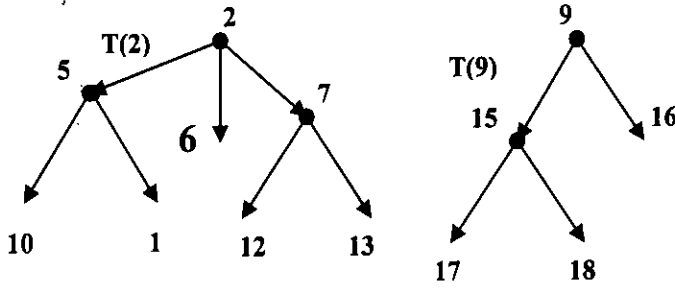


والمطلوب الإجابة عن الأسئلة التالية:

- 1- أية ذروة تكون الجذر؟
- 2- ما الأوراق؟
- 3- ما مستوى الشجرة؟
- 4- ما ارتفاع الشجرة؟
- 5- هل الشجرة مرتبة أم لا؟
- 6- هل الشجرة ثنائية؟
- 7- هل الشجرة تامة؟
- 8- أرسم الأشجار الجزئية $T(2)$ و $T(9)$.

الجواب:

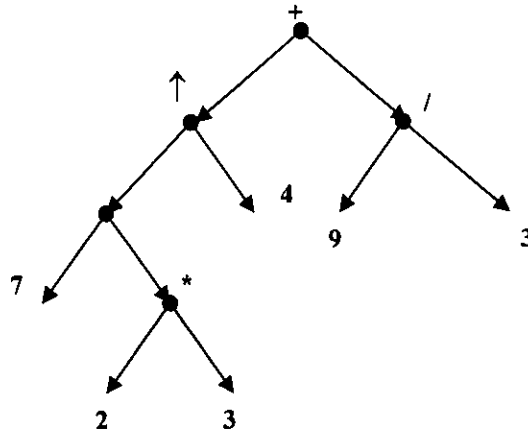
- 1- الجذر هو 1.
- 2- الأوراق هي 3, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18
- 3- مستوى الشجرة هو 4
- 4- ارتفاعها هو 4
- 5- الشجرة مرتبة.
- 6- ليست ثنائية.
- 7- ليست تامة.
- 8- الأشجار الجزئية $T(2)$ و $T(9)$ مبينة أدناه :



3- أوجد خوارزمية الخلف post order للصيغة الرياضية التالية:

$$7 \ 2 \ 3 \ * \ - \ 4 \ \uparrow \ 9 \ 3 \ / \ +$$

الحل: نرسم شجرة البحث الثنائي وفقاً لـ Postorder، وتكون الشجرة كالآتي:



وبالتالي تكون الصيغة الرياضية هي: $((7 - (2 * 3)) \uparrow 4) + (9 / 3) = 4$
وبطريقة ثانية يمكن إيجاد قيمة التمثيل السابق للصيغة الرياضية
على الشكل التالي:

$$7 \ 2 \ 3 \ * \ - \ 4 \ \uparrow \ 9 \ 3 \ / \ +$$

$$2 * 3 = 6$$

$$7 \ 6 \ - \ 4 \ \uparrow \ 9 \ 3 \ / \ +$$

$$7 - 6 = 1$$

$$1 \ 4 \ \uparrow \ 9 \ 3 \ / \ +$$

$$1^4 = 1$$

$$1 \ 9 \ 3 \ / \ +$$

$$9 / 3 = 3$$

$$1 \ 3 \ +$$

$$1 + 3 = 4$$

نلاحظ أننا أخذنا الإشارة التي تلي الرقمين المتتاليين.

4- ما قيمة التعبير التالي مطبقا خوارزمية الصدارة preorder:

$$* / 9 3 + * 2 4 - 7 6$$

الحل: هنا نأخذ الإشارة التي تكون قبل الرقمين المتتاليين، ونستطيع إيجاد قيمة التمثيل اللاحق على الشكل التالي:

$$* / 9 3 + * 2 4 - 7 6$$

$$7 - 6 = 1$$

$$* / 9 3 + * 2 4 1$$

$$9 / 3 = 3$$

$$* 3 + * 2 4 1$$

$$2 * 4 = 8$$

$$* 3 + 8 1$$

$$8 + 1 = 9$$

$$* 3 9 = 3 * 9 = 2 7$$

نلاحظ أنه لو قمنا بحل هذا المثال بطريقة أخرى فسنجد النتائج نفسه

$$* / 9 3 + * 2 4 - 7 6$$

$$9 / 3 = 3$$

$$* 3 + * 2 4 - 7 6$$

$$2 * 4 = 8$$

$$* 3 + 8 - 7 6$$

$$7 - 6 = 1$$

$$* 3 + 8 1$$

$$8 + 1 = 9$$

$$* 3 9 = 3 * 9 = 2 7$$

5- ما قيمة التعبير التالي مطبقا خوارزمية الخلف post order:

$$5 \ 2 \ 1 \ - \ - \ 3 \ 1 \ 4 \ + \ + \ *$$

الحل: هنا نأخذ الإشارة التي تكون بعد الرقمين

$$5 \ 2 \ 1 \ - \ - \ 3 \ 1 \ 4 \ + \ + \ *$$

$$2 - 1 = 1$$

$$5 \ 1 \ - \ 3 \ 1 \ 4 \ + \ + \ *$$

$$5 - 1 = 4$$

$$4 \ 3 \ 1 \ 4 \ + \ + \ *$$

$$1 + 4 = 5$$

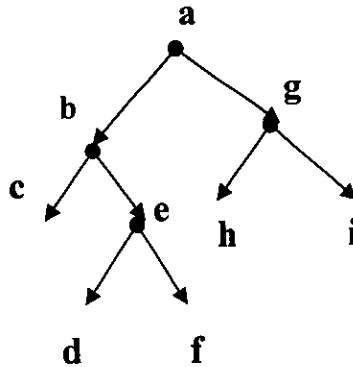
$$4 \ 3 \ 5 \ + \ *$$

$$3 + 5 = 8$$

$$4 \ 8 \ *$$

$$4 * 8 = 32$$

6- أوجد Preorder, In Order, Post Order للشجرة الثنائية التالية:

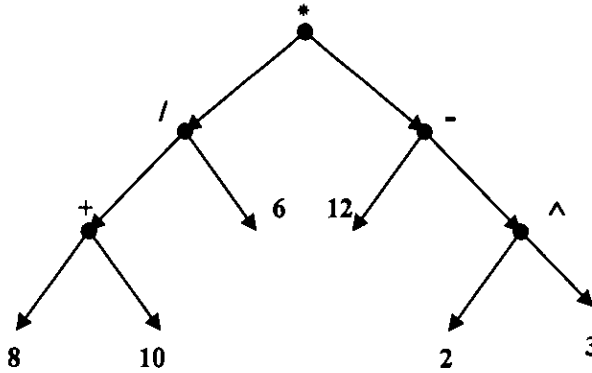


الجواب:

- Preorder: a, b, c, e, d, f, g, h, i
- In Order: c, b, d, e, f, a, h, g, i
- Post Order: c, d, f, e, b, h, i, g, a

7- ارسم الشجرة الموافقة للعلاقة التالية: $((8+10)/6)*(12-(2^3))$

الجواب:



9- أوجد ناتج preorder للشجرة في المثال السابق (7):

الحل:

* / + 8 10 6 - 12 ^ 2 3
 * / 18 6 - 12 ^ 2 3
 * 3 - 12 ^ 2 3
 * 3 - 12 8
 * 3 4
 12

تمارين غير محلولة؟

1- أوجد قيمة ما يلي مستخدماً خوارزمية الخلف post order:

- + - ↑ 3 2 ↑ 2 3 / 6 - 4 2
- + * + - 5 3 2 1 4
- + 3 + 3 ↑ 3 + 3 3 3

2- أوجد قيمة ما يلي مستخدماً خوارزمية الصدارة preorder:

- 9 3 / 5 + 7 2 - *
- 3 2 * 2 ↑ 5 3 - 8 4 / * -

المصطلحات العلمية Terminology

المصطلح العربي	English Term
الشجر	Trees
الشجرة	Tree
الأوراق	Leaves
مستويات الشجرة	Levels of the Tree
مستوى	level
ارتفاع الشجرة	Height of the Tree
الشجرة المرتبة	Ordered Tree
الشجرة الجزئية	Subtree
الشجرة النونية التامة	Complete n-tree
الشجرة الثنائية	Binary Tree
الشجر الموسوم	Labeled Trees
البحث في الشجرة أو البحث الشجري	Tree Searching or Tree Search
شجرة البحث الثنائي	Binary Search Tree
خوارزميات اجتياز الشجرة	Tree Traversal Algorithms
تدوين الصدارة أو الصيغة البولندية	Prefix Notation or Polish Form
تدوين الخلف أو معكوس الصيغة البولندية	Reverse Polish Form or Prefix Notation
تدوين الوسط	Infix Notation
خوارزمية الصدارة	Algorithm Preorder
خوارزمية الوسط	Algorithm Inorder
خوارزمية الخلف	Algorithm Postorder
نسخ شبه برامج خوارزميات اجتياز الشجرة	Algorithms Pseudocode Versions for Tree Traversal
البحث المعمم على الشجر	Searching General Trees
الشجرة المولدة	Spanning tree
الأشجار المولدة ذات الأقل تكلفة	Minimal Spanning Trees

الفصل العاشر

الجبر البولي

Boolean Algebra

337	الفصل العاشر
337	الجبر البولي
337	Boolean Algebra
339	• الضرب البولي Boolean Product
339	• الجمع البولي Boolean Sum
339	• المتمم البولي Boolean Complement
339	• أسبقية التنفيذ لعوامل الجبر البولي Precedence Rules for Boolean Operators
340	التعبير والاقترانات البولية Boolean Expressions and Functions
342	قواعد الجبر البولي Identities of Boolean Algebra
344	قانون الامتصاص Absorption law
345	مزدوج التعبير البولي Dual of Boolean Expression
345	مزدوج الاقتران البولي Dual of Boolean Function
346	تمثيل الاقترانات البولية Representing Boolean Functions
346	جمع النواتج الموسع Sum-of-Products Expansion
347	الناتج الحرفي Minterm
348	البوابات المنطقية Logic Gates
348	بوابة "و" AND Gate
349	بوابة "أو" OR Gate
349	بوابة عاكس (NOT Gate) Inverter Gate
350	توافقية البوابات Combinations of Gates
353	أمثلة الدوائر الكهربائية Examples of Circuits
353	الذاكرة القلابة Flip-Flop
354	جامع نصفي Half - Adder
355	جدول مدخلات ومخرجات الجامع النصفي
355	الجامع الكلي Full-Adder
355	جدول مدخلات ومخرجات الجامع الكلي
356	تصغير الدوائر Minimization of Circuits
357	خرائط كارنوف Karnugh Maps
359	خرائط كارنوف لثلاث متغيرات
361	خرائط كارنوف لأربعة متغيرات
364	تمارين محلولة
373	المصطلحات العلمية Terminology

يزودنا الجبر البولي بالعمليات والقواعد للعمل مع المجموعة $\{0, 1\}$. المفاتيح والدوائر الكهربائية يمكن دراستها باستخدام المجموعة $\{0, 1\}$ وقواعد الجبر البولي. العمليات الأساسية في الجبر البولي هي الجمع والضرب والتمم والتي يقابلها في المنطق الرياضي وعلى الترتيب الاختيار والاتحاد والنفي. وكذلك الصفر 0 يقابله الخطأ (false) والواحد 1 يقابله الصواب (true). وتفصيل هذه العمليات الثلاث مبين في التعريفات الآتية:

• الضرب البولي Boolean Product

وأداته عامل العطف المنطقي AND ورمزه $\wedge$ وقيمه تحتسب بالصيغة التالية:

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 0 \cdot 0 = 0$$

• الجمع البولي Boolean Sum

وأداته عامل الاختيار المنطقي OR ورمزه $\vee$ وقيمه تحتسب بالصيغة التالية:

$$1 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 0 + 1 = 1, \quad 0 + 0 = 0$$

• التمام البولي Boolean Complement

وأداته عامل النفي المنطقي NOT ورمزه $\neg$ وقيمه تحتسب بالصيغة التالية:

$$\bar{1} = 0, \quad \bar{0} = 1$$

• أسبقية التنفيذ لعوامل الجبر البولي Precedence Rules for Boolean Operators

قواعد أسبقية التنفيذ هي للأقواس أولاً ثم للعامل التمام ثانياً وثالثاً للضرب البولي وأخيراً الجمع البولي كما هو موضح بالأمثلة الآتية:

مثال (1): أوجد قيمة التعبير البولي التالي: $1 \cdot \bar{0} + (0 + 1)$

$$\text{الحل: } 1 \cdot 1 + 1 = 1$$

مثال (2): أوجد قيمة التعبير البولي التالي: $\bar{1} + \overline{(1 \cdot 0 + 1 \cdot 1)}$

$$\text{الحل: } \bar{1} + \overline{(1 \cdot 0 + 1 \cdot 1)} = 0 + \overline{(0 + 1)} = 0 + \bar{1} = 0 + 0 = 0$$

التعبير والاقترانات البولية Boolean Expressions and Functions

لتكن n عدداً صحيحاً موجباً . ولتكن المجموعة $B = \{1, 0\}$.

ولتكن المجموعة $B_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$ حيث

المتغير x يدعى متغيراً بولياً إذا افترضنا أنه أخذ قيمته فقط من المجموعة B .

والاقتران $f : B_n \rightarrow B$ من المجموعة B_n إلى المجموعة B يسمى اقتراناً بولياً من الدرجة n .

مثال (3): أوجد الاقتران البولي $f : B_2 \rightarrow B$ من الدرجة الثانية المبين في الشكل التالي:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = 0 \text{ and } y = 1 \\ 0 & \text{for all other choices} \end{cases}$$

الحل: سوف نعطي قيمة f من خلال الجدول التالي :

x	y	$f(x, y)$
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

مثال (4): أوجد قيم الاقتران البولي $f : B_3 \rightarrow B$ المعروف بـ

$$f(x, y, z) = x \cdot y + z$$

الحل : سوف نعطي قيمة f من خلال الجدول التالي :

x	y	z	$x \cdot y$	$f(x, y, z) = x \cdot y + z$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

مثال (5): أوجد قيم الاقتران البولي $f : B_3 \rightarrow B$ المعروف بـ

$$f(x, y, z) = x \cdot y + \bar{z}$$

الحل: سوف نعطي قيمة f من خلال الجدول التالي:

x	y	z	$x \cdot y$	$f(x, y, z) = x \cdot y + \bar{z}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

من الأمثلة السابقة نلاحظ أن الاقتران البولية يمكن تمثيلها باستخدام التعبيرات البولية المكونة من المتغيرات والعوامل البولية. أما التعبيرات البولية التي تحتوي على $x_1, x_2, \dots, x_n$ فيمكن تعريفها بأسلوب المعاودة على النحو التالي:

(a) $0, 1, x_1, x_2, \dots, x_n$ هي تعابير بولية

(b) إذا كان E_1 و E_2 تعبيرين بولين، فإن

i. $\bar{E}_1$ و $\bar{E}_2$ هي أيضاً تعابير بولية (متمم التعبير البولي أيضاً تعبير بولي)

ii. $E_1 \cdot E_2$ هو أيضاً تعبير جبري (حاصل ضرب تعبيرين بولين أيضاً تعبير بولي)

iii. $E_1 + E_2$ هو أيضاً تعبير جبري (حاصل جمع تعبيرين بولين أيضاً تعبير بولي)

التعابير البولية المختلفة التي تمثل الاقتران البولي نفسه نطلق عليها تعابير متكافئة. فمثلاً كل التعبيرات البولية $x \cdot y$, $x \cdot y + 0$, $x \cdot y \cdot 1$ هي متكافئة. وهكذا كل تعبير بولي يمثل اقتراناً بولياً. وقيمة الاقتران تحتسب بتعويض 0 و 1 لكل متغير بولي في التعبير. وفي الفقرة القادمة سوف نشرح أن كل اقتران بولي يمكن تمثيله بتعبير بولي.

إذا كانت الاقترانات البولية F و F_1 و F_2 اقترانات من الدرجة n . وعليه نقول إن:

- F_1 و F_2 متساويان، إذا وفقط إذا

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
- ومتمم الاقتران البولي F هو $\bar{F}$ المعروف بالصيغة

$$\overline{F(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
- وحاصل جمع اقترانين بوليين $F_2 + F_1$ يعرف بالصيغة

$$(F_1 + F_2)(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
- وحاصل ضرب اقترانين بوليين $F_2 \cdot F_1$ بالصيغة

$$(F_1 \cdot F_2)(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

مثال (6): أوجد قيم جميع الاقتران البولي $f : B_2 \rightarrow B$ من الدرجة الثانية ؟
 الحل: سوف نعطي قيم f من خلال الجدول التالي :

x	y	$f1$	$f2$	$f3$	$f4$	$f5$	$f6$	$f7$	$f8$	$f9$	$f10$	$f11$	$f12$	$f13$	$f14$	$f15$	$f16$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0

قواعد الجبر البولي Identities of Boolean Algebra

هناك عدة قواعد للجبر البولي. وأهمها مذكور في الجدول التالي. وعلى الطالب مقابلة هذه القواعد مع مثيلاتها من نظرية المجموعات وكذلك المنطق الرياضي. وقواعد الجبر البولي مفيدة جداً في تبسيط تصميم الدوائر الكهربائية. وكل قاعدة يمكن برهنتها باستخدام الجداول. وسوف نعطي برهاناً لبعضها على سبيل المثال لا الحصر.

جدول قواعد الجبر البولي

Name	القاعدة identity	الاسم	مم
Double Complement	$\overline{\overline{x}} = x$	متعم المتعم	1
Idempotent	$x + x = x$ $x \cdot x = x$	التماثل	2
Identity	$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$	الذات	3
Dominance	$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	الهيمنة	4
Commutative	$x + y = y + x$ $x \cdot y = y \cdot x$	التبديل	5
Associative	$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	التجميع	6
Distributive	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	التوزيع	7
De Morgan's Laws	$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$	قوانين دو مورغان	8

مثال (7): اثبت أن $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ وهو قاعدة التوزيع؟
الحل: انظر الجدول التالي:

$\underline{x}$	$\underline{y}$	$\underline{z}$	$\underline{y + z}$	$\underline{xy}$	$\underline{xz}$	$\underline{x(y + z)}$	$\underline{xy + xz}$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

مثال (8): أثبت أن $x + y.z = (x + y)(x + z)$ ؟

الحل: انظر الجدول التالي:

x	y	z	yz	$x + y$	$x + z$	$x + yz$	$(x + y)(x + z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

مثال (9): أثبت أن $x + xy = x$ مستخدماً القواعد السابقة ؟

الحل: انظر البرهان التالي:

$$x + xy = x1 + xy = x(1 + y) = x1 = x$$

قانون الامتصاص Absorption law

مثال (10): أثبت صحة قانون الامتصاص التالية: $x(x + y) = x$ ؟

الحل: انظر البرهان التالي:

$$x(x + y) = (x + 0)(x + y) = x + 0.y = x + y.0 = x + 0 = x$$

مثال (11): بسّط العبارة التالية: $wy + xy + wz + xz$ ؟

الحل: انظر البرهان التالي:

$$wy + xy + wz + xz = (w + x)y + (w + x)z = (w + x)(y + z)$$

مثال (12): بسّط العبارة التالية: $wx + \overline{x}z + (y + \overline{z})$

الحل: انظر البرهان التالي:

$$\begin{aligned} wx + \overline{x}z + (y + \overline{z}) &= wx + (\overline{x} + \overline{z}) + (y + \overline{z}) \\ &= wx + (x + \overline{z}) + (y + \overline{z}) \\ &= [(wx + x) + \overline{z}] + (y + \overline{z}) = (x + \overline{z}) + (y + \overline{z}) \\ &= x + (\overline{z} + \overline{z}) + y \\ &= x + \overline{z} + y \end{aligned}$$

مثال (13): بسّط المعادلة المنطقية التالية لأبسط صورة ممكنة مستخدماً

$$z = \overline{(x + y) + (\bar{x} + y)}$$

القواعد المنطقية السابقة

$$\begin{aligned} \text{الحل: انظر البرهان التالي:} \\ z = \overline{(x + y) + (\bar{x} + y)} &= \overline{(x + y)} \cdot \overline{(\bar{x} + y)} = (\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot (\bar{\bar{x}} \cdot \bar{y}) \\ &= (\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot (x \cdot \bar{y}) = (\bar{y} \cdot \bar{x}) \cdot (\bar{y} \cdot x) \\ &= \bar{y} \cdot \bar{y} \cdot \bar{x} \cdot x = \bar{y} \cdot \bar{y} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

مثال (14): بسّط المعادلة التالية لأبسط صورة ممكنة:

$$z = \overline{(\bar{x} + \bar{y})} \cdot \overline{(x + \bar{y})}$$

$$\begin{aligned} z &= \overline{(\bar{x} + \bar{y})} \cdot \overline{(x + \bar{y})} = \overline{(\bar{x} + \bar{y})} + \overline{(x + \bar{y})} \\ &= (\bar{x} + \bar{y}) + (x + \bar{y}) = \bar{y} + \bar{y} + \bar{x} + x \\ &= \bar{y} + \bar{x} + x = \bar{y} + 1 \end{aligned}$$

مزيج التعبير البولي Dual of Boolean Expression

مزيج التعبير البولي نحصله بالمبادلة بين الجمع والضرب البولين و بين الصفر 0 والواحد 1.

مثال (15): أوجد مزيج التعبير التالي $x(y + 0)$ ؟

$$\text{الحل: } x + (y \cdot 1)$$

مثال (16): أوجد مزيج التعبير التالي $\bar{x} \cdot 1 + (\bar{y} + z)$ ؟

$$\text{الحل: } (\bar{x} + 0) \cdot (\bar{y} \cdot z)$$

مزيج الاقتران البولي Dual of Boolean Function

مزيج الاقتران البولي f الممثل بالتعبير البولي e هو الاقتران البولي f_e الذي يمثل مزيج التعبير البولي e .

مثال (17): أوجد مزيج طرفي قاعدة الامتصاص $x(x + y) = x$ ؟

الحل: الطرف الأيمن للقاعدة مزيج x هو x و الطرف الأيسر للقاعدة فإن مزيج $x(x + y)$ هو $x + (x \cdot y)$ ويساوي x ويطلق على $x + (x \cdot y)$ أيضاً قاعدة الامتصاص.

تمثيل الاقترانات البولية Representing Boolean Functions

في الفقرات التالية نقدم الإجابة عن سؤالين، أولهما: إذا ما أعطينا قيم اقتران بولي، فما الطريقة لإيجاد التعبير البولي الذي يمثل ذلك الاقتران؟ و ثانيهما هو: ما أصغر عدد من العوامل البولية يمكن استخدامه لتمثيل أي اقتران بولي؟ والإجابة عن السؤال الأول تكمن في إثبات أن أي اقتران بولي، يمكن تمثيله بالجمع البولي لنواتج ضرب المتغيرات البولية ومتمماتها. وسوف نثبت أيضاً أن أي اقتران بولي يمكن تمثيله باستخدام ثلاثة عوامل بولية هي الجمع والضرب والمتمم.

جمع النواتج الموسع¹ Sum-of-Products Expansion

الأمثلة التالية سنستخدمها في إيجاد التعبير البولي لتمثيل الاقترانات. مثال (1): أوجد التعبير البولي الذي يمثل الاقتران $f(x, y, z)$ والاقتران $g(x, y, z)$ المعطيين في الجدول التالي؟

x	y	z	f	g
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

الحل: أولاً: إيجاد التعبير الذي يمثل الاقتران f

يأخذ الاقتران f القيمة 1 عندما تكون $x = z = 1$ وتكون $y = 0$ وللقيم الأخرى يأخذ الاقتران f القيمة 0. والتعبير الذي يمثل الاقتران f يمكن تكوينه من ناتج المضروب البولي للمتغيرات x و y و z وهو xyz وقيمته 1 إذا وفقط إذا $x = y = z = 1$ وهذا لن يتحقق إلا إذا وفقط إذا كان $x = z = 1$ و $y = 0$.

ثانياً: إيجاد التعبير الذي يمثل الاقتران g

يأخذ الاقتران g القيمة 1 عندما تكون $x = y = 1$ وتكون $z = 0$ أو عندما تكون $x = z = 0$ وتكون $y = 1$.

¹ الدكتور أحمد سعيدان مقرر لجنة الرموز العلمية والعربية في مشروع مجمع اللغة العربية الأردني للرموز العلمية والعربية (1985). رموز الاحصاء والاحتمالات صفحة 60

ويمكننا تكوين التعبير الذي يمثل الاقتران g من جمع ناتج المضروب xyz وناتج المضروب $\bar{x}y\bar{z}$ أي أن الاقتران g يمثله جمع النواتج الموسع التالي: $\bar{x}y\bar{z} + xyz$

الناتج الحرفي Minterm

متغيراً حرفياً literal² (أو متغير رمزي) يُسمى كل متغير بولي أو متممه. نسمي الناتج الحرفي للمتغيرات البولية $x_1, x_2, \dots, x_n$ ناتج الضرب البولي $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n$ حيث $y_i = x_i$ أو $y_i = \bar{x}_i$ و عليه فإن الناتج الحرفي هو ناتج ضرب n متغير حرفي. وعليه فإن الناتج الحرفي $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n$ يأخذ القيمة 1 إذا وفقط إذا كل $y_i = 1$ وهذا يحدث فقط عندما $x_i = 1$ أي حين $y_i = x_i$ و أيضاً عندما $x_i = 0$ أي حين $y_i = \bar{x}_i$.

مثال (2): أوجد الناتج الحرفي الذي قيمته 1 عندما تكون $x_1 = x_3 = 0$ و

$x_2 = x_4 = x_5 = 1$ وقيمته تساوي 0 للحالات الأخرى؟

الحل: الناتج الحرفي هو $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5$

عند أخذ حاصل جمع عدة نواتج حرفية مختلفة، نستطيع بناء تعابير بولية ذات مجموعة قيم محددة. فمثلاً، الجمع البولي لعدة نواتج حرفية تكون قيمة الجمع هي 1، عندما تكون قيمة ناتج حرفي واحد على الأقل تساوي 1. و الجمع البولي لعدة نواتج حرفية يكون قيمة الجمع هي 0، عندما تكون قيمة كل ناتج حرفي تساوي 0.

نتيجة لذلك، الاقتران البولي يمكن التعبير عن قيمته بقيمة الجمع البولي لعدة نواتج حرفية.

والجمع البولي للنواتج الحرفية التي تمثل الاقتران البولي تسمى صيغة الاختيار الطبيعية Disjunctive Normal Form أو جمع النواتج الموسع - Sum-of-Products Expansion.

² قاموس الموابك. الأستاذ ناصر الشوباسي. سلسلة الرضا للمعلومات. دار الرضا للنشر. تشرين أول 2000

البوابات المنطقية Logic Gates

يتم انجاز العمليات الحسابية والمنطقية في وحدة الحساب والمنطق باستخدام دوائر إلكترونية خاصة تسمى كل منها دائرة منطقية يمكنها تمثيل الحالتين المنطقتين التاليتين:

- حالة True وذلك عندما تكون الدائرة موصولة

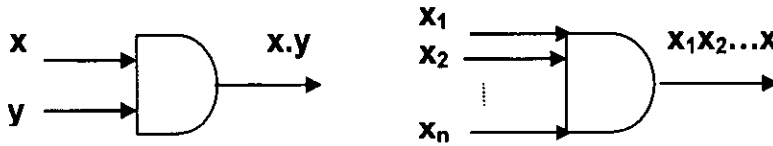
- حالة False وذلك عندما تكون الدائرة مفصولة

يمكن التعبير عن هاتين الحالتين باستخدام المنطق الرياضي المسمى بالجبر المنطقي حيث يستخدم الرقم 1 للدلالة على الحالة الأولى كما يستخدم الرقم 0 للدلالة على الحالة الثانية، وسنتعرض لعدد من هذه الدوائر تسمى بالبوابات المنطقية.

بوابة "و" AND Gate

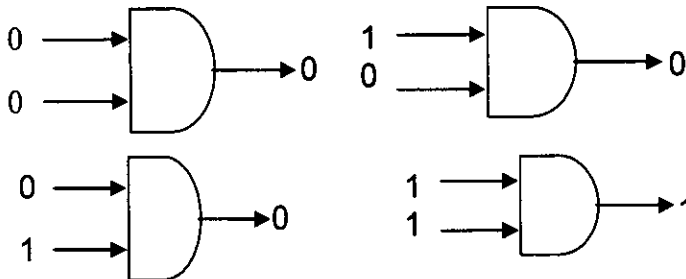
إن مداخل بوابة "و" هي قيم متغيرين بوليين أو أكثر. و مخرج هذه البوابة، هو ناتج الضرب البولي لقيم المتغيرات. و يتم تمثيل البوابة "و" باستخدام رمز التأخير في مخططات سير العمليات كما هو مبين بالشكل التالي أدناه.

The inputs to AND gate are the values of two or more Boolean variables. The output is the Boolean product of their values. The symbol used for an AND gate is shown below.



مخطط البوابة "و" AND Gate

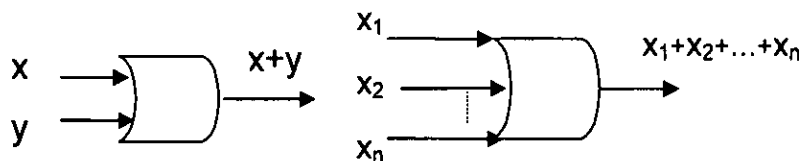
و يمكن تلخيص آلية البوابة "و" بإخراج إشارة مساوية للواحد إذا كانت كل الإشارات الداخلة إليها هي واحد. والمخطط التالي يمثل الحالات المختلفة لهذه البوابة.



بوابة "أو" OR Gate

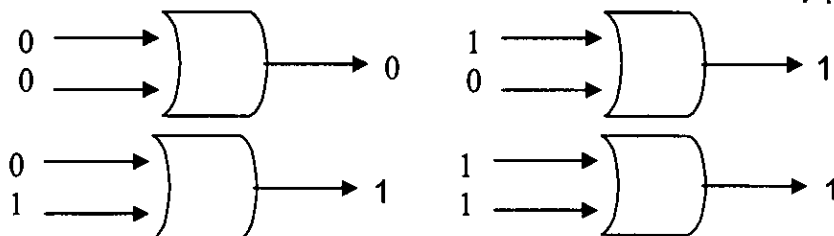
إن مداخل بوابة "أو" هي قيم متغيرين بوليين أو أكثر. والمخرج لهذه البوابة هو ناتج الجمع البولي لقيم المتغيرات. و يتم تمثيل البوابة "أو" باستخدام رمز مخزن بيانات في مخطط سير العمليات كما هو مبين بالشكل التالي أدناه.

The inputs to OR gate are the values of two or more Boolean variables. The output is the Boolean sum of their values. The symbol used for an OR gate is shown below.



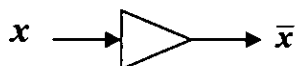
مخطط البوابة "أو" OR

و يمكن تلخيص آلية البوابة "أو" بإخراج إشارة مساوية للصفر إذا كانت كل الإشارات الداخلة إليها صفراً. والمخطط التالي يمثل الحالات المختلفة لهذه البوابة.



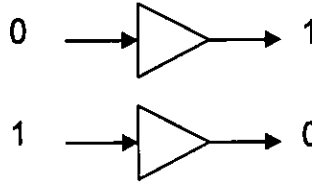
بوابة عاكس (NOT Gate) Inverter Gate

إن بوابة عاكس تقبل قيمة متغير بولي كمدخل لها، وتقوم البوابة بإنتاج المتمم لقيمة المتغير كمخرج لها. و يتم تمثيل بوابة عاكس بالمخطط البياني باستخدام رمز هذه الدائرة الذي يكون على شكل ضم بيانات كما هو مبين بالشكل التالي أدناه.



The inverter gate accepts the value of one Boolean variable as input, and, produces the complement as its output. The symbol used for an inverter is shown below.

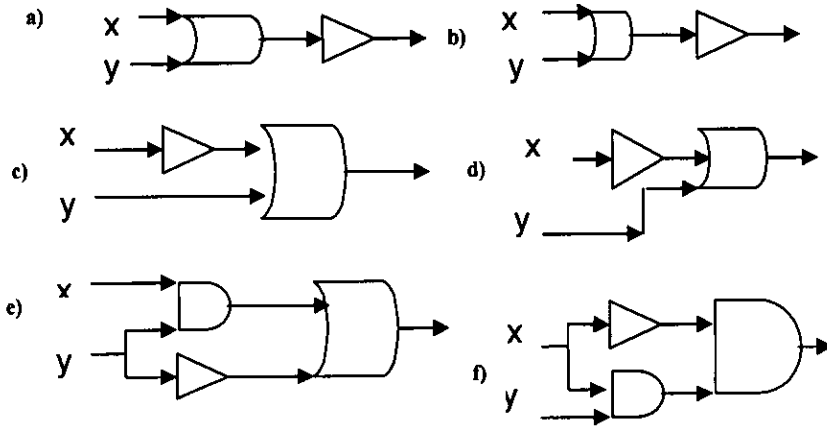
و يمكن تلخيص حالة عمل بوابة عاكس بإخراج متمم الإشارة المدخلة.
والمخطط التالي يمثل الحالات المختلفة لهذه البوابة.



توافقية البوابات Combinations of Gates

توافقية البوابات يمكن بناؤها باستخدام توليفة بوابات تتكون من بوابات عاكس وبوابات "أو" وبوابات "و". عند تكوين توافقية البوابات يمكن للبوابات أن تتشارك في مدخل واحد. وكما هو موضح في الأمثلة التالية:

مثال (1): إذا كانت $x = 1$ و $y = 0$ فما مخرجات توافقية البوابات التالية:



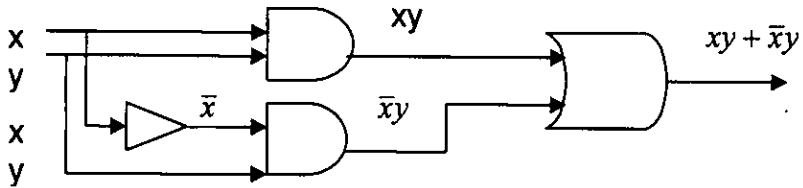
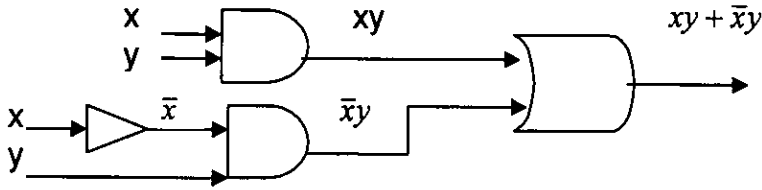
الحل : نُحصل على النتائج التالية كمخرجات لتوافقية البوابات أعلاه وهي:

a) 1	b) 0	c) 0
d) 1	e) 1	f) 1

مثال (2): ارسم توافقية البوابات التي تمثل الاقتران $f(x, y) = x \cdot y + \bar{x} \cdot y$ المسمى

بأقتران جمع المضارب (sum of products)

الحل: يمكن رسم توافقية البوابات التي تمثل هذا الاقتران بأكثر من طريقة:



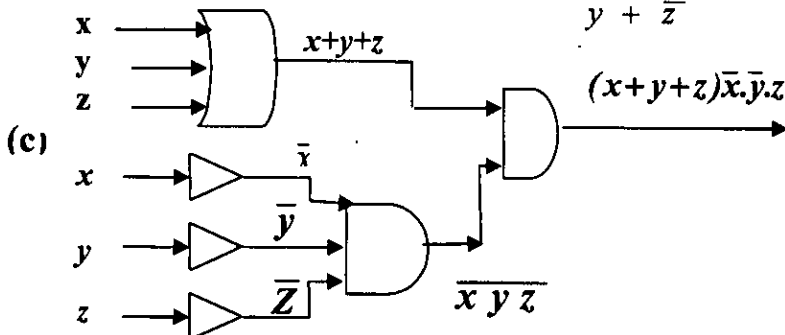
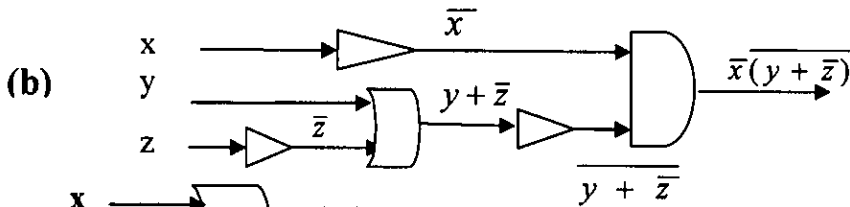
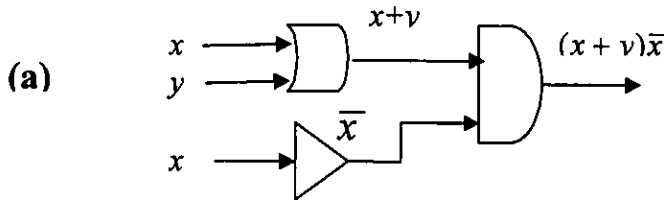
مثال (3): ارسم توافقية البوابات التي تعطي مجموعة المضارب التالية:

$$a) (x + y) \cdot \bar{x}$$

$$b) \bar{x} \cdot (y + \bar{z})$$

$$c) (x + y + z)(\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z})$$

الحل:

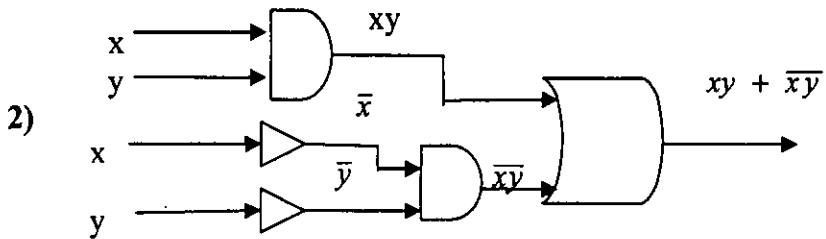
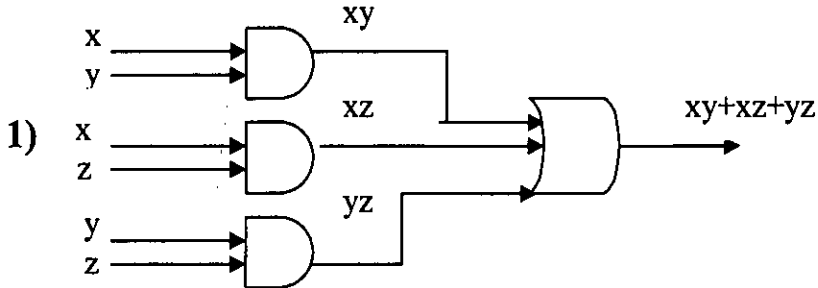


مثال (4): ارسم توافقية البوابات المنطقية المعطاة بجمع النواتج الموسع التالية:

$$1) x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$$

$$2) x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$$

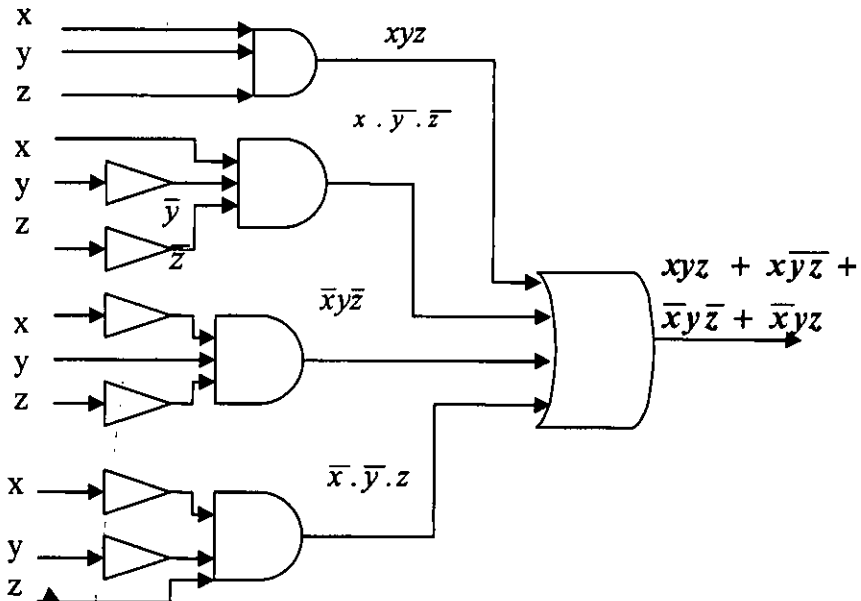
الحل:



مثال (5): ارسم توافقية البوابات التي تمثل الدالة التالية:

$$F(x, y, z) = x \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$$

الحل:



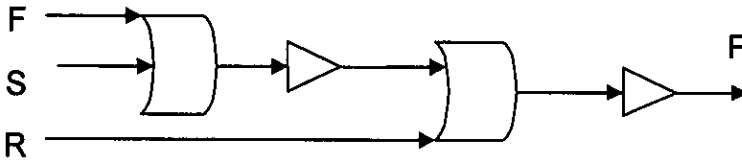
أمثلة الدوائر الكهربائية Examples of Circuits

من الأمثلة الشائعة على الدوائر الكهربائية الدوائر التالية:

- دائرة الذاكرة القلابة
- دائرة نصف جامع
- دائرة الجامع الكلي

الذاكرة القلابة³ Flip-Flop

الذاكرة القلابة هي توافقية بوابات لتخزين إحدى القيم البولية {0, 1} كما هو مبين في الشكل التالي:



الذاكرة القلابة Flip-Flop

حيث:

F هي ناتج الذاكرة والتغذية الراجعة لها (Feed-back)

S (set) تمثل مدخل الدائرة الذي يستخدم في تخزين القيمة 1

R (Reset) يمثل مدخل الدائرة الذي يستخدم في تخزين القيمة 0

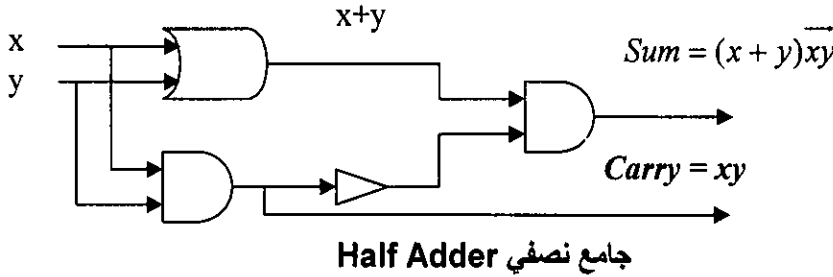
لو جعلنا جميع المدخلات تساوي الصفر لوجدنا أن ناتج الدائرة هو صفر ويظل الناتج هكذا على أن يحدث تغيرا معيناً في مدخلات الدائرة، وفي الحقيقة أن هذه الحالة، هي حالة عدم سريان تيار كهربائي في الدائرة لأي من مدخلها، أي انقطاع التيار الكهربائي هو الذي يجعل مدخلاتها كافة تساوي الصفر. و لتخزين القيمة 1 في هذه الدائرة نمرر التيار في المدخل S أي $S=1$. نحقق الناتج 1 الذي يعود ثانية إلى الدائرة مع ملاحظة إبقاء $R=0$ ، وستبقى الدائرة محتفظة بالقيمة الجديدة إلى أن يحدث شيء ما يغيرها، كأن ينفصل التيار أو يسري في R بدلا من S.

مما سبق يتبين لنا أنه يمكن استخدام الذاكرة القلابة في بناء ذاكرة الحاسوب والمسجلات، إذ إنها تتيح وسيلة تخزين بالغة السرعة بالمقارنة مع الحلقات الممغنطة، ويمكن تصور أن البايث مثلا تتكون من ثماني دوائر قلابة كل منها يمثل موضعا ثنائيا مع التذكير بأن هذه الذاكرة تفقد محتوياتها عند فصل التيار الكهربائي عنها.

³ قاموس المواكب. الأستاذ ناصر الشويبسي. سلسلة الرضا للمعلومات. دار الرضا للنشر. تشرين أول

جامع نصفى Half - Adder

دائرة جامع نصفى تقوم بجمع قيمتين ثنائيتين هما x و y ، أي أن قيمة كلٍّ منها هي إما 0 أو 1 ، وهما المدخلان لدائرة جامع نصفى. وللجامع النصفى مخرجان اثنان أحدهما يمثل مجموع قيمتي المدخلين (Sum Bit) ونرمز له بـ S والثاني يمثل القيمة المحمولة بعد الجمع (Carry Bit) ونرمز لها بـ C .



الجامع النصفى هو أول توافقية بوابات منطقية نتعرفها، لها نتيجة واحدة موزعة على مخرجين. يطلق على هذه الدائرة اسم نصف جامع لأنها تقوم بجمع قيمتين ثنائيتين (two bits) دون اعتبار حمل من عملية جمع سابقة. ودائرة جامع نصفى لها عدة أشكال وجميعها تعطي النتيجة نفسها، أحد أشكالها هو الشكل السابق أعلاه. والجدول التالي يبين مدخلي الجامع النصفى ومخرجه والتي تحسب على النحو التالي:

• نتيجة الجمع تحسب هكذا $S = x\bar{y} + \bar{x}y = (x + y)(\overline{xy})$

• نتيجة الحمل تحسب هكذا $C = xy$

وباستخدام دائرة جامع نصفى يمكن إيجاد النتائج التالية:

1- عندما تكون قيم المدخل $x = 1, y = 1$ تكون قيم المخرج $S = 1 + 1 = 0$ مع

قيمة الحمل $C = 1$

2- عندما تكون قيم المدخل $x = 1, y = 0$ تكون قيم المخرج $S = 1 + 0 = 1$ مع

قيمة الحمل $C = 0$

3- عندما تكون قيم المدخل $x = 0, y = 1$ تكون قيم المخرج $S = 0 + 1 = 1$ مع

قيمة الحمل $C = 0$

4- عندما تكون قيم المدخل $x = 0, y = 0$ تكون قيم المخرج $S = 0 + 0 = 0$ مع

قيمة الحمل $C = 0$

ونلخصها في الجدول التالي:

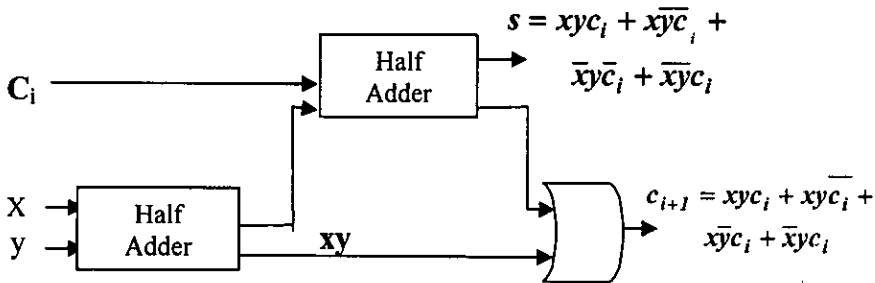
جدول مدخلات ومخرجات الجامع النصفى

المدخلات		المخرجات	
x	y	S	C
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

الجامع الكلى Full-Adder

دائرة جامع كلى تكمن في جمع قيمتين ثنائيتين وقيمة الحمل الناتجة من عملية جمع سابقة. والجامع الكلى له ثلاثة مدخلات: مدخلان هما x و y، والثالث لقيمة الحمل C_i .

وللجامع الكلى مخرجان: الأول لنتيجة الجمع S، والثاني لقيمة الحمل الجديدة C_{i+1} ، والتي يقوم بتحويلها لجمعها إلى ما يليها. وعموماً فإن الجامع الكلى يعدّ جامعين نصفين. ويأخذ الجامع الكلى عدة أشكال، أحدها هو الشكل التالي:



الجدول التالي يبين مدخلات الجامع الكلى ومخرجاته:

جدول مدخلات ومخرجات الجامع الكلى

المدخلات			المخرجات	
x	y	C _i	S	C _{i+1}
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

تصغير الدوائر Minimization of Circuits

نطلق مصطلح تصغير دائرة كهربائية على عملية إيجاد أصغر مجموعة بوابات منطقية مكافئة لدائرة كهربائية ما وتتساويان في قيم المخارج. وهذا يؤدي إلى اختصار عدد الحدود في جمع النواتج الموسع Sum of products expansion المكون للدائرة الكهربائية، بحيث نحصل تعبيراً بولياً جديداً مختصراً يعطي النتيجة نفسها بعدد بوابات منطقية أقل. وعملياً يتم اختصار الحدود التي تحتوي على متغير والحدود الأخرى التي تحتوي على متمم ذلك المتغير. والمثال التالي يوضح كيفية تصغير الدوائر.

مثال (6): ارسم توافقية البوابات المنطقية التي نتيجة مخرجها 1 عندما تكون القيم التالية مدخلات للدائرة $(x=y=z=1 \text{ or } x=z=1 \text{ and } y=0)$ ؟
ثم صغر الدائرة وارسمها؟

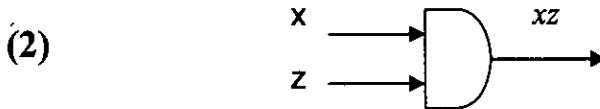
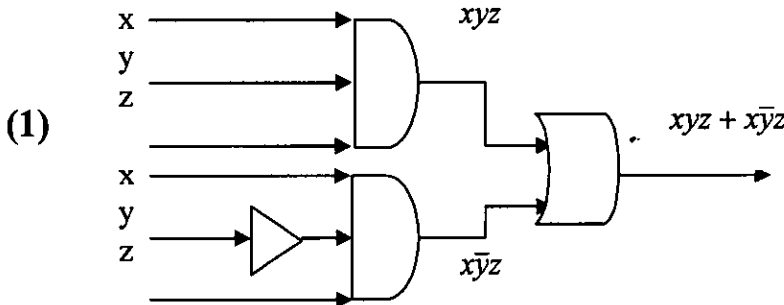
الحل: جمع النواتج الموسع لهذه الدائرة هو $xyz + x\bar{y}z$ ونلاحظ أن حد الناتج

الأول يختلف عن حد الناتج الثاني بمتغير واحد و هو y و بالتالي:

$$x \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot z = (y + \bar{y})x \cdot z = 1 \cdot (x \cdot z) = x \cdot z$$

وعليه يمكن تمثيل هذه الدائرة بمجموعتين من توافقيات البوابات المنطقية:

- الدائرة الأولى (1) مؤلفة من ثلاث بوابات و عاكس لتمثيل $xyz + x\bar{y}z$
- الدائرة الثانية (2) تتكون من بوابة واحدة xz ، كما هو مبين في الشكل التالي:



سوف نقوم بشرح بعض الطرق التي تقوم باختصار عدد حدود جمع النواتج الموسع ومنها خرائط كارنوف التالية:

خرائط كارنوف ⁴ Karnugh Maps

خرائط كارنوف هي طريقة بيانية تستخدم في اختصار حدود جمع النواتج الموسع عندما يكون عدد المتغيرات التي يتكون منها التعبير البولي ستة متغيرات أو أقل. وجدت هذه الطريقة سنة 1953م. وخرائط كارنوف تعطي طريقة بصرية في اختصار حدود جمع النواتج الموسع. سنبدأ بشرح خرائط كارنوف للاقتارات البولية التي تتكون من متغيرين x, y . لهذا الاقتران $f(x, y)$ يوجد أربعة حدود نواتج مبينة في الشكل التالي أدناه. أما خريطة كارنوف التي تقابل $f(x, y)$ فهي تتم بوضع 1 في المربع الذي يكون حده موجوداً في الاقتران.

	y	$\bar{y}$
x	$x \cdot y$	$x \cdot \bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x} \cdot y$	$\bar{x} \cdot \bar{y}$

مثال (7): أوجد خريطة كارنوف لكل من الاقتارات التالية :

$$a) f(x, y) = x \cdot y + \bar{x} \cdot y$$

$$b) f(x, y) = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y$$

$$c) f(x, y) = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$$

الحل:

$$a) f(x, y) = x \cdot y + \bar{x} \cdot y$$

تمثل خريطة كارنوف للاقتران f بوضع رقم 1 في كل مربع حد ناتجه موجود في قيمة الاقتران مثل حدي النواتج $x \cdot y$ و $\bar{x} \cdot y$. وخريطة كارنوف مبينة في الشكل التالي أدناه.

	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$	1	

يمكن اختصار جمع النواتج الموسع للاقتران من خلال النظر لخريطة كارنوف بحيث عندما يكون مربعين متجاورين يحتوي كل منهما على الرقم 1 فإنه يمكن

⁴ Maurice Karnaugh موريس كارنوف ولد عام 1924 في مدينة نيويورك. عمل في مختبرات Bell من 1952 وحتى 1966م. التحق بشركة IBM 1970. له مساهمات في تطبيقات التقنيات العددية في الحاسوب والاتصالات. اهتماماته الحالية تتضمن تطوير الأنظمة المعرفية.

اختصار حدي نواتج المربعات المتجاورة لحد ناتج واحد وكما هو مبين تالياً:

$$x \cdot y + \bar{x} \cdot y = (x + \bar{x})y = 1 \cdot y = y$$

$$b) f(x, y) = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y$$

تمثل خريطة كارنوف للاقتران f بوضع رقم 1 في كل مربع حد ناتجه موجود في قيمة الاقتران مثل حدي النواتج $x \cdot \bar{y}$ و $\bar{x} \cdot y$. وخريطة كارنوف مبينة في الشكل التالي أدناه. لا يوجد مربعات متجاورة تحتوي على 1 وعليه لا يوجد اختصار لجمع النواتج الموسع للاقتران.

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	

$$c) f(x, y) = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$$

تمثل خريطة كارنوف للاقتران f بوضع رقم 1 في كل مربع حد ناتجه موجود في قيمة الاقتران مثل حدود النواتج $x \cdot \bar{y}$ و $\bar{x} \cdot y$ و $\bar{x} \cdot \bar{y}$. وخريطة كارنوف مبينة في الشكل التالي أدناه.

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

يمكن اختصار جمع النواتج الموسع للاقتران، فبعد النظر لخريطة كارنوف، يوجد مربعان متجاوران يحتوي كل منهما على الرقم 1 وعليه يمكن اختصار حدي نواتج المربعات المتجاورة لحد ناتج واحد كما هو مبين تالياً:

$$\begin{aligned} x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y} &= (x + \bar{x})\bar{y} + \bar{x} \cdot y \\ &= 1 \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y = \bar{y} + \bar{x} \cdot y = (\bar{y} + \bar{x})(\bar{y} + y) = \bar{y} + \bar{x} \end{aligned}$$

خرائط كارنوف لثلاث متغيرات

أما خرائط كارنوف لثلاث متغيرات فتكون على شكل مستطيل مؤلف من ثمانية مربعات، هذه المربعات تمثل ثمانية حدود نواتج للمتغيرات الثلاثة. أحد أشكال مخططات كارنوف يمثل المستطيل التالي أدناه.

	$y \cdot z$	$y \cdot \bar{z}$	$\bar{y} \cdot \bar{z}$	$\bar{y} \cdot z$
x	$x \cdot y \cdot z$	$x \cdot y \cdot \bar{z}$	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	$x \cdot \bar{y} \cdot z$
$\bar{x}$	$\bar{x} \cdot y \cdot z$	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$

أما بالنسبة لاختصار خرائط كارنوف لثلاث متغيرات فيمكن معرفتها من خلال الأشكال التالية التي سوف نظل فيها المربعات المتجاورة التي يمكن اختصار جمع النواتج الموسع لها:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$$\bar{y} \cdot \bar{z} = x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$$\bar{x}z = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$$\bar{z} = x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$$x = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$$1 = x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$$

مثال (8): استخدم مخططات كارنوف من اجل اختصار كل من جمع النواتج الموسع التالية:

$$a) x.y.\bar{z} + x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.z + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$$

$$b) x.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.z + \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$$

$$c) x.y.z + x.y.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.z + \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$$

الحل:

		yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
a)	x		1	1	
	$\bar{x}$	1		1	

$$x.y.\bar{z} + x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.z + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} = x\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$$

		yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
b)	x			1	1
	$\bar{x}$	1		1	1

$$x.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.z + \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} = \bar{y} + \bar{x}z$$

		yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
c)	x	1	1	1	1
	$\bar{x}$	1		1	1

$$x.y.z + x.y.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.z + \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} = x + \bar{y} + z$$

خرائط كارنوف لأربعة متغيرات

أما خرائط كارنوف لأربعة متغيرات فتكون على شكل مربع مقسم إلى 16 مربعاً، هذه المربعات تمثل ستة عشر حد ناتج للمتغيرات الأربعة. أحد أشكال مخططات كارنوف لأربعة متغيرات يمثلها الشكل التالي:

c)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}.z$	$\bar{y}\bar{z}$
wx	$wxyz$	$wxy\bar{z}$	$w.x.\bar{y}.z$	$wx\bar{y}\bar{z}$
$w\bar{x}$	$w\bar{x}yz$	$w\bar{x}y\bar{z}$	$w.\bar{x}.\bar{y}.z$	$w.\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$
$\bar{w}\bar{x}$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}.\bar{x}.y.z$	$\bar{w}.\bar{x}.\bar{y}.z$	$\bar{w}.\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$
$\bar{w}x$	$\bar{w}xyz$	$\bar{w}xy\bar{z}$	$\bar{w}.x.\bar{y}.z$	$\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$

أما بالنسبة لاختصار خرائط كارنوف لأربعة متغيرات فيمكن تعرفها من خلال الأشكال التالية التي سوف نظل فيها المربعات المتجاورة التي يمكن اختصار جمع النواتج الموسع لها:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}.z$	$\bar{y}\bar{z}$
wx				
$w\bar{x}$				
$\bar{w}\bar{x}$				
$\bar{w}x$				

$$w.x.z = w.\bar{x}.y.z + w.\bar{x}.\bar{y}.z$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}.z$	$\bar{y}\bar{z}$
wx				
$w\bar{x}$				
$\bar{w}\bar{x}$				
$\bar{w}x$				

$$\bar{w}.\bar{x} = \bar{w}.\bar{x}.y.z + \bar{w}.\bar{x}.\bar{y}.z + \bar{w}.\bar{x}.y.\bar{z} + \bar{w}.\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}.z$	$\bar{y}\bar{z}$
wx				
$w\bar{x}$				
$\bar{w}\bar{x}$				
$\bar{w}x$				

$$x\bar{z} = wxyz + wx\bar{y}z + \bar{w}xyz + \bar{w}\bar{y}z$$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}.z$	$\bar{y}\bar{z}$
wx				
$w\bar{x}$				
$\bar{w}\bar{x}$				
$\bar{w}x$				

$$\bar{z} = wxy\bar{z} + w.x.\bar{y}.\bar{z} + w\bar{x}y\bar{z} + w.\bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{w}.\bar{x}.y.\bar{z} + \bar{w}.\bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{w}xy\bar{z} + \bar{w}.x.\bar{y}.\bar{z}$$

مثال (9): استخدم مخططات كارنوف من أجل اختصار كل من جمع النواتج الموسع التالية :

$$1- \boxed{wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z}$$

$$2- \boxed{wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z + \bar{w}x\bar{y}\bar{z}}$$

الحل:

	yz	y $\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
wx	1	1	1	
w $\bar{x}$	1		1	1
$\bar{w}x$	1	1		
$\bar{w}\bar{x}$				1

	yz	y $\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
wx			1	
w $\bar{x}$	1	1	1	
$\bar{w}x$		1	1	
$\bar{w}\bar{x}$			1	

$$1) \frac{wyz + wx\bar{z} + w\bar{x}y + \bar{w}\bar{x}y + \bar{w}x\bar{y}z}{\bar{w}\bar{x}y + \bar{w}x\bar{y}z}$$

$$2) \bar{y}z + w\bar{x}y + \bar{x}y\bar{z}$$

مثال (10): استخدم مخططات كارنوف من اجل اختصار جمع النواتج الموسع التالي :

$$wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}x\bar{y}\bar{z}$$

الحل:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
wx		1	1	
$w\bar{x}$	1	1	1	
$\bar{w}x$		1	1	
$\bar{w}\bar{x}$	1	1	1	1

$\bar{z} + \bar{w}x + w\bar{x}y$

تمارين محلولة

1- أوجد ناتج العبارات التالية:

a) $1 \cdot \bar{0}$

b) $1 + \bar{1}$

c) $\bar{0} \cdot 0$

d) $\overline{(1 + 0)}$

الحل :

a) $1 \cdot \bar{0} = 1 \cdot 1 = 1$

b) $1 + \bar{1} = 1 + 1 = 1$

c) $\bar{0} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

d) $\overline{(1 + 0)} = \bar{1} = 0$

2- أوجد ناتج ما يلي:

a) $x \cdot 1 = 0$

b) $x \cdot 1 = x$

c) $x + x = 0$

الحل :

a) $x \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

b) $x \cdot 1 = x \Rightarrow x = 1 \text{ \& } x = 0$

c) $x + x = 0 \Rightarrow x = 0$

3- أثبت أن $x + x \cdot y = x$

الحل :

$$x + x \cdot y = x(1 + y) = x \cdot 1 = x$$

وذلك لأن $1 + y = 1$

4- أثبت أن $x\bar{y} + y\bar{z} + \bar{x}z = \bar{x}y + \bar{y}z + x\bar{z}$

الحل:

x	y	z	$x\bar{y}$	$y\bar{z}$	$x\bar{y} + y\bar{z} + \bar{x}z$	$\bar{x}y$	$\bar{y}z$	$x\bar{z}$	$\bar{x}y + \bar{y}z + z + x\bar{z}$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5- أوجد ناتج ما يلي وذلك من أجل $w=1, x=1, y=0, z=0$

$$1) \overline{x \cdot y} + \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$2) w + \bar{x}y$$

$$3) wx + \bar{y} + yz$$

$$4) wx + xy + yz$$

$$5) (wx + y\bar{z}) + w\bar{y} + \overline{(w + y)(\bar{x} + y)}$$

الحل:

$$1) \overline{xy} + \bar{x}\bar{y} = \bar{1}0 + \bar{1}.\bar{0} = \bar{0} + 01 = 1 + 0 = 1$$

$$2) w + \bar{x}y = 1 + \bar{1}.0 = 1 + 0.0 = 1$$

$$3) wx + \bar{y} + yz = 1.1 + \bar{0} + 0.0 = 1 + 1 + 0 = 1$$

$$4) wx + xy + yz = 1.1 + 1.0 + 0.0 = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\begin{aligned} 5) (wx + y\bar{z}) + w\bar{y} + \overline{(w + y)(\bar{x} + y)} &= \\ &= (1.1 + 0.\bar{0}) + 1.\bar{0} + \overline{(1 + 0)(\bar{1} + 0)} = \\ &= (1 + 0.1) + 1.1 + \overline{(1 + 0)(0 + 0)} = \\ &= 1 + 0 + 1 + \bar{1}.\bar{0} = 1 + 0 + 1 + \bar{0} \\ &= 1 + 0 + 1 + 1 = 1 \end{aligned}$$

6- بسّط العبارات التالية:

$$a) xy + (x + y)\bar{z} + y$$

$$b) x + y + \overline{(\bar{x} + y + z)}$$

$$c) yz + wz + z + [wz(xy + wz)]$$

الحل:

$$\begin{aligned} a) xy + (x + y)\bar{z} + y &= y + xy + (x + y)\bar{z} \\ &= (y + x)(y + y) + (x + y)\bar{z} \\ &= (y + x)y + (x + y)\bar{z} \\ &= (y + x)[y + \bar{z}] = y + x\bar{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) x + y + \overline{(\bar{x} + y + z)} &= x + y + \overline{\bar{x}(y + z)} \\ &= x + y + \bar{\bar{x}} + \overline{(y + z)} = x + y + \bar{\bar{x}} + \bar{y}\bar{z} \\ &= x + y + x + \bar{y} + \bar{z} = x + y + \bar{y} + \bar{z} \\ &= x + 1 + \bar{z} = x + \bar{z} \end{aligned}$$

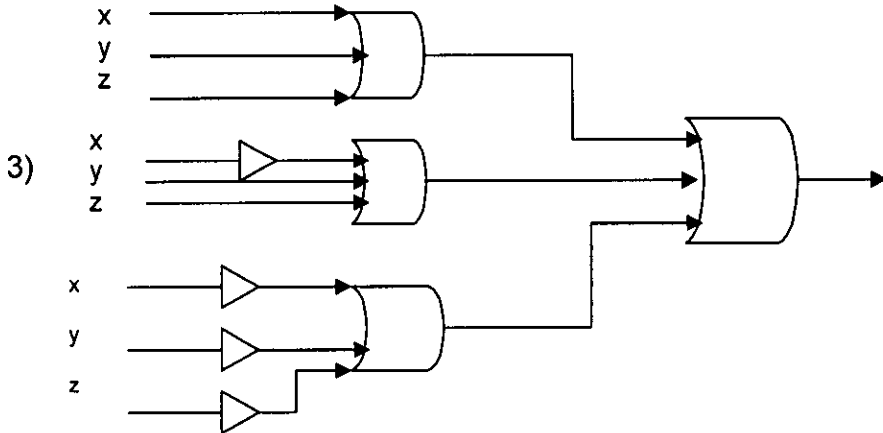
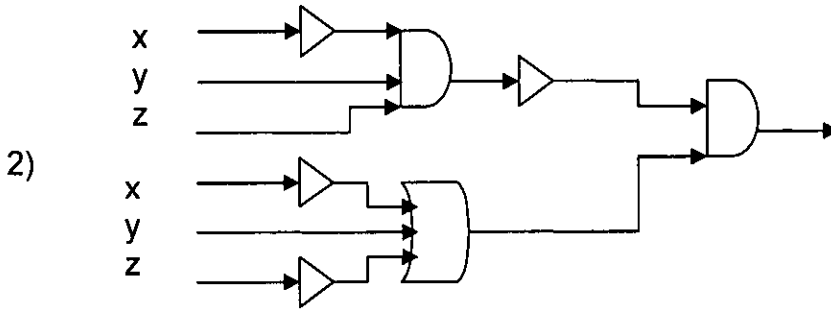
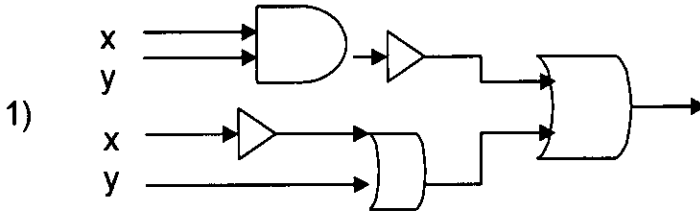
$$c) yz + wx + z + [wz(xy + wz)]$$

$$= yz + wx + z + wz = yz + wx + (z + w) =$$

$$= yz + wx + z = yz + z + wx = (y + z)z + wx$$

$$= z + wx$$

7- ما مخرجات الدارات التالية:



الجواب:

1) $\bar{x} \cdot \bar{y} + (\bar{x} + y)$

2) $(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + \bar{z})$

3) $(x + y + z) + (\bar{x} + y + z) + (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$

8- أوجد جمع النواتج الموسع لخرائط كارنوف الممثلة بالجدول التالي :

(1)

	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$	1	1

(2)

	y	$\bar{y}$
x	1	1
$\bar{x}$		

(3)

	y	$\bar{y}$
x	1	1
$\bar{x}$	1	1

الحل:

1) $xy + \bar{x}y + x\bar{y}$

2) $xy + x\bar{y}$

3) $x.y + x.\bar{y} + \bar{x}.y + \bar{x}.\bar{y}$

9- ارسم خرائط كارنوف لجمع النواتج الموسع التالية:

a) $x\bar{y}$

b) $x.y + \bar{x}.\bar{y}$

c) $x.y + x.\bar{y} + \bar{x}.y + \bar{x}.\bar{y}$

الحل:

a)

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$		

b)

	y	$\bar{y}$
x	1	
$\bar{x}$		1

c)

	y	$\bar{y}$
x	1	1
$\bar{x}$	1	1

10- استخدم خرائط كارنوف من اجل إيجاد جمع النواتج الموسع المختصر، للتعبير البولية التالية:

1) $\bar{x}.y + \bar{x}.\bar{y}$

2) $x.y + x.\bar{y}$

3) $x.y + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

الحل :

1)

	y	$\bar{y}$
x		
$\bar{x}$	1	1

الناتج $\bar{x}$

2)

	y	$\bar{y}$
x	1	1
$\bar{x}$		

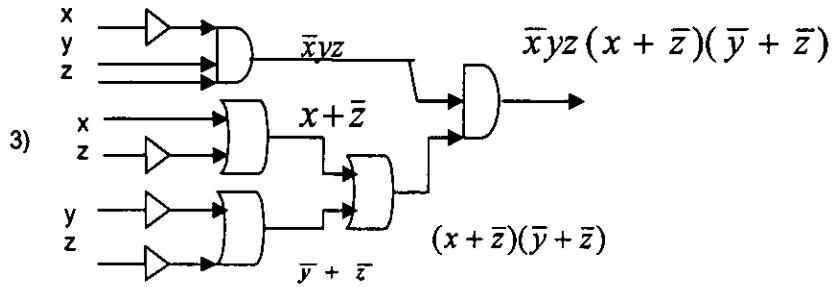
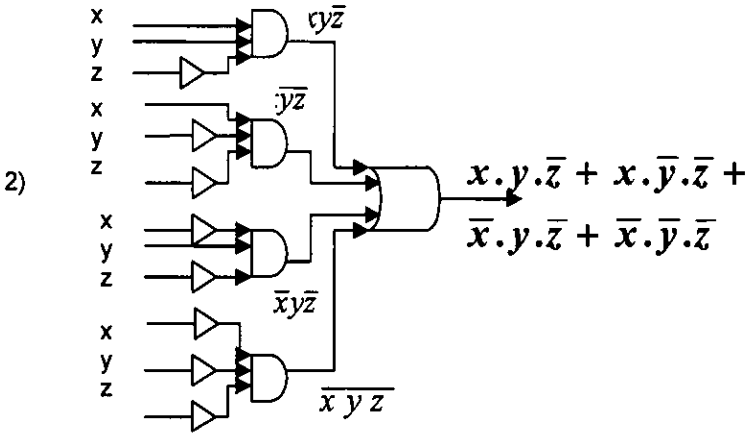
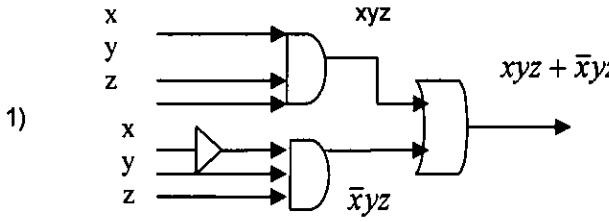
الناتج x

3)

	y	$\bar{y}$
x	1	1
$\bar{x}$	1	1

الناتج 1

11- ارسم الدوائر المصغرة للدوائر التالية باستخدام خرائط كارنوف ؟

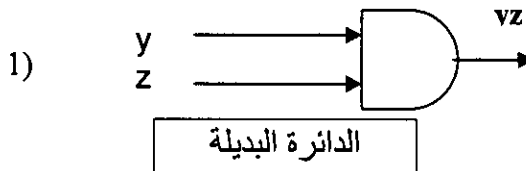


الحل :

1)

	yz	y $\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1			
$\bar{x}$	1			

النتائج yz

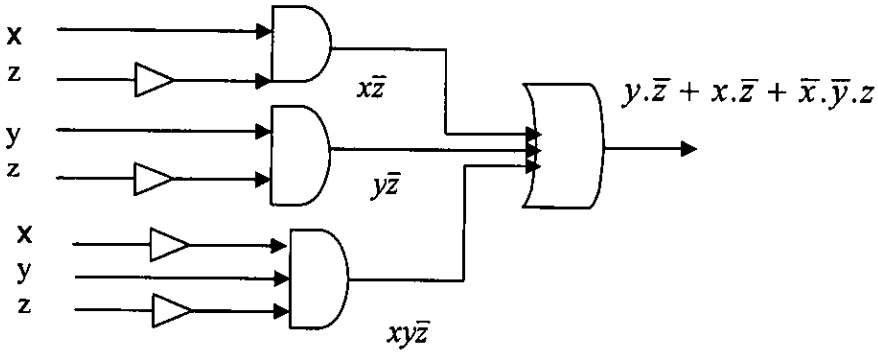


$yz \quad y\bar{z} \quad \bar{y}z \quad \bar{y}\bar{z}$

2)

x		1	1	
$\bar{x}$		1		1

الناتج هو $y\bar{z} + x\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$ والدائرة البديلة هي التالية:



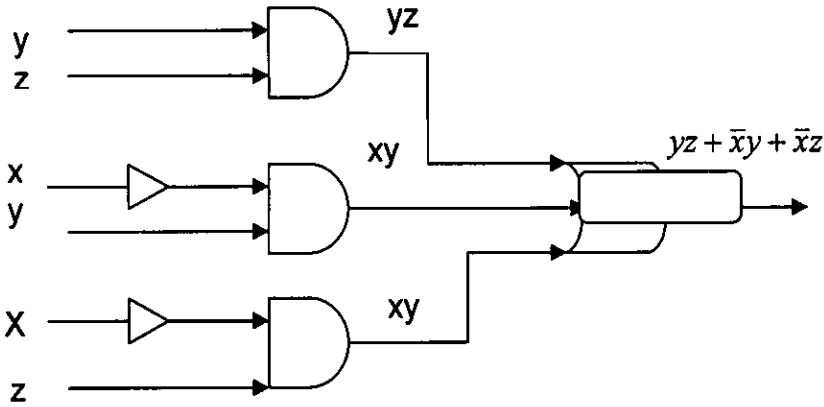
نستخدم خرائط كارنوف للاختصار وذلك لان التعبير الناتج هو تعبير مبسط ، والدائرة المختصرة

$yz \quad y\bar{z} \quad \bar{y}z \quad \bar{y}\bar{z}$

3)

x	1			
$\bar{x}$	1	1		1

$$\begin{aligned}
 & \bar{x}yz[(x + \bar{z}) + (\bar{y} + \bar{z})] \\
 &= \bar{x}yz[x + \bar{z} + \bar{y}] \\
 &= \bar{x}yzx + \bar{x}yz\bar{z} + \bar{x}yz\bar{y} \\
 &= yz + \bar{x}y + \bar{x}z
 \end{aligned}$$



12- استخدم خرائط كارنوف من أجل اختصار جمع النواتج الموسع في كل مما يلي

1) $\bar{x}.y.z + \bar{x}.\bar{y}.z$

2) $x.y.z + x.y.\bar{z} + \bar{x}.y.z + \bar{x}.y.\bar{z}$

3) $x.y.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.z + \bar{x}.\bar{y}.z$

4) $x.y.z + x.\bar{y}.z + x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.z + \bar{x}.y.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$

الحل:

1)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}.\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$	1			1

الناتج $\bar{x}z$

2)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}.\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1		
$\bar{x}$	1	1		

الناتج y

$yz \quad y\bar{z} \quad \bar{y}z \quad \bar{y}\bar{z}$

3)

x		1	1	1
$\bar{x}$	1			1

الناتج $\bar{x}z + \bar{y}z + x\bar{y} + y\bar{z}x$

13- استخدم خرائط كارنوف من اجل اختصار جمع النواتج الموسع في كل مما يلي :

1) $w.x.y.z + w.x.\bar{y}.z + w.x.\bar{y}.\bar{z} + w.\bar{x}.y.\bar{z} + w.\bar{x}.\bar{y}.z$

2) $w.x.y.\bar{z} + w.x.\bar{y}.z + w.\bar{x}.y.z + \bar{w}.x.\bar{y}.z + \bar{w}.\bar{x}.y.\bar{z} + \bar{w}.\bar{x}.\bar{y}.z$

3) $w.x.y.z + w.x.y.\bar{z} + w.x.\bar{y}.z + w.\bar{x}.\bar{y}.z + w.\bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{w}.x.\bar{y}.z + \bar{w}.\bar{x}.y.\bar{z} + \bar{w}.\bar{x}.\bar{y}.z$

4) $w.x.y.z + w.x.y.\bar{z} + w.x.\bar{y}.z + w.\bar{x}.y.z + w.\bar{x}.y.\bar{z} + \bar{w}.x.y.z + \bar{w}.\bar{x}.y.z + \bar{w}.\bar{x}.y.\bar{z} + \bar{w}.\bar{x}.\bar{y}.z$

الحل:

$yz \quad y\bar{z} \quad \bar{y}z \quad \bar{y}\bar{z}$

1)

wx	1		1	1
$w\bar{x}$		1		1
$\bar{w}.\bar{x}$				
$w\bar{x}$				

$\bar{y}zw + wx\bar{y} + wxyz + w\bar{x}y\bar{z}$

2)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
wx		1		1
$w\bar{x}$	1			
$\bar{w}\bar{x}$		1		1
$\bar{w}x$				1

$\bar{w}\cdot\bar{y}\cdot z + wxy\bar{z} + w\bar{x}yz +$
 $\bar{w}\cdot\bar{x}\cdot y\cdot\bar{z} + wxy\bar{z}$

3)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx	1	1		1
$w\bar{x}$			1	1
$\bar{w}\bar{y}$		1		1
$\bar{w}x$				1

$\bar{y}z + \bar{y}w\bar{x} + wxy +$
 $wxz + \bar{w}\cdot\bar{x}\cdot y\cdot\bar{z}$

4)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx	1	1		1
$w\bar{x}$	1	1		
$\bar{w}\bar{x}$	1	1	1	
$\bar{w}x$	1			

$yz + wxz + wy + \bar{w}\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}$

Terminology المصطلحات العلمية

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
الجبر البولي	Boolean Algebra
الضرب البولي	Boolean Product
الجمع البولي	Boolean Sum
المتكم البولي	Boolean Complement
قواعد أسبقية التنفيذ لعوامل الجبر البولي	Precedence Rules for Boolean Operators
الاقترانات البولية	Boolean Functions
التعابير البولية	Boolean Expressions
قواعد الجبر البولي	Identities of Boolean Algebra
متكم المتكم	Double Complement
التماثل	Idempotent
الذات	Identity
الهيمنة	Dominance
التبديل	Commutative
التجميع	Associative
التوزيع	Distributive
قوانين دو مورغان	De Morgan's Laws
قاعدة الامتصاص	Absorption law
مزدوج التعبير البولي	Dual of Boolean Expression
مزدوج الاقتران البولي	Dual of Boolean Function

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
تمثيل الاقترانات البولية	Representing Boolean Functions
الناتج الحرفي	Minterm
صيغة الاختيار الطبيعية	Disjunctive Normal Form
جمع النواتج الموسع	Sum-of-Products Expansion
البوابات المنطقية	Logic Gates
بوابة "و"	AND Gate
بوابة "أو"	OR Gate
بوابة عاكس	Inverter Gate (NOT Gate)
توافقية البوابات	Combinations of Gates
أمثلة الدوائر الكهربائية	Examples of Circuits
الذاكرة القلابة	Flip-Flop
جامع نصفي	Half - Adder
جامع كلي	Full-Adder
القيمة المحمولة بعد الجمع	Carry Bit
تصغير الدوائر الكهربائية	Minimization of Circuits
خرائط كارنوف	Karnugh Maps

مصطلحات علمية عربي

انجليزي

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
اتحاد المجموعات	Sets Union
إتحاد علاقتين	Union of Binary Relations
إذا كان p فإن q	If p , then q
إذا كان p فإن q ومعكوسها	If p then q , and conversely
إذا p فقط إذا q	p if and only if q
ارتفاع الشجرة	Height of the Tree
أساليب البرهان	Methods of Proof
استنتاجاً	Conclusion
أشكال فن	Venn Diagrams
أصغر حد أعلى	Least Upper Bound (LUB)
اقتران أصغر عدد صحيح	Floor Function
اقتران أكبر عدد صحيح	Ceiling Function
اقتران الانتماء	Characteristic Function
اقتران المساواة (الذاتي)	Identity Function
اقتران المضروب	The Factorial Function
اقتران تقابل (أو تناظر)	One to one Correspondence (Bijective) Function
اقتران مركب	Composition Function
اقترانات الحاسوب	Computer Functions
أكبر حد أدنى	Greatest Lower Bounds (GLB)
الإتحاد المعمم	Generalized Unions
الاختيار	Disjunction (OR) $\vee$
الاختيار المقصور (أو المقصورة)	Exclusive Or (XOR) $\oplus$
الاختيار المقصور على البت ونظيره	Bitwise XOR
الاختيار بين البت ونظيره	Bitwise OR

المصطلح العربي	English Term
الأزواج المرتبة	Ordered Pair
الأسبقية	Precedence
الاستقراء الرياضي	Mathematical Induction
الأشجار المولدة ذات الأقل تكلفة	Minimal Spanning Trees
الإضافة	Addition
الأعداد الأولية	Prime Numbers
الأعداد الزوجية	Even Numbers
الأعداد الفردية	Odd Numbers
الاقتران	Function
الاقتران الشامل	Onto (Surjective) Function
الاقتران في كل مكان	Everywhere defined Function
الاقتران لقوة n	Function to Power n
الاقتران واحد لواحد	One-to-one (Injective) Function
الاقترانات	Functions
الاقترانات البولية	Boolean Functions
الإقترانات المتساوية	Functions Equality
الانفصال	Modus Ponens (or Direct Inference)
الانفصال	Modus Ponens
الأوراق	Leaves
البحث المعمم على الشجر	Searching General Trees
البحث في الشجرة أو البحث الشجري	Tree Searching or Tree Search
البوابات المنطقية	Logic Gates
التباديل	Permutations
التباديل	Permutations
التباديل الزوجية	Even Permutations

مصطلحات علمية عربية إنجليزي Terminology Arabic English

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
التباديل الفردية	Odd Permutations
التباديل والتوافيق في حالة السحب مع الإعادة	Permutations and Combinations with repetitions
التبديل	Commutative
التبديل للمجموعات	Commutative
التبسيط	Simplification
التجاهل	Overriding
التجزئة	Partition
التجميع	Associative
التجميع للمجموعات	Associative
التحمل	Modus Tollens
التخالفية	Antisymmetry
التضمن	Implication
التعابير البولية	Boolean Expressions
التقاطع المعمم	Generalized Intersections
تكافؤ	Equivalence
التكافؤ المنطقي	Logical Equivalence $\Leftrightarrow$
التكميل للمجموعات	Complement
التمائل	Idempotent
التمائل للمجموعات	Idempotent
التمائلية	Symmetric
التوافيق	Combinations
التوزيع	Distributive
التوزيع للمجموعات	Distributive
الجبر البولي	Boolean Algebra
الجمع البولي	Boolean Sum
الجملة المفتوحة	Predicate

مصطلحات علمية عربى إنجليزى Terminology Arabic English

<u>المصطلح العربى</u>	<u>English Term</u>
الحد الأدنى	Lower Limit
الحد الأعلى	Upper Limit
الخطوط المتجهة في الاتجاهين	Directed Edges
الدورة (العروة)	Cycle
أ الذات	Identity
أ الذات للمجموعات	Identity
الرياضيات التوافقية	Combinatorics
السلسلة	Chain
السور الجزئى	Existential Quantification
إشارة التخصيص $\exists$	$\exists$
السور الكلى	Universal Quantification
إشارة التعميم $\forall$	$\forall$
الشابك المتمم	Complemented Lattice
الشجر	Trees
الشجر الموسوم	Labeled Trees
الشجرة	Tree
الشجرة الثنائية	Binary Tree
الشجرة الجزئية	Subtree
الشجرة المرتبة	Ordered Tree
الشجرة المولدة	Spanning tree
الشجرة النونية التامة	Complete n-tree
الصفات المميزة للاقترانات	Properties of Functions
الصيغة الأخرى لقانون التعويض	Other Formula for Law of Substitution
الصيغة البسيطة	Explicit Formula
الصيغة الطبيعية	Normal Form
الصيغة الطبيعية التخييرية	Disjunctive Normal Form

المصطلح العربي	English Term
الصيغة الطبيعية للعطف	Conjunctive Normal Form
الضرب البولي	Boolean Product
الضرب البولي لمصفوفتين صفر - واحد	The Boolean Product of two Zero-One Matrices
الضرب الديكارتي	Cartesian product
الضرب الديكارتي	Cartesian Product
العطف	Conjunction
العطف (و)	Conjunction (AND) $\wedge$
العلاقات	The Relations
العلاقات الثنائية	Binary Relations
العلاقة R^n	Relation R^n
العمليات على المجموعات	Operations on Sets
العنصر الأصغر	Least Element
العنصر الأعظم	Greatest Element
العوامل المنطقية	Logical Operators
القضايا المنطقية البسيطة	Atomic Logical Propositions
القضايا المنطقية المركبة	Compound Logical Propositions
القطر الرئيس	Main Diagonal
القوسين الحاصرين	Curly Braces
القياس الافتراضي	Hypothetical Syllogism
القياس التخييري	Disjunctive Syllogism
القيمة المحمولة بعد الجمع	Carry Bit
اللاتماثل	Asymmetric
المبدأ الأساسي للعد	Fundamental Principle of Counting
المتتالية	Sequence
المتسلسلات	Series
المتكمم البولي	Boolean Complement

المصطلح العربي	English Term
المجال المقابل f	Range f
المجموعة	Set
المجموعة الخالية	Empty Set
المجموعة الشاملة أو الكلية	The Universal set
المسارات في الرسم البياني الموجه	Paths in Directed Graph
المسورات	Quantifiers
المشروط المزدوج	Biconditional proposition
المصفوفات	Matrices
المصفوفات البولية	Matrices
المصفوفات البولية أو (صفر- واحد)	Boolean Matrices
المصفوفة الذاتية (الحيادية)	Identity Matrix
المصفوفة الصفرية	Zeros Matrix
المصفوفة القطرية	Diagonal Matrix
المصفوفة المتماثلة	The Symmetric Matrix
المصفوفة المثلثية	Triangular Matrix
المصفوفة المثلثية السفلية	Lower Triangular Matrix
المصفوفة المثلثية العلوية	Upper Triangular Matrix
المصفوفة المربعة	Square Matrix
المعاكس الايجابي للقضية	Contrapositive propositions
المعاودة	Recursive
المعطية أو المعطى	Premise
المقدمة	Antecedent
المنطق الرياضي	Mathematical Logic
المنطق والعمليات الثنائية	Logic and Bit Operation
الناتج الحرفي	Minterm
النفي (ليس)	Negation $\sim$ (NOT)

Terminology Arabic English مصطلحات علمية عربى إنجليزي

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
النهاية الصغرى	Minimal Element
النهاية العظمى	Maximal Element
النونية المرتبة	Ordered n-Tuple
النونية المرتبة	Ordered n-Tuple
الهيمنة	Dominance
أمثلة الدوائر الكهربائية	Examples of Circuits
انعكاسية	Reflexive
أنواع المصفوفات	The Matrices Types
برهان الاستقراء الرياضي	A Proof by Mathematical Induction
برهان التناقض	A Proof by Contradiction
برهان المعاكس الايجابي	by Contrapositive A Proof
برهان غير مباشر	Indirect Proof
برهان مباشر	Direct Proof
بوابة " و "	AND Gate
بوابة " أ و "	OR Gate
بوابة عاكس	Inverter Gate (NOT Gate)
تبديل دوري	Cyclic Permutation
تتبع: q تتبع منطقيا من p	q follow logically from p
تحصيل حاصل	Tautology
تدوين الخلف أو معكوس الصيغة البولندية	Reverse Polish Form or Prefix Notation
تدوين الصدارة أو الصيغة البولندية	Prefix Notation or Polish Form
تدوين الوسط	Infix Notation
ترتيب	arrangement
ترتيب جزئي	Partial Order
ترتيباً خطياً	linear order

المصطلح العربي	English Term
ترتيباً كلياً	Total Order
تساوي الأزواج المرتبة	Equality of ordered pairs
تساوي المصفوفات	Matrix Equality
تصغير الدوائر الكهربائية	Minimization of Circuits
تطابق الباقي	Congruence Modulo
تعدي	Transitive
تعميم المبدأ الأساسي للعد	Generalization of Fundamental Principle of Counting
تقاطع المجموعات	Sets Intersection
تقاطع علاقتين	Intersection of Binary Relations
تمثيل الاقترانات البولية	Representing Boolean Functions
تمثيل العلاقات	Representing Relations
تمثيل المجموعات في الحاسوب	Computer Representation of Sets
تناقضاً	Contradiction
توافقية البوابات	Combinations of Gates
توافق راء	r-Combination
ثلاثية مرتبة	Ordered Triple
ثمانية	Octave
جامع كلي	Full-Adder
جامع نصفي	Half - Adder
جدول الصدق	Truth Table
جمع الجمع	Double Summation
جمع المصفوفات	Matrix Addition
جمع النواتج الموسع	Sum-of-Products Expansion
جمع r من الحدود الأولى للمتتالية	The summation of the first r terms of f_i
حادث	Event

المصطلح العربي	English Term
حافظ الصفة	Isomorphism
حجم المصفوفة	Dimension Matrix
حد أدنى	Lower Bound
حد أعلى	Upper Bound
حساب المصفوفات	Matrix Arithmetic
حساب المصفوفات البولية	Boolean Matrices Arithmetic
خاصية التبديل	Commutative
خاصية التجميع	Associative
خاصية التماثل	Idempotent
خاصية التوزيع	Distributive
خرائط كارنوف	Karnugh Maps
خصائص	Properties
خصائص العلاقات	Properties of Relations
خصائص حساب المصفوفات	Characteristics of Matrix Arithmetic
خط واحد " — " دون أسهم	Undirected Edge
خطأ	False (F)
خلية	Cell
خماسية مرتبة	Ordered Quintuplet
خوارزميات اجتياز الشجرة	Tree Traversal Algorithms
خوارزمية الخلف	Algorithm Postorder
خوارزمية الصدارة	Algorithm Preorder
خوارزمية الوسط	Algorithm Inorder
خوارزمية جمع مصفوفتين	Algorithm Matrix Addition
خوارزمية ضرب مصفوفتين	Algorithm Matrix Multiplication
درجة خارجية للرأس	Out-degree of a vertex

المصطلح العربي	English Term
درجة خارجية للعنصر a	Out-Degree of an Element a
درجة داخلية للرأس	In-Degree of a Vertex
درجة داخلية للعنصر a	In-Degree of an Element a
دليل الجمع	Summation Index
دورات منفصلة	Disjoint Cycles
دورة	Cycle
ذاكرة قلابة	Flip-Flop
رؤوس البيان الموجه	Vertices (Vertex مفردها)
رأسين متجاورين	Adjacent Vertices
راء تبديل	Permutation-r
رباعية مرتبة	Ordered Quadruplet
رسم بياني موجه	Directed Graph (Digraph)
سباعية	Sevenfold
سداسية	Sextuplet
سلاسل الأرقام الثنائية	Bit Strings
شباك	Lattice
شباك توزيعي	Distributive Lattice
شباك جزئي	Sub Lattice
شباك محدد	Bounded Lattice
شبكة	Grid
شجرة البحث الثنائي	Binary Search Tree
شرط: p شرط ضروري وكاف لتحقيق q	p is necessary and sufficient for q
شرط: p شرط كاف لتحقيق q	p is sufficient for q
شرط: q شرط ضروري لتحقيق p	q is necessary for p
شيء	Object
صف	Row

المصطلح العربي	English Term
صفوف التكافؤ	Equivalence Classes
صواب (صحيح)	True (T)
صيغ المتتالية	Sequence Formulas
صيغة الاختيار الطبيعية	Disjunctive Normal Form
صيغة المعاودة	Recursive Formula
ضرب r من الحدود الأولى للمتتالية	The Product of the first r terms of f_i
ضرب مصفوفتين	Matrix Multiplication
ضم مصفوفتين صفر - واحد	The Join of two Zero-One Matrices
طريقة القائمة	Menu or Roster Method
طريقة قانون تكوين العناصر	Rule Method or Set Builder
عامل الاتحاد البولي	The Join Operator
عامل التقاطع البولي	The Meet Operator
عامل الضرب البولي	Boolean Product operator
عدد أساس المجموعة	Set Cardinality
عضوية المجموعة	Set Membership
إشارة انتماء عنصر ما لمجموعة ما	$\in$
الانتماء للمجموعة	belongs to, or an element of
عطف البت ونظيره	Bitwise AND
علاقات الترتيب	Order Relations
علاقة التكافؤ والتجزئة	Equivalence Relation and Partition
علاقة مربوطة R^∞	The Connectivity Relation R^∞
علاقة موصلية R^*	The Reachability Relation R^*
على أن، بحيث إن	Such that " "
عملية أحادية	Unary operation

المصطلح العربي	English Term
عمود	Column
عناصر النهاية العظمى والصغرى	Maximal and Minimal Element
عناصر عظمى وصغرى	Greatest and Least Elements
عنصر	Element
عوامل ثنائية	Binary Operators
غير انعكاسية	Irreflexivity
غير توزيعي	Nondistributive
غير قابل للمقارنة	Incomparable
فرضية	Hypothesis
فرق التناظر	Symmetric Difference
فرق المجموعات	Sets Difference
فرق تناظر علاقيتين	Symmetric Difference of Binary Relations
فرق علاقيتين	Difference of Binary Relations
فقط : p فقط إذا q	p only if q
قابل للمقارنة	Comparable
قانون الامتصاص	Absorption law
مبدأ الجمع	Addition Principle
قانون التعويض	Law of Substitution
قواعد أسبقية التنفيذ لعوامل الجبر البولي	Precedence Rules for Boolean Operators
قواعد الاستنتاج المنطقي	Rules of Inference
قواعد الجبر البولي	Identities of Boolean Algebra
قوانين دو مورغان للمجموعات	De Morgan's Laws
قوانين دو مورغان في المنطق الرياضي	De Morgan's Laws
قوانين دو مورغان في الجبر البولي	De Morgan's Laws

المصطلح العربي	English Term
قوانين دومورغان في نظرية المجموعات	De Morgan's Laws
قوانين دومورغان المعممة	Generalized De Morgan's Laws
قيم الصدق	Truth Values
كتلة	Block
كلما q : كلما p	q whenever p
لقاء مصفوفتان صفر - واحد	The Meet of two Zero-One Matrices
متساوية باسكال	Pascal's Identity
متساوية فاندروموندي	Vandermonde's Identity
متسلسلة المقرب	Telescoping Series
متغير بولي	Boolean Variable
متكمم العنصر	Element Complement
متكمم المتكمم	Double Complement
متكمم المجموعات	Sets Complement
متكمم علاقة	Complements of Binary Relations
مثلث باسكال	Pascal's Triangle
مجال f	Domain f
مجموعات الأعداد	The Sets of Numbers
مجموعات جزئية	Subsets
مجموعات متساوية	Sets Equality
مجموعات منفصلة	Disjoint Sets
مجموعات ناشئة من العلاقات الثنائية	Sets Arising from Binary Relations
مجموعة أحادية	Singleton Set
مجموعة الأعداد الحقيقية R	The Set of Real Numbers R
مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة z^+	z^+

المصطلح العربي	English Term
مجموعة الأعداد الصحيحة ص	The Set of Integers Z
مجموعة الأعداد الطبيعية ط	The Set of Natural Numbers N
مجموعة الأعداد النسبية ك	The Set of Rational Numbers Q
مجموعة التعويض	Universe of Discourse
مجموعة الحل	Solution Set
مجموعة العناصر المنسوبة لـ A_1 بالعلاقة R	R-Relative A_1 $R(A_1)$
مجموعة العناصر المنسوبة لـ x بالعلاقة R	R-Relative $x : R(X)$
مجموعة القوة	The Power Set
مجموعة جزئية فعلاً	Proper Subset
مجموعة غير منتهية	Infinite Set
مجموعة مترابطة (متصلة)	Connected Set
مجموعة مرتبة جزئياً	Partially Ordered Set or POSet
مجموعة مرتبة كلياً	Totally Ordered Set
مجموعة منتهية	Finite Set
محتواه في A : محتواه في B	A is contained in B
مخطط العلاقة R	Graph of R
مخططات الشجرة	Tree Diagrams
مخططات هاس	Hasse Diagrams
مدى R	$Ran(R)$
مدى f	$Ran(f)$
مرتبة خطياً	Linearly ordered
مركب العلاقات	Relational Composition
مزدوج الاقتران البولي	Dual of Boolean Function
مزدوج الترتيب الجزئي	Dual Partial Order
مزدوج التعبير البولي	Dual of Boolean Expression
مستوى	level

Terminology Arabic English مصطلحات علمية عربي إنجليزي

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
مستويات الشجرة	Levels of the Tree
مصادفة	Contingency
مصطلحات	Terms
مصفوفة الأس	Power of Matrix
معامل أحادي	Unary Operator
معاملات ذات الحدين	Binomial Coefficients
معضلة البناء	Constructive Dilemma
معضلة الهدم	Destructive Dilemma
معكوس الاقتران	Inverse Function
معكوس الاقتران المركب	Inverse Composition Function
معكوس العلاقة	Inverse of a Relation
معكوس القضية	Converse propositions
مقارنة العناصر	Elements Comparison
منقول المصفوفة	The Transpose of Matrix
نتيجة	Consequence
'نسخ شبه برامج خوارزميات اجتياز الشجرة	Algorithms Pseudocode Versions for Tree Traversal
نطاق R	$Dom(R)$
نطاق f	$Dom(f)$
نظرية	Theory
نظرية ذات الحدين	Binomial Theorem
نفي العبارة المسورة	The Negation of a Quantified expression
نفي النفي	Double Negation
نماذج خاصة من الشباك	Special Types of Lattice
نون اختيار r	n choose r
هيمنة المجموعة الشاملة	Domination of Universal Set
هيمنة المجموعة الخالية	Domination of Empty Set

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
هيمنة قيم الصدق	Domination of Truth Values
وصف المجموعات	Describing Sets

مصطلحات علمية انجليزي عربي

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ص ⁺	Z^+
نطاق f	$Dom(f)$
مدى f	$Ran(f)$
$R^n(x)$	$R^n(x)$
$R^\infty(x)$	$R^\infty(x)$
A محتواه في B	A is contained in B
برهان التناقض	A Proof by Contradiction
برهان الاستقراء الرياضي	A Proof by Mathematical Induction
قاعدة الامتصاص	Absorption law
الإضافة	Addition
قاعدة الجمع	Addition Principle
رأسين متجاورين	Adjacent Vertices
خوارزمية الوسط	Algorithm Inorder
خوارزمية جمع مصفوفتين	Algorithm Matrix Addition
خوارزمية ضرب مصفوفتين	Algorithm Matrix Multiplication
خوارزمية الخلف	Algorithm Postorder
خوارزمية الصدارة	Algorithm Preorder
'نسخ شبه برامج خوارزميات اجتياز الشجرة	Algorithms Pseudocode Versions for Tree Traversal
بوابة " و "	AND Gate
المقدمة	Antecedent
التخالفية	Antisymmetry
ترتيب	arrangement
خاصية التجميع	Associative
التجميع للمجموعات	Associative

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
التجميع	Associative
اللاتماثل	Asymmetric
القضايا المنطقية البسيطة	Atomic Logical Propositions
المشروط المزدوج	Biconditional proposition
عوامل ثنائية	Binary Operators
العلاقات الثنائية	Binary Relations
شجرة البحث الثنائي	Binary Search Tree
الشجرة الثنائية	Binary Tree
معاملات ذات الحدين	Binomial Coefficients
نظرية ذات الحدين	Binomial Theorem
سلاسل الأرقام الثنائية	Bit Strings
عطف البت ونظيره	Bitwise AND
الاختيار بين البت ونظيره	Bitwise OR
الاختيار المقصور على البت ونظيره	Bitwise XOR
كتلة	Block
الجبر البولي	Boolean Algebra
المتكمم البولي	Boolean Complement
التعابير البولية	Boolean Expressions
الاقتدرات البولية	Boolean Functions
المصفوفات البولية أو (صفر - واحد)	Boolean Matrices
حساب المصفوفات البولية	Boolean Matrices Arithmetic
الضرب البولي	Boolean Product
عامل الضرب البولي	Boolean Product operator
الجمع البولي	Boolean Sum
متغير بولي	Boolean Variable

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
شباك محدد	Bounded Lattice
برهان المعاكس الايجابي	A Proof by Contrapositive
القيمة المحمولة بعد الجمع	Carry Bit
الضرب الديكارتي	Cartesian product
الضرب الديكارتي	Cartesian Product
اقتران أكبر عدد صحيح	Ceiling Function
خلية	Cell
السلسلة	Chain
اقتران الانتماء	Characteristic Function
خصائص حساب المصفوفات	Characteristics of Matrix Arithmetic
عمود	Column
التوافيق	Combinations
توافقية البوابات	Combinations of Gates
الرياضيات التوافقية	Combinatorics
خاصية التبديل	Commutative
التبديل للمجموعات	Commutative
التبديل	Commutative
قابل للمقارنة	Comparable
التكميل للمجموعات	Complement
الشباك المتمم	Complemented Lattice
متمم علاقة	Complements of Binary Relations
الشجرة النونية التامة	Complete n-tree
اقتران مركب	Composition Function
القضايا المنطقية المركبة	Compound Logical Propositions
اقتران الحاسوب	Computer Functions

المصطلح العربي	English Term
تمثيل المجموعات في الحاسوب	Computer Representation of Sets
استنتاجاً	Conclusion
تطابق الباقي	Congruence Modulo
العطف	Conjunction
العطف (و)	Conjunction (AND) $\wedge$
الصيغة الطبيعية للعطف	Conjunctive Normal Form
مجموعة مترابطة (متصلة)	Connected Set
نتيجة	Consequence
معضلة البناء	Constructive Dilemma
مصادفة	Contingency
تناقضاً	Contradiction
المعاكس الايجابي للقضية	Contrapositive propositions
معكوس القضية	Converse propositions
القوسين الحاصرين	Curly Braces
دورة	Cycle
الدورة (العروة)	Cycle
تبديل دوري	Cyclic Permutation
قوانين دو مورغان	De Morgan's Laws
وصف المجموعات	Describing Sets
معضلة الهدم	Destructive Dilemma
المصفوفة القطرية	Diagonal Matrix
فرق علاقتين	Difference of Binary Relations
حجم المصفوفة	Dimension Matrix
برهان مباشر	Direct Proof
الخطوط المتجهة في الاتجاهين	Directed Edges

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
رسم بياني موجه	Directed Graph (Digraph)
دورات منفصلة	Disjoint Cycles
مجموعات منفصلة	Disjoint Sets
الاختيار	Disjunction (OR) $\vee$
الصيغة الطبيعية التخييرية	Disjunctive Normal Form
صيغة الاختيار الطبيعية	Disjunctive Normal Form
القياس التخييري	Disjunctive Syllogism
خاصية التوزيع	Distributive
التوزيع للمجموعات	Distributive
التوزيع	Distributive
شباك توزيعي	Distributive Lattice
نطاق R	Dom(R)
مجال f	Domain f
الهيمنة	Dominance
هيمنة قيم الصدق	Domination of Truth Values
هيمنة المجموعة الشاملة	Domination of Universal Set
هيمنة المجموعة الخالية	Domination of Empty Set
متمم المتمم	Double Complement
نفي النفي	Double Negation
جمع الجمع	Double Summation
مزدوج التعبير البولي	Dual of Boolean Expression
مزدوج الاقتران البولي	Dual of Boolean Function
مزدوج الترتيب الجزئي	Dual Partial Order
عنصر	Element
متمم العنصر	Element Complement
مقارنة العناصر	Elements Comparison

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
المجموعة الخالية	Empty Set
تساوي الأزواج المرتبة	Equality of ordered pairs
تكافؤ	Equivalence
صفوف التكافؤ	Equivalence Classes
علاقة التكافؤ والتجزئة	Equivalence Relation and Partition
الأعداد الزوجية	Even Numbers
التباديل الزوجية	Even Permutations
حادث	Event
الاقتران في كل مكان	Everywhere defined Function
أمثلة الدوائر الكهربائية	Examples of Circuits
الاختيار المقصور (أو) المقتصرة	Exclusive Or (XOR) $\oplus$
السور الجزئي	Existential Quantification
إشارة التخصيص	$\exists$
الصيغة البسيطة	Explicit Formula
خطأ	False (F)
مجموعة منتهية	Finite Set
ذاكرة قلابية	Flip-Flop
اقتران أصغر عدد صحيح	Floor Function
جامع كلي	Full-Adder
الاقتران	Function
الاقتران لقوة n	Function to Power n
الاقتران	Functions
الإقتران المتساوية	Functions Equality
المبدأ الأساسي للعد	Fundamental Principle of Counting
تعميم المبدأ الأساسي للعد	Generalization of Fundamental Principle of Counting

المصطلح العربي	English Term
قوانين دومورغان المعممة	Generalized De Morgan's Law
التقاطع المعمم	Generalized Intersections
الإتحاد المعمم	Generalized Unions
مخطط العلاقة R	Graph of R
عناصر عظمى وصغرى	Greatest and Least Elements
العنصر الأعظم	Greatest Element
أكبر حد أدنى	Greatest Lower Bounds (GLB)
شبكة	Grid
جامع نصفي	Half - Adder
مخططات هاس	Hasse Diagrams
ارتفاع الشجرة	Height of the Tree
فرضية	Hypothesis
القياس الافتراضي	Hypothetical Syllogism
خاصية التماثل	Idempotent
التماثل للمجموعات	Idempotent
التماثل	Idempotent
قواعد الجبر البولي	Identities of Boolean Algebra
الذات	Identity
الذات للمجموعات	Identity
الذات	Identity
اقتران المساواة (الذاتي)	Identity Function
المصفوفة الذاتية (الخيادية)	Identity Matrix
إذا كان p فإن q ومعكوسها	If p then q , and conversely
إذا كان p فإن q	If p , then q
التضمين	Implication
غير قابل للمقارنة	Incomparable

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
درجة داخلية للرأس	In-Degree of a Vertex
درجة داخلية للعنصر a	In-Degree of an Element a
برهان غير مباشر	Indirect Proof
مجموعة غير منتهية	Infinite Set
تدوين الوسط	Infix Notation
تقاطع علاقيتين	Intersection of Binary Relations
معكوس الاقتران المركب	Inverse Composition Function
معكوس الاقتران	Inverse Function
معكوس العلاقة	Inverse of a Relation
بوابة عاكس	Inverter Gate (NOT Gate)
غير انعكاسية	Irreflexivity
حافظ الصفة	Isomorphism
خرائط كارنوف	Karnugh Maps
الشجر الموسوم	Labeled Trees
شباك	Lattice
قانون التعويض	Law of Substitution
العنصر الأصغر	Least Element
أصغر حد أعلى	Least Upper Bound (LUB)
الأوراق	Leaves
مستوى	level
مستويات الشجرة	Levels of the Tree
ترتيباً خطياً	linear order
مرتبة خطياً	Linearly ordered
المنطق والعمليات الثنائية	Logic and Bit Operation
البوابات المنطقية	Logic Gates
التكافؤ المنطقي	Logical Equivalence $\Leftrightarrow$

المصطلح العربي	English Term
العوامل المنطقية	Logical Operators
حد أدنى	Lower Bound
الحد الأدنى	Lower Limit
المصفوفة المثلثية السفلية	Lower Triangular Matrix
القطر الرئيس	Main Diagonal
الاستقراء الرياضي	Mathematical Induction
المنطق الرياضي	Mathematical Logic
المصفوفات	Matrices
المصفوفات البولية	Matrices
جمع المصفوفات	Matrix Addition
حساب المصفوفات	Matrix Arithmetic
تساوي المصفوفات	Matrix Equality
ضرب مصفوفتين	Matrix Multiplication
عناصر النهاية العظمى والصغرى	Maximal and Minimal Element
النهاية العظمى	Maximal Element
طريقة القائمة	Menu or Roster Method
أساليب البرهان	Methods of Proof
النهاية الصغرى	Minimal Element
الأشجار المولدة ذات الأقل تكلفة	Minimal Spanning Trees
تصغير الدوائر الكهربائية	Minimization of Circuits
الناتج الحرفي	Minterm
الانفصال	Modus Ponens (or Direct Inference)
الانفصال	Modus Ponens
التحمل	Modus Tollens

المصطلح العربي	English Term
نون اختيار ر	n choose r
النفي (ليس)	Negation ~ (NOT)
غير توزيعي	Nondistributive
الصيغة الطبيعية	Normal Form
شيء	Object
ثمانية	Octave
الأعداد الفردية	Odd Numbers
التباديل الفردية	Odd Permutations
اقتران تقابل (أو تناظر)	One to one Correspondence (Bijective) Function
الاقتران واحد لواحد	One-to-one (Injective) Function
الاقتران الشامل	Onto (Surjective) Function
العمليات على المجموعات	Operations on Sets
بوابة "أو"	OR Gate
علاقات الترتيب	Order Relations
النونية المرتبة	Ordered n-Tuple
النونية المرتبة	Ordered n-Tuple
الأزواج المرتبة	Ordered Pair
رباعية مرتبة	Ordered Quadruplet
خماسية مرتبة	Ordered Quintuplet
الشجرة المرتبة	Ordered Tree
ثلاثية مرتبة	Ordered Triple
الصيغة الأخرى لقانون التعويض	Other Formula for Law of Substitution
درجة خارجية للرأس	Out-degree of a vertex
درجة خارجية للعنصر a	Out-Degree of an Element a
التجاهل	Overriding

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
p إذا فقط إذا q	p if and only if q
p شرط ضروري وكاف لتحقيق q	p is necessary and sufficient for q
p شرط كاف لتحقيق q	p is sufficient for q
p فقط إذا q	p only if q
ترتيب جزئي	Partial Order
مجموعة مرتبة جزئياً	Partially Ordered Set or POSet
التجزئة	Partition
متساوية باسكال	Pascal's Identity
مثلث باسكال	Pascal's Triangle
المسارات في الرسم البياني الموجه	Paths in Directed Graph
راء تبديل	Permutation-r
التبديل	Permutations
التبديل	Permutations
التبديل والتوافيق في حالة السحب مع الإعادة	Permutations and Combinations with repetitions
مصفوفة الأس	Power of Matrix
الأسبقية	Precedence
قواعد أسبقية التنفيذ لعوامل الجبر البولي	Precedence Rules for Boolean Operators
الجملة المفتوح	Predicate
تدوين الصدارة أو الصيغة البولندية	Prefix Notation or Polish Form
المعطية أو المعطى	Premise
الأعداد الأولية	Prime Numbers
مجموعة جزئية فعلاً	Proper Subset
خصائص	Properties

المصطلح العربي	English Term
الصفات المميزة للاقتارات	Properties of Functions
خصائص العلاقات	Properties of Relations
q تتبع منطقيا من p	q follow logically from p
q شرط ضروري لتحقيق p	q is necessary for p
q كلما p	q whenever p
المسورات	Quantifiers
مدى R	Ran(R)
المجال المقابل f	Range f
توافيق راء	r-Combination
المعاودة	Recursive
صيغة المعاودة	Recursive Formula
انعكاسية	Reflexive
العلاقة R^n	Relation R^n
مركب العلاقات	Relational Composition
تمثيل الإقتارات البولية	Representing Boolean Functions
تمثيل العلاقات	Representing Relations
تدوين الخلف أو معكوس الصيغة البولندية	Reverse Polish Form or Prefix Notation
صف	Row
مجموعة العناصر المنسوبة لـ A_1 بالعلاقة R	R-Relative A_1 $R(A_1)$
مجموعة العناصر المنسوبة لـ x بالعلاقة R	R-Relative $x : R(X)$
طريقة قانون تكوين العناصر	Rule Method or Set Builder
قواعد الاستنتاج المنطقي	Rules of Inference
البحث المعمم على الشجر	Searching General Trees
المتتالية	Sequence

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
صيغ المتتالية	Sequence Formulas
المتسلسلات	Series
المجموعة	The Set
عدد أساس المجموعة	Set Cardinality
عضوية المجموعة	Set Membership,
ينتمي إلى ، أو عنصر من	belongs to, or an element of
إشارة انتماء عنصر لمجموعة	$\in$
مجموعات ناشئة من العلاقات الثنائية	Sets Arising from Binary Relations
متمم المجموعات	Sets Complement
فرق المجموعات	Sets Difference
مجموعات متساوية	Sets Equality
تقاطع المجموعات	Sets Intersection
اتحاد المجموعات	Sets Union
سباعية	Sevenfold
سداسية	Sextuplet
التبسيط	Simplification
مجموعة أحادية	Singleton Set
مجموعة الحل	Solution Set
الشجرة المولدة	Spanning tree
نماذج خاصة من الشباك	Special Types of Lattice
المصفوفة المربعة	Square Matrix
شباك جزئي	Sub Lattice
مجموعات جزئية	Subsets
الشجرة الجزئية	Subtree
على أن، بحيث إن	Such that " "

المصطلح العربي	English Term
دليل الجمع	Summation Index
جمع النواتج الموسع	Sum-of-Products Expansion
التماثلية	Symmetric
فرق التناظر	Symmetric Difference
فرق تناظر علاقيتين	Symmetric Difference of Binary Relations
تحصيل حاصل	Tautology
متسلسلة المقرب	Telescoping Series
مصطلحات	Terms
الضرب البولي لمصفوفتين صفر - واحد	The Boolean Product of two Zero-One Matrices
R^∞ علاقة مربوطة	The Connectivity Relation R^∞
اقتران المضروب	The Factorial Function
ضم مصفوفتين صفر - واحد	The Join of two Zero-One Matrices
عامل الاتحاد البولي	The Join Operator
أنواع المصفوفات	The Matrices Types
لقاء مصفوفتان صفر - واحد	The Meet of two Zero-One Matrices
عامل التقاطع البولي	The Meet Operator
نفي العبارة المسورة	The Negation of a Quantified expression
مجموعة القوة	The Power Set
ضرب r من الحدود الأولى للمتتالية	The Product of the first r terms of f_i
R^* علاقة موصلية	The Reachability Relation R^*
العلاقات	The Relations
مجموعة الأعداد الصحيحة ص	The Set of Integers Z

المصطلح العربي	English Term
مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$	The Set of Natural Numbers N
مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$	The Set of Rational Numbers Q
مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$	The Set of Real Numbers R
مجموعات الأعداد	The Sets of Numbers
جمع r من الحدود الأولى للمتتالية	The summation of the first r terms of f_i
المصفوفة المتماثلة	The Symmetric Matrix
منقول المصفوفة	The Transpose of Matrix
المجموعة الشاملة أو الكلية	The Universal set
نظرية	Theory
ترتيباً كلياً	Total Order
مجموعة مرتبة كلياً	Totally Ordered Set
التعدي	Transitive
الشجرة	Tree
مخططات الشجرة	Tree Diagrams
البحث في الشجرة أو البحث الشجري	Tree Searching or Tree Search
خوارزميات اجتياز الشجرة	Tree Traversal Algorithms
الشجر	Trees
المصفوفة المثلثية	Triangular Matrix
صواب (صحيح)	True (T)
جدول الصدق	Truth Table
قيم الصدق	Truth Values
عملية أحادية	Unary operation
معامل أحادي	Unary Operator
خط واحد — "دون أسهم"	Undirected Edge

<u>المصطلح العربي</u>	<u>English Term</u>
اتحاد علاقتين	Union of Binary Relations
السور الكلي	Universal Quantification
إشارة التعميم للسور الكلي	$\forall$
مجموعة التعويض	Universe of Discourse
حد أعلى	Upper Bound
الحد الأعلى	Upper Limit
المصفوفة المثلثية العلوية	Upper Triangular Matrix
متساوية فاندروموندي	Vandermonde's Identity
أشكال فن	Venn Diagrams
رؤوس البيان الموجه	Vertices (مفردها Vertex)
المصفوفة الصفرية	Zeros Matrix

1. Discrete Structures, Logic, and Computationally. Hein, James L. Sudbury. Jones and Bartlett. 2002.
2. Discrete Mathematics by Example. Simpson, Andrew. London. McGraw Hill. 2002.
3. Discrete Mathematics with Combinatorics . Anderson, James A. Upper Saddle (NJ). Prentice Hall. 2001
4. Discrete Mathematics. Washburn, Sherwood. Marlow, Thomas. Ryan Charles T. Reading. Addison Wesley Longman. 2000.
5. Discrete Mathematical Structures. Kolman, Bernard. Prentice-hall. 2000
6. Discrete Mathematics. Kenneth A. Ross. Prentice-hall. 1999
7. Discrete Mathematics. Sherwood Washburn. Addison Wesley. 1999
8. The Essence of Discrete Mathematics. Neville Dean. New Delhi. Prentice-hall. 1997
9. Discrete Mathematics. Richard Johnsonbaugh. Prentice-hall. 1997
10. Discrete Mathematical Structures. Bernard Kolman. Prentice Hall of India. 1997.
11. Discrete Mathematics for Computing. Munro, John E. London. Chapman & Hall. 1993.
12. Discrete Mathematics. Biggs, Norman L. Oxford. Clarendon Press. 1993.
13. Mathematics of Models: Continuous and Discrete Dynamical Systems. H. Brian Griffiths. Ellis Horwood. 1993
14. An Introduction to Discrete Mathematics, Formal System Specification, and Z. Ince, D. C. Oxford. Clarendon Press. 1993.
15. Discrete Mathematics. Hausner, Melvin. Fortworth. A Hartcourt Prace Jovanovich College. 1992
16. Applications of Discrete Mathematics. Michaels, John G. Rosen, Kenneth. New York. McGraw-Hill Mathematical and statistical series. 1992
17. 2000 Solved Problems in Discrete Mathematics. Seymour Lipschutz. McGraw-Hill. 1992.
18. Introduction to Discrete mathematics. Hirschfelder, R. Hirschfelder, T. Pacific Grove. Brooks/Cole. 1991

19. Discrete Mathematics. B. P. Parashar. CBS. 1990
20. Discrete Mathematics for computing. A. J. Vince.
Ellis Horwood. 1990
21. Introduction to Discrete Mathematics. McFlice, Robert J.
Ash, Robert B. New York. McGraw-Hill. 1989
22. An Introduction to Discrete Mathematics. Roman,
Steven. San Diago. HBJ. 1989
23. Discrete Mathematics. Richard Johnsonbaugh.
Macmillan. 1989
24. Discrete Mathematics with Algorithms. Albertson,
Michael O. Hutchinson, Joan. New York (N.Y).
John Wiley Longman. 1988.
25. Discrete Mathematics. Bogart, Kenneth. Lexington. D.
C. Heath and company. 1988.